ARSENAL DO EXERCITO
5.10
1604
BIBLIOTHECA

TRATADO ELEMENTAR

DE

ARITHMETICA

POR

LUIZ PORFIRIO DA MOTTA PEGADO

Socio effectivo da Academia Real das Sciencias de Lisboa
e correspondente do Instituto de Coimbra,
tenente coronel do exercito, lente de geometria descriptiva na Escola Polytechnica
e professor provisorio de algebra, geometria no espaço e trigonometria
no lyceu nacional central de Lisboa

APPROVADO PELO GOVERNO PARA USO DOS INSTITUTOS SECUNDARIOS

DIRECÇÃO DA ARMA DE ARTILHARIA
N.º 2704
BIBLIOTECA

COMMANDO GERAL DE ARTILHERIA
BIBLIOTHECA
1604

QUARTA EDIÇÃO

O autor d'este livro morreu no dia 7 de Maio de 1903

LISBOA
Typographia da Academia Real das Sciencias
1886

N. 704

NOÇÕES GERAES

1. **Grandeza** *é tudo o que póde augmentar ou diminuir.*

A extensão, o tempo, o peso, os prazeres, as dores, os vicios, as paixões, etc., podendo augmentar ou diminuir, constituem diversos generos de grandezas.

Distinguem-se, porém, estes diversos generos de grandezas uns dos outros, porque em uns é possivel verificar se duas grandezas são iguaes, e em outros é completamente impossivel verificar essa igualdade.

Não é difficil descobrir, por exemplo, se duas linhas têem iguaes comprimentos, ou se dois corpos têem o mesmo peso; não acontece, porém, o mesmo a duas dores, que podem ser mais ou menos fortes, porque nenhum meio ha de verificar a sua igualdade.

2. Sabendo-se verificar se duas grandezas são iguaes, é possivel tambem verificar se duas ou mais partes d'uma são iguaes entre si, ou são iguaes a uma parte da outra.

Chama-se *parte aliquota* d'uma grandeza a qualquer das partes iguaes em que o seu todo póde imaginar-se decomposto. As porções d'uma grandeza, que não são suas partes aliquotas, chamam-se *partes aliquantas.*

3. **Quantidade** *é toda a grandeza que póde imaginar-se decomposta em partes iguaes.*

Duas quantidades são commensuraveis, *quando ambas se podem decompôr em partes da mesma grandeza.*

As quantidades, *que não podem decompôr-se em partes da mesma grandeza, são* **incommensuraveis.** Quando duas quantidades são incommensuraveis, nenhuma parte aliquota d'uma é parte aliquota da outra.

Qualquer quantidade diz-se tantas vezes maior que uma das suas partes aliquotas, e uma d'estas tantas vezes menor que o seu todo, quantas são as ditas partes.

4. **Comparar duas quantidades** *é examinar quantas vezes*

uma é maior (§ 3) *ou menor do que a outra, ou do que uma das suas partes aliquotas.*

Medir uma quantidade é comparal-a com uma quantidade conhecida do mesmo genero. Esta quantidade conhecida chama-se unidade.

Unidade *é a quantidade conhecida, que serve para com ella se medirem as quantidades desconhecidas do mesmo genero.*

A unidade é arbitraria, quando as quantidades, com que ella se compara, podem augmentar ou diminuir *continuamente*, isto é, por graus insensiveis.

Deixa de ser arbitraria a unidade, quando as quantidades, a que ella serve de termo de comparação, augmentam, ou diminuem *descontinuamente* [1].

É arbitraria a unidade de tempo, por exemplo, porque o tempo póde augmentar passando por todos os instantes intermedios; não é arbitraria a unidade empregada para medir a população de uma cidade, porque a população não póde variar, senão augmentando ou diminuindo de um, dois ou mais habitantes.

Em geral, deixa de ser arbitraria a unidade, quando a quantidade, com que ella se compara, é formada por uma collecção de objectos similhantes.

5. **Numero** *é a expressão pela qual se designa o resultado da comparação da quantidade com a unidade.*

Numero commensuravel *é o numero, que representa uma quantidade commensuravel com a unidade adoptada.*

Numero incommensuravel *é o numero, que representa uma quantidade incommensuravel com a unidade adoptada.*

Á mesma quantidade podem corresponder diversos numeros, commensuraveis ou incommensuraveis, conforme for maior ou menor a unidade escolhida.

6. O numero commensuravel póde ser *inteiro* ou *fraccionario.*

Numero inteiro *é o que designa uma quantidade composta de partes iguaes á unidade escolhida.*

Numero fraccionario *é o que designa uma quantidade composta de partes iguaes a uma parte aliquota da unidade escolhida.*

O numero fraccionario póde ser *proprio* ou *improprio.*

Numero fraccionario proprio *é o que exprime uma quantidade menor que a unidade.*

Numero fraccionario improprio *é o que exprime uma quantidade maior que a unidade.* O *numero fraccionario improprio* chama-se tambem *numero mixto*, porque póde sempre conceber-se formado por duas partes, uma expressa por um numero inteiro e outra por um numero fraccionario propriamente dito.

---

[1] Alguns auctores dividem as quantidades em *continuas* e descontinuas ou *discretas. Quantidades continuas* são as que podem variar por graus insensiveis; *quantidades discretas* ou descontinuas são as que só podem augmentar ou diminuir por graus apreciaveis.

O *numero* póde tambem ser *abstracto* ou *concreto*.

Numero abstracto *é o numero que não depende da unidade escolhida.*

Numero concreto *é o que depende da unidade escolhida.*

7. **Arithmetica** *é a sciencia, que trata da formação e propriedades elementares dos numeros e das suas combinações ou operações principaes.*

PARTE I

NUMEROS ABSTRACTOS

LIVRO I

NUMERAÇÃO—OPERAÇÕES SOBRE INTEIROS

CAPITULO I

Numeração

8. **Numeração** *é a arte que ensina a enunciar e escrever os numeros.* A *numeração* póde ser *fallada* ou *escripta*. **Numeração fallada** *é a que ensina a enunciar os numeros.* **Numeração escripta** *é a que ensina a escrever abreviadamente os numeros por meio de certos signaes proprios.*

9. Tem-se convencionado chamar **um** ao numero que designa a quantidade, que se toma para unidade; **dois** ao numero que designa a quantidade composta de uma unidade e mais outra unidade; **tres** ao numero, que representa a quantidade composta de duas partes, das quaes uma contém duas unidades e a outra uma só; **quatro** ao numero composto de tres unidades e mais uma; e assim successivamente **cinco, seis,** etc. até **dez** aos numeros que representam as quantidades, que se vão formando das anteriores e mais uma unidade.

Juntando uma unidade ao numero *dez*, e depois outra ao numero resultante, e continuando sempre a juntar unidade ao ultimo numero, que se tiver formado, tem-se a *serie dos numeros inteiros*, que evidentemente não tem limite algum no seu crescimento, porque, por maior que seja um numero inteiro, ainda se fórma outro maior accrescentando-lhe *um*.

Sendo illimitada a *serie dos numeros inteiros*, é impossivel designar cada um d'elles por um nome especial. Póde, porém, empregar-se o mesmo nome para designar numeros diversos, comtanto que elle se refira a unidades de differente grandeza.

Tem-se, com effeito, adoptado novas unidades com as denominações de **dezenas** ou unidades de segunda ordem, **centenas** ou unidades de terceira ordem, **milhares** ou unidades de quarta ordem, **dezenas de milhar** ou unidades de quinta ordem, etc. Cada uma d'estas unidades é dez vezes maior, que a de ordem immediatamente inferior, de modo que a dezena, ou unidade de segunda ordem, contém dez unidades de primeira ordem, ou unidades principaes, a centena, ou unidade de terceira ordem, con-

tém dez dezenas, e assim por diante, como se vê no quadro, que se segue:

Unidade.....	vale	*um*
Dezena da unidade (ou simplesmente dezena).	»	*dez unidades*
Centena da unidade (ou simplesmente centena)	»	*dez dezenas* ou *cem unidades*
Milhar ou mil.....	»	*dez centenas*
Dezena de milhar ou dez mil.....	»	*dez milhares*
Centena de milhar ou cem mil.....	»	*dez dezenas de milhar* ou *cem mil unidades*
Milhão ou mil milhares.....	»	*dez centenas de milhar*
Dezena de milhão ou dez mil milhares....	»	*dez milhões*
Centena de milhão ou cem mil milhares...	»	*dez dezenas de milhão* ou *cem milhões*
Billião ou mil milhões.....	»	*dez centenas de milhão*
Dezena de billião ou dez mil milhões.....	»	*dez billiões*
Centena de billião ou cem mil milhões....	»	*dez dezenas de billião* ou *cem billiões*
Trillião ou mil billiões.....	»	*dez centenas de billião*
Dezena de trillião ou dez mil billiões.....	»	*dez trilliões*
Centena de trillião ou cem mil billiões....	»	*dez dezenas de trillião* ou *cem trilliões*
Quatrillião ou mil trilliões.....	»	*dez dezenas de trillião*
Dezena de quatrillião ou dez mil trilliões.	»	*dez quatrilliões*
etc.		etc.

Vê-se agora, como podem ser expressos por o mesmo nome numeros muito differentes. A palavra *quatro*, por exemplo, designa sempre o mesmo numero de unidades, porém, como estas podem ser de diversas ordens, aquelle mesmo vocabulo póde representar *quatro unidades*, *quatro dezenas*, *quatro centenas*, etc.

Com os nomes dos nove primeiros numeros inteiros e com os vocabulos *dezena* ou *dez*, *centena* ou *cem*, *milhar* ou *mil*, *milhão*, *billião*, etc. é possivel, pois, enunciar, não a serie illimitada dos numeros inteiros, mas uma sufficiente quantidade d'elles. Basta para isso reflectir que todo o numero póde sempre suppor-se composto de diversas partes, cada uma das quaes envolva menos de dez unidades de cada ordem.

10. Na pratica, em vez de se enunciar um numero dizendo que elle tem *duas*, *tres*, *quatro*,... *nove* dezenas, é costume usar-se das palavras *vinte*, *trinta*, *quarenta*,... *noventa*, cuja significação é geralmente conhecida. Assim, por exemplo, o numero composto de *quatro* unidades de segunda ordem, ou dezenas e de *tres* unidades enuncia-se dizendo *quarenta e tres unidades* ou simplesmente *quarenta e tres*.

A palavra *cem* substitue-se por *cento*, quando é seguida de algum outro numero. Em vez, porém, de se dizer *dois*, *tres*, *cinco centos*, diz-se *duzentos*, *trezentos*, *quinhentos*.

Os numeros *dez e um*, *dez e dois*, *dez e tres*,... *dez e nove*, tambem se costumam designar por outras denominações, a saber, *onze*, *doze*, *treze*,... *dezenove*.

11. Na contagem do dinheiro portuguez emprega-se sempre a palavra *conto* para designar um *milhão de réis*, e por isso, em vez de se dizer *tantos billiões de réis* ou *tantos trilliões de réis*, costuma dizer-se *tantos mil contos* ou *tantos contos de contos*.

A antiga moeda portugueza denominada *cruzado*, que valia *quatrocentos réis*, era tambem frequentemente empregada como unidade na contagem do dinheiro. Dizia-se, por exemplo, *vinte mil cruzados* (ou oito contos de réis), *cem mil cruzados* (ou quarenta contos de réis), etc. A palavra *milhão* tambem se empregava na contagem do dinheiro, porém então a unidade, a que ella se referia, era o *cruzado*. Tanto valia portanto dizer *dez milhões* (de cruzados) como *quatro mil contos*.

12. Para se escreverem abreviadamente todos os numeros inteiros empregam-se dez letras ou caracteres especiaes chamados *algarismos*, e mais vulgarmente *letras de conta*.

As figuras e nomes dos algarismos são os seguintes:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zero ou cifra,	um,	dois,	tres,	quatro,	cinco,	seis,	sete,	oito,	nove

D'estes algarismos o primeiro não tem valor algum, e por isso chama-se *algarismo insignificativo*, todos os outros chamam-se *algarismos significativos* e têem o valor indicado (§ 9) pelo proprio nome.

13. Qualquer dos algarismos significativos, 4 por exemplo, póde representar 4 unidades de primeira ordem, 4 unidades de segunda ordem ou dezenas, 4 centenas, etc.

Para se conhecer, pois, qual é a ordem das unidades a que se refere um certo algarismo é necessario, ou escrever por extenso ao lado d'esse algarismo a ordem das unidades, que lhe correspondem, ou estabelecer alguma convenção pela qual se possa conhecer o valor particular das unidades de que se trata.

A convenção, que tem sido adoptada, consiste em collocar os algarismos, com que se escreve um certo numero, ao lado uns dos outros e em tal ordem, que o algarismo das unidades de primeira ordem esteja á direita do algarismo das dezenas, este á direita do das centenas, o das centenas á direita do algarismo dos milhares e assim successivamente.

D'este modo é facil conhecer se um algarismo representa unidades, dezenas, centenas, etc., porque, conforme elle occupar o primeiro, segundo, terceiro, etc. logar a contar da direita, assim representará unidades de primeira, segunda, terceira, etc. ordem.

O numero composto de 2 unidades de primeira ordem, 7 unidades de segunda ordem ou dezenas, 8 unidades de terceira ordem ou centenas e 1 unidade de quarta ordem ou milhar escrever-se-ha, pois, assim, 1872.

Se se trocasse a ordem aos algarismos escrevendo, por exemplo, 2781, ter-se-ia um numero composto de 1 unidade, 8 dezenas, 7 centenas e 2 milhares.

Póde, porém, acontecer, que se queira escrever um numero, em que faltem unidades de ordem inferior á ordem das maiores unidades, que n'elle se contém, como é, por exemplo, o numero *dez*, que só contém 1 unidade de segunda ordem. É evidente que n'este caso é indispensavel indicar por algum signal o logar onde deveria estar o algarismo que falta. O signal, que para este effeito se emprega, é 0 (zero), que, como já se sabe, costuma ser considerado tambem como algarismo. Vê-se portanto que 1 significa 1 unidade de primeira ordem, 10 significa 1 unidade de segunda ordem ou *dez* unidades de primeira. 100 representa uma unidade de terceira ordem ou *cem* de primeira, etc.

Um numero composto de 3 unidades e 4 centenas escrever-se-ha assim, 403, isto é, collocando um 0 entre os dois algarismos significativos, a fim de que, estando o 4 no terceiro logar, a contar da direita, se possa conhecer que o primeiro algarismo da esquerda representa unidades de terceira ordem ou centenas.

14. Dos principios expostos conclue-se que qualquer algarismo tem dois valores, um *absoluto* e outro *relativo*. O *absoluto* não varia, seja qual for a posição que o algarismo tenha no numero, o *relativo* depende d'essa posição. No numero 33, por exemplo, ambos os algarismos têem o mesmo valor *absoluto* 3, porém o valor *relativo* de um é 3 unidades de primeira ordem e o do outro é 3 unidades de segunda ordem ou dezenas, isto é, 30 unidades de primeira ordem.

N'esta mudança de valor, por que passa um algarismo, quando se desloca relativamente aos outros algarismos do mesmo numero, reside o principio fundamental da *numeração escripta*. Enuncia-se este principio dizendo: *todo algarismo escripto á esquerda de outro representa unidades dez vezes maiores do que se estivesse no logar d'esse outro.*

15. Ha duas regras para ler numeros inteiros, uma para os que se escrevem com tres ou menos algarismos, e outra para os que têem mais de tres algarismos.

A primeira consiste em dizer os nomes dos algarismos da esquerda para a direita, acrescentando a cada um d'elles o nome da unidade correspondente ao logar que occupa.

Segundo esta regra, o numero 426 deve ler-se *quatro centenas*, 2 *dezenas* e 6 *unidades*, ou, attendendo ás excepções (§ 10) auctorisadas pelo uso, *quatrocentas*, *vinte* e 6 unidades. O numero 89 que, pela regra geral, deve ler-se 8 *dezenas* e 9 *unidades*, lê-se na pratica dizendo *oitenta* e 9 *unidades*.

Os numeros, que têem mais de tres algarismos, lêem-se *dividindo-os em classes de tres algarismos, da direita para a esquerda, lendo a primeira classe da esquerda, que póde ter menos de tres algarismos, como se fosse um numero isolado, acrescentando-lhe comtudo o nome da unidade a que se refere o seu primeiro algarismo da direita, depois lê-se do mesmo modo a classe que se segue, tam-*

bem com o nome da unidade correspondente ao ultimo algarismo e assim se continua até se ter lido a ultima classe da direita.

O numero 423'604'705 consta de tres classes e lê-se 423 *milhões*, 604 *mil*, 705 *unidades*. O numero 32'603'048'005'322 lê-se 32 *trilliões*, 603 *billiões*, 48 *milhões*, 5 *mil*, 322 *unidades;* o numero 8'007'000'627'438'005 lê-se 8 *quatrilliões*, 7 *trilliões*, 627 *milhões*, 438 *mil* e 5 *unidades*.

16. Sabendo-se ler qualquer numero inteiro, não póde haver difficuldade em escrever um numero, cujo enunciado se ouve.

Reduz-se tudo a ir escrevendo successivamente da esquerda para a direita os numeros correspondentes ás classes que se vão dizendo, tendo comtudo o cuidado de escrever os zeros que forem necessarios para que nenhuma classe, excepto a primeira da esquerda, tenha menos de tres algarismos, e para que não fiquem juntas classes, que devam estar separadas por outras.

O numero *quatro milhões, tres mil e cinco unidades*, por exemplo, contém só tres classes, cada uma das quaes apenas se escreve com um algarismo, e por isso é necessario completar as duas ultimas, escrevendo dois zeros á esquerda de cada uma d'ellas, isto é, 4 003 005.

O numero *seis billiões, quarenta e duas mil e tres unidades*, contém no seu enunciado apenas tres classes; porém, devendo estar entre a classe dos *billiões* e a dos *milhares* a dos *milhões*, segue-se que o numero deve ser escripto com quatro classes, uma das quaes, a dos *milhões*, ha de constar só de zeros, como em seguida se vê, 6 000 042 003.

17. Na escripturação commercial costuma empregar-se um signal ($) chamado *cifrão*, para separar a classe dos milhares da classe das unidades, quando o numero se refere a réis, e outro signal (:) para separar a classe dos milhares da dos contos. Muitas vezes deixa-se mesmo de escrever a ultima classe da direita, quando os algarismos d'ella são todos zeros e á direita da casa dos milhares está o *cifrão*.

Em vez de se escrever 4 235 620 000 réis, escrever-se-ha, pois, 4235:620$000 ou, mais simplesmente ainda, 4235:620$.

Os dois pontos de orthographia, que, como fica dito, servem para separar a segunda da terceira classe da direita, não devem comtudo empregar-se com este fim no calculo numerico, quando for necessario indicar operações, porque, como mais tarde se dirá, a arithmetica serve-se d'elles em outros casos com uma significação inteiramente diversa.

18. A numeração dos numeros fraccionarios funda-se na dos numeros inteiros. Reflectindo na definição (§ 6) de numero fraccionario, reconhece-se facilmente, que este póde ser representado por dois numeros inteiros, dos quaes um indique, quantas são as partes da unidade, de que consta a quantidade e o outro, qual é a

grandeza de cada uma d'essas partes da unidade, isto é, quantas d'ellas fazem uma unidade.

O primeiro d'aquelles numeros chama-se *numerador* e o segundo *denominador*. O *numerador* escreve-se geralmente pela parte superior de um pequeno traço, ou *linha divisoria*, e o *denominador* escreve-se por baixo da mesma linha. A expressão $\frac{7}{4}$, por exemplo, representa um numero fraccionario composto de 7 partes iguaes entre si e de grandeza tal, que são necessarias 4 para fazerem uma unidade.

Os numeros fraccionarios escriptos por este modo chamam-se *quebrados*. O *quebrado é proprio* (§ 6), quando o numerador é menor que o denominador e é improprio no caso contrario. Os quebrados costumam ler-se, ou dizendo primeiro o *numerador* e depois o *denominador* seguido da terminação *ávos*, ou dizendo o numerador seguido da preposição *sobre* e depois o *denominador*. O quebrado $\frac{17}{26}$, por exemplo, lê-se dizendo *dezesete, vinte e seis ávos*, ou *dezesete sobre vinte e seis*.

19. Exceptuam-se d'esta regra: 1.º, os quebrados cujo denominador é algum *numero digito*, isto é, um dos nove primeiros numeros inteiros; 2.º, os quebrados, cujo denominador é 10, 100, 1000, ou, em geral, um numero inteiro escripto com o algarismo 1 seguido de qualquer numero de zeros.

O quebrado, que tem por denominador um numero digito, lê-se dizendo o numerador e depois uma das palavras *meios, terços, quartos,... nonos*, conforme o denominador é 2, 3, 4,... 9.

Os quebrados $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \frac{8}{9}$, etc. lêem-se assim, *um meio, dois terços, tres quartos,... oito nonos*, etc.

Quando o denominador é 10, 100, 1000, etc. o quebrado lê-se dizendo o numerador e depois a palavra *decimas, centesimas, millesimas*, etc. Os quebrados $\frac{17}{10}, \frac{19}{100}, \frac{27}{1000}$, etc. lêem-se geralmente dizendo 17 *decimas*, 19 *centesimas*, 27 *millesimas*, etc.

Chamam-se *partes decimaes* da unidade ás que se obtêem decompondo esta em 10, 100, 1000, 10000, etc. partes iguaes.

20. **Numero decimal** é o que exprime, quantas *partes decimaes* da unidade se contêem n'uma certa quantidade.

Para se formarem os numeros decimaes imaginam-se, como para os numeros inteiros (§ 9), unidades de diversas ordens chamadas *decimas, centesimas, millesimas, decimas millesimas*, etc., cada uma das quaes contém 10 unidades da ordem immediatamente inferior. Distinguem-se estas novas unidades, das que se admittiram para a numeração dos inteiros, chamando a umas *unidades decimaes* e a outras *unidades inteiras*.

Os nomes e valores das differentes ordens de unidades decimaes são os seguintes:

Unidade	vale	10 *decimas*
Decima da unidade (ou simplesmente decima)	»	10 *centesimas*
Centesima da unidade (ou simplesmente centesima)	»	10 *millesimas*
Millesima	»	10 *decimas millesimas*
Decima millesima	»	10 *centesimas millesimas*
Centesima millesima	»	10 *millionesimas*
Millionesima	»	10 *decimas millionesimas*
Decima millionesima	»	10 *centesimas millionesimas*
Centesima millionesima	»	10 *billionesimas*
Billionesima	»	10 *decimas billionesimas*
Decima billionesima	»	10 *centesimas billionesimas*
Centesima billionesima	»	10 *trillionesimas*
Trillionesima	»	10 *decimas trillionesimas*
Decima trillionesima	»	10 *centesimas trillionesimas*
etc.		etc.

Empregando estas differentes unidades bastam os dez algarismos para se escrever qualquer numero decimal, comtanto que haja algum meio, por onde se conheça a especie de unidades, a que se refere cada um dos algarismos.

Os meios, que se têem admittido por convenção, consistem: 1.º, em collocar uma virgula á direita do algarismo que representa unidades de primeira ordem; 2.º, em escrever o algarismo que se refere ás *decimas* á direita do que se refere ás *unidades*, o das *centesimas* á direita do das *decimas*, e assim successivamente, de modo que qualquer algarismo represente unidades 10 vezes maiores que as unidades a que se refere o algarismo que lhe fica á direita; 3.º, em collocar zeros nos logares correspondentes a unidades, que não existem no numero, que se quer escrever, quando porventura este contenha unidades de ordem inferior.

D'estas convenções resulta, que os *numeros decimaes* equivalem a numeros fraccionarios escriptos como os inteiros, isto é, sem denominadores.

O numero 845,6723 consta, pois, de 845 unidades e de 6 *decimas*, 7 *centesimas*, 2 *millesimas* e 3 *decimas millesimas*. O numero 0,5067 é formado por 5 *decimas*, 6 *millesimas* e 7 *decimas millesimas*.

21. O numero decimal, que não tem unidades inteiras, lê-se como se fosse um numero inteiro com a differença de se dizer no fim o nome da unidade a que se refere o ultimo algarismo da direita. O numero 0,3'236'458 lê-se, portanto, assim, 3 *milhões*, 236 *mil*, 458 *decimas millionesimas*.

Para se conhecer mais promptamente, qual é o nome da unidade correspondente ao ultimo algarismo da direita, divide-se toda a parte decimal em classes de tres algarismos da esquerda para a direita. É evidente que a primeira classe da esquerda tem por ultimo algarismo o das millesimas, a segunda classe acaba em millionesimas, a terceira em billionesimas, e assim successivamente até á ultima classe da direita, cujo nome é facil de conhecer, ou ella tenha tres ou menos algarismos. No exemplo acima apresentado ha tres classes, a ultima das quaes apenas tem o primeiro algarismo da esquerda, e por isso facilmente se reconhece que o ultimo algarismo representa decimas das unidades a que se refere a segunda classe, isto é, decimas millionesimas.

22. O numero decimal maior que unidade póde tambem ler-se exactamente, como se lêem os que não possuem unidades inteiras. Ha comtudo para ler aquelles numeros outra regra, que consiste em ler primeiro a parte inteira seguida do vocabulo *unidades*, e depois a parte decimal acompanhada do nome da unidade do ultimo algarismo da direita.

O numero 45'67,6'890'347'281 póde ler-se de dois modos: ou dizendo 45 *trilliões*, 676 *billiões*, 890 *milhões*, 347 *mil*, 281 *decimas billionesimas;* ou 4 *mil*, 567 *unidades*, 6 *billiões*, 890 *milhões*, 347 *mil*, 281 *decimas billionesimas*.

Em geral, quando os numeros decimaes tem muitos algarismos, prefere-se o segundo modo de os ler ao primeiro.

EXERCICIOS

I. Escrever com algarismos os numeros seguintes: *doze milhões, dezoito mil, vinte e quatro unidades; quarenta e oito quintilliões; doze quatrilliões, sessenta billiões, duzentos e cincoenta milhões, oitocentas mil e sete unidades; trezentos sextilliões, oito mil e quatro unidades.*

II. Ler os seguintes numeros: 88903675; 7000250; 43000018720020; 201084700380000024005.

III. Qual é o menor e o maior dos numeros inteiros que se escrevem com seis algarismos?

IV. Qual é o numero inteiro immediatamente superior a 30872099 e o immediatamente inferior a 25000370000?

V. Escrever com algarismos os quebrados: *sete oitavos; cinco, doze ávos; dezeseis sobre vinte e sete; seiscentos vinte e tres, novecentos oitenta e quatro ávos; duzentos e quarenta e oito sobre mil e quarenta e tres.*

VI. Ler os numeros: $\frac{2}{5}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{48}{35}$; $\frac{324}{1000}$; $\frac{4065327}{270064}$.

VII. Escrever com algarismos os numeros: *tres millionesimas; vinte e sete trillionesimas; setenta milhões, trinta mil, cincoenta e oito decimas billionesimas; sessenta mil e sete decimas millesimas; sete unidades e oitenta e duas centesimas millionesimas; vinte e tres milhões, sessenta e sete millionesimas; seiscentas vinte e cinco mil, trezentas vinte e oito unidades e oito billiões, duzentas mil e setenta trillionesimas.*

VIII. Ler os seguintes numeros: 0,0005; 0,00470625; 0,98065283746; 943,62706; 86473,403; 4000006,003020603; 11000000,5000000006.

CAPITULO II

Addição e subtracção de inteiros

23. **Addição** *é uma operação que tem por fim reunir muitos numeros em um só*, isto é, achar um só numero, que contenha tantas unidades e partes da unidade, quantas são as unidades e partes da unidade contidas em diversos numeros dados.

Os numeros dados chamam-se *parcellas* ou *addições* e o numero, que se procura, denomina-se *somma* ou *total*.

A addição indica-se escrevendo as parcellas em seguida umas das outras e interpondo a duas parcellas consecutivas o signal + que significa *mais*. A expressão $5 + 6 + 4$ lê-se *cinco, mais seis, mais quatro*.

Quando todas as parcellas de uma addição são numeros inteiros (§ 6), o total ou somma não póde conter senão unidades e é por consequencia um numero inteiro tambem.

24. As leis da numeração ensinam a achar a somma de dois numeros inteiros referidos á mesma unidade, quando algum d'elles é igual a *um*. As mesmas leis permittem tambem determinar, sem grande difficuldade, a somma de dois inteiros referidos á mesma unidade, embora nenhum d'elles seja *um*. Basta, para alcançar esse resultado, juntar 1 a uma das parcellas, depois juntar 1 á somma obtida, e ir assim proseguindo até se haverem juntado a uma das parcellas tantas unidades, quantas são as que se contêem na outra parcella.

A somma $6 + 3$ achar-se-ha portanto juntando a 6 cada uma das 3 unidades, que se contêem na segunda parcella. Juntando a 6 uma unidade obtem-se (§ 9) 7, juntando a 7 outra unidade acha-se 8, e finalmente, juntando a 8 a terceira e ultima unidade, chega-se ao resultado 9, que se procura.

Chegar-se-ía ao mesmo resultado se á parcella 3 se juntasse cada uma das unidades contidas na parcella 6.

Com effeito, imaginando uma serie de seis unidades e depois outra serie de tres unidades, como abaixo se vê

$$1+1+1+1+1+1 \qquad 1+1+1$$

é claro que o numero que contiver todas as unidades da primeira serie e todas as da segunda é a somma $6 + 3$; porém, como o numero total das unidades das duas series é o mesmo, seja qual for a ordem por que ellas se vão juntando, segue-se que esse numero total será tambem igual á somma das unidades, que existem nas series

$$1+1+1 \qquad 1+1+1+1+1+1$$

Empregando o signal = para indicar a igualdade dos numeros aos quaes se interpõe, poderá exprimir-se o resultado, a que pre-

cedentemente se chegou, do seguinte modo

$$6+3=3+6$$

A expressão precedente chama-se uma *igualdade*, e lê-se dizendo *seis mais tres igual a tres mais seis.*

Em geral dá-se o nome de igualdade *a toda a expressão composta de duas partes separadas entre si pelo signal* =. A expressão escripta á esquerda do signal de igualdade (=) chama-se *primeiro membro* da igualdade; a expressão escripta á direita do mesmo signal chama-se *segundo membro.*

Do mesmo modo se prova que a somma de mais de duas parcellas não depende da ordem por que ellas se vão juntando umas ás outras. Assim tem-se, por exemplo

$$6+3+2=3+6+2=3+2+6=6+2+3$$

Enuncia-se esta propriedade da addição, dizendo que ella é uma *operação commutativa.*

De ser commutativa a addição, resulta que a *somma de tres ou mais parcellas não muda de valor*, quando algumas d'ellas se substituem pela sua somma parcial. Assim a somma $6+3+2$ será igual á somma $6+5$ porque, sendo commutativa a addição é

$$6+3+2=3+2+6=5+6=6+5$$

Enuncia-se esta propriedade da addição, dizendo que ella é uma *operação associativa.*

25. O processo exposto para achar a somma de diversos numeros inteiros é, em geral, excessivamente moroso. Na simplificação d'elle é que consiste propriamente a operação chamada addição.

Quando a addição consta só de duas parcellas e ambas são numeros digitos (§ 19), o processo não tem simplificação. Para este caso extremamente simples é costume decorar todas as sommas de dois numeros digitos, ou recorrer á taboada de sommar.

Em todos os outros casos é facil simplificar o processo da addição recorrendo ás propriedades que ella tem de ser commutativa e associativa.

A *táboa* ou *taboada* de sommar construe-se muito facilmente escrevendo em uma linha horisontal os numeros inteiros 0, 1, 2, 3,... 9, por baixo dos numeros d'esta linha os numeros, que se obtêem juntando 1 a cada um dos numeros da primeira linha, por baixo d'esta linha outra, cujos numeros se formem dos da segunda linha como os d'esta se formaram dos da primeira linha, e assim successivamente até haverem dez linhas horisontaes.

Taboada de sommar

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Para achar por meio da taboada precedente a somma dos numeros, 6 e 3 por exemplo, procura-se um d'elles na primeira linha horisontal e o outro na primeira linha vertical, percorre-se a linha vertical do primeiro numero, e a horisontal do segundo, e o numero que apparecer no cruzamento das duas linhas será a somma dos numeros com que se entrou na taboada.

26. A somma de dois numeros inteiros, dos quaes um só é digito, acha-se juntando o numero digito ao numero de unidades da outra parcella e acrescentando ás dezenas d'esta as dezenas que porventura resultarem d'aquella somma.

Se os dois numeros forem 24 e 5, ter-se-ha, advertindo que a addição é uma operação associativa,

$$24+5=20+4+5=20+9=29$$

Se os numeros forem 24 e 8, será analogamente

$$24+8=20+4+8=20+12$$

e como $20+12=2$ dezenas $+1$ dezena $+2$ unidades $=3$ dezenas $+2$ unidades, ter-se-ha finalmente

$$24+8=32$$

27. A somma de mais de dois numeros digitos obtem-se sommando dois d'elles, juntando a esta somma uma das outras parcellas, e continuando assim até não haver mais parcellas.

Para effectuar a somma indicada $8+3+5+7$, effectuar-se-ha primeiro a somma parcial $8+3$, por exemplo, e ter-se-ha

$$8+3+5+7=11+5+7$$

depois sommar-se-ha 11 com 5 e virá

$$8+3+5+7=16+7$$

e finalmente $$8+3+5+7=23$$

O resultado é (§ 24) independente da ordem das parcellas.

28. A somma de quaesquer numeros inteiros póde achar-se imaginando-os decompostos nas unidades de diversas ordens e juntando: 1.º, as unidades de primeira ordem; 2.º, as unidades de segunda ordem ou dezenas; 3.º, as centenas e assim successivamente até ás unidades de ordem mais elevada.

Sendo $435+267+810$ a somma que se quer effectuar, escrever-se-hão as parcellas como abaixo se vê

435 = 4 centenas	+ 3 dezenas	+ 5 unidades	
267 = 2 »	+ 6 »	+ 7 »	
810 = 8 »	+ 1 »	+ 0 »	

e sommando depois os numeros 5, 7 e 0, que representam unidades, os numeros 3, 6 e 1, que se referem a dezenas, e os numeros 4, 2 e 8, relativos a centenas, obter-se-ha a somma procurada, visto que a addição é commutativa.

A primeira somma $5+7+0$ é (§ 25) 12, e, como este numero equivale a 1 dezena e 2 unidades, segue-se que juntando a dezena aos numeros da segunda columna, ter-se-ha $3+6+1+1$ dezenas, ou (§ 27) 11 dezenas, isto é, 1 centena e 1 dezena. Acrescentando a centena ás centenas da terceira columna acha-se $4+2+8+1$ centenas, que é igual a 15 centenas ou 1 milhar e 5 centenas. A somma total comprehende portanto 1 milhar, 5 centenas, 1 dezena e 2 unidades, e é por consequencia igual a 1512.

29. *Na pratica escrevem-se as parcellas umas por baixo das outras, de modo que fiquem na mesma columna vertical os algarismos, que se referem a unidades da mesma ordem, e passa-se pela parte inferior de todas ellas uma linha horisontal. Sommam-se as unidades e escrevem-se as unidades d'esta somma por baixo da linha horisontal e na columna das unidades, juntam-se as dezenas, que provierem d'aquella somma, á columna das dezenas e escrevem-se n'esta columna, e por baixo da horisontal, as unidades da somma da segunda columna, juntam-se as dezenas d'esta nova somma á columna das centenas e vae-se procedendo assim até se haver concluido a somma dos numeros da ultima columna da esquerda.*

Para sommar os numeros 3025, 6484 e 2375 faz-se o seguinte:

$$\begin{array}{r} 3025 \\ 6484 \\ 2375 \\ \hline 11884 \end{array}$$

Durante a operação dir-se-ha 5 e 4 são 9, 9 e 5 são 14 (escre-

ve-se 4) vae 1; 1 e 2 são 3 e 8 são 11 e 7 são 18 (escreve-se 8) vae 1; 1 e 4 são 5 e 3 são 8; 3 e 6 são 9 e 2 são 11.

30. Quando a somma dos numeros de cada columna é inferior a 10 é indifferente começar a addição pela direita, pela esquerda ou por qualquer outra columna; não acontece, porém, o mesmo, quando uma ou mais d'aquellas sommas excede 10, por causa das unidades, que então têem de passar de uma columna para a que lhe fica á esquerda. Na pratica convem por isso começar a operação sempre pela direita.

31. Quando as parcellas são muitas, ou muito grandes, póde haver inconveniente em juntar mentalmente as unidades, que vão de uma columna, ás da columna immediata, porque, se houver suspeita de que a operação ficou errada, será necessario recomeçal-a para descobrir se tal erro existe e onde. Este inconveniente existe sempre, porém, é evidentemente muito mais sensivel em qualquer d'aquelles dois casos.

Obvia-se a elle escrevendo as unidades, que devem passar de columna, em uma segunda linha horisontal e na columna para que passam, è effectuando no fim uma segunda somma, como em seguida se vê.

```
 678943
 506372
 458294
 930645
 ------
 452044
212221
 ------
2374254
```

Seguindo este processo póde começar-se a addição por qualquer dos lados, e não é preciso portanto voltar ao principio para continuar a operação, quando se receia que haja erro.

Se são muitas as parcellas, por exemplo 40, 60, 80, etc., é conveniente distribuil-as por grupos de vinte ou mais parcellas, pouco mais ou menos, sommar as parcellas de cada grupo e, depois de se haver verificado que estas sommas parciaes estão certas, sommar todas as sommas obtidas. Este meio é muitas vezes empregado na pratica.

32. **Subtracção ou diminuição** *é uma operação que tem por fim achar uma das parcellas de uma addição, quando se dão todas as outras parcellas e a somma.* A subtracção é evidentemente uma operação inversa da addição.

Sendo 28 a somma de quatro parcellas e 5, 7 e 13 tres d'essas parcellas, é necessario effectuar uma subtracção ou diminuição para se obter o valor da parcella desconhecida.

A parcella desconhecida chama-se *resto*, *excesso*, ou *differença*[1],

[1] Na linguagem commercial emprega-se geralmente a palavra *saldo* para designar o resto, excesso ou differença.

cada uma das parcellas conhecidas tem o nome de *subtractivo* ou *diminuidor*, e a somma denomina-se *additivo* ou *diminuendo*.

A subtracção indica-se escrevendo o *additivo* ou *diminuendo* e depois os *subtractivos* ou *diminuidores* precedidos do signal —, que significa *menos*.

A expressão $18-3-5-4$ lê-se *dezoito, menos tres, menos cinco, menos quatro*, e indica uma subtracção na qual 18 é o additivo ou diminuendo e 3, 5 e 4 são os subtractivos ou diminuidores.

Designando por uma letra do alphabeto, R por exemplo, a parcella desconhecida, isto é o resto, será

$$18-3-5-4=R \quad \text{ou} \quad 18=3+5+4+R$$

Na subtracção ou diminuição ordinaria, ou simples ha só um subtractivo ou diminuidor. Quando ha mais de um subtractivo, a subtracção chama-se successiva, porque o resto final depende de mais de uma subtracção ordinaria.

33. O resto de uma subtracção successiva póde obter-se effectuando primeiro uma subtracção ordinaria com o additivo, ou diminuendo e qualquer dos subtractivos, depois outra subtracção ordinaria com o resto da primeira subtracção, tomado como additivo, e outro subtractivo, depois uma terceira subtracção com o resto da ultima e um novo subtractivo, e assim successivamente até não haver mais subtractivos.

Effectuar a subtracção $18-3-5-4$ é achar um numero desconhecido R, que satisfaça á condição de tornar a somma $3+5+4+R$ igual a 18. Como, porém, suppondo conhecida a parcella R, aquella somma póde obter-se (§ 31) distribuindo as parcellas em grupos e sommando as sommas d'esses grupos, segue-se que reunindo em um grupo todas as parcellas menos uma, 4 por exemplo, ter-se-ha

$$18=4+(3+5+R)$$

usando de parenthesis, como é costume, para designar o resultado das operações indicadas dentro d'elle.

Da igualdade precedente deduz-se (§ 32)

$$18-4=3+5+R$$

e d'esta, considerando $3+R$ como uma só parcella, deduz-se tambem

$$18-4-5=3+R$$

e finalmente

$$18-4-5-3=R$$

Reflectindo n'este raciocinio reconhece-se, que o valor de R depende de tres subtracções ordinarias, das quaes a primeira tem por additivo 18 e por subtractivo 4, a segunda tem por additivo o resto d'esta subtracção e por subtractivo 5 e a ultima tem por additivo o resultado d'esta ultima operação e por subtractivo 3.

O mesmo raciocinio nos conduziria evidentemente aos seguintes resultados

$$18-3-4-5=R \qquad 18-3-5-4=R$$

e, como *duas quantidades iguaes a uma terceira (R)* são *iguaes entre si*, segue-se que

$$18-3-4-5=18-3-5-4=18-4-5-3$$

isto é, *o resto de uma subtracção successiva não depende da ordem por que se effectuam as subtracções ordinarias.*

34. O resto de uma subtracção successiva póde achar-se effectuando uma só subtracção ordinaria, na qual o subtractivo seja a somma de todos os subtractivos da subtracção successiva, isto é,

$$18-3-5-4=18-(3+5+4)$$

Com effeito, o resto R da subtracção successiva $18-3-5-4$ é a parcella R que faz

$$18=3+5+4+R$$

e distribuindo estas parcellas por dois grupos, dos quaes um contenha unicamente R, tem-se

$$18=(3+5+4)+R \qquad \text{ou} \qquad 18-(3+5+4)=R$$

e portanto $$18-(3+5+4)=18-3-5-4$$

Esta igualdade mostra, que *o parenthesis precedido do signal — póde supprimir-se, quando dentro d'elle está uma somma indicada, comtanto que cada um dos signaes +, que estiver dentro do parenthesis, se mude em —.*

35. Subtrahir um numero de uma somma indicada equivale a subtrahir esse numero de qualquer das parcellas, ou da somma de duas ou mais d'ellas, isto é,

$$8+4+5+6-3=8+(4+5-3)+6$$

Com effeito, se a expressão $8+(4+5-3)+6$ representa realmente o excesso da somma $8+4+5+6$ sobre 3, deve (§ 32) ser verdadeira a igualdade

$$8+4+5+6=8+(4+5-3)+6+3$$

Ora é facil verificar que esta igualdade é verdadeira, porque, podendo decompor-se a somma $8+(4+5-3)+6+3$ em grupos, de sorte que um d'elles contenha as parcellas $4+5-3$ e 3, será

$$8+(4+5-3)+6+3=8+(4+5-3+3)+6$$

e portanto $$8+(4+5-3)+6+3=8+(4+5)+6$$

ou $$8+(4+5-3)+6+3=8+4+5+6$$

Do mesmo modo se prova, que é

$$8+4+5+6-3=8+(4-3)+5+6$$

36. *O resto de uma subtracção não muda de valor, quando se junta, ou subtrahe o mesmo numero tanto ao additivo, ou diminuendo, como a um dos subtractivos, ou diminuidores*, isto é, da igualdade

$$18-3-5-4=R$$

deduz-se

$$(18+2)-3-(5+2)-4=R \quad \text{ou} \quad (18-2)-3-(5-2)-4=R$$

Com effeito da primeira igualdade deriva (§ 32)

$$18=3+5+4+R$$

e, como *juntando a mesma quantidade*, 2, *a quantidades iguaes*, 18 e $3+5+4+R$, *se obtêem sommas iguaes*, segue-se que

$$18+2=3+5+4+R+2$$

ou, reunindo em um grupo as parcellas 5 e 2 (§ 31),

$$18+2=3+(5+2)+4+R$$

e finalmente (§ 32)

$$(18+2)-3-(5+2)-4=R=18-3-5-4$$

Subtrahindo a mesma quantidade, 2, *a quantidades iguaes*, 18 e $3+5+4+R$, *obtêem-se restos iguaes*, e portanto será

$$18-2=3+5+4+R-2$$

ou (§ 35) $$18-2=3+(5-2)+4+R$$

e finalmente (§ 32)

$$(18-2)-3-(5-2)-4=R=18-3-5-4$$

Esta igualdade deduz-se tambem mui facilmente da primeira parte d'esta proposição e vice-versa.

37. Conhecendo-se os principios da numeração é possivel achar o resto de uma subtracção ordinaria, porque, sendo, por exemplo (§ 34)

$$12-4=12-(1+1+1+1)=12-1-1-1-1$$

é evidente, que pelas leis da numeração se sabe que $12-1$ é igual a 11, $11-1$ igual a 10, e assim successivamente, e portanto que

$$12-4=8$$

Este processo torna-se tanto mais laborioso, quanto maior é o subtractivo, e por isso convém simplifical-o para o tornar verdadei-

ramente praticavel. Na simplificação d'elle consiste propriamente a operação denominada *subtracção*, ou diminuição.

38. Quando ambos os termos da subtracção são numeros digitos, póde achar-se o resto recorrendo á taboada de sommar (§ 25).

Como, porém, todas as subtracções dependem d'aquella especie de subtracções, que são em numero limitado, é claro que o mais conveniente será conservar na memoria os restos de todas as subtracções, em que são digitos tanto o additivo, como o subtractivo.

Querendo, comtudo, recorrer á taboada de sommar para achar, por exemplo, o valor de 9 — 3, procurar-se-ha o subtractivo 3 na primeira columna vertical da esquerda (ou na linha horisontal superior) e percorrer-se-ha depois a linha horisontal correspondente áquelle 3 (ou a columna vertical d'este) até se encontrar o additivo 9. O resto da subtracção será o numero escripto no extremo superior da columna vertical (ou o ultimo da esquerda da linha horisontal) que passa por 9.

39. O resto da subtracção de dois numeros, que não são digitos, no caso em que cada algarismo do additivo não tem valor menor, que o que representa unidades da mesma ordem no subtractivo, é um numero, que tem por algarismo das unidades o excesso das unidades do additivo sobre as unidades do subtractivo, por algarismo das dezenas o excesso das dezenas do additivo sobre as do subtractivo, e assim successivamente.

Para demonstrar isto tome-se a subtracção indicada 3578 — 1436, que póde escrever-se assim

3 milhares + 5 centenas + 7 dezenas + 8 unidades — (1 milhar + + 4 centenas + 3 dezenas + 6 unidades)

ou (§ 34)

3 milhares + 5 centenas + 7 dezenas + 8 unidades — 1 milhar — — 4 centenas — 3 dezenas — 6 unidades

e, como o resto não muda de valor (§ 35) se em cada subtracção ordinaria se tirar o subtractivo de qualquer parcella do additivo, segue-se que será

3578 — 1436 = (3 — 1) milhares + (5 — 4) centenas + (7 — 3) dezenas + + (8 — 6) unidades

ou (§ 37 ou 38) 3578 — 1436 = 2142

40. Quando algum algarismo do additivo tem valor menor, que o seu correspondente no subtractivo, não se póde applicar exactamente o processo descripto (§ 39), porque deixa de ser possivel a subtracção, cujos termos são aquelles algarismos. Vence-se esta difficuldade juntando 10 ao algarismo do additivo e 1 ao algarismo do subtractivo, que fica á esquerda do correspondente algarismo do subtractivo.

Querendo, por exemplo, achar o valor de 6957 — 382 ter-se-ha

6957 — 382 = 6 milhares + (9 — 3) centenas + (5 — 8) dezenas + + (7 — 2) unidades

e, como (§ 36) este resto não varia por se juntarem 10 dezenas ao additivo (5 dezenas) e 10 dezenas ou 1 centena ao subtractivo (3 centenas), ter-se-ha

6957 — 382 = 6 milhares + (9 — 4) centenas + (15 — 8) dezenas + + (7 — 2) unidades

ou 6957 — 382 = 6575

Similhantemente se acha

6258 — 479 = 6 milhares + (2 — 4) centenas + (5 — 7) dezenas + + (8 — 9) unidades
6258 — 479 = (6 — 1) milhares + (12 — 5) centenas + (15 — 8) dezenas + (18 — 9) unidades
6258 — 479 = 5779

N'este exemplo foi necessario juntar 10 unidades + 10 dezenas + 10 centenas ao additivo, e 1 dezena + 1 centena + 1 milhar ao subtractivo.

41. Na pratica escreve-se o subtractivo por baixo do additivo, de modo que as unidades da mesma ordem fiquem em columna vertical, e subtrahe-se depois o algarismo das unidades do subtractivo do algarismo das unidades do additivo e, não sendo possivel esta subtracção, subtrahe-se o mesmo algarismo da somma de 10 com o algarismo das unidades do additivo, e junta-se 1 ao algarismo das dezenas do subtractivo; procede-se depois com os algarismos das dezenas, como se procedeu com os das unidades, e assim se vae continuando até ao fim da subtracção.

Sendo 24865 o additivo e 19786 o subtractivo, dispõe-se a operação assim

```
 24865
 19786
 -----
  5079
```

e diz-se: 6 para 15 vão 9 e fica 1, 1 e 8 são 9 para 16 7 e vae 1 e 7 8 para 8 nada, 9 para 14 5 e vae 1 e 1 2 para 2 nada.

42. **Complemento arithmetico** *de um numero é a differença entre esse numero e a unidade da ordem immediatamente superior á do primeiro algarismo da esquerda do numero.*

O complemento arithmetico de 735 é, pois, 1000 — 735 ou 265.

O complemento é o resto de uma subtracção, na qual todos os

algarismos do subtractivo têem valor igual ou superior ao dos correspondentes do additivo, e portanto será (§ 40)

$$1000 - 735 = (10 - 8) \text{ centenas} + (10 - 4) \text{ dezenas} + (10 - 5) \text{ unidades}$$

e diminuindo 1 a cada um dos termos d'estas differenças (§ 36) excepto aos da ultima

$$1000 - 735 = (9 - 7) \text{ centenas} + (9 - 3) \text{ dezenas} + (10 - 5) \text{ unidades}$$

Raciocinando do mesmo modo acha-se

$$10000 - 5070 = (9 - 5) \text{ milhares} + (9 - 0) \text{ centenas} + (10 - 7) \text{ dezenas}$$

Conclue-se do exposto, que, para achar o complemento arithmetico de um numero, *deve substituir-se cada algarismo do numero, a partir da esquerda, pelo que lhe falta para* 9, *e o ultimo algarismo significativo da direita pelo que lhe falta para* 10.

Por meio dos complementos é facil reduzir qualquer subtracção a outra, cujo subtractivo seja 1 unidade da ordem immediatamente superior á do primeiro algarismo significativo da esquerda do additivo.

Reduz-se a subtracção 8645 — 2073 a outra, em que o subtractivo seja 10000, juntando (§ 36) o complemento do subtractivo tanto a este, como ao additivo. Sabe-se, com effeito, que

$$8645 - 2073 = (8645 + 7927) - (2073 + 7927)$$

e

$$8645 - 2073 = 16572 - 10000 = 6572$$

Quando o subtractivo tem menos algarismos que o additivo, ha vantagem em acrescentar zeros á esquerda d'aquelle, para que ambos fiquem com igual numero de algarismos. Será, por exemplo,

$$3795 - 247 = 3795 - 0247 = (3795 + 9753) - (0247 + 9753)$$

ou

$$3795 - 247 = 13548 - 10000 = 3548$$

Na pratica, quando as subtracções se fazem por complementos, *escreve-se o additivo e por baixo o complemento do subtractivo, somma-se este com aquelle e subtrahe-se* 1 *ao primeiro algarismo da esquerda do resultado.* Sendo 67854302 o additivo e 230680 o subtractivo dispõe-se a operação assim

$$\begin{array}{r} 67854302 \\ 99769320 \\ \hline 1)\,67623622 \end{array}$$

Nas subtracções successivas procede-se de modo similhante, tendo sempre o cuidado de preparar os subtractivos, de sorte que tenham tantos algarismos como o additivo.

Na subtracção successiva 3724 — 47 — 642 considerar-se-hão

como subtractivos os numeros 0047 e 0642, cujos complementos são 9953 e 9358 e ter-se-ha (§ 36)

$$3724-47-642=(3724+9953+9358)-(0047+9953)-(0642+9358)$$

ou $$3724-47-642=23035-20000=3035$$

A operação dispõe-se assim

$$\begin{array}{r} 3724 \\ 9953 \\ 9358 \\ \hline 2)\,3035 \end{array}$$

43. Nas expressões compostas de addição e subtracção chama-se *termo* a qualquer numero separado de outro pelo signal + ou —.

O valor numerico de uma expressão composta de diversos termos não depende da ordem, por que elles estiverem escriptos, comtanto que cada um esteja sempre precedido do mesmo signal + ou —.

Para demonstrar esta proposição convem distinguir os casos, em que os termos, que mudam de logar, são consecutivos, ou não.

1.º caso. Sejam quaes forem os signaes dos dois termos consecutivos, é claro que ou ambos têem o mesmo signal, ou não.

Se ambos (4 e 5) têem o signal +, basta considerar como uma só parcella o resultado de todas as operações indicadas á esquerda d'elles para se obter (§ 27)

$$(8-6)+4+5=(8-6)+5+4$$

e por consequencia.

$$8-6+4+5-3=8-6+5+4-3$$

Estando precedidos os dois termos (3 e 2) do signal —, e considerando como additivo o resultado de todas as operações indicadas á esquerda d'elles, ter-se-ha (§ 33)

$$(9+7)-3-2=(9+7)-2-3$$

e $$9+7-3-2+5=9+7-2-3+5$$

Estando o primeiro termo (5) precedido do signal + e o immediato (4) do signal —, e considerando como uma só parcella o resultado de todas as operações indicadas á esquerda de ambos, tem-se (§ 35)

$$(6-3)+5-4=(6-3)-4+5$$

e $$6-3+5-4+7=6-3-4+5+7$$

Se o primeiro (4) dos dois termos tiver o signal — e o outro

(5) o signal + o principio ainda será verdadeiro, como se vê na ultima igualdade.

2.º caso. Do raciocinio antecedente conclue-se, que em uma expressão composta de diversos termos, póde qualquer d'elles, com o signal que o precede, mudar para outro logar trocando-o successivamente com o seu immediato. Por meio d'estas successivas mudanças é facil fazer com que dois termos quaesquer troquem reciprocamente os seus logares.

Querendo que os termos 6 e 7 da expressão $8+6-5-2+7-3$ troquem reciprocamente de logar, levar-se-ha o 6 successivamente para a direita até occupar o penultimo logar, e achar-se-hão as expressões $8-5+6-2+7-3$, $8-5-2+6+7-3$, $8-5-2+7+6-3$ que, pelo primeiro caso têem todas o mesmo valor, e trazendo depois successivamente o 7 para a esquerda, até chegar ao logar, que primitivamente occupava o 6, apparecem expressões $8-5+7-2+6-3$ e $8+7-5-2+6-3$, que tambem são iguaes entre si e ás primeiras.

Na pratica não é necessario effectuar estas successivas trocas para se reconhecer que é

$$8+6-5-2+7-3=8+7-5-2+6-3$$

44. O valor numerico de uma expressão composta de qualquer numero de termos póde obter-se subtrahindo a somma de todos os termos precedidos do signal — da somma de todos os termos precedidos do signal +. N'este enunciado considera-se o primeiro termo da esquerda precedido do signal +.

Demonstra-se esta proposição trocando os logares aos termos, de modo que todos os que tiverem o signal — fiquem depois dos que tiverem o signal +. Tem-se pois

$$8+6-5-2+7-3=8+6+7-5-2-3$$

e pelo § 34 será

$$8+6-5-2+7-3=(8+6+7)-(5+2+3)$$

45. Achar por meio dos complementos o valor de

$$2628+16329-465-72+1049-1560$$

Escrevem-se á esquerda dos termos precedidos do signal — os zeros necessarios para que todos fiquem com tantos algarismos, quantos são os do maior dos termos precedidos do signal +, tomem-se depois os complementos dos termos precedidos do signal —, sommem-se estes complementos com os termos precedidos do signal +, e do primeiro algarismo da esquerda da somma tirem-se tantas unidades, quantos eram os subtractivos.

A operação dispõe-se assim

$$\begin{array}{r} 2628 \\ 16329 \\ 99535 \\ 99928 \\ 1049 \\ 98440 \\ \hline 3)17909 \end{array}$$

46. *Todo o parenthesis precedido do signal + póde supprimir-se, comtanto que os signaes + e —, que estiverem dentro d'elle, continuem a affectar os mesmos termos*, isto é,

$$18+(9+2-5+6-3)=18+9+2-5+6-3$$

Está demonstrado (§ 34) que

$$18+(9+2-5+6-3)=18+[(9+2+6)-(5+3)]$$

e é claro que

$$18+[(9+2+6)-(5+3)]=18+(9+2+6)-(5+3)$$

porque a somma $5+3$ póde (§ 35) subtrahir-se indifferentemente da somma $18+(9+2+6)$, ou de qualquer das suas parcellas $(9+2+6)$.

Sabendo-se pois (§§ 31 e 34) que

$$18+(9+2+6)-(5+3)=18+9+2+6-5-3$$

ter-se-ha afinal (§ 43)

$$18+(9+2-5+6-3)=18+9+2-5+6-3$$

47. *Todo o parenthesis precedido do signal — póde suprimir-se, comtanto que os signaes + e —, que estiverem dentro d'elle, se troquem em — e +*, isto é,

$$18-(9+2-5+6-3)=18-9-2+5-6+3$$

Sabe-se com effeito (§ 44) que

$$18-(9+2-5+6-3)=18-[(9+2+6)-(5+3)]$$

e, porque (§ 36) o resto não varia juntando $5+3$ tanto ao additivo 18, como ao subtractivo $(9+2+6)-(5+3)$,

$$18-[(9+2+6)-(5+3)]=18+5+3-[(9+2+6)-(5+3)+$$
$$+(5+3)]$$

ou (§ 32)

$$18-[(9+2+6)-(5+3)]=18+5+3-(9+2+6)$$

e (§ 34) portanto

$$18-[(9+2+6)-(5+3)]=18+5+3-9-2-6$$

e (§ 43)

$$18-(9+2-5+6-3)=18-9-2+5-6+3$$

EXERCICIOS

I. Effectuar as seguintes addições começando pela direita, ou pela esquerda: 6543 + 829 + 12635 + 395479 + 48 = ? 100351 + 22700062 + 100070 + 729 + + 80059 = ?

II. Effectuar as seguintes subtracções indicadas: 26580367 — 15892609 = ? 200065 — 429 = ? 1000000 — 897439 = ? 4005000 — 2540807 = ? 927 — 62 — — 325 — 409 = ?

III. O cardeal D. Henrique nasceu em Almeirim a 31 de janeiro de 1512 e falleceu na mesma terra a 31 de janeiro de 1580. Que idade tinha quando morreu?

IV. Achar os complementos dos numeros 8; 10000; 82675; 99999; 99800; 599360; 999007.

V. Effectuar por complementos as seguintes subtracções indicadas: 8000 — — 999 = ? 5847 — 980 = ? 10000 — 8174 = ? 9872 — 1000 — 199 — 990 — — 5090 = ?

VI. Um collegio, que tem 126 alumnos, está dividido em 5 classes: na primeira ha quarenta alumnos, na terceira 25, na quarta 27, e finalmente na quinta classe ha 16 alumnos. Quantos são os alumnos da segunda classe?

VII. Effectuar por complementos as seguintes addições: 5248 + 3897 = ? 50248 + 326 = ? 82456 + 30627 + 59 + 348 = ?

VIII. Achar a somma das parcellas: (623 — 325), (9604 — 327), (5089 — 2607) e (18008 — 9246) sem effectuar estas subtracções indicadas.

IX. Calcular o resultado das seguintes operações indicadas 12648 — 3206 + + 5108 + 92358 — 27635 — 12008 + 107 — 59028.

CAPITULO III

Multiplicação de numeros inteiros e de potencias de inteiros

48. **Multiplicação** *é uma operação pela qual se acha um numero, que se fórma de outro, como um terceiro numero se fórma da unidade.*

Na multiplicação dão-se dois numeros, que se chamam *factores* e pede-se um, que é o *producto*.

Chama-se especialmente *multiplicando* ao factor, de que é formado o producto, e *multiplicador* ao factor, que se fórma da unidade, como o producto deve formar-se do multiplicando. Quando um dos factores é 1, o producto é por definição igual ao outro factor.

Chamando-se, em geral, **modulo d'uma operação** *ao numero que combinado por meio d'ella com outro numero dá no resultado este mesmo numero*, será 1 o modulo da multiplicação. N'isto se distingue a multiplicação da addição, cujo *modulo* é evidentemente *zero*.

Indica-se um producto escrevendo o multiplicando seguido do multiplicador e collocando entre ambos um dos signaes · ou × que se lê *multiplicado por*. Mais tarde se reconhecerá que não é essencial escrever o multiplicando á esquerda do multiplicador.

Não se costuma empregar o signal de multiplicação, quando algum dos factores é o resultado de operações indicadas dentro de um parenthesis, ou quando é representado por uma letra do alphabeto.

As expressões 5.3, ou 5×3 e $5.\frac{3}{4}$, ou $5\times\frac{3}{4}$, indicam dois productos, que se lêem *cinco multiplicado por tres* e *cinco multiplicado por tres quartos.*

49. *Um producto póde sempre considerar-se equivalente a uma somma de parcellas iguaes.*

Se o multiplicador é numero inteiro, todas as parcellas são iguaes ao multiplicando, porque, sendo necessario repetir a unidade como parcella para com ella se formar o multiplicador, segue-se que deve tambem repetir-se (§ 48) o multiplicando como parcella para similhantemente se formar o producto. É por isto que da igualdade

$$3=1+1+1$$

se deriva

$$5\times3=5+5+5$$

Se o multiplicador for numero fraccionario, será necessario decompor a unidade em partes iguaes e repetir como parcella, não a unidade, mas uma d'essas partes, para se saber como o multiplicador se fórma da unidade, e por consequencia como é que o producto deve formar-se do multiplicando.

O quebrado $\frac{3}{4}$, por exemplo, é a somma de tres partes, cada uma das quaes é quatro vezes menor que a ùnidade (§ 19) e se representa por $\frac{1}{4}$, isto é

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

O producto de qualquer numero, 5, por $\frac{3}{4}$ deve, pois, ser igual á somma de tres partes, ou parcellas, que sejam tambem quatro vezes menores que 5.

50. Da proposição precedente conclue-se, que o producto deve ser da mesma especie que o multiplicando, e que o multiplicador póde sempre reputar-se numero abstracto, porque serve apenas para indicar o modo por que o producto ha de ser formado do multiplicando.

Da mesma proposição, e do que se expoz no § 3, conclue-se tambem que, se o multiplicador for inteiro, o producto será tantas vezes maior que o multiplicando, quantas forem as unidades do multiplicador.

51. Póde um producto considerar-se como multiplicando em uma segunda multiplicação, e formar portanto com um novo factor um producto de tres factores.

Considerando 5×3 como multiplicando e 4 como multiplicador, tem-se evidentemente (§ 49)

$$5\times3\times4=5\times3+5\times3+5\times3+5\times3$$

ou
$$5\times3\times4=5+5+5+\\+5+5+5+\\+5+5+5+\\+5+5+5$$

Um producto de tres factores póde tambem considerar-se como multiplicando em uma outra multiplicação, dando por isso origem a um producto de quatro factores. Escrevendo 6 vezes o segundo membro da precedente igualdade tem-se uma somma igual a $5\times3\times4\times6$.

Similhantemente se podem formar productos de 5, 6 ou mais factores. Em geral a ordem por que elles estão escriptos indica a ordem por que devem suppor-se feitas as operações. Em seguida se provará que o resultado final não depende d'esta ordem.

52. *O producto de dois numeros inteiros não muda de valor, quando o multiplicando se converte em multiplicador e este em multiplicando.*

O producto 5×3, em que 5 é o multiplicando, é igual (§ 49) á somma $5+5+5$; suppondo, porém, que 3 é o multiplicando, tem-se o producto $3\times5=3+3+3+3+3$.

Para demonstrar o principio enunciado é preciso portanto provar que é verdadeira a igualdade,

$$5+5+5=3+3+3+3+3$$

cujos membros são duas sommas dispostas de modo que o numero das parcellas de uma é igual a qualquer das parcellas da outra.

Decompondo em unidades as parcellas da primeira somma vem

$$5+5+5=1+1+1+1+1+\\+1+1+1+1+1+\\+1+1+1+1+1$$

e, como o valor do segundo membro é o mesmo, seja qual for a ordem (§ 27) por que se juntam as parcellas, segue-se que, sommando as unidades escriptas em cada columna vertical, virá

$$5+5+5=3+3+3+3+3$$

Admitindo a convenção (§ 48) de escrever o multiplicando antes do multiplicador, o principio demonstrado póde exprimir-se pela igualdade

$$5\times3=3\times3$$

que se traduz no seguinte enunciado: *o producto de dois numeros inteiros não depende da ordem dos factores.* A multiplicação é, pois, uma operacão commutativa (§ 24).

53. *O producto de tres numeros inteiros não muda de valor, quando se trocam os logares aos ultimos dois,* isto é,

$$5\times3\times4=5\times4\times3$$

Com effeito, sabe-se (§ 51) que é

$$\begin{aligned}5\times3\times4=&5+5+5+\\&+5+5+5+\\&+5+5+5+\\&+5+5+5\end{aligned}$$

Reunindo ou associando n'um grupo todas as parcellas de cada columna (§ 24) tem-se

$$5\times3\times4=5\times4+5\times4+5\times4$$

e por consequencia (§ 49)

$$5\times3\times4=5\times4\times3$$

Substituindo cada parcella por 1 e recorrendo á definição de multiplicação, acha-se

$$5\times3\times4=5(3\times4)=5(4\times3)$$

Logo: 1.° *multiplica-se um producto de dois factores inteiros* (5×3) *por qualquer numero inteiro* (4) *multiplicando um só dos factores* (3) *pelo dito numero inteiro;* 2.° *a multiplicação é uma operação associativa* (§ 24).

54. *O producto de qualquer numero de factores inteiros não muda de valor, quando se troca a ordem a dois factores quaesquer.*

Para se demonstrar esta proposição convem distinguir o caso em que os dois factores estão consecutivos, d'aquelle em que estão separados por um ou mais factores.

1.° caso. Se os dois factores, 6 e 7, estão consecutivos basta considerar, como um só factor (§ 51), o producto de todos os factores escriptos á sua esquerda, para se reconhecer (§ 53) que elles podem mudar de logar. Tem-se pois

$$4\times3\times6\times7=(4\times3)6\times7=(4\times3)7\times6=4\times3\times7\times6$$

e $$4\times3\times6\times7\times5\times2=4\times3\times7\times6\times5\times2$$

2.° caso. Não estando seguidos os dois factores, 5 e 6, é permittido levar qualquer d'elles para o logar do que está immediatamente antes ou depois, e em seguida mudal-o do novo logar para o do que se lhe segue e assim successivamente, até que o factor em questão occupe o logar, que se quizer. Por estas successivas trocas o factor 6 do producto 3×5×7×2×6 póde caminhar para a esquerda, de sorte que este producto se transforme nos productos 3×5×7×6×2, 3×5×6×7×2 e 3×6×5×7×2 iguaes ao primeiro producto, e deslocando agora o factor 5 para a direita, até elle chegar ao primitivo logar do 6, chega-se a concluir que

$$3\times5\times7\times2\times6=3\times6\times7\times2\times5$$

Este raciocinio é inteiramente analogo ao do 2.° caso do § 43.

55. *Multiplicar um producto por um inteiro equivale a multiplicar pelo inteiro um dos factores, ou o producto de dois ou mais d'elles.*

O producto dos factores $2.3.5.7.6$ e 4 pode obter-se multiplicando 4 pelo producto, 3.7 por exemplo, dos factores 3 e 7, isto é

$$2.3.5.7.6\times4=2(3.7\times4).5.6$$

Com effeito (§ 54) é

$$2.3.5.7.6=(2.5.6).3.7$$

e n'este ultimo producto de tres factores tambem é (§ 54)

$$(2.5.6).3.7=3.7(2.5.6)=(3.7)(2.5.6)$$

e por consequencia (§ 54)

$$2.3.5.7.6=(2.5.6)(3.7)$$

e $$2.3.5.7.6\times4=(2.5.6)(3.7)\times4$$

Ora o segundo membro é um producto dos tres factores (§ 53) $(2.5.6)$, (3.7) e 4, logo

$$2.3.5.7.6\times4=2.5.6(3.7\times4)$$

ou $$2.3.5.7.6\times4=2(3.7\times4).5.6$$

56. O producto de dois numeros inteiros póde sempre obter-se (§ 49) por meio da *addição;* quando, porém, os numeros não são digitos, a addição póde tornar-se bastante laboriosa por envolver consideravel numero de parcellas, ou por ser grande o valor de cada uma. Felizmente é facil simplifical-a, quando todas as suas parcellas são iguaes, e é exactamente n'essa simplificação, que consiste propriamente a operação d'arithmetica denominada *multiplicação.*

Para se descobrirem as simplificações, que podem introduzir-se na addição, quando as parcellas são iguaes, é conveniente conhecer as proposições, que se seguem.

57. *O producto de dois factores, dos quaes um consta de varios termos e outro é um numero inteiro, é igual á expressão, que se obtem substituindo cada um d'aquelles termos pelo seu producto por o factor inteiro,* isto é

$$(8-6+4)3=8\times3-6\times3+4\times3$$

Considerando $8-6+4$ como multiplicando tem-se (§ 49)

$$\begin{aligned}(8-6+4)3=&(8-6+4)+\\&+(8-6+4)+\\&+(8-6+4)\end{aligned}$$

Supprimindo os parenthesis (§ 46) e trocando a ordem aos termos

(§ 43) acha-se

$$(8-6+4)3=8+8+8-\\ -6-6-6+\\ +4+4+4$$

e por consequencia (§§ 46, 47 e 49)

$$(8-6+4)3=8\times3-6\times3+4\times3$$

Se $8-6+4$ fosse multiplicador, bastaria saber (§ 52) que o valor do producto é o mesmo, seja qual fôr o multiplicando ou o multiplicador, para se concluir que o principio ainda é verdadeiro n'este caso. É facil comtudo demonstral-o directamente porque sendo o multiplicador (§ 46)

$$8-6+4=1+1+1+1+1+1+1+1-\\ -1-1-1-1-1-1+\\ +1+1+1+1$$

bastará substituir (§ 48) cada uma d'estas unidades pelo multiplicando 3 para se obter o numero que se fórma de 3, como $8-6+4$ se fórma da unidade. Será pois

$$3(8-6+4)=3+3+3+3+3+3+3+3-\\ -3-3-3-3-3-3+\\ +3+3+3+3$$

e finalmente (§§ 46, 47 e 49)

$$3(8-6+4)=3\times8-3\times6+3\times4$$

Diz-se por isto que *a multiplicação é operação* **distributiva** *relativamente* ás operações indicadas na expressão $8-6+4$.

58. Do principio demonstrado no § anterior resulta que *uma expressão composta de addições e subtracções, na qual cada um dos termos é producto de dois factores, póde converter-se em um só producto, quando o mesmo numero é factor em todos os termos.*

Tendo, por exemplo, a expressão $7\times3-6\times3+5\times3-2\times3$, na qual todos os termos são productos em que entra o factor 3, poder-se-ha escrever a igualdade (§ 57)

$$7\times3-6\times3+5\times3-2\times3=(7-6+5-2)3$$

na qual o segundo membro é um só producto.

O factor 3 é, em relação aos productos 7×3, 6×3, 5×3, 2×3, um *factor commum. Tirar o factor commum* 3 a uma expressão

$$7\times3-6\times3+5\times3-2\times3$$

é substituir a esta expressão o producto indicado

$$(7-6+5-2)3$$

59. *O producto de duas sommas indicadas é igual á somma dos*

productos parciaes de todos os termos d'uma das sommas por cada um dos termos da outra somma, isto é

$$(3+5+7)(2+4)=3.2+5.2+7.2+3.4+5.4+7.4$$

Considerando o factor $3+5+7$ como um só numero, tem-se (§ 57)

$$(3+5+7)(2+4)=(3+5+7)2+(3+5+7)4$$

effectuando as multiplicações (§ 57) indicadas no segundo membro, vem

$$(3+5+7)(2+4)=3.2+5.2+7.2+3.4+5.4+7.4$$

60. *O producto de duas differenças indicadas é igual a uma expressão composta de termos, cada um dos quaes é o producto d'um dos termos d'uma das differenças por um termo da outra differença e está precedido do signal + ou — conforme os termos, que se multiplicam, têem o mesmo signal ou signal contrario*, isto é

$$(8-4-2)(6-3)=8.6-4.6-2.6-8.3+4.3+2.3$$

Considerando $8-4-2$ como um só numero, tem-se (§ 57)

$$(8-4-2)(6-3)=(8-4-2)6-(8-4-2)3$$

Effectuando as multiplicações indicadas no segundo membro (§ 57), vem

$$(8-4-2)(6-3)=8.6-4.6-2.6-(8.3-4.3-2.3)$$

ou (§ 47)

$$(8-4-2)(6-3)=8.6-4.6-2.6-8.3+4.3+2.3$$

61. É facil applicar a proposição demonstrada no § precedente ao caso em que ambos os factores contêem addições e subtracções indicadas. Sendo, por exemplo $8-3+6$ e $9+4-2$ os dois factores, será (§ 57)

$$(8-3+6)(9+4-2)=(8-3+6)9+(8-3+6)4-(8-3+6)2$$

e (§§ 57 e 47) finalmente

$$(8-3+6)(9+4-2)=8.9-3.9+6.9+8.4-3.4+6.4-8.2+3.2-6.2$$

62. *O producto de um numero inteiro por* 10, 100, 1000, etc. *é o mesmo numero inteiro seguido de* 1, 2, 3, etc. *zeros*, isto é

$$234\times100=23400$$

Considerando 100 como multiplicando (§ 52) reconhece-se que 234×100 equivale (§ 49) á somma de 234 parcellas iguaes a 100 unidades, ou a 1 centena, e por consequencia que aquelle producto é igual a 234 centenas, ou a um numero com zero de

unidades, zero de dezenas, 4 centenas, 3 milhares e 2 dezenas de milhar.

Do mesmo modo se raciocinaria, se o segundo factor fosse 1000, 10000, etc.

63. *O producto de dois numeros inteiros, dos quaes um ou ambos terminam á direita em zeros, acha-se multiplicando os ditos numeros sem fazer caso dos zeros, e escrevendo á direita do producto obtido todos os zeros de que não se fez caso*, isto é

$$23400 \times 860 = 234 \times 86 \times 1000$$

Com effeito, sendo (§ 62)

$$23400 \times 860 = (234 \cdot 100)(86 \cdot 10)$$

e (§ 55) $$(234 \cdot 100)(86 \cdot 10) = 234(86 \cdot 10)100$$

$$234(86 \cdot 10) \cdot 100 = 234 \cdot 86 \cdot 10 \cdot 100$$

será (§ 62) $$23400 \times 860 = (234 \cdot 86)1000$$

64. O producto de dois numeros inteiros póde achar-se (§ 49) sommando tantas parcellas iguaes a um d'elles, quantas são as unidades do outro. Quando, porém, os numeros não são digitos, póde simplificar-se muito este processo, se acaso fôr possivel obter com promptidão o producto de dois numeros digitos. Para esse fim é que se decoram nas escolas primarias todos estes productos. Póde tambem recorrer-se á *taboada da multiplicação*, que com muita facilidade fornece os productos de dois numeros digitos. É innegavel, porém, que o melhor meio de facilitar o processo da multiplicação é ter de cór o que vulgarmente se chama taboada de multiplicar.

Taboa da multiplicação

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Construe-se esta taboada escrevendo em uma linha horisontal todos os numeros digitos por ordem de grandeza, por baixo de cada um d'elles a somma do dito numero comsigo mesmo, em uma terceira linha horisontal a somma dos numeros da segunda linha com os que lhes correspondem na primeira, e assim successivamente, de modo que os numeros de cada linha horisontal sejam as sommas dos numeros da linha precedente com os da primeira, até chegar á ultima linha, que é a que começa por 9.

Vê-se, pois, que os numeros da segunda linha são os productos dos da primeira por 2, os da terceira são os productos dos da primeira por 3, os da quarta os productos dos mesmos numeros por 4, e assim successivamente até aos da ultima que são os productos de todos os numeros digitos por 9.

Querendo achar o producto de dois numeros digitos entra-se com elles na taboada, exactamente como se se quizesse achar a somma de dois numeros digitos por meio da taboada de sommar (§ 25), e achar-se-ha no cruzamento das linhas, horisontal e vertical, que contêem os ditos numeros, o producto procurado.

65. O producto de dois numeros, dos quaes um é digito, póde achar-se decompondo o que não é digito nas unidades de diversas ordens e multiplicando cada uma das parcellas resultantes pelo factor digito.

Para multiplicar 6487 por 9 substitue-se o primeiro factor pela somma indicada $6000 + 400 + 80 + 7$ e ter-se-ha (§ 57)

$$6487 \times 9 = 6000 \times 9 + 400 \times 9 + 80 \times 9 + 7 \times 9$$

ou (§ 62)

$$6487 \times 9 = 6 \times 9 \times 1000 + 4 \times 9 \times 100 + 8 \times 9 \times 10 + 7 \times 9$$

Para multiplicar qualquer numero por um numero digito basta multiplicar o numero digito pelo algarismo das unidades do outro factor, depois pelo algarismo das dezenas do mesmo factor, pelo algarismo das centenas, etc., e escrever á direita do segundo producto um zero, á direita do terceiro dois zeros e assim successivamente. Póde, porém, deixar-se de escrever estes zeros advertindo que o primeiro producto representa unidades de primeira ordem, o segundo unidades de segunda ordem, etc., e por consequencia, se todos os productos forem numeros digitos, dever-se-hão escrever esses productos pela ordem por que foram enumerados da direita para a esquerda, e, se não forem numeros digitos, escrever-se-hão tambem os productos pela mesma ordem, tendo, porém, o cuidado de juntar as dezenas, que provierem de cada um dos productos, ás unidades do producto, que se lhe seguir para a esquerda.

Se se escrevessem, por baixo umas das outras, 9 parcellas iguaes a 6487, e, se depois se empregasse o processo denominado addição, reconhecer-se-ia tambem que a somma da columna das

unidades era $7+7+7+\ldots+7$ ou 7×9, a das dezenas 8×9 e assim por diante.

Na pratica dispõe-se a operação escrevendo só uma vez o numero, que não é digito, e por baixo o outro

$$\begin{array}{r} 6487 \\ 9 \\ \hline 58383 \end{array}$$

e diz-se 9 vezes 7 são 63 (escreve-se 3) e vão 6, 9 vezes 8 são 72 e 6 que iam são 78 (escreve-se 8) e vão 7, 9 vezes 4 são 36 e 7 são 43 (escreve-se 3) vão 4, 9 vezes 6 são 54 e 4 são 58.

66. Quando nenhum dos factores é digito, decompõe-se um d'elles nas unidades de diversas ordens e multiplica-se cada uma das parcellas resultantes pelo outro factor. Sendo 6472 e 346 os dois factores, escrever-se-ha

$$6472\times346=6472(300+40+6)$$

ou (§ 57)

$$6472\times346=6472\times300+6472\times40+6472\times6$$

e portanto (§§ 62 e 53)

$$6472\times346=6472\times3\times100+6472\times4\times10+6472\times6$$

Sabendo-se (§ 65), pois, effectuar as multiplicações 6472×3, 6472×4 e 6472×6 basta juntar (§ 62) uma ou mais cifras á direita d'estes productos para se obterem tres parcellas, cuja somma será igual ao producto procurado.

Chegar-se-ia á mesma conclusão imaginando 346 parcellas iguaes a 6472 e formando com ellas tres grupos, um de 6, outro de 40 e outro de 300 parcellas. A somma das primeiras 6 parcellas é facil de obter (§ 65); a das 40 parcellas reduz-se á somma das sommas de 10 grupos cada um de 4 parcellas, a somma de cada um d'estes grupos de 4 parcellas é facil de achar, e a somma dos 10 grupos é a somma de um dos grupos de 4 parcellas com um zero á direita; a somma das 300 parcellas obtem-se tambem sommando 3 parcellas e escrevendo á direita dois zeros.

Na pratica escreve-se um dos numeros, ordinariamente o que tem menos algarismos, por baixo do outro, e passa-se pela parte inferior de ambos uma linha; multiplica-se o algarismo das unidades do factor debaixo por todo o outro factor, multiplica-se depois por este factor o algarismo das dezenas do outro, e assim se continúa, tendo comtudo o cuidado de escrever os productos parciaes uns por baixo dos outros de modo que o primeiro algarismo da direita de cada producto parcial corresponda ao segundo algarismo do producto que lhe está por cima. Póde tambem começar-se a operação pelo algarismo das maiores unidades do factor debaixo, mas então é o algarismo das dezenas de cada producto parcial que

fica por baixo do algarismo das unidades do anterior. A operação dispõe-se, tanto n'um como n'outro caso, pelo modo abaixo indicado

6472	6472
346	346
38832	19416
25888	25888
19416	38832
2239312	2239312

Querendo começar a operação pela esquerda do numero superior é necessario, para cada producto, escrever em uma segunda linha as dezenas, que provêem dos productos dos algarismos do mesmo numero pelos algarismos do numero inferior. Este methodo, inteiramente analogo ao que póde applicar-se em circumstancias identicas na addição (§ 31), não é comtudo preferivel ao methodo ordinario de que acima se fallou. A operação executada por este novo modo dispõe-se, como abaixo se vê, conforme se começa pela direita ou pela esquerda do segundo factor.

6472	6472
346	346
6422	8216
3241	112
4688	4688
212	212
8216	6422
112	3241
2239312	2239312

67. *O numero de algarismos de qualquer producto de dois factores inteiros é igual á somma dos numeros de algarismos dos factores, ou á mesma somma diminuida de* 1.

Sendo 60854 um dos factores e suppondo que o outro, por exemplo 325, tem só tres algarismos, o producto deverá escrever-se com 8 (isto é, $5+3$) algarismos, ou com 7.

O segundo factor, que se suppõe differente de 100, por ser inteiro e se escrever com 3 algarismos, está comprehendido entre 100 e 1000.

Usando dos *signaes de desigualdade*[1] $>$ e $<$ que se lêem *maior que* e *menor que* ter-se-ha pois

$$100 < 325 < 1000$$

[1] Chama-se desigualdade á expressão composta de duas partes desiguaes e separadas uma da outra por um dos signaes $>$ ou $<$. A expressão escripta á esquerda do signal chama-se *primeiro membro*, a escripta á direita *segundo membro*. Das duas expressões a maior deve sempre ficar do lado da abertura do angulo, ou signal de desigualdade, e a menor do lado do vertice.

e portanto $60854 \times 100 < 60854 \times 325 < 60854 \times 1000$

visto que, qualquer d'estes tres productos equivale a uma somma de parcellas iguaes a 60854 e, quanto maior fôr o numero d'estas parcellas, maior será a somma.

O producto de 60854 por 1000 tem (§ 62) evidentemente 8 algarismos, isto é, tantos, quantos são os algarismos dos factores 60854 e 325, o producto de 60854 por 100 tem 7 algarismos. Logo o numero de algarismos do producto 60854×325 ha de ser 7 ou 8.

68. *O numero de algarismos de um producto de* 3, 4, 5, etc. *factores inteiros está comprehendido entre a somma dos numeros de algarismos de todos os factores e a mesma somma diminuida de* 2, 3, 4, *etc., unidades.*

Sejam 42567, 6234 e 524 os factores d'um producto.

Por ser $1000 < 6234 < 10000$

será $42567 \times 1000 < 42567 \times 6234 < 42567 \times 10000$

e por ser $100 < 524 < 1000$

será $42567 \times 1000 \times 100 < 42567 \times 6234 \times 524 < 42567 \times 10000 \times 1000$

Ora o numero de algarismos do primeiro d'estes tres productos é $5 + (4 - 1) + (3 - 1)$ ou 10, por ser 4 o numero de algarismos do factor 6234 e 3 o dos algarismos do factor 524, e o numero de algarismos do ultimo dos tres productos é $5 + 4 + 3$, logo o producto $42567 \times 6234 \times 524$ não póde ter menos de 10 algarismos, nem 12 ou mais algarismos. Ha de ter portanto 10 ou 11 algarismos.

69. *Todo o producto de factores iguaes chama-se* **potencia**[1]. *O factor, que se repete denomina-se* **raiz** *ou* **base**, *e o numero que designa quantas vezes a raiz ou base entra como factor, chama-se* **grau** *ou* **expoente** *da potencia.*

---

[1] Chama-se, em geral, (Cauchy, *Cours d'analyse*, 1re partie, note 1re) potencia d'um numero *ao numero que se fórma d'elle por multiplicação, do mesmo modo que um outro numero chamado* **expoente**, *se fórma por addição da unidade.* Ao numero dado chama-se **base** ou **raiz** da potencia. Se o expoente é $\frac{1}{3}$, isto é, uma das 3 partes iguaes em que pode decompor-se 1 por addição, a potencia $8^{\frac{1}{3}}$ será um dos 3 factores iguaes em que pode decompor-se 8 por multiplicação. Sabendo-se que é $8 = 2 \times 2 \times 2$, ter-se-ha $8^{\frac{1}{3}} = 2$. A potencia $8^{\frac{5}{3}}$ será evidentemente o producto de 5 factores iguaes a $8^{\frac{1}{3}}$ ou 2. Em geral uma potencia é sempre o producto de factores iguaes entre si, sendo estes factores iguaes á base, quando o expoente é numero inteiro, e iguaes a um dos factores iguaes, em que ella pode decompor-se, quando o expoente é numero fraccionario. Distinguem-se aquellas potencias d'estas chamando a umas *potencias inteiras* e a outras *potencias fraccionarias.*

Indica-se abreviadamente uma potencia escrevendo á direita da raiz e um pouco acima d'ella o expoente. O producto $5\times5\times\times5\times5$ é pois igual á potencia 5^4, que se lê *cinco elevado*, ou *levantado a quatro*, e tambem *quarta potencia de* 5.

Dá-se especialmente o nome de *quadrado de um numero* á potencia do segundo grau (ou segunda potencia) d'esse numero e *cubo de um numero* á potencia do terceiro grau (ou terceira potencia) do numero. As expressões 5^2 e 5^3, equivalentes a 5×5 e $5\times5\times5$, lêem-se ordinariamente *cinco elevado* (ou *levantado) ao quadrado, cinco elevado* (ou *levantado) ao cubo.*

Por analogia diz-se algumas vezes que a *primeira potencia* de um numero é o proprio numero, ou que 5^1, por exemplo, é igual a 5.

Uma potencia póde servir de raiz a outra potencia. O producto $5^4\times5^4\times5^4$ equivale á terceira potencia de 5^4, isto é, a $(5^4)^3$. Esta mesma potencia de potencia póde ser tambem raiz de outra potencia como se vê na igualdade

$$((5^4)^3)^2=(5^4)^3\times(5^4)^3$$

70. *O producto de potencias da mesma raiz é uma outra potencia da raiz commum, cujo expoente é igual á somma dos expoentes dos factores*, isto é,

$$5^2\times5^3\times5^4=5^{2+3+4}$$

Sabe-se com effeito (§ 69) que

$$5^2\times5^3\times5^4=(5\times5)(5\times5\times5)(5\times5\times5\times5)$$

ou

$$5^2\times5^3\times5^4=5\times5(5\times5\times5)(5\times5\times5\times5)$$

e transportando para a esquerda de todos os factores um dos factores encerrado entre parenthesis (§ 54) e supprimindo este depois

$$5^2\times5^3\times5^4=(5\times5\times5)5\times5(5\times5\times5\times5)$$

$$5^2\times5^3\times5^4=5\times5\times5\times5\times5(5\times5\times5\times5)$$

ou

$$5^2\times5^3\times5^4=5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5$$

Mas evidentemente este segundo membro equivale a uma potencia composta de tantos factores iguaes a 5, quantas são as vezes que o mesmo factor entra nas potencias 5^2, 5^3 e 5^4, logo

$$5^2\times5^3\times5^4=5^{2+3+4}$$

Similhantemente se prova que $4^2\times4\times4^3$ ou $4^2\times4^1\times4^3$ é igual a 4^{2+1+3}.

71. *O producto de potencias do mesmo grau (ou expoente) é igual a uma potencia do grau commum, cuja raiz é o producto das raizes de todos os factores*, isto é,

$$2^3\times5^3\times4^3=(2\times5\times4)^3$$

Pela definição de potencia (§ 69) é

$$2^3 \times 5^3 \times 4^3 = (2 \times 2 \times 2)(5 \times 5 \times 5)(4 \times 4 \times 4)$$

Supprimindo cada um dos parenthesis, visto que qualquer d'elles póde (§ 54) escrever-se em primeiro logar, tem-se

$$2^3 \times 5^3 \times 4^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 4$$

ou (§ 54)

$$2^3 \times 5^3 \times 4^3 = 2 \times 5 \times 4 \times 2 \times 5 \times 4 \times 2 \times 5 \times 4$$

e $$2^3 \times 5^3 \times 4^3 = (2 \times 5 \times 4)(2 \times 5 \times 4)(2 \times 5 \times 4) = (2 \times 5 \times 4)^3$$

A elevação a potencias é operação distributiva (§ 57) relativamente á multiplicação.

72. *Toda a potencia de potencia é igual a uma potencia que tem por expoente o producto dos expoentes das potencias*, isto é,

$$(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3}$$

Pela definição de potencia (§ 69) é

$$(5^4)^3 = 5^4 \times 5^4 \times 5^4$$

e pelo § 70 é $$5^4 \times 5^4 \times 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{4 \times 3}$$

logo $$(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3}$$

73. *Uma potencia de potencia não depende da ordem dos expoentes*, isto é,

$$(5^4)^3 = (5^3)^4$$

Com effeito, pela definição de potencia é

$$(5^4)^3 = 5^4 \times 5^4 \times 5^4$$

e pela regra da multiplicação de potencias da mesma base é

$$5^4 \times 5^4 \times 5^4 = (5 \times 5 \times 5)^4$$

Logo $$(5^4)^3 = (5 \times 5 \times 5)^4 = (5^3)^4$$

Póde demonstrar-se a mesma proposição partindo das igualdades (§ 72)

$$(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3} \qquad (5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4}$$

e notando que (§ 52) $$4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$$

Uma potencia de potencia é operação commutativa relativamente aos expoentes.

74. *Qualquer potencia de* 10, 100, 1000, etc., *é igual a* 1 *seguido de tantos zeros, quantas são as unidades do producto do expoente da potencia pelo numero de zeros da raiz.*

Demonstra-se facilmente esta proposição para o caso das potencias de 10, porque pelos §§ 69 e 62 é, por exemplo,

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100 \times 10 \times 10$$

e $$10^4 = 1000 \times 10 = 10000$$

D'este caso particular deduz-se tambem com facilidade que é, por exemplo

$$1000^4 = 1000000000000$$

porque sendo $$1000 = 10^3$$

será (§ 73) $$1000^4 = (10^3)^4 = 10^{3\ 4}$$

e sabe-se que 10^{12} é igual a 1 seguido de 12 zeros.

EXERCICIOS

I. Effectuar as seguintes multiplicações: $8357 \times 6032 = ?$ $62500 \times 83000 = ?$ $410077 \times 60002065 = ?$ $923 \times 6545 \times 100 = ?$ $82374 \times 5674 \times 32500 = ?$ $40603 \times 111000 \times 5544 = ?$

II. Formar as seguintes potencias indicadas: $25^2 = ?$ $637^3 = ?$ $(450^2)^3 = ?$ $(825^4)^3 = ?$ $(1000^3)^5 = ?$ $7^3 \times 8^3 \times 9^3 = ?$ $43^2 \times 43^4 = ?$

III. Uma resma de papel tem 20 mãos, cada mão 5 cadernos e cada caderno 5 folhas. Quantas folhas de papel têem 36 resmas?

IV. Achar o producto dos numeros 45624 e 728 não fazendo senão duas multiplicações, uma por 8 e outra por 9.

V. Achar o producto de 5264803 por 343497 não fazendo senão tres multiplicações por 7.

VI. Achar o producto de 8694 por 999 não fazendo senão uma subtracção.

VII. Achar o quadrado de 255 não fazendo senão duas multiplicações por 5.

VIII. Demonstrar que o producto de dois numeros inteiros diminue, quando se junta 1 ao maior e se diminue 1 ao menor, e augmenta, não sendo consecutivos os numeros, quando se junta 1 ao menor e se diminue 1 ao maior.

IX. Que alteração soffre um producto de dois numeros inteiros, quando do maior se subtrahe o menor?

X. Que alteração soffre um producto de dois numeros inteiros, quando a um d'elles se junta 1, 2, 3 ou mais unidades de primeira, segunda, etc., ordem?

CAPITULO IV

Divisão de numeros inteiros e de potencias de inteiros

75. **Divisão** *é uma operação que tem por fim achar um dos factores de um producto, quando se dão todos os outros factores e o producto.* A divisão é evidentemente uma operação inversa da multiplicação.

Sendo 36 o producto de tres numeros, 2 e 3 dois d'esses numeros, é necessario effectuar uma divisão para se obter o factor desconhecido.

O factor desconhecido chama-se *quociente*, cada um dos factores conhecidos chama-se *divisor*, e o producto do quociente pelos divisores é o *dividendo*.

A divisão indica-se escrevendo o dividendo e depois os divisores precedidos do *signal de divisão* : que se lê *dividido por*.

A expressão 36 : 2 : 3 lê-se *trinta e seis dividido por dois, dividido por tres* e indica uma divisão, na qual 36 é o dividendo, 2 e 3 são os divisores.

Designando por uma letra do alphabeto, Q por exemplo, o quociente, ou factor desconhecido será

$$36 : 2 : 3 = Q \quad \text{ou} \quad 36 = 2 \times 3 \times Q$$

Na divisão ordinaria ou simples ha um só divisor. Quando ha mais de um divisor, a divisão chama-se successiva, porque para se obter o quociente é necessario effectuar um certo numero de divisões ordinarias.

Na divisão ordinaria, quando o divisor é 1, o quociente é igual (§§ 48 e 49) ao dividendo; quando o dividendo é igual ao divisor, o quociente é unidade.

76. O quociente de uma divisão successiva póde obter-se effectuando primeiro uma divisão ordinaria com o dividendo e qualquer dos divisores, depois outra divisão ordinaria com o quociente da primeira divisão, tomado como dividendo, e outro divisor, e assim successivamente até não haver mais divisores.

Effectuar a divisão 36:2:3:4 é achar um numero Q que torne o producto $2 \times 3 \times 4$ Q igual ao dividendo 36. E como este producto póde considerar-se composto (§ 55) de dois factores 4, por exemplo, e 2×3 Q segue-se que

$$36 = 4(2 \times 3\,Q) \quad \text{e (§ 75)} \quad 36 : 4 = 2 \times 3\,Q$$

Considerando agora $2\,Q$ como um só factor obtem-se

$$36 : 4 = 2(3\,Q) \quad \text{e} \quad 36 : 4 : 2 = 3\,Q$$

e finalmente $$36 : 4 : 2 : 3 = Q$$

Reconhece-se por este modo que o valor de Q depende de tantas divisões ordinarias quantos são os divisores, e que na primeira divisão o dividendo foi 36 e o divisor 4, na segunda o dividendo foi 36 : 4 e o divisor 2 e na ultima o dividendo foi 36 : 4 : 2 e o divisor 3.

O mesmo raciocinio nos convenceria de que

$$36 : 3 : 2 : 4 = Q$$

e portanto que $$36 : 3 : 2 : 4 = 36 : 4 : 2 : 3$$

ou o *quociente de uma divisão successiva não depende da ordem dos divisores.*

77. O quociente de uma divisão successiva póde achar-se effectuando uma divisão ordinaria, na qual o divisor seja o producto de todos os divisores da divisão successiva, isto é,

$$36 : 2 : 3 : 4 = 36 : (2 \times 3 \times 4)$$

Com effeito o quociente Q da divisão successiva deve fazer (§ 75)

$$36 = 2 \times 3 \times 4\,Q \quad \text{ou} \quad 36 = (2 \times 3 \times 4)\,Q$$

e portanto (§ 75)

$$36 : (2 \times 3 \times 4) = Q \quad \text{ou} \quad 36 : (2 \times 3 \times 4) = 36 : 2 : 3 : 4$$

Esta igualdade mostra que *o parenthesis precedido do signal de divisão póde supprimir-se, quando dentro d'elle está um producto indicado, comtanto que cada um dos signaes* $\times$ *que estiver dentro se mude em signal de divisão.*

78. *Em qualquer divisão ordinaria ou simples o quociente é igual ao quebrado que tem por numerador* (§ 18) *o dividendo* (§ 75) *e por denominador o divisor*, isto è,

$$38 : 4 = \frac{38}{4}$$

Para demonstrar esta proposição convem considerar dois casos, o caso em que o divisor 4 serve de multiplicando no producto de 4 pelo quociente desconhecido, e o caso em que o mesmo divisor se considera multiplicador.

Se 4 é multiplicando, o quociente Q é o numero (§ 48) que se forma de 1 exactamente como 38 se forma de 4. Ora 38 forma-se de 4 decompondo este numero em 4 parcellas iguaes entre si e sommando 38 d'estas parcellas, logo Q deve constar de 38 parcellas, cada uma das quaes seja 4 vezes menor que 1. E como o quebrado $\frac{38}{4}$ representa uma grandeza composta de 38 partes 4 vezes menores do que 1, segue-se que, *quando o divisor é multiplicando*, è

$$38 : 4 = \frac{38}{4}$$

Se o divisor 4 é multiplicador, o dividendo 38 deverá formar-se do quociente Q do mesmo modo que o divisor 4 se forma de 1 e será portanto

$$38 = Q + Q + Q + Q$$

Escrevendo 38 vezes a igualdade

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

e sommando primeiro os primeiros membros e depois os segun-

dos, tendo o cuidado n'esta ultima somma de formar um grupo de todas as parcellas que estiverem escriptas na mesma columna, achar-se-ha (§ 18)

$$38=\frac{38}{4}+\frac{38}{4}+\frac{38}{4}+\frac{38}{4}$$

e concluir-se-ha portanto que, *quando o divisor é multiplicador*, tambem é

$$Q \text{ ou } 38:4=\frac{38}{4}$$

É por causa d'esta proposição que muitas vezes na pratica se confundem os quocientes indicados com os quebrados.

79. A igualdade $38=\frac{38}{4}+\frac{38}{4}+\frac{38}{4}+\frac{38}{4}$

que se demonstrou no § anterior, prova (§ 3) *que um quebrado é tantas vezes menor que o seu numerador, quantas são as unidades do seu denominador.*

A mesma igualdade, ou antes a expressão $38:4=\frac{38}{4}$, que a ella equivale, prova tambem (§ 75) que é

$$38=\frac{38}{4}\times 4$$

ou que *o producto de um quebrado pelo seu denominador é igual ao numerador do quebrado.*

80. Quando o dividendo é maior que o divisor, o quociente equivale a um quebrado, que envolve mais partes da unidade que a propria unidade, e que por isso mesmo se chama (§ 18) *quebrado improprio.* O quociente póde, pois, decompor-se, n'este caso, em duas partes, uma inteira e outra inferior á unidade. Chama-se *quociente incompleto* ao maior inteiro, que se contém no quociente completo ou simplesmente quociente. É ao *quociente incompleto*, que nos usos ordinarios se costuma chamar *quociente.*

81. Para determinar o valor de um *quociente incompleto*, ou, como tambem se diz, a *parte inteira do quociente* é necessario examinar, quantas vezes a unidade se contém no quebrado, que é igual ao quociente. Póde resolver-se esta questão subtrahindo do numerador do quebrado o denominador, subtrahindo depois este do resto obtido, e continuando do mesmo modo a subtrahir o denominador de cada resto, até se chegar a uma subtracção, cujo resto seja menor que o denominador do quebrado. O numero de vezes, que póde subtrahir-se o denominador do quebrado do seu numerador, é igual ao numero de unidades, que o mesmo quebrado contém.

O quebrado $\frac{38}{4}$, por exemplo, contém 38 partes, das quaes 4 fazem uma unidade; logo se d'aquellas 38 partes (ou quartos) se

subtrahirem 4 das mesmas partes, ficará um resto com menos uma unidade que $\frac{38}{4}$, isto é,

$$\frac{38-4}{4}=\frac{38}{4}-1$$

Subtrahindo do numerador 38—4 outra vez quatro partes da unidade, virá um quebrado com menos uma unidade que $\frac{38-4}{4}$, isto é,

$$\frac{38-4-4}{4}=\frac{38-4}{4}-1$$

ou (§§ 34 e 49) $\frac{38-4\times2}{4}=\frac{38}{4}-1-1=\frac{38}{4}-2$

Continuando a subtrahir 4 ao numerador do primeiro membro e 1 ao segundo membro, achar-se-ha successivamente

$$\frac{38-4\times3}{4}=\frac{38}{4}-3$$

$$\frac{38-4\times4}{4}=\frac{38}{4}-4$$

$$\frac{38-4\times5}{4}=\frac{38}{4}-5$$

.....

e finalmente $\frac{38-4\times9}{4}=\frac{38}{4}-9$ ..... (1)

porque, n'este exemplo, já não é possivel subtrahir 4 do resto $38-4\times9$ por ser $38-4\times9$ menor que 4. Vê-se pois que o quebrado $\frac{38-4\times9}{4}$ é proprio, isto é, menor que 1, e por consequencia a differença $\frac{38}{4}-9$ tambem deve ser menor que 1. Logo do quebrado $\frac{38}{4}$ não se podem subtrahir mais de 9 unidades, e portanto 38:4 tem por *quociente incompleto* 9.

Chama-se *resto da divisão* ao resto da subtracção $48-4\times9$, que tem por additivo o dividendo e por subtractivo o producto do divisor pelo quociente incompleto. O resto é sempre menor que o divisor.

Sendo $38-4\times9=2$

será 2 o resto da divisão e (§ 32)

$$38=4\times9+2$$

isto é, *o dividendo é igual ao producto do divisor pelo quociente incompleto mais o resto.* Se o resto fôr nullo o dividendo será igual ao producto do divisor pelo quociente.

Substituindo na igualdade (1) o valor do resto acha-se

$$\frac{2}{4}=\frac{38}{4}-9 \quad \text{ou (§ 32)} \quad \frac{38}{4}=9+\frac{2}{4}$$

O quociente é pois igual ao quociente incompleto mais um quebrado, que tem por numerador o resto e por denominador o divisor.

82. *O numero de algarismos do quociente incompleto é igual ao menor numero de zeros que é necessario escrever á direita do divisor para o tornar maior que o dividendo.*

Sendo 45648 o dividendo e 69 o divisor, será 2 o numero de algarismos do quociente incompleto, porque escrevendo 2 zeros á direita de 69 tem-se o numero 6900 menor que 45648 e escrevendo 3 zeros á direita de 69 tem-se o numero 69000, que já é maior que 45648.

Com effeito por ser

$$6900<45648<69000$$

será (§ 40) $$69\times100<45648<69\times1000$$

e concluir-se-ha que de 45648 é possivel subtrahir 100 parcellas iguaes a 69 e é impossivel subtrahir 1000 parcellas iguaes a 69. O quociente incompleto é, pois, n'este exemplo, um numero comprehendido entre 100 e 1000, isto é um numero composto de 3 algarismos.

83. Quando o divisor é numero digito e o quociente incompleto tambem, póde achar-se este e o resto da divisão pelo methodo das subtracções successivas (§ 81), ou recorrendo á taboada da multiplicação (§ 64).

Querendo empregar este ultimo meio procura-se na primeira linha horisontal da taboada (ou na primeira columna vertical) o divisor, e percorre-se a columna vertical (ou linha horisontal), que passa pelo divisor, até se encontrar o dividendo ou um numero immediatamente inferior a elle, e seguindo a linha horisontal, em que está o dito numero, da direita para a esquerda (ou a columna vertical, que o contém, de baixo para cima), achar-se-ha no extremo o quociente completo ou a sua parte inteira. Sendo 56 o dividendo e 8 o divisor, entra-se com 8 na linha horisontal superior, por exemplo, desce-se pela columna vertical correspondente até achar 56, e depois percorre-se a linha horisontal, em que está 56, da direita para a esquerda e achar-se-ha no fim o quociente 7. Se o dividendo fôr 59 e o divisor 8, seguir-se-ha o mesmo processo, porém, então não se encontrará o dividendo 59 na taboada, e por isso parar-se-ha em 56, que é o maior numero inferior a 59, que está na columna vertical, que passa por 8. Segue-se a linha horisontal, que contém 56 e acha-se, como acima, o quociente 7, que, n'este exemplo, é o quociente incompleto. A differença $59-8\times7$

igual a 3 representa o resto da divisão, e portanto (§ 79) será $7+\frac{3}{8}$ o quociente completo.

Tendo de cór a taboada da multiplicação é desnecessario empregar qualquer dos dois processos expostos para achar o quociente, quando o quociente incompleto e o divisor são numeros digitos.

Não sendo digito o divisor, o methodo das subtracções successivas póde tornar-se demasiadamente laborioso. É na simplificação d'elle, que consiste propriamente o processo da divisão.

84. *O quociente incompleto não augmenta de valor, quando se escrevem igual numero de algarismos tanto á direita do dividendo, como á direita do divisor.*

Sendo 23 o dividendo e 3 o divisor, e escrevendo dois algarismos quaesquer á direita de cada um d'aquelles dois numeros, têem-se, por exemplo, os numeros 2384 e 399 que divididos um pelo outro dão para quociente incompleto um numero igual ou inferior ao que corresponde a 23 e 3.

Sendo 7 o quociente incompleto na divisão de 23 por 3 será

$$23:3<7+1 \quad \text{ou (§ 75)} \quad 23<3(7+1)$$

Admittindo que multiplicando por 100, ou por outro numero inteiro os dois membros de uma desigualdade, continua esta a subsistir ter-se-ha

$$23\times100<3(7+1)100 \quad \text{ou (§§ 53 e 62)} \quad 2300<300(7+1)$$

Ora, sendo a differença $3(7+1)-23$ igual a 1 ou mais unidades, será (§ 57) a differença $300(7+1)-2300$ igual a 100 ou mais unidades, e portanto sempre que se juntar ao subtractivo 2300 menos de 100 unidades, obter-se-ha uma somma inferior ao additivo $300(7+1)$. Juntando-lhe, por exemplo, 84 será pois

$$2384<300(7+1)$$

e com maior rasão será tambem

$$2384<399(7+1) \quad \text{ou} \quad 2384:399<7+1$$

Logo é impossivel subtrahir de 2384 mais de 7 parcellas iguaes a 399 e por consequencia na divisão de 2384 por 399 o quociente incompleto não póde exceder 7, que é o quociente incompleto de 23:3.

85. Subtrahindo successivamente o divisor do dividendo chega-se (§ 81) a obter o quociente correspondente a qualquer divisão proposta. Na pratica, porém, é quasi impossivel seguir um processo tão moroso. Na simplificação d'elle é que consiste propriamente a operação chamada divisão. Essa simplificação deduz-se facilmente dos principios anteriormente (§§ 82 e 84) expostos.

Seja 2384 o dividendo e 399 o divisor. N'este exemplo extrema-

mente simples o quociente incompleto tem apenas um algarismo (§ 82), e por consequencia de 2384 não é possivel subtrahir 399 mais de 9 vezes.

Supprimam-se á direita assim do dividendo como do divisor igual numero de algarismos e tantos quantos sejam precisos para que o divisor fique só com um algarismo.

Será facil achar o quociente incompleto resultante da divisão de 23 por 3, que são os numeros que se obtem depois de effectuada a suppressão. Este quociente é 7 e, conforme o que se demonstrou (§ 84), não poderá ser maior que 7 o quociente incompleto da divisão de 2384 por 399.

Multiplicando o divisor 399 por 7 acha-se o producto 2793 que não se póde subtrahir de 2384, logo o quociente procurado não é 7 e, como somente póde ser inferior a este numero, segue-se que se devem ensaiar successivamente os numeros menores 6, 5, etc., até se encontrar um ao qual corresponda um producto, que não seja superior a 2384. Feitos os ensaios reconhece-se que 6 não convem porque o producto $399 \times 6 = 2394$ ainda excede 2384, mas convem 5 porque é $399 \times 5 = 1995 < 2384$ e como a differença entre 2384 e 1995 é 389 conclue-se que dividindo 2384 por 399 tem-se 5 para quociente incompleto e 389 para resto e portanto que é

$$2384 : 399 = 5 + \frac{389}{399}$$

86. Na pratica escreve-se o divisor á direita do dividendo e separado d'elle por um pequeno traço vertical, tira-se uma linha pela parte inferior do divisor, e por baixo d'ella escreve-se o quociente incompleto[1]. Multiplica-se este quociente pelo divisor, e ou se escreve o producto por baixo do dividendo para depois se fazer a subtracção, ou se effectuam simultanea e mentalmente a multiplicação e a subtracção lançando por baixo do dividendo o resto da subtracção, que tambem é resto da divisão. A disposição do processo é a que abaixo se vê

$$\begin{array}{r|l} 23'84 & 399 \\ \cline{2-2} 3\,89 & 5 \end{array}$$

Começa-se a operação por collocar um pequeno signal, ordinariamente um traço, á direita do dividendo hypothetico 23, e pergunta-se depois *em* 23 *quantas vezes ha* 3? Sendo 7 a resposta a esta pergunta, verifica-se mentalmente se satisfaz o quociente 7, e, como este não convem, experimenta-se depois, como se disse (§ 85), 6 e 5. Depois de se ter verificado que 5 satisfaz, procede-se á ope-

[1] Os inglezes e allemães escrevem o divisor á esquerda do dividendo e á direita d'este o quociente incompleto, como em seguida se v

$$\begin{array}{r|r|l} 399 & 2384 & 5 \\ & 1995 & \\ \cline{2-2} & 389 & \end{array}$$

ração dizendo: 5 vezes 9 são 45, para 54 faltam 9 (escreve-se 9 por baixo do ultimo algarismo do dividendo), vão 5, 5 vezes 9 são 45 e 5 são 50 para 58 faltam 8 (escreve-se 8), vão 5, 5 vezes 3 são 15 e 5 são 20 para 23 faltam 3.

Quando o dividendo é 7105 e o divisor 792 o quociente incompleto tem só um algarismo, e comtudo dividindo 71 por 7 acha-se 10. N'este caso, em que a divisão auxiliar dá mais de 9, é claro que o maior numero, que deve experimentar-se é 9. A divisão dá n'este exemplo $8+\frac{769}{792}$, como abaixo se vê

$$\begin{array}{r|l} 71'05 & 792 \\ \cline{2-2} 769 & 8 \end{array}$$

87. A divisão de dois numeros inteiros, nos casos em que o quociente não é numero digito, funda-se no seguinte principio:

Tomando á esquerda do dividendo tantos algarismos quantos sejam necessarios para se obter um numero maior que o divisor, mas que não o contenha dez vezes, e dividindo esse numero pelo divisor, obtem-se um quociente incompleto com um só algarismo, que é exactamente o primeiro algarismo da esquerda do quociente dos numeros dados.

Sendo 6584372 o dividendo e 843 o divisor, basta separar n'aquelle a parte, ou dividendo parcial 6584 para se obter um numero que, dividido por 843, dê para quociente incompleto um numero digito. Suppondo que este quociente incompleto é 7, ter-se-ha

$$843\times7<6584<843\times8$$

e (§§ 55 e 62) $843\times7000<6584000<843\times8000$

A primeira d'estas desigualdades continuará a subsistir, quando a 6584000 se junte qualquer numero inteiro, e á segunda succederá o mesmo se esse numero inteiro não tiver mais de tres algarismos, porque um tal numero é menor que 1000, e o excesso de 843×8000 sobre 6584000 é pelo menos igual a 1000, visto que o excesso de 843×8 sobre 6584 não póde ser inferior a 1. Ter-se-ha pois

$$843\times7000<6584372<843\times8000$$

Estando o quociente 6584372 : 843 comprehendido entre 7000 e 8000, é fóra de duvida que o primeiro algarismo do quociente incompleto ha de ser 7.

88. Para dividir 6584372 por 843 separa-se á esquerda do dividendo o numero 6584, que se divide por 843, e suppondo que o quociente incompleto obtido n'esta divisão parcial é 7, será 7 o primeiro algarismo do quociente. Multiplicando 7000 pelo divisor 843 e subtrahindo o producto do dividendo 6584372, obtem-se o resto 683372, que ainda contém 843, e que por isso se divide por 843, como o dividendo proposto se dividiu por o mesmo numero.

Tornando a subtrahir do resto precedente o producto do divisor pelo quociente achado, e continuando por modo similhante até ao ultimo algarismo do quociente incompleto, chega-se a obter o quociente completo, que se queria achar.

Na pratica basta multiplicar o divisor por 7, em vez de o multiplicar por 7000, e subtrahir o producto obtido do dividendo todo menos os tres ultimos algarismos da direita, comtanto que, depois de effectuada a subtracção, se baixe o primeiro dos tres algarismos separados. Este mesmo processo se segue em todas as outras divisões parciaes.

Typos da divisão

6584'372	843		6584'372	843
6833'72	7000		683 3	7810
897'2	800		8 97	
54 2	10		542	
	0			
	7810			

Estas divisões dão em resultado (§ 81)

$$6584372 = 843 \times 7810 + 542 \quad \text{ou} \quad 6584372 : 843 = 7810 + \frac{542}{843}$$

A pratica da divisão póde reduzir-se á seguinte regra:

Para dividir um numero inteiro por outro, escreve-se o dividendo á esquerda do divisor e separado d'elle por um pequeno traço vertical, por baixo do divisor tira-se uma linha e pela parte inferior d'esta escreve-se o quociente incompleto.

Á esquerda do dividendo separam-se os algarismos necessarios para exprimirem um numero que contenha o divisor uma ou mais vezes, porém, menos de dez. O numero separado, que se chama primeiro dividendo parcial, *divide-se pelo divisor, e o algarismo achado escreve-se no logar do quociente. Multiplica-se o primeiro algarismo do quociente pelo divisor, subtrahe-se o producto do primeiro dividendo parcial, e escreve-se por baixo d'este o resto da subtracção. Baixa-se o algarismo, que está á direita do primeiro dividendo parcial e escreve-se á direita do ultimo resto. Este resto com o algarismo, que se baixou, fórma o* segundo dividendo parcial, *que tambem se divide pelo divisor, e escreve-se o algarismo achado á direita do primeiro algarismo do quociente. Multiplica-se o segundo algarismo pelo divisor, subtrahe-se do segundo dividendo parcial este producto, baixa-se o outro algarismo do dividendo para a direita do resto, e tem-se o* terceiro dividendo parcial, *e assim se continua a operação até ao fim, isto é, até se ter baixado o ultimo algarismo do dividendo.*

Quando algum dividendo parcial é menor que o divisor, põe-se 0 *no quociente e baixa-se o algarismo seguinte do dividendo.*

89. Quando o divisor é digito faz-se geralmente a divisão sem

escrever os dividendos parciaes, por causa da grande facilidade que ha em os conservar de memoria, visto constarem todos elles de um ou dois algarismos.

Para dividir 437658 por 9, isto é, para *tomar a nona parte* áquelle numero, como se costuma dizer, dispõe-se a operação assim:

```
437658 | 9
     6   48628
```

e diz-se, a nona parte de 43 são 4 e sobejam 7, a nona parte de 77 são 8 e sobejam 5, a nona parte de 56 são 6 e sobejam 2, a nona parte de 25 são 2 e sobejam 7, a nona parte de 78 são 8 e sobejam 6, que é o resto da divisão.

90. Quando o quociente incompleto tem muitos algarismos, póde haver vantagem em construir previamente uma taboa dos productos do divisor por todos os numeros digitos, para evitar os ensaios a que têem de sujeitar-se os algarismos, antes de se escreverem no quociente, e o trabalho de multiplicar duas ou mais vezes o divisor pelo mesmo algarismo do quociente.

```
42650462/38296054272 | 5264068
42112544               810218682261
 5379183
 5264068
  11511582
  10528136
   9834469
   5264068
   45704016
   42112544
    35914720
    31584408
     43303125
     42112544
      11905814
      10528136
       13776782
       10528136
        32486467
        31584408
         9020592
         5264068
         3756524
```

1	5264068
2	10528136
3	15792204
4	21056272
5	26320340
6	31584408
7	36848476
8	42112544
9	47376612
10	52640680

Para se formar a referida taboa[1] escreve-se á parte o divisor e

[1] Na multiplicação, quando os dois factores constam de muitos algarismos, póde ser tambem conveniente formar uma taboa dos productos dos numeros digitos por um dos factores.

por baixo a somma d'elle comsigo mesmo, por baixo d'esta somma o numero que se obtem juntando o divisor á mesma somma, e assim successivamente até se achar o proprio divisor com um zero á direita. A operação dispõe-se, como se vê no exemplo precedente.

91. *Dividir uma somma do numeros inteiros por um divisor inteiro equivale a dividir cada uma das parcellas pelo divisor, e a sommar os quocientes parciaes*, isto é,

$$(36+27+50):4=36:4+27:4+50:4$$

Um quociente $(36+27+50):4$ equivale (§ 78) a um quebrado $\frac{36+27+50}{4}$ e o quebrado $\frac{36+27+50}{4}$ comprehende (§ 18) $36+$ $+27+50$ partes da unidade, cada uma das quaes é 4 vezes menor que 1. Ora 36 partes da unidade 4 vezes menores que 1, dão uma grandeza, que é expressa pelo numero $\frac{36}{4}$, 27 partes da unidade tambem 4 vezes menores que 1 equivalem a $\frac{27}{4}$, e finalmente 50 partes da mesma grandeza correspondem a $\frac{50}{4}$, logo

$$(36+27+50) \text{ partes da unidade 4 vezes menores que } 1=\frac{36}{4}+\frac{27}{4}+\frac{50}{4}$$

ou

$$\frac{36+27+50}{4}=\frac{36}{4}+\frac{27}{4}+\frac{50}{4}$$

e (§ 78) $$(36+27+50):4=36:4+27:4+50:4$$

A divisão é operação distributiva (§ 57) relativamente á addição.

92. *Dividir uma subtracção indicada, cujos termos são inteiros, por um divisor inteiro, equivale a dividir tanto o additivo ou diminuendo, como os subtractivos ou diminuidores, pelo divisor, e a subtrahir d'aquelle quociente os quocientes correspondentes aos subtractivos*, isto é,

$$(16-7-5):3=16:3-7:3-5:3$$

Designando por R o valor de $16-7-5$ depois de effectuadas as operações indicadas, tem-se

$$16-7-5=R \quad \text{ou (§ 32)} \quad 16=7+5+R$$

e por consequencia (§ 91)

$$16:3=7:3+5:3+R:3 \quad \text{ou (§ 32)} \quad 16:3-7:3-5:3=R:3$$

e substituindo R por a subtracção indicada

$$(16-7-5):3=16:3-7:3-5:3$$

93. *Dividir um producto por um inteiro equivale a dividir por o*

inteiro um só dos factores, ou o producto de dois ou mais d'elles, isto é,

$$4\times6\times7\times5:3=4(6\times7:3)5$$

Com effeito, se a expressão $4(6\times7:3)5$ representa effectivamente o quociente da divisão de $4\times6\times7\times5$ por 3, será (§ 75)

$$4\times6\times7\times5=[4(6\times7:3)5]3$$

E, como para multiplicar por 3 o producto basta (§ 55) multiplicar um dos seus factores $6\times7:3$, segue-se que, se fôr verdadeira a precedente igualdade, tambem será

$$4\times6\times7\times5=4(6\times7:3\times3)5$$

E, porque $6\times7:3$ é um quociente e o producto d'elle pelo divisor 3 deve ser igual ao dividendo 6×7, é

$$4(6\times7:3\times3)5=4(6\times7)5$$

e (§ 55) $$4(6\times7:3\times3)5=4\times6\times7\times5$$

Do mesmo modo se prova que é

$$4\times6\times7\times5:3=4(6:3)7\times5$$

94. *Dividir um quociente indicado por um inteiro equivale a dividir o dividendo por o inteiro, ou a multiplicar um dos divisores pelo mesmo inteiro*, isto é,

$$(12:3:6:5):4=(12:4):3:6:5 \quad \text{ou} \quad =12:3:(6\times4):5$$

Com effeito, sabe-se que é

$$(12:3:6:5):4=12:3:6:5:4$$

e (§ 76) $$12:3:6:5:4=12:4:3:6:5$$

logo $$(12:3:6:5):4=(12:4):3:6:5$$

Tem-se tambem

$$12:3:6:5:4=12:3:6:4:5$$

e, considerando a divisão em que $12:3$ serve de dividendo, é (§ 77)

$$12:3:6:4:5=12:3:(6\times4):5$$

e por consequencia

$$(12:3:6:5):4=12:3:(6\times4):5$$

Do exposto conclue-se, que é

$$(12:4):3:6:5=12:3:(6\times4):5$$

ou que *a alteração que soffre um quociente, quando se divide o seu*

dividendo por um numero, é a mesma que soffre, quando se multiplica um dos seus divisores pelo mesmo numero.

95. *Um quociente não muda de valor, quando pelo mesmo numero se divide, ou multiplica, tanto o dividendo, como um dos divisores,* isto é,

$$9:3:2:5=(9:4):3:(2:4):5 \quad \text{ou} \quad =(9\times4):3:(2\times4):5$$

Designando por Q o valor de $9:3:2:5$ será (§ 75)

$$9=3\times2\times5\,Q$$

e $$9:4=(3\times2\times5\,Q):4 \quad \text{ou} \quad 9\times4=(3\times2\times5\,Q)4$$

Mas da primeira d'estas duas igualdades deduz-se (§ 93)

$$9:4=3\,(2:4)\,5\,Q \quad \text{ou} \quad (9:4):3:(2:4):5=Q$$

e da segunda (§ 55)

$$9\times4=3\,(2\times4)\,5\,Q \quad \text{ou} \quad (9\times4):3:(2\times4):5=Q$$

A letra Q representa evidentemente o quociente completo. Quando a divisão é ordinaria ou simples, *o quociente incompleto,* que é sempre (§ 80) o maior inteiro contido em Q, tambem *não muda de valor, se se multiplicam ou dividem pelo mesmo numero, tanto o dividendo como o divisor.* O resto, porém, é que muda de valor.

Quando ambos os termos da divisão se multiplicam pelo mesmo numero, e esse numero é inteiro, o resto vem multiplicado tambem por o mesmo numero. Assim dividindo 54 por 12 acha-se 4 para quociente incompleto e 6 para resto, devendo ser (§ 81) este igual a $54-12\cdot4$. Quando se divide o producto 54×3 pelo producto 12×3 deve ainda achar-se, segundo o que se demonstrou, o quociente incompleto 4 e o resto ha de ser igual a $(54\times3)-(12\times3)4$. E sabe-se que é (§§ 55 e 58)

$$(54\times3)-(12\times3)4=(54\times3)-(12\times4)3=(54-12\times4)3=6\cdot3$$

Quando ambos os termos da divisão se dividem pelo mesmo numero, e esse numero é um dos divisores communs ao dividendo e divisor, o resto vem dividido tambem por o mesmo numero. Dividindo o inteiro $(54:3)$ pelo inteiro $(12:3)$ deve achar-se o quociente incompleto 4 e o resto ha de ser igual a $(54:3)-(12:3)4$ e está demonstrado que é (§§ 93 e 92)

$$(54:3)-(12:3)4=(54:3)-(12\times4):3=(54-12\times4):3=6:3$$

96. O valor numerico de qualquer expressão composta de numeros precedidos dos signaes de multiplicação e divisão não depende da ordem por que estão escriptos esses numeros, comtanto que cada um d'elles esteja sempre precedido do mesmo signal.

Na demonstração d'este principio convém distinguir o caso em

que trocam de logar dois numeros consecutivos, do caso em que trocam de logar dois numeros, entre os quaes existe um ou mais.

1.º caso. Se os dois numeros seguidos têem o signal $\times$ basta suppor effectuadas todas as operações indicadas á esquerda d'elles para se reconhecer (§ 54) que elles podem trocar de logar. É isto o que acontece com os numeros 6 e 4 da igualdade

$$8:3\times6\times4:5=8:3\times4\times6:5$$

Se os numeros seguidos estiverem precedidos do signal de divisão, ainda a troca é permittida, mas n'este caso por outro motivo (§ 76). Ter-se-ha pois

$$15\times3:4:7\times8=15\times3:7:4\times8$$

Tendo signal de multiplicação o primeiro dos dois numeros seguidos e signal de divisão o segundo, como acontece com os numeros 4 e 5 na expressão $12:3\times4:5\times6$ ou $(12:3)4:5\times6$, é evidente que deve multiplicar-se pelo primeiro d'aquelles numeros, 4, o resultado das operações indicadas á sua esquerda e depois este producto tem de ser dividido pelo segundo numero, 5, mas, como é sabido (§ 93), basta dividir um só $(12:3)$ dos factores para se chegar ao mesmo resultado. Logo

$$12:3\times4:5\times6=12:3:5\times4\times6$$

Esta igualdade mostra, que a troca dos dois numeros seguidos (5 e 4) tambem é permittida, quando o da esquerda tem o signal de divisão, e o da direita signal de multiplicação.

2.º caso. Sabendo-se que a troca é permittida, quando os numeros estão consecutivos, é facil demonstrar que ella sempre se póde fazer conservando o resultado o mesmo valor. A demonstração é identica á que se deu (§ 43) para o caso em que se suppunham os numeros precedidos dos signaes $+$ e $-$.

97. O valor numerico de qualquer expressão composta de numeros precedidos dos signaes de multiplicação e divisão póde obter-se dividindo o producto de todos os numeros precedidos do signal de multiplicação pelo producto de todos os numeros precedidos do signal de divisão, isto é,

$$12:3\times4\times5:7:6=(12\times4\times5):(3\times7\times6)$$

Trocando os logares aos numeros tem-se (§ 96)

$$12:3\times4\times5:7:6=12\times4\times5:3:7:6$$

e advertindo que no segundo membro está indicada uma divisão successiva, cujo dividendo é $12\times4\times5$ vem (§ 77)

$$12:3\times4\times5:7:6=(12\times4\times5):(3\times7\times6)$$

98. *Todo o parenthesis precedido do signal de multiplicação póde*

supprimir-se, comtanto que os signaes de multiplicação e divisão, que estiverem dentro d'elle continuem a affectar os mesmos numeros, isto é,

$$12(4\times5:3\times2:6)=12\times4\times5:3\times2:6$$

Depois do que se demonstrou (§ 97) é

$$12(4\times5:3\times2:6)=12[(4\times5\times2):(3\times6)]$$

e como $12(4\times5\times2):(3\times6)=12[(4\times5\times2):(3\times6)]$

porque (§ 93) para dividir um producto basta dividir um dos seus factores, segue-se que

$$12(4\times5:3\times2:6)=12(4\times5\times2):(3\times6)$$

ou (§§ 55 e 77)

$$12(4\times5:3\times2:6)=12\times4\times5\times2:3:6$$

e finalmente (§ 96)

$$12(4\times5:3\times2:6)=12\times4\times5:3\times2:6$$

99. *Todo o parenthesis precedido do signal de divisão póde supprimir-se, comtanto que os signaes de multiplicação e divisão, que estiverem dentro d'elle, se mudem em signaes de divisão e multiplicação*, isto é,

$$12:(4\times5:3\times2:6)=12:4:5\times3:2\times6$$

Raciocinando como antecedentemente (§ 98) acha-se

$$12:(4\times5:3\times2:6)=12:[(4\times5\times2):(3\times6)]$$

e como no segundo membro está um quociente indicado, cujo dividendo é 12, segue-se que elle não mudará de valor (§ 95) se se multiplicar tanto o dividendo, como o divisor pelo mesmo numero 3×6, e então será

$$12:(4\times5:3\times2:6)=12(3\times6):[(4\times5\times2):(3\times6)\times(3\times6)]$$

mas o producto do quociente $(4\times5\times2):(3\times6)$ pelo divisor (3×6) é igual ao dividendo $(4\times5\times2)$, isto é,

$$(4\times5\times2):(3\times6)\times(3\times6)=4\times5\times2$$

logo $12:(4\times5:3\times2:6)=12(3\times6):(4\times5\times2)$

ou (§§ 55 e 77)

$$12:(4\times5:3\times2:6)=12\times3\times6:4:5:2$$

e finalmente (§ 96)

$$12:(4\times5:3\times2:6)=12:4:5\times3:2\times6$$

100. *O quociente de duas potencias da mesma raiz é uma potencia da raiz commum, cujo expoente é o excesso do expoente do dividendo sobre o expoente do divisor*, isto é,

$$2^7 : 2^4 = 2^{7-4}$$

Pela definição de potencia (§ 69) é

$$2^7 : 2^4 = (2\times2\times2\times2\times2\times2\times2) : (2\times2\times2\times2)$$

ou $$2^7 : 2^4 = (2\times2\times2\times2)\times2\times2\times2 : (2\times2\times2\times2)$$

e como (§§ 95 e 93)

$$(2\times2\times2\times2)\,2\times2\times2 : (2\times2\times2\times2) = 2\times2\times2 = 2^3$$

segue-se que $2^7 : 2^4 = 2^3$ ou $2^7 : 2^4 = 2^{7-4}$

Quando o expoente do dividendo é igual ao expoente do divisor, as duas potencias são iguaes, visto que a raiz é tambem a mesma, e o quociente é então igual a 1 (§ 75). Ter-se-ha pois $2^5 : 2^5 = 1$. Applicando a regra da divisão de potencias da mesma raiz a este exemplo achar-se-ia 2^{5-5} ou 2^0.

Em geral, sendo zero a differença entre dois numeros iguaes, qualquer potencia, que tenha por expoente zero, exprimirá o quociente de duas potencias da mesma base e do mesmo expoente e como este quociente é sempre igual a 1 segue-se que *qualquer quantidade elevada a zero é igual a unidade.*

Quando o expoente do dividendo é inferior ao do divisor, tambem não se póde applicar rigorosamente a regra da divisão, porque, applicando-a, viria no quociente uma potencia tendo por expoente o resto de uma subtracção impossivel de praticar, por ser o additivo menor que o subtractivo. N'este caso, embora não possa fazer-se a divisão, é possivel comtudo simplificar o quociente indicado. Com effeito dividindo por 2^4 os dois termos do quociente $2^4 : 2^7$ tem-se (§ 95).

$$2^4 : 2^7 = (2^4 : 2^4) : (2^7 : 2^4) = 1 : 2^3$$

101. *O quociente de duas potencias do mesmo grau (ou expoente) é igual a uma potencia do grau commum, cuja raiz é o quociente das duas raizes*, isto é,

$$6^3 : 5^3 = (6 : 5)^3$$

Pela definição de potencia (§ 69) é

$$6^3 : 5^3 = 6\times6\times6 : (5\times5\times5)$$

ou (§ 77) $$6^3 : 5^3 = 6\times6\times6 : 5 : 5 : 5$$

Dividindo cada um dos factores do dividendo por um dos divisores (§§ 76 e 93) e notando, que o numero de divisores é igual ao de factores do dividendo, tem-se

$$6^3 : 5^3 = (6 : 5)(6 : 5)(6 : 5)$$

ou (§ 69) $$6^3 : 5^3 = (6 : 5)^3$$

Por meio d'esta proposição podem não só effectuar-se todas as divisões, cujos termos sejam potencias do mesmo grau, como elevar-se a qualquer potencia um quociente indicado, sem previamente se effectuar a divisão.

EXERCICIOS

I. Effectuar as seguintes divisões: $8000 : 6576 = ?$ $92658 : 4 = ?$ $82006 : 1000 = ?$ $18624 : 879 = ?$ $1000000 : 3282 = ?$ $830000 : 42600 = ?$ $97800 : 6000 = ?$ $238624730 : 52846 = ?$ $10000000 : 1000 = ?$ $82327068295 : 42328 = ?$

II. Quantas folhas de papel de impressão tem um livro de 1066 paginas, na hypothese de cada folha dar 16 paginas?

III. Achar o producto de um numero por qualquer potencia de 5 (5; 25; 125; etc.) empregando uma divisão em que o divisor seja uma potencia de 2 (2; 4; 8; etc.)

IV. Effectuar as seguintes operações indicadas: $8268 : 23 : 5 = ?$ $46483 : 6 : 72 : 3 = ?$ $1638^3 : 234^3 = ?$ $426^{15} : 426^5 : 426^8 = ?$ $7317128 : (46^3 : 46) = ?$ $88 \times 67 : 12 \times 35 : 7 : 16 = ?$

V. Achar o quociente de 4684356 por 9, suppondo que o resto é nullo, não fazendo senão uma subtracção.

VI. Provar que o numero de algarismos de qualquer quociente incompleto é igual ao excesso do numero de algarismos do dividendo sobre o do divisor, ou a esse mesmo excesso augmentado de 1.

VII. Provar que a addição de numeros inteiros póde effectuar-se sommando os inteiros, sem fazer caso dos algarismos 1, 2, 3 e 4 e substituindo cada um dos outros por o algarismo 1, multiplicando depois a somma assim obtida por 5 e finalmente juntando a este producto o numero, que se obtiver sommando os numeros dados, sem fazer caso do algarismo 5 e substituindo os algarismos 6, 7, 8 e 9 respectivamente por 1, 2, 3 e 4.

VIII. Achar o quociente de 15643782 por 11, suppondo que o resto é nullo, não fazendo senão uma subtracção.

IX. Provar que em todas as divisões, cujo quociente é maior que 1, o dividendo excede o dobro do resto.

X. Provar que todo o numero par é uma potencia de 2 ou uma somma de potencias de 2. Exemplo: $2730 = 2^{11} + 2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2$.

XI. Como se determina o maior numero inteiro, que póde subtrahir-se ao divisor de qualquer divisão, ou juntar-se ao dividendo de modo que o quociente incompleto não mude de valor?

XII. Como se determina o maior inteiro, que póde subtrahir-se tanto ao dividendo como ao divisor de qualquer divisão, sem que o quociente incompleto mude de valor?

LIVRO II

PROPRIEDADES DOS NUMEROS

CAPITULO I

DIVISIBILIDADE—PROVAS DAS OPERAÇÕES

102. Diz-se que um numero inteiro é *divisivel* por outro, quando a divisão d'aquelle por este se faz sem resto. Quando um numero é divisivel por outro, diz-se que este *divide* aquelle ou que é seu *divisor*.

O numero 8, por exemplo, é divisivel por 4, porque 8 dividido por 4 não dá resto, e 4 divide 8, ou é divisor d'este numero pelo mesmo motivo. O mesmo numero 8 dividido por 5 dá resto, logo 8 não é divisivel por 5, e 5 não divide 8, ou não é seu divisor.

Chama-se *multiplo* de um numero inteiro ao producto d'este numero inteiro por qualquer outro. *Submultiplo*, ou factor, de um numero inteiro é o numero de que este é multiplo. O numero 12, por exemplo, é multiplo de 3, porque é o producto de 3 por outro numero inteiro 4, logo 3 é submultiplo, ou factor de 12.

Todo o numero inteiro divisivel por outro, é tambem multiplo d'esse outro, porque, se 15 fôr divisivel por 3, será 15 o producto do divisor 3 por um quociente 5 inteiro (§ 81). Inversamente todo o inteiro, que divide outro, é submultiplo, ou factor d'esse outro.

Não ha, pois, verdadeira differença entre a significação da palavra *divisor* tomada no sentido restricto, que se lhe dá aqui, e a da palavra *submultiplo* ou factor.

103. *O resto de uma divisão não muda de valor, quando ao dividendo se junta ou subtrahe um multiplo do divisor.*

Sabendo-se que 39 dividido por 7 dá o quociente imcompleto 5 e o resto 4, é facil concluir (§ 81) que de 39 se póde subtrahir 5 vezes successivas a parcella 7 e que o resto da ultima subtração é 4. Juntando ao dividendo 39 um multiplo de 7, por exemplo 7×3, obtem-se uma somma, $39 + 7 \times 3$, da qual se poderá evidentemente subtrahir o divisor 7 maior numero de vezes, $5 + 3$, continuando, comtudo, a ser 4 o resto da ultima subtracção, que, como é sabido, é tambem o resto da divisão.

Se ao dividendo 39 se subtrahir um multiplo de 7, por exemplo 7×3, menos vezes, $5 - 3$, se poderá subtrahir ao novo dividendo, $39 - 7 \times 3$, o divisor 7, mas o resto da ultima subtracção, isto é, o resto da divisão, não deixará por isso de ser 4.

104. *O resto da divisão de uma somma de inteiros por um divi-*

sor inteiro é igual ao resto da divisão pelo mesmo divisor da somma dos restos obtidos dividindo cada uma das parcellas pelo dito divisor.

O resto da divisão d'uma somma indicada $19+21+32$ por 5 não muda de valor, quando ao dividendo se subtrahe um multiplo do divisor 5. Sabendo-se, pois, que 19 dividido por 5 dá o quociente incompleto 3 e o resto 4 e por consequencia que é $19=5\times3+4$, concluir-se-ha que o resto da divisão de $19+21+32$ por 5 é igual ao resto da divisão pelo mesmo divisor de $19+21+32-5\times3$, ou (§ 35) de $(19-5\times3)+21+32=4+21+32$.

Do mesmo modo, por ser $21=5\times4+1$, será o resto da divisão de $4+21+32$ por 5 o mesmo que o da divisão por 5 de $4+21+32-5\times4$ ou $4+1+32$.

E finalmente, sendo $32=5\times6+2$, o mesmo resto se obterá dividindo por 5 a expressão $4+1+32-5\times6$ ou $4+1+2$.

Logo o resto da divisão de $19+21+32$ por 5 não muda de valor, quando se substituem as suas diversas parcellas, 19, 21 e 32, pelos restos 4, 1 e 2 que se obtêem dividindo cada uma d'ellas por 5.

105. *Todo o submultiplo, ou divisor de diversos numeros inteiros é submultiplo ou divisor da sua somma.*

Com effeito, se 3 é divisor de cada um dos numeros 12, 18 e 15, será (§ 102) nullo o resto da divisão de cada um d'elles por 3, e, como o resto da divisão da somma $12+18+15$ por 3 é o mesmo (§ 104) que o da somma $0+0+0$ dos restos pelo dito divisor 3, segue-se que a somma $12+18+15$ é divisivel por 3.

Se todas as parcellas excepto uma forem divisiveis por um numero inteiro, os restos das divisões da somma e da parcella exceptuada pelo referido divisor serão evidentemente iguaes entre si.

106. *Todo o submultiplo ou divisor de um numero inteiro é submultiplo ou divisor de qualquer multiplo do mesmo numero inteiro.*

Todo o multiplo, 48×3 por exemplo, de um numero inteiro 48 equivale a uma somma $48+48+48$ de parcellas iguaes a esse numero inteiro e portanto, se houver um numero, 12 por exemplo, que seja submultiplo de uma d'essas parcellas, esse mesmo numero será necessariamente divisor de cada uma d'ellas e pôr consequencia (§ 105) da sua somma 48×3.

107. *O resto da divisão de um producto de factores inteiros por um divisor inteiro não muda de valor, quando a qualquer dos factores se junta ou subtrahe um multiplo do divisor.*

Juntar ao factor 31 de um producto 31×14 um multiplo de 9, por exemplo 3×9, equivale a juntar ao mesmo producto um outro multiplo de 9, isto é $3\times14\times9$, porque (§§ 57 e 53)

$$(31+3\cdot9)\,14=31\times14+3\cdot9\times14=31\times14+3\cdot14\times9$$

E como o resto de uma divisão, na qual 9 é o divisor, não varia,

quando (§ 103) ao dividendo 31×14 se junta um multiplo $3\times\times14\times9$ do divisor, segue-se que o resto da divisão de 31×14 por 9 deve ser igual ao resto da divisão de $(31+3.9)14$ por o mesmo divisor 9.

Fica assim tambem provado que o resto da divisão de $(31+3.9)14$ por 9 não muda de valor, quando a um dos factores, $31+3.9$ por exemplo, se subtrahe um multiplo, 3.9, do divisor 9.

108. *O resto da divisão de um producto de factores inteiros por um divisor inteiro é igual ao resto da divisão pelo mesmo divisor do producto dos restos obtidos dividindo cada um dos factores pelo dito divisor.*

O resto da divisão de um producto indicado $19\times21\times32$ por 5 não muda de valor, (§ 107) quando ao dividendo se subtrahe um multiplo do divisor 5. Sabendo-se, pois que é $19=5.3+4$ concluir-se-ha que $(19-5.3)21\times32$ ou $4\times21\times32$ dividido por 5 dá o mesmo resto que $19\times21\times32$ dividido por 5. Pelo mesmo motivo e por ser $21=5.4+1$, o resto da divisão de $4\times\times21\times32$ por 5 será igual ao resto da divisão pelo mesmo divisor de $4(21-5.4)32=4\times1\times32$. E finalmente este mesmo resto será igual ao resto da divisão por 5 de $4\times1(32-5.6)=4\times1\times2$, visto que é $32=5.6+2$.

109. *Sendo 1 o resto da divisão de um numero inteiro por outro, será 1 o resto da divisão de qualquer potencia d'esse numero inteiro pelo mesmo divisor.*

Em geral, quando todos os factores de um producto divididos pelo mesmo divisor dérem 1 de resto, o producto dividido pelo dito divisor dará tambem 1 de resto, visto que este resto tem de ser igual (§ 108) ao producto dos restos correspondentes a todos os factores e o producto $1\times1\times1\ldots=1$ é inferior a qualquer divisor inteiro, que se considere.

Advertindo que uma potencia, 10^3 por exemplo, é um producto (§ 69) de factores iguaes á base, 10, é evidente que basta saber que a base dividida por um divisor, 3 ou 9, dá o resto 1 para se concluir que ella dará tambem o resto 1 dividida pelo mesmo divisor.

Implicitamente fica demonstrado que qualquer potencia de 10, ou (§ 74) qualquer numero inteiro escripto com o algarismo 1 seguido de zeros dividido por 9 ou por 3 dá 1 de resto.

110. *Todo o numero inteiro que terminar á direita em zeros é divisivel por a potencia de 10, de 2 ou de 5 que tiver por expoente o numero de zeros.*

O numero 327000, porque tem 3 zeros á direita, é pois divisivel por 10^3, 2^3 e 5^3.

Tendo-se demonstrado (§ 62) que 327000 é igual a 327×1000, é evidente (§ 102) que 327000 é multiplo de 1000, que, como tambem se provou já (§ 74), é igual a 10^3.

Sendo, pois,

$$327000 = 327 \times 10^3 \quad \text{e} \quad 10 = 2 \times 5$$

será (§ 71) $$327000 = 327 \times 2^3 \times 5^3$$

e portanto 327000 é (§ 102) divisivel por 2^3 e por 5^3.

111. *Todo o numero inteiro é igual a um multiplo de 2 ou de 5 augmentado do seu ultimo algarismo da direita; ou igual a um multiplo de 2^2 ou de 5^2 augmentado do numero escripto com os 2 algarismos da direita; ou igual a um multiplo de 2^3 ou de 5^3 mais o numero composto dos tres ultimos algarismos, etc.*

O numero 74568 póde decompor-se de qualquer dos seguintes modos

$$\begin{array}{l} 74560 + 8 \\ 74500 + 68 \\ 74000 + 568 \\ 70000 + 4568 \end{array}$$

Como a primeira parcella da primeira somma é (§ 110) um multiplo de 2 e de 5, a primeira parcella da segunda somma é um multiplo de 2^2 e de 5^2, a da terceira um multiplo de 2^3 e de 5^3, etc., segue-se que effectivamente o numero 74568 é igual a um multiplo de 2 ou de 5 mais 8, ou a um multiplo de 2^2 ou de 5^2 mais 68, ou a um multiplo de 2^3 ou de 5^3 mais 568, etc.

112. *O resto da divisão de qualquer numero inteiro por uma potencia de 10, de 2 ou de 5 é o mesmo que o resto da divisão pela dita potencia do numero composto de tantos algarismos a contar da direita, quantas são as unidades do expoente.*

O resto da divisão do numero 74568 por 10^3 ou 1000, por 2^3 e por 5^3 é o mesmo que o resto da divisão de 568 por a potencia que serviu de divisor.

O dividendo 74568 é igual a $74000 + 568$, a primeira parcella d'esta somma é (§ 110) divisivel por 10^3, 2^3 e 5^3, logo (§ 105) a parcella 568 dividida por 10^3, por 2^3, ou por 5^3 dá o mesmo resto que a somma $74000 + 568$ igual ao numero dado 74568.

Convém observar que todo o numero inteiro composto de 3 algarismos é sempre menor que 1000, e portanto dizer que os numeros 74568 e 568 dão restos iguaes, sendo divididos por 1000, é o mesmo que dizer que 74568 dividido por 1000 dá 568 de resto.

Em geral *todo o numero inteiro dividido por uma potencia de 10 dá sempre de resto o numero composto de tantos algarismos, a contar da direita, quantas são as unidades do expoente da potencia.*

113. *O resto da divisão de qualquer numero inteiro por 4 é o mesmo que o resto da divisão por 4 do dobro do algarismo das dezenas mais o algarismo das unidades.*

O resto da divisão de um numero inteiro por 4 é (§ 112) o mesmo que o resto da divisão por 4 do numero formado pelos dois

algarismos da direita. Suppondo que estes algarismos são 5 e 9, concluir-se-ha que 59, e todos os numeros terminados em 59, darão restos iguaes sendo divididos por 4, mas

$$59 = 5 \cdot 10 + 9 \quad \text{e} \quad 10 = 2 \cdot 4 + 2$$

logo $$59 = 5(2 \cdot 4 + 2) + 9$$

ou (§ 57) $$59 = 5 \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 9$$

e como $5 \cdot 2 \cdot 4$ é multiplo de 4, segue-se que (§ 106) 59 e a somma $2 \cdot 5 + 9$ dão restos iguaes, quando se dividem por 4.

114. **Numero par** *é o que é divisivel* (§ 100) *por* 2. **Numero impar**[1] *é o que não é divisivel por* 2.

Todo o numero inteiro, que tem na casa das unidades zero ou algum algarismo par (2, 4, 6 ou 8) *é* (§ 112) *divisivel por* 2, *e por consequencia numero par.*

É divisivel por 4 *todo o numero inteiro no qual o dobro do algarismo das dezenas mais o algarismo das unidades dá uma somma divisivel por* 4 (§ 113).

É divisivel por 5 *todo o numero inteiro que tiver na casa das unidades zero ou* 5.

115. *Todo o numero inteiro escripto com um algarismo significativo seguido de zeros é igual a um multiplo de* 9 *ou de* 3 *mais o algarismo significativo*, isto é,

$$80000 = \text{multiplo de } 9 + 8 \quad \text{e} \quad 80000 = \text{multiplo de } 3 + 8$$

Sabe-se que (§§ 62 e 74)

$$80000 = 8 \times 10000 = 8 \times 10^4$$

porém sendo $10 = 9 + 1$ e $10 = 3 \times 3 + 1$

será (§ 109)

$$10^4 = \text{multiplo de } 9 + 1 \quad \text{e} \quad 10^4 = \text{multiplo de } 3 + 1$$

e portanto

$$80000 = 8(\text{multiplo de } 9 + 1) \quad \text{e} \quad 80000 = 8(\text{multiplo de } 3 + 1)$$

e finalmente (§ 108)

$$80000 = \text{multiplo de } 9 + 8 \quad \text{e} \quad 80000 = \text{multiplo de } 3 + 8$$

116. *Todo o numero inteiro é igual a um multiplo de* 9 *ou de* 3 *mais a somma dos valores absolutos dos seus algarismos*, isto é,

$$85647 = \text{multiplo de } 9 + 8 + 5 + 6 + 4 + 7$$

e $$85647 = \text{multiplo de } 3 + 8 + 5 + 6 + 4 + 7$$

---

[1] Aos *numeros impares* chama-se, na linguagem vulgar, **nones**.

Decompondo 85647 nas unidades de diversas ordens, tem-se

$$85647 = 80000 + 5000 + 600 + 40 + 7$$

e portanto (§ 115)

$$85647 = (\text{multiplo de } 9 + 8) + (\text{multiplo de } 9 + 5) + (\text{multiplo de } 9 + 6) + \\ + (\text{multiplo de } 9 + 4) + 7$$

ou (§ 104) $85647 = \text{multiplo de } 9 + 8 + 5 + 6 + 4 + 7$

Do mesmo modo se demonstra a outra igualdade.

117. *O resto da divisão de qualquer numero inteiro por* 9 *ou por* 3 *é* (§§ 116 e 105) *o mesmo que o resto da divisão por* 9 *ou por* 3 *da somma dos valores absolutos de todos os seus algarismos.*

118. O resto da divisão de um numero por 9 ou por 3 póde achar-se sem effectivamente dividir o numero por 9 ou por 3. *Extrahir os noves, ou os tres* a um numero, é achar o resto da divisão do numero por 9, ou por 3 sem empregar o processo especial da divisão.

Para extrahir os noves, ou os tres a qualquer numero inteiro sommam-se os valores absolutos de todos os seus algarismos, menos os noves ou tres, e vão-se desprezando, ou lançando fóra, os noves ou tres, que no decurso da operação apparecerem.

Querendo extrahir os noves ao numero 7985643, dir-se-ha, 3 e 4 são 7 e 6 são 13, noves fóra 4 e 5 são 9, nada. 8 e 7 são 15, noves fóra 6. O resto da divisão de 7985643 por 9 é pois 6.

Para excluir os tres ao mesmo numero dir-se-ha (desprezando o 3) 4 e 6 são 10, tres fóra 1 e 5 são 6, tres fóra, nada. 8, tres fóra, 2 e 7 são 9, tres fóra, nada.

Na pratica não se costumam excluir os tres, ainda mesmo que se queira achar o resto da divisão de um numero por 3. Quando se quer achar este resto, extrahem-se os noves ao numero, e extrahem-se os tres ao resto que se obtem. Sabendo, por exemplo, que 7985643 dividido por 9 dá o resto 6, conclue-se logo que aquelle numero dividido por 3 dá o mesmo resto (§ 105) que 6 dividido por 3.

Todo o numero que, depois de excluidos os noves, dá de resto 0 *é divisivel por* 9.

Todo o numero que, depois de excluidos os noves, dá de resto 0, 3 *ou* 6 *é divisivel por* 3.

119. *Toda a potencia de* 10 *dividida por* 11 *dá de resto* 1, *quando o expoente é par, e* 10 *quando o expoente é impar.*

Se o expoente de 10 é par, se é, por exemplo, 2×3, tem-se (§ 72)

$$10^{2 \times 3} = (10^2)^3 = 100^3$$

mas $$100 = 99 + 1 = 9 \times 11 + 1$$

logo 100 ou 10^2 dividido por 11 dá 1 de resto, e por consequen-

cia todas as potencias de 100, isto é, todas as potencias pares de 10, divididas por 11 dão 1 de resto (§ 109).

Se o expoente de 10 é impar, o resto da divisão d'elle por 2 será 1, e a potencia de 10 será então o producto de 10 por alguma potencia par de 10. Ter-se-ha (§ 70), por exemplo,

$$10^7 = 10^6 \times 10 \quad \text{ou} \quad 10^7 = (\text{multiplo de } 11 + 1)\,10$$

O resto da divisão de um producto $10^6 \times 10$ por 11 é igual (§ 108) ao producto dos restos das divisões $10^6 : 11$ e $10 : 11$ e, como o primeiro resto é 1, por ser par o expoente de 10, e o segundo resto é 10, por ser este numero inferior a 11, segue-se que o resto da divisão de 10^7 por 11 é igual a 1×10 ou 10.

Considerando 10 como potencia de grau impar (10^1) (§ 69), ainda se póde tomar 10 como resto da divisão d'esta potencia impar de 10 por 11.

Advertindo que é $10 = 11 - 1$ ter-se-ha

$$10^7 = \text{multiplo de } 11 + 11 - 1 \quad \text{ou (§ 105)} \quad 10^7 = \text{multiplo de } 11 - 1$$

Póde portanto enunciar-se a proposição, que acaba de se demonstrar, assim: *Toda a potencia de* 10 *é igual a um multiplo de* 11 *mais* 1, *ou a um multiplo de* 11 *menos* 1, *conforme a potencia é de grau par, ou de grau impar.*

120. *Todo o numero inteiro escripto com um algarismo significativo seguido de zeros é igual a um multiplo de* 11 *mais o algarismo significativo, quando o numero de zeros é par, e é igual a um multiplo de* 11 *menos o algarismo significativo, quando o numero de zeros é impar,* isto é

$$80000 = \text{multiplo de } 11 + 8 \qquad 800000 = \text{multiplo de } 11 - 8$$

Com effeito, no caso dos zeros serem em numero par, tem-se pelos §§ 62, 74 e 118

$$80000 = 8 \times 10^4 = 8\,(\text{multiplo de } 11 + 1)$$

e portanto (§§ 57 e 106)

$$80000 = \text{multiplo de } 11 + 8$$

Sendo impar o numero de zeros, será (§ 118)

$$800000 = 8\,(\text{multiplo de } 11 - 1)$$

e (§§ 57 e 106) $\quad 800000 = \text{multiplo de } 11 - 8$

121. *Todo o numero inteiro é igual a um multiplo de* 11 *mais a somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem impar a contar da direita menos a somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem par,* isto é,

$$67834 = \text{multiplo de } 11 + 4 + 8 + 6 - (3 + 7)$$

Sabe-se que

$$67834 = 60000 + 7000 + 800 + 30 + 4$$

e portanto (§ 120)

$$67834 = 4 + (\text{multiplo de } 11 - 3) + (\text{multiplo de } 11 + 8) + \\ + (\text{multiplo de } 11 - 7) + (\text{multiplo de } 11 + 6)$$

e, advertindo (§ 105) que a somma de diversos multiplos de 11 é outro multiplo de 11,

$$67834 = \text{multiplo de } 11 + 4 - 3 + 8 - 7 + 6$$

Os algarismos precedidos do signal — correspondem a numeros impares de zeros, e portanto são os de ordem par a contar da direita.

122. *O resto da divisão de qualquer numero inteiro por* 11 *é o mesmo que o resto da divisão por* 11 *do excesso da somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem impar a contar da direita sobre a somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem par.* Quando a primeira somma é inferior á segunda é necessario juntar-lhe 11, ou um multiplo de 11.

Para achar o resto da divisão de 628374 por 11 effectuar-se-ha a somma $4 + 3 + 2$, que dá 9, e a somma $7 + 8 + 6 = 21$, e como 9 é menor que 21 e $9 + 11$ tambem, tomar-se-ha a differença $9 + 22 - 21 = 10$, da qual se concluirá que 628374 dividido por 11 dá o resto 10.

Na pratica *extrahem-se os onzes a um numero inteiro, sommando todos os algarismos de ordem impar a contar da direita e lançando fóra os onzes á medida, que vão apparecendo sommas que os contéem, fazendo o mesmo aos algarismos de ordem par, e subtrahindo este resultado d'aquelle, ou da somma d'elle com onze, conforme a primeira subtracção fôr ou não possivel.*

Para extrahir os onzes a 628374 dir-se-ha: 4 e 3 são 7 e 2 são 9; 7 e 8 são 15, onzes fóra 4 e 6 são 10. De 9 não se póde subtrahir 10, e por isso juntando 11 ao additivo ter-se-ha $20 - 10$ igual a 10, que é o resto anteriormente achado.

Conclue-se do exposto que *todo o numero inteiro que, depois de excluidos os onzes, der de resto zero é divisivel por* 11.

123. **Prova** *de qualquer operação é uma nova operação, pela qual se verifica, se o resultado da primeira operação está certo.*

Quando o resultado da mesma operação póde ser achado por dois meios differentes, qualquer d'elles póde servir de prova ao outro.

A operação empregada como prova não deve ser mais complicada que a operação, que por ella se verifica, aliás é mais provavel errar na prova que na propria operação.

124. Ha duas especies de provas, que se denominam *prova real* e *prova por um divisor.*

A prova real é effectivamente um processo differente de effectuar uma dada operação, a fim de se poder verificar se os dois processos dão resultados iguaes. A prova por um divisor não é uma prova completa, porque apenas ensina a conhecer se o resultado de certa operação satisfaz a algumas das condições, e não a todas, a que elle deve satisfazer, para se poder adquirir a certeza de que a operação não está errada.

A prova real somente pode illudir-nos, quando estiver errada a operação empregada para tirar a prova e o erro commettido n'ella fôr exactamente igual ao que affectar a operação principal, cuja exactidão se pretende verificar. A prova por um divisor jamais póde dar a certeza de haver ficado certa a operação principal, póde apenas servir para indicar que ella não envolve certos erros, podendo comtudo conter outros, cuja relação com o divisor empregado é conhecida. Em compensação a prova por um divisor é geralmente de execução mais facil do que a prova real.

125. Na prova por um divisor trata-se apenas de verificar se o resto da divisão do resultado, que se pretende ensaiar, pelo divisor adoptado é effectivamente o resto, que deve dar a divisão do verdadeiro resultado pelo dito divisor. Esta igualdade de restos é effectivamente uma condição necessaria para que sejam iguaes os dois resultados, o supposto e o verdadeiro; mas é uma condição insufficiente, porque, se entre os dois resultados houver uma differença, que seja multipla do divisor, os dois restos serão iguaes entre si (§ 103), não obstante ser o resultado supposto differente do verdadeiro resultado.

A prova por um divisor sómente deixa portanto d'accusar erros multiplos do divisor empregado. Se o verdadeiro resultado de uma operação for por exemplo 35, a prova por o divisor 9 nenhum erro accusará a quem tiver errado a operação achando, em vez do verdadeiro resultado, esse mesmo resultado augmentado ou diminuido de qualquer multiplo de 9; accusará, porém, todos os erros que não forem multiplos de 9 e por isso, a não haver da parte do operador interesse em nos illudir, a prova por um divisor indica uma grande probabilidade de estar ou não certo o resultado de qualquer operação.

Os divisores, que geralmente se empregam nas provas, são 9 e 11, e por isso as provas por um divisor dividem-se de ordinario em *prova dos noves* e *prova dos onzes*. Podem comtudo empregar-se outros divisores faceis de extrahir como são 2, 3, 4 e 5.

126. A prova real da addição póde tirar-se sommando as parcellas de baixo para cima, quando a operação se fez sommando-as de cima para baixo, ou sommando-as de cima para baixo, quando a addição se effectuou de baixo para cima.

Emprega-se algumas vezes outra prova real da addição, que consiste em sommar a primeira columna da esquerda e subtrahir de-

pois o resultado, que se obteve, das unidades da mesma ordem contidas na somma, que se quer verificar, em subtrahir d'este resto a somma da segunda columna da esquerda, e depois a da terceira columna e assim successivamente, até se ter subtrahido a columna das unidades. Se a addição estiver certa, o ultimo resto deve ser nullo. O exemplo seguinte mostra como se dispõe a operação,

```
 4358
 7624
 9835
 2369
 ----
24186
 2120
```

A primeira columna da esquerda somma 22 milhares, que subtrahidos de 24 milhares, que ha na somma total 24186 produz 2 milhares. Escreve-se 2 por baixo dos milhares e sommam-se depois as centenas. Esta somma dá 20 centenas, que subtrahidas das 21 centenas contidas no ultimo resto 2186 dão 1 centena. Sommando a columna das dezenas acha-se 16 dezenas e, como 18 dezenas menos 16 dezenas dão 2 dezenas, escreve-se dois por baixo das dezenas. A somma da columna das unidades é 26, o ultimo resto, que se obteve, é tambem 26, logo a operação está certa.

127. Tira-se a prova dos noves á addição extrahindo os noves á primeira parcella, juntando o resto que se obtiver aos algarismos da segunda parcella e extrahindo os noves á sua somma, continuando assim até á ultima parcella, e extrahindo depois os noves á somma, que se quer verificar. O resto d'esta ultima extracção deve ser igual ao que ficou depois de extrahidos os noves ás parcellas.

No exemplo do § precedente obtem-se, extrahindo os noves ás parcellas de cima para baixo, 2, 1, 7 e 2, logo, se a addição estiver certa, ha de ser

$$24186 = \text{multiplo de nove} + 2 + 1 + 7 + 2$$

e portanto (§ 105) dividindo 24186 e $2 + 1 + 7 + 2$ por 9 devem apparecer restos iguaes.

Como porém as sommas $9 + (2 + 1 + 7 + 2)$; $18 + (2 + 1 + 7 + 2)$; $27 + (2 + 1 + 7 + 2)$; etc. dão todas o mesmo resto depois de excluidos os noves, segue-se que a prova dos noves só nos convence de que a verdadeira somma é 24186, ou 24186 augmentado, ou diminuido de qualquer multiplo de 9.

A prova dos onzes tira-se á addição exactamente como se tira a dos noves, com a differença de se extrahirem os onzes em vez dos noves, e de aquella não accusar os erros multiplos de 11, assim como esta não accusa os erros multiplos de 9.

Para verificar a seguinte somma pela prova dos noves

$$\begin{array}{r} 8254 \\ 3268 \\ 4503 \\ \hline 16025 \end{array} \quad \begin{array}{c} 5 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 11+2-4=9 \\ 11+6-8=9 \end{array}$$

procede-se assim, 4 e 5 são 9, nada. 2 e 8 são 10, noves fóra 1 e 8 são 9, nada. 6 e 2 são 8 e 3 são 11, novès fóra 2 e 3 são 5 e 5 são 10, noves fóra 1 e 4 são 5 (escreve-se ao lado um 5 por cima de um pequeno traço); 5 e 2 são 7 e 6 são 13, noves fóra 4 e 1 são 5 (escreve-se um 5 por baixo de um pequeno traço). A igualdade dos dois restos mostra que a operação está certa, ou que, se o não está, o erro é multiplo de 9.

Para tirar a prova dos onzes á mesma somma dir-se-ha 4 e 8 são 12, onzes fóra 1 e 3 são 4 e 2 são 6 e 2 são 8 e 5 são 13, onzes fóra 2 (escreve-se um 2 ao lado sobre um pequeno traço); 5 e 6 são 11, nada. 8 e 3 são 11, nada. 4 (escreve-se o 4 em seguida ao signal — que se põe depois do 2). Juntando 11 ao 2 tem-se 13 e subtrahindo 4 de 13 acha-se 9. Extrahindo os onzes a 16025 acha-se tambem 9.

Conclue-se de tudo que, se não está certa a addição, os erros que envolve hão de ser multiplos de 9 e de 11, como são, por exemplo, os productos 9×11 ou 99; $9^2 \times 11$ ou 891; 9×11^2 ou 1089; $9^2 \times 11^2$ ou 9801; etc.

128. A prova real da subtracção ou diminuição reduz-se a sommar o subtractivo, ou o diminuidor com o resto. Se a operação estiver certa, deve (§ 32) esta somma ser igual ao additivo, ou diminuendo.

A prova por um divisor da subtracção ou diminuição effectua-se excluindo o divisor empregado (9 ou 11) ao subtractivo e resto, como se fossem parcellas de uma somma, e depois ao additivo.

129. A prova real da multiplicação tira-se ordinariamente dividindo o producto por um dos dois factores. Se a multiplicação estiver certa, o quociente ha de ser igual ao outro factor.

Tira-se a prova por um divisor á multiplicação excluindo o divisor (9 ou 11) a cada um dos factores, multiplicando os restos obtidos, e excluindo o divisor ao producto d'estes restos e ao producto dos dois numeros dados.

Se estes dois productos derem restos iguaes, a operação está certa, ou só envolve um erro multiplo do divisor empregado.

Para verificar pela prova dos noves a multiplicação

$$\begin{array}{r} 645 \\ 23 \\ \hline 1935 \\ 1290 \\ \hline 14835 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 6 & 3 \\ \hline 5 & 3 \end{array}$$

tiram-se duas linhas em cruz, escreve-se no angulo superior da

esquerda o numero 6, que fica depois de excluidos os noves ao factor 645, por baixo o resto 5, que fica depois de excluidos os noves ao outro factor 23, á direita do primeiro numero o resto 3 do producto 6×5, e por baixo d'este o resto do producto 14835.

Reconhece-se extrahindo os noves aos factores que é

$$645 = \text{multiplo de } 9 + 6$$
$$23 = \text{multiplo de } 9 + 5$$

e, como o resto da divisão por 9 do producto dos factores 645 e 23 é igual ao resto (§ 108) que se obtem dividindo por 9 o producto 6×5 dos restos obtidos dividindo cada um dos factores por 9, e este ultimo resto é 3, segue-se que 14835 é effectivamente o producto de 645 por 23 ou só póde differir d'elle em algum multiplo de 9.

A prova dos onzes tira-se á multiplicação exactamente como a dos noves.

130. A prova real da divisão tira-se multiplicando o divisor pelo quociente incompleto e juntando ao producto o resto da divisão. Se a divisão estiver certa deve (§ 81) esta somma ser igual ao dividendo.

Tira-se a prova por um divisor á divisão considerando esta operação como uma addição, na qual uma das parcellas é o producto do divisor pelo quociente incompleto e a outra é o resto, isto é, excluindo o divisor escolhido ao divisor da divisão, depois ao quociente incompleto, multiplicando os restos e excluindo o divisor ao producto obtido, juntando este ultimo resto ao resto da divisão, a esta somma excluindo o divisor, e finalmente excluindo o divisor escolhido ao dividendo.

Os dois ultimos restos devem ser iguaes para a divisão estar certa.

Para tirar a prova dos onzes á seguinte divisão

$$\begin{array}{r|l} 15544 & 24 \\ \hline 114 & 647 \\ 184 & \\ 16 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 9 & 1 \end{array}$$

traça-se uma cruz ao lado, extrahem-se os onzes a 24 e escreve-se o resto 2 no angulo superior da esquerda, extrahem-se os onzes ao quociente incompleto 647 e escreve-se o resto 9 por baixo do 2, multiplicam-se os restos 2 e 9, extrahem-se os onzes ao producto 18, junta-se o resto 7 a 16, extrahem-se os onzes á somma 23, escreve-se o resto 1 no angulo superior da direita da cruz e extrahem-se finalmente os onzes ao dividendo 15544.

Das operações executadas deduz-se

$$24 = \text{multiplo de } 11 + 2$$
$$647 = \text{multiplo de } 11 + 9$$

logo (§ 129) $24 \times 647 =$ multiplo de $11 + 2 \times 9$

ou $24 \times 647 =$ multiplo de $11 + 7$

e portanto $24 \times 647 + 16 =$ multiplo de $11 + 7 + 16$

Admittindo pois que é

$$15544 = 24 \times 647 + 16$$

e substituindo 24, 647 e 16 respectivamente por 2, 9 e 5, restos obtidos dividindo aquelles numeros por 11, ter-se-ha uma somma $2 \times 9 + 5 = 23$ que (§§ 104 e 108) dividida por 11 ha de dar o mesmo resto que $24 \times 647 + 16$. Esta ultima somma dividida por 11 dá pois (§ 121) o resto 1 e o mesmo resto deve dar 15544, se a divisão estiver certa, ou se houver no quociente incompleto 647, ou no resto 16, algum erro igual a um multiplo de 11.

EXERCICIOS

I. Quaes são os restos das divisões dos numeros 2081079, 1912911, 13026013, 297381, 5604939, 800047092 por 2, 4, 5, 8, 10, 16, 25, 100, 125, 625 e 1000?

II. Quaes são os restos das divisões dos numeros 224224, 55184584, 4996881, 34255, 64202328, 53601024, 1253475, 436934038 por 9, 3 e 11?

III. Provar que todas as potencias de um inteiro divididas pelo inteiro immediatamente inferior dão 1 de resto, e divididas pelo inteiro immediatamente superior dão 1, ou o proprio inteiro de resto, conforme o grau da potencia é par ou impar.

IV. Provar, sem se servir do principio demonstrado no § 116, que todo o numero inteiro augmenta ou diminue de um multiplo de 9, quando se muda o logar a algum dos seus algarismos ou se escrevem zeros entre dois d'elles.

V. Provar, sem se servir do principio demonstrado no § 121, que todo o numero inteiro augmenta ou diminue de um multiplo de 11, quando se trocam os logares a dois algarismos de ordem par ou a dois de ordem impar.

VI. Provar, sem se servir do § 121, que é multiplo de 11 o numero inteiro, no qual todas as classes de dois algarismos se compõem de algarismos iguaes, como 223344, 550066, 448877, etc.

VII. Provar que o resto da divisão de um numero inteiro por $100 - 1$ ou 99, $1000 - 1$ ou 999, $10000 - 1$ ou 9999, etc., é o mesmo que o resto que se obtem dividindo pelo divisor empregado a somma das classes de 2, 3, 4, etc., algarismos contadas da direita do numero dado.

VIII. Provar que o resto da divisão de um numero inteiro por 101, 1001, 10001, etc., póde obter-se decompondo o numero em classes de 2, 3, 4, etc., algarismos a contar da direita, subtrahindo a somma das classes pares da somma das classes impares, ou, quando fôr necessario, d'esta somma augmentada de 101, 1001, 10001, etc., e dividindo o resto pelo divisor de que se trata.

IX. Provar que o numero inteiro no qual as classes de 3, 4, 5, etc., algarismos se compõem de algarismos iguaes é multiplo de 111, 1111, 11111, etc.

X. Provar que o resto da divisão de um numero inteiro por 37 póde obter-se decompondo o numero em classes de 3 algarismos a partir da direita, sommando as classes e dividindo a somma por 37.

XI. Provar que o resto da divisão de um numero composto de 3 ou menos algarismos por 7 póde achar-se dividindo por 7 a somma do algarismo das unidades, com o triplo do algarismo das dezenas e o dobro do algarismo das centenas.

XII. Provar que o resto da divisão de um numero composto de 3 ou menos al-

garismos por 13, póde achar-se dividindo por 13 o resto que fica depois de se subtrahir a somma do triplo do algarismo das dezenas com o quadruplo do das centenas do algarismo das unidades, ou, sendo preciso, da somma d'este com um multiplo de 13.

XIII. Provar que o resto da divisão de qualquer numero inteiro por 7, ou por 13 póde achar-se decompondo o numero em classes de 3 algarismos da direita para a esquerda, subtrahindo a somma das classes pares da somma das classes impares, ou d'esta augmentada de um multiplo do divisor e dividindo o resto por 7, ou por 13.

XIV. Demonstrar que o erro commettido na multiplicação de dois inteiros, quando se escreve um producto parcial fóra do seu logar, nunca póde ser accusado pela prova dos noves e só o póde ser pela dos onzes, quando os algarismos do producto parcial estão 1, 3, 5, etc., casas para a esquerda ou para a direita, das que lhes competem e não deixam de representar unidades inteiras.

CAPITULO II

Maximo divisor commum—Numeros primos entre si

131. **Maximo divisor commum** *de dois, ou mais numeros inteiros é o maior numero inteiro que os divide* (§ 102) *a todos exactamente.*

Dois ou mais numeros inteiros são **primos entre si,** *quando têem por maximo divisor commum a unidade.* Os numeros primos entre si só têem um divisor commum, que é a unidade.

Tres ou mais numeros inteiros são **primos entre si dois a dois,** *quando qualquer d'elles é primo com cada um dos outros.* Os numeros 8, 15 e 77 são primos entre si dois a dois, porque entre 8 e 15, 8 e 77, 15 e 77 só ha o divisor commum 1.

132. Tres ou mais numeros inteiros podem ser primos entre si, sem comtudo o serem dois a dois. Assim os numeros 8, 15 e 14 são primos entre si, porque o seu maximo divisor commum é 1, mas não são primos entre si dois a dois, porquanto entre elles ha dois numeros, 8 e 14, cujo maximo divisor commum não é unidade.

Sendo, porém, primos entre si dois de tres ou mais numeros inteiros necessariamente todos estes serão primos entre si. Assim, por serem primos entre si os dois numeros 8 e 15, serão primos entre si 8, 15 e 14 e, em geral qualquer grupo de numeros, no qual se comprehendão aquelles dois. Com effeito, se não fossem primos entre si os numeros 8, 15 e 14, o seu maximo divisor commum seria um numero inteiro differente de unidade, que dividiria exactamente cada um dos numeros dados e seria por consequencia um divisor commum dos dois numeros 8 e 15, que por hypothese são primos entre si.

133. *O maximo divisor commum de dois, ou mais numeros inteiros é o menor de todos elles, quando o menor é submultiplo do outro, ou de cada um dos outros,* isto é, se os numeros 24, 60 e 72, por exemplo, forem multiplos de 12, será 12 o maximo divisor commum dos numeros 12, 24, 60 e 72.

Com effeito 12 divide por hypothese 24, 60 e 72 e, como é tambem divisor de si mesmo, 12 é um dos divisores communs dos quatro numeros 12, 24, 60 e 72. E, porque nenhum numero maior que 12 póde dividir 12, será 12 o maior de todos os divisores communs de 12, 24, 60 e 72.

Se os numeros fossem apenas dois, 12 e 24 por exemplo, e o maior 24 fosse multiplo do outro 12, seria tambem o menor o maximo divisor commum dos dois numeros.

134. *O maximo divisor commum de tres, ou mais numeros inteiros é igual ao maximo divisor commun dos numeros, que restarem depois de excluidos dos numeros dados os que forem multiplos de alguns d'elles*, isto é, o maximo divisor commum dos numeros 8, 12, 16 e 36 será tambem maximo divisor commum dos numeros 8 e 12, que são os que restam d'aquelles quatro numeros depois de excluidos 16 e 36, que são respectivamente multiplos de 8 e de 12.

Com effeito, por serem 8 e 12 submultiplos de 16 e de 36, qualquer numero, que divida exactamente tanto 8 como 12, dividirá (§ 106) tambem exactamente 16 e 36 e será portanto um dos divisores communs de 8, 12, 16 e 36. Logo o maximo divisor commum dos dois numeros 8 e 12 é divisor commum dos quatro numeros 8, 12, 16 e 36.

O maximo divisor commum dos dois numeros 8 e 12 não só é um dos divisores communs de 8, 12, 16 e 36; mas é o maior de todos elles, porque, sendo divisor commum de 8 e 12 qualquer numero que divida exactamente 8, 12, 16 e 36, se o maximo divisor commum d'estes quatro numeros excedesse o maior divisor commum de 8 e 12, admittiriam estes dois numeros um divisor commum maior que o seu maximo divisor commum, o que evidentemente é absurdo.

135. *O maximo divisor commum de dois, ou mais numeros inteiros não muda de valor, quando algum d'elles se substitue pelo resto da sua divisão por um dos numeros dados e inferiores a elle*, isto é, o maximo divisor commum dos numeros 12, 54 e 182 não muda de valor, quando se substitue o numero 182, por exemplo, por 20, que é o resto da divisão de 182 por 54.

Representando em geral por D o maximo divisor commum dos tres numeros 12, 54 e 182, será evidentemente zero o resto da divisão de cada um d'elles por D e sabe-se que este resto não mudará de valor (§ 103) se ao dividendo se juntar ou subtrahir um multiplo de D. Ora qualquer dos tres numeros dados é por hypothese um multiplo de D e por consequencia será divisivel por D cada uma das differenças $182-54$, $182-54.2$, $182-54.3$, a ultima das quaes é igual ao resto 20 que resulta da divisão de 182 por 54. Logo *o maximo divisor commum* D *dos numeros* 12, 54 *e* 182 *é um dos divisores communs de* 12, 54 *e* 20.

O maximo divisor commum D dos tres numeros 12, 54 e 182 não só é um dos divisores communs de 12, 54 e 20, mas é o maior de todos elles, porque, se estes tres numeros 12, 54 e 20 admittissem um divisor commum maior que D, esse tal divisor commum, tambem (§ 103) dividiria exactamente $20+54$, $20+54.2$, $20+54.3$ e, como esta ultima somma é 182, seria elle um divisor commum de 12, 54 e 182 e por consequencia estes tres numeros admittiriam contra a hypothese um divisor commum maior que D.

136. *O maximo divisor commum de dois, ou mais numeros inteiros é igual ao maximo divisor commum do menor d'elles e do resto da divisão do outro, ou de cada um dos outros pelo dito menor numero.*

Depois do que se acabou de demonstrar (§ 135) o maximo divisor commum dos numeros 168, 378 e 396 é igual ao maximo divisor commum dos numeros 168, 42 e 396, se 42 fôr o resto da divisão de 378 por 168 e pela mesma rasão o maximo divisor commum dos numeros 168, 42 e 396 será igual ao maximo divisor commum de 168, 42 e 60, suppondo que 60 é o resto da divisão de 396 por 168.

137. Na doutrina exposta no § precedente funda-se um dos processos de achar o maximo divisor commum de dois ou mais numeros inteiros.

Sejam 156, 1134, 2820 e 11088 quatro numeros inteiros, cujo maximo divisor commum se procura. Dividindo os tres ultimos pelo primeiro, que é o menor, acham-se os restos 42, 12 e 12. Logo (§ 136) o maximo divisor commum dos numeros

156 1134 2820 11088

é igual ao maximo divisor commum dos numeros

156 42 12 12

Procedendo com estes tres numeros differentes (156, 42 e 12), como se procedeu com os quatro numeros dados, acha-se que o maximo divisor commum d'elles é igual (§ 134) ao maximo divisor commum dos numeros

6 12

e finalmente dividindo 12 por 6, e advertindo que o resto da divisão é nullo, conclue-se (§ 134) que 6 é maximo divisor commum de 6 e 12, e por consequencia que 6 é maximo divisor commum de 156, 42 e 12 e maximo divisor commum dos quatro numeros dados.

É facil reconhecer que este processo é geral, isto é, que póde applicar-se a quaesquer numeros inteiros. Com effeito, dividindo todos os numeros dados menos o menor por este menor numero

ha de acontecer necessariamente que todas as divisões sejam exactas, ou não. No primeiro caso é o divisor de todas essas divisões (§ 133) o maximo divisor commum procurado; no segundo caso é este maximo divisor commum igual ao maximo divisor commum do numero, que serviu de divisor em todas as divisões e dos restos das mesmas divisões. Procedendo com estes novos numeros, como se procedeu com os primeiros; e, excluindo os que se reduzirem a zero (§ 134), acham-se outros numeros ainda menores, cujo maximo divisor commum é igual ao dos numeros dados. Continuando a proceder d'este modo, os numeros, que vão occupando o logar dos propostos, hão de necessariamente desapparecer ou diminuir de valor e como esta diminuição é possivel, em quanto houver dois ou mais numeros e não póde deixar de ser limitada, pois que nenhum dos numeros póde ser inferior a zero, segue-se que se chegará a obter um só numero, que será evidentemente o maximo divisor commum de todos os numeros dados, bem como de cada uma das series, que successivamente se formaram.

Quando este numero unico é 1, os numeros são primos entre si.

138. O processo ordinario de achar o maximo divisor commum de dois numeros inteiros não differe do processo geral acabado de expor e funda-se, como este, nos principios demonstrados nos §§ 133 e 135.

Para se obter o maximo divisor commum dos numeros 504 e 132 divide-se o maior pelo menor e, se o resto fôr nullo, será o menor (§ 133) o maximo divisor commum dos dois numeros. Suppondo que o resto não é nullo, e que é 108, como acontece no exemplo proposto, será (§ 135) o maximo divisor commum de 504 e 132 igual ao maximo divisor commum de 108 e 132. Procedendo com estes ultimos dois numeros, como se procedeu com os dois numeros dados e continuando assim successivamente, como os ultimos numeros hão de ser sempre menores que os antecedentes, por ser em cada divisão o resto menor que o divisor, chegar-se-ha necessariamente a um systema de dois numeros, um dos quaes seja zero, porque, emquanto isto não succeder, sempre será possivel, effectuando uma nova divisão, obter dois numeros ainda mais pequenos. D'esses dois numeros, o que é zero representa o resto da divisão em que o divisor era o outro numero. O divisor d'esta divisão sem resto é o maximo divisor commum procurado. Quando os dois numeros são primos entre si (§ 131) este ultimo divisor, isto é, o maximo divisor commum, é 1. O processo exposto serve portanto para achar o maximo divisor commum de dois numeros e para descobrir se elles são primos entre si.

Quando, por acaso, applicando o processo descripto, se reconhece que o dividendo e o divisor de uma das divisões são numeros primos entre si, é desnecessario continuar a operação, visto saber-se que os dois numeros dados são tambem primos entre si.

O mesmo acontece, quando á vista se reconhece, qual é o maximo divisor commum do dividendo e divisor de uma divisão, porque esse maximo divisor commum ha de ser tambem maximo divisor commum dos dois numeros dados.

139. A operação do maximo divisor commum de dois numeros dispõe-se na pratica como se vê no seguinte exemplo, em que se procura o maximo divisor commum dos numeros 698 e 128.

		5	2	4	1	5
698	128	58	12	10	2	
58	12	10	2	0		

Para se obter o maximo divisor commum de dois numeros *divide-se o maior pelo menor, escrevendo este á direita d'aquelle e separado d'elle por um traço vertical, e o quociente incompleto por cima do divisor, divide-se depois o divisor d'esta divisão pelo resto, o divisor d'esta segunda divisão pelo resto da mesma divisão, e continua-se a dividir o divisor de cada divisão pelo seu resto, até que se chegue a uma divisão em que o resto seja nullo, ou em que o dividendo e o divisor tenham um maximo divisor commum conhecido. O divisor da divisão sem resto, ou o maximo divisor commum conhecido do dividendo e divisor de qualquer das divisões, é o maximo divisor commum procurado*[1].

140. *O maximo divisor commum dos productos, ou quocientes de dois, ou mais numeros inteiros por um factor, ou divisor commum, é igual ao producto, ou quociente do maximo divisor commum d'aquelles numeros inteiros pelo referido factor, ou divisor commum.*

Sabe-se, com effeito, que o maximo divisor commum dos productos

$$156\times5 \qquad 1134\times5 \qquad 2820\times5 \qquad 11088\times5$$

é igual (§ 136) ao maximo divisor commum do menor d'elles (156×5) e dos restos das divisões dos tres productos maiores por aquelle menor producto. Mas o resto da divisão de 1134×5 por 156×5 é igual (§ 95) ao producto de 5 pelo resto da divisão de 1134 por 156, e o mesmo acontece aos restos das divisões de 2820×5 e de 11088×5 por 156×5. Sabendo-se, pois, que dividindo 1134,

---

[1] Os inglezes e os allemães, seguindo o seu systema (§ 86 nota) de escreverem o divisor á esquerda do dividendo e o quociente incompleto á direita, dispõem a operação assim

128	698	5								
	640									
	58		128	2						
			116							
			12	58	4					
				48						
				10	12	1				
					10					
					2	10	5			
						10				
						0				

2820 e 11088 por 156 se obtêem os restos 42, 12 e 12, concluir-se-ha que o maximo divisor commum dos quatro productos dados é igual ao maximo divisor commum dos seguintes productos

$$156\times5 \qquad 42\times5 \qquad 12\times5 \qquad 12\times5$$

Raciocinando do mesmo modo, e tendo presentes os resultados obtidos no § 137, reconhece-se que o maximo divisor commum d'estes productos é igual ao dos productos (§ 134)

$$6\times5 \qquad 12\times5$$

e como 12 dividido por 6 dá zero de resto, segue-se (§ 95) que 12×5 é multiplo de 6×5 e por consequencia (§ 133) que 6×5 é o maximo divisor commum de 6×5 e 12×5. Logo, sendo 6 o maximo divisor commum de 156; 1134; 2820 e 11088; será 6×5 o maximo divisor commum de 156×5; 1134×5; 2820×5; e 11088×5.

Partindo do principio (§ 95) que, quando se divide o dividendo e o divisor por um dos seus divisores communs, o resto vem dividido pelo mesmo divisor commum acha-se similhantemente que o maximo divisor commum de

$$156:2 \qquad 1134:2 \qquad 2820:2 \qquad 11088:2$$

é igual ao maximo divisor commum de

$$156:2 \qquad 42:2 \qquad 12:2 \qquad 12:2$$

e que o maximo divisor commum d'estes quocientes é o mesmo que o dos quocientes

$$6:2 \qquad 12:2$$

Finalmente, por ser 12 divisivel por 6 é (§ 95) o quociente $12:2$ multiplo de $6:2$ e por consequencia (§ 133) o quociente $6:2$ é o maximo divisor commum de $6:2$ e de $12:2$ e tambem o é de $156:2$; $1134:2$; $2820:2$ e $11088:2$.

Dividindo quaesquer numeros inteiros pelo seu maximo divisor commum obtêem-se quocientes, que são primos entre si, porque têem para maximo divisor commum o quociente do maximo divisor commum dos numeros dados dividido por si mesmo.

141. Por meio do § antecedente póde em muitos casos simplificar-se a operação do maximo divisor commum. Para achar, por exemplo, o maximo divisor commum dos numeros 1860000 e 489000 dividem-se ambos estes numeros pelo divisor commum 1000, e procura-se depois o maximo divisor commum dos quocientes 1860 e 489.

	3	1	4	10	1	2
1860	489	393	96	9	6	3
393	96	9	6	3	0	

Multiplicando por 1000 o maximo divisor commum 3 dos numeros 1860 e 489, acha-se 3000 para maximo divisor commum dos numeros 1860000 e 489000.

142. *Todo o divisor commum de dois, ou mais numeros inteiros é divisor do seu maximo divisor commum.*

Represente-se em geral por D o maximo divisor commum dos quatro numeros 156; 1134; 2820 e 11088 e seja 2 um dos outros divisores communs. É evidente que os quatro quocientes

$$156:2; \quad 1134:2; \quad 2820:2; \quad 11088:2;$$

serão numeros inteiros e terão (§ 140) por maximo divisor commum o quociente $D:2$. E como o maximo divisor commum é um numero inteiro (§ 131) segue-se que 2 é um dos divisores de D.

143. *Todo o numero inteiro, que divide um producto de dois factores inteiros, e que é primo com um d'elles, divide o outro factor.*

Sendo o producto 72×25 divisivel por 12, e sendo 12 primo com 25, será 12 divisor de 72.

Com effeito, se 25 e 12 são numeros primos entre si, o seu maximo divisor commum é 1 (§ 131), e portanto (§ 140) o maximo divisor commum dos productos 72×25 e 72×12 é 72×1 ou 72.

Mas 12 divide 72×12, porque (§ 93)

$$72\times12:12=72(12:12)=72\cdot1=72$$

e divide tambem 72×25 por hypothese, logo (§ 142) 12 divide o maximo divisor commum d'estes productos e por consequencia divide 72.

144. *O maximo divisor commum de dois numeros inteiros não muda de valor, quando um d'elles se multiplica por um numero primo com o outro.*

Sendo 12 o maximo divisor commum de 504 e 132, será tambem 12 o maximo divisor commum de 504×25 e 132, suppondo que 25 é primo com 132.

Suppondo que 25 é primo com 132, será 25 primo com qualquer divisor de 132, porque o numero, que dividisse exactamente 25 e este divisor, seria (§ 106) um divisor commum de 25 e 132. Qualquer divisor commum de 132 e 504×25 não póde, pois, deixar (§ 143) de dividir exactamente 132 e 504. Logo *o maximo divisor commum de* 504×25 *e* 132 *é um dos divisores communs de* 132 e 504.

O maximo divisor commum de 504×25 e 132 não sómente é um dos divisores communs de 504 e 132, mas é o maior de todos elles, porque, se um numero ainda maior dividisse 504 e 132, esse mesmo numero dividiria (§ 106) igualmente 504×25 e 132 e deixaria por consequencia o outro de ser o maximo divisor commum de 504×25 e 132.

145. *O maximo divisor commum de dois numeros não muda de*

valor, quando um d'elles se divide por um dos seus divisores, comtanto que este divisor seja primo com o outro numero.

Sendo 12 o maximo divisor commum de 504 e 132, será 12 o maximo divisor commum de 504 : 7 e 132, suppondo que 7 é primo com 132.

Com effeito, depois do que se demonstrou (§ 144), é evidente que o maximo divisor commum de 504 : 7 e 132 é igual ao maximo divisor commum de (504 : 7) 7 e 132 ou (§§ 78 e 79) de 504 e 132.

Tanto este principio, como o do § 140, póde empregar-se vantajosamente para simplificar o processo (§ 139) do maximo divisor commum.

146. Theorema[1]. *Todo o numero primo com os factores de um producto é primo com o producto.* Inversamente *todo o numero primo com um producto é primo com cada um dos factores do mesmo producto.*

Designando P um numero inteiro primo com outros numeros inteiros representados por as letras A, B, C, etc., será P primo com o producto $ABC\ldots$

Sendo P e A dois numeros primos entre si, o seu maximo divisor commum é 1 (§ 131), e como o maximo divisor commum entre P e A não muda de valor (§ 144), quando se multiplica A por um numero B primo com P, segue-se que o maximo divisor commum entre P e o producto AB é 1, ou que P e AB são primos entre si.

Sendo P e AB primos entre si, isto é, sendo 1 o seu maximo divisor commum, tambem 1 será o maximo divisor commum entre P e $AB \times C$ ou ABC, visto suppor-se que C é primo com P, logo P será primo com ABC. Do mesmo modo se raciocinaria se o producto tivesse mais de tres factores.

Inversamente se P fôr primo com o producto $ABC\ldots$, será P primo com qualquer dos factores, A por exemplo.

Se P e A não são primos entre si, é porque entre estes dois numeros ha um divisor commum differente da unidade, porém esse divisor commum não póde deixar de dividir todos os multiplos de A (§ 106), um dos quaes é o producto $ABC\ldots$, logo qualquer divisor commum de P e de A è divisor commum de P e $ABC\ldots$ e

---

[1] *Theorema* é uma proposição, que não é evidente por si mesma, mas que póde tornar-se evidente por meio de um raciocinio chamado *demonstração.*

Corollario é a consequencia immediata de um ou mais theoremas anteriormente demonstrados.

Escolio é uma observação feita sobre alguma demonstração com o fim especial de provar que ella póde ter maior extensão, que a que se lhe attribuiu, ou que ao contrario deixa de ser verdadeira em certos casos.

Problema é uma proposição ou questão que se dá para ser resolvida.

Lemma é uma proposição preliminar que serve de preparação ou de base para demonstrar um theorema ou para resolver um problema.

por consequencia, quando o maximo divisor commum de P e $ABC\ldots$ fôr unidade, tambem o maximo divisor commum de P e A ha de ser 1.

147. Corollario. *Quaesquer potencias de dois numeros primos entre si são outros numeros tambem primos entre si.*

Sendo P primo com A, é (§ 146) P primo com o producto $AAAA$ que é (§ 69) igual á potencia A^4.

Sendo A^4 primo com P será por igual motivo A^4 primo com o producto $PPPPP$, isto é, com a potencia P^5.

EXERCICIOS

I. Achar o maximo divisor commum dos numeros 10776 e 1000, de 17511 e 1625, de 7170 e 4920, de 9316 e 5593, e finalmente de 184621 e 35032.

II. Achar o maximo divisor commum dos numeros 11063, 11077 e 10994, de 1320, 1848 e 216, de 23375, 17875, 1025 e 175, e finalmente de 1999712, 782496, 39520, 11552 e 544.

III. Provar que o maximo divisor commum de mais de dois numeros inteiros não muda de valor, quando dois dos inteiros se substituem pelo seu maximo divisor commum.

IV. Provar que o maximo divisor commum de quaesquer inteiros A, B, C, D é igual ao maximo divisor commum dos inteiros E, F, G que se obtêem procurando o maximo divisor commum de A e B, o de B e C e o de C e D.

V. Dando-se dois numeros inteiros dos quaes um se escreve só com o algarismo 9, como por exemplo 9999, e outro N não tem mais algarismos do que o primeiro, e escrevendo á esquerda de N, quando fôr preciso, os zeros necessarios para que ambos os numeros fiquem escriptos com igual quantidade de algarismos, provar que todo o divisor d dos dois numeros dividirá cada um dos numeros, que successivamente se formar de N passando o primeiro algarismo da esquerda para a direita de todo o numero. Suppondo que 33 é divisor commum de 9999 e de 891, será 33 divisor dos numeros 8910; 9108 e 1089.

VI. Provar que, se A e B forem numeros primos entre si, haverá dois inteiros a e b que tornem

$$Ab - Ba = 1$$

e inversamente que não póde existir uma igualdade d'esta fórma, designando A, B, a, b numeros inteiros, sem que qualquer dos factores A de um dos dois productos seja primo com cada um dos factores do outro producto Ba.

VII. Provar que, sendo A e B primos entre si, o maximo divisor commum de $A+B$ e $A-B$ será 2 ou 1.

VIII. Provar que todo o numero primo com 2 e 3 é igual a um multiplo de 6 augmentado ou diminuido de 1.

IX. Provar que o producto de tres numeros inteiros consecutivos é divisivel por $1 \times 2 \times 3$.

X. Provar que 6 é divisor de todo o producto de tres factores, dos quaes dois são numeros inteiros consecutivos e o terceiro é igual á somma dos dois primeiros.

CAPITULO III

Menor multiplo commum

148. Menor multiplo commum *de dois, ou mais numeros inteiros é o menor numero inteiro divisivel* (§ 102) *por cada um d'elles.*

Sendo 180 um numero divisivel por 12, por 15 e por 18, será

180 um *multiplo commum* dos numeros 12, 15 e 18, e, suppondo que nenhum outro numero inferior a 180 é multiplo commum d'estes tres numeros, será 180 o *menor multiplo commum* dos referidos numeros.

149. **Theorema.** *Todo o multiplo commum de dois numeros inteiros é multiplo do quociente, que se obtem dividindo o producto dos mesmos numeros pelo seu maximo divisor commum* e inversamente.

Designando M um multiplo commum de 300 e de 588, e suppondo que 12 é o maximo divisor commum d'estes dois numeros, será M um multiplo do quociente $300 \times 588 : 12$.

Com effeito, sendo

$$300 = 12 \times 25 \quad \text{e} \quad 588 = 12 \times 49$$

é evidente (§ 102) que, se M for multiplo de 300, ter-se-ha

$$M = 12 \times 25 \times m$$

representando m um numero inteiro.

Admittindo tambem que M é multiplo de 588, é claro que será inteiro o quociente que resultar da divisão do producto $12 \times 25 \times m$ por o producto 12×49, e como este quociente não muda de valor, se se dividirem ambos os termos (§ 95) por 12, segue-se que o producto $25 \times m$ é divisivel por 49. Mas 49 e 25 são numeros primos entre si, se acaso 12 é o maximo divisor commum (§ 140) entre 300 e 588, logo (§ 143) 49 divide exactamente m. Chamando n ao quociente, que se obtem dividindo m por 49, tem-se

$$m = 49 \times n$$

e por consequencia

$$M = 12 \times 25 \times 49 \times n \quad \text{ou} \quad M = 300 \times 49 \times n$$

e finalmente (§ 93) $M = (300 \times 588 : 12)\, n$

isto é, M ou, em geral, qualquer multiplo de 300 e 588, é o producto do quociente $300 \times 588 : 12$ por um numero inteiro arbitrario.

Inversamente todo o multiplo do quociente $300 \times 588 : 12$ é multiplo commum dos numeros 300 e 588, comtanto que um dos divisores communs d'estes numeros seja 12, ainda mesmo que 12 não seja o maximo divisor commum.

Com effeito, aquelle quociente é igual (§ 93) a qualquer dos productos $300(588 : 12)$ ou $588(300 : 12)$, nos quaes ambos os factores são por hypothese inteiros, e portanto 300 e 588 são submultiplos do quociente $300 \times 588 : 12$. Sendo 300 e 588 submultiplos d'este quociente, serão tanto um como outro (§ 106) submultiplos de qualquer multiplo do mesmo quociente.

150. Quando dois numeros são primos entre si, o seu maximo

divisor commum (§ 131) é 1 e por consequencia: *todo o multiplo commum de dois numeros primos entre si é multiplo do producto dos mesmos numeros.* Este principio póde tambem enunciar-se (§ 102) assim: *todo o numero inteiro divisivel por dois numeros primos entre si é divisivel pelo seu producto.*

151. **Corollarios.** *Todo o numero inteiro divisivel por* 2 (§ 114) *e por* 3 (§ 118) *é divisivel por* 6.

Todo o numero inteiro divisivel por 4 (§ 113) *e por* 3 *é divisivel por* 12.

Todo o numero inteiro divisivel por 3 *e por* 5 (§ 114) *é divisivel por* 15.

Todo o numero inteiro divisivel por 2 *e por* 9 *é divisivel por* 18, etc.

152. **Theorema.** *Todo o multiplo commum de tres ou mais numeros primos entre si dois a dois* (§ 131) *é multiplo do producto dos mesmos numeros.*

Sendo M multiplo de A, de B, de C, etc., e sendo A, B, C, etc., primos entre si dois a dois, será M multiplo do producto $ABC\ldots$

Se M é multiplo commum de A e de B, sendo A e B primos entre si, será (§ 150) M multiplo do producto AB. Suppondo que C é primo com A e com B, será (§ 146) C primo com o producto AB e como M é multiplo commum de AB e de C, que são numeros primos entre si, segue-se que M é multiplo do producto ABC. O mesmo raciocinio se empregaria, se fosse maior o numero de factores.

É evidente (§ 102) que esta mesma proposição póde enunciar-se assim: *todo o numero inteiro divisivel por tres ou mais numeros primos entre si dois a dois é divisivel pelo seu producto.*

153. Dando a n (§ 149) quaesquer valores inteiros, isto é, multiplicando o quociente $300 \times 588 : 12$ por 1, 2, 3, 4, etc., obtem-se uma serie illimitada e crescente de multiplos communs de 300 e de 588. De todos estes multiplos communs o menor é evidentemente o que corresponde a n igual a 1. *O menor multiplo commum de dois numeros é portanto igual ao quociente que se obtem dividindo o producto dos dois numeros pelo seu maximo divisor commum.* Póde tambem enunciar-se esta proposição assim: *o producto de dois numeros inteiros é igual ao producto do seu maximo divisor commum pelo seu menor multiplo commum.*

154. Quando os dois numeros são primos entre si, o seu maximo divisor commum é 1, e por consequencia *o menor multiplo commum de dois numeros primos entre si é igual ao producto dos mesmos numeros.*

155. Do theorema demonstrado no § 149, conclue-se que *todo o multiplo commum de dois numeros inteiros é multiplo do seu menor multiplo commum.*

156. Sabendo-se obter o maximo divisor commum de dois nu-

meros é facil calcular o seu menor multiplo commum, e inversamente, conhecido este, póde tambem obter-se aquelle, sem recorrer á regra do § 139.

Sabendo-se que 3 é (§ 153) o maximo divisor commum de 1860 e 489, será o menor multiplo cummum d'estes dois numeros igual a

$$1860 \times 489 : 3 \quad \text{ou} \quad 620 \times 489 = 303180$$

Inversamente dado o menor multiplo commum 303180 dos numeros 1860 e 489 achar-se-ha o seu maximo divisor commum dividindo o producto 1860×489 por 303180.

157. **Theorema.** *O menor multiplo commum de tres, ou mais numeros inteiros não muda de valor, quando dois d'elles se substituem pelo seu menor multiplo commum.*

Sendo 1260 o menor multiplo commum dos quatro numeros 12, 18, 15 e 35, e sendo 36 o menor multiplo commum de 12 e 18, será 1260 o menor multiplo commum dos tres numeros 36, 15 e 35.

Com effeito, sendo 1260 menor multiplo commum de 12, 18, 15 e 35, será 1260 multiplo commum de 12 e 18 e consequentemente (§ 155) um dos multiplos do menor multiplo commum 36 d'estes dois numeros. Logo 1260 é multiplo commum de 36, 15 e 35, e evidentemente é o menor multiplo commum d'estes tres numeros, porque, se elles tivessem um multiplo commum inferior a 1260, esse multiplo commum seria tambem multiplo dos quatro numeros 12, 18, 15 e 35, pois que não podia ser multiplo de 36 (§ 106) sem o ser igualmente de 12 e 18, e então deixaria de ser 1260 o menor multiplo commum de 12, 18, 15 e 35, como se havia supposto.

158. Sabendo-se achar o menor multiplo commum de dois numeros (§ 156), é facil achar o menor multiplo commum de tres, ou mais numeros substituindo dois d'estes numeros pelo seu menor multiplo commum, substituindo depois este e um dos numeros restantes pelo seu menor multiplo commum, e continuando assim até haver só dois numeros. O menor multiplo commum d'estes dois numeros é o menor multiplo commum de todos os numeros dados.

O quadro seguinte indica o modo por que se procede, quando se quer empregar este meio para achar o menor multiplo commum de 12, 18, 15 e 35

12 18 15 35

menor multiplo commum
36

menor multiplo commum
180

menor multiplo commum
1260

159. **Theorema.** *Todo o multiplo commum de tres, ou mais numeros inteiros é multiplo do seu menor multiplo commum.*

Com effeito, todo o multiplo commum de 12, 18, 15 e 35 é multiplo commum de 12 e 18, e por consequencia (§ 155) multiplo do seu menor multiplo commum 36. Logo todo o multiplo commum de 12, 18, 15 e 35 é multiplo commum de 36, 15 e 35. Do mesmo modo se prova que todo o multiplo commum de 36, 15 e 35 é multiplo commum de 180 e de 35, e portanto (§ 155) de 1260, que é o seu menor multiplo commum.

160. **Theorema.** *O menor multiplo commum de tres ou mais numeros primos entre si dois a dois é igual ao producto de todos os referidos numeros.*

Sendo 8, 15 e 49 tres numeros primos entre si dois a dois (§ 131), será $8 \times 15 \times 49$ o menor multiplo commum dos tres numeros.

Sendo 8 e 15 dois numeros primos entre si, é (§ 154) 8×15 o menor multiplo commum de 8 e 15. Sendo 8 e 15 primos com 49, será (§ 146) o producto 8×15 primo com 49, e portanto o menor multiplo commum dos numeros primos entre si 8×15 e 49 será (§ 154) o producto de 8×15 por 49 ou $8 \times 15 \times 49$.

Logo $8 \times 15 \times 49$ é o menor multiplo commum dos tres numeros dados 8, 15 e 49.

EXERCICIOS

I. Achar o menor multiplo commum dos numeros 25 e 15; 264 e 96; 1200 e 540; 825 e 1000; 6837 e 3642; 8609 e 9437.

II. Achar o menor multiplo commum dos numeros 27, 54 e 108; 8, 6, 12 e 26; 457, 829, 1200 e 7840; 2, 4, 10, 12, 18 e 27.

III. Provar que multiplicar dois ou mais numeros por um factor commum equivale a multiplicar o seu menor multiplo commum pelo dito factor commum; e que dividir dois ou mais numeros por um dos seus divisores communs equivale a dividir o seu menor multiplo commum pelo referido divisor commum.

IV. Provar que multiplicar um de dois numeros dados por um factor primo com o outro equivale a multiplicar o seu menor multiplo commum pelo dito factor; e que dividir um dos mesmos numeros por um dos seus divisores equivale a dividir por elle o menor multiplo commum, quando o referido divisor é primo com o outro numero.

V. Provar que o menor multiplo commum L de mais de dois numeros A, B, C, D, póde achar-se procurando os menores multiplos communs E, F e G dos pares de numeros A e B, B e C, C e D, depois os menores multiplos communs H e K de E e F e de F e G, e finalmente o menor multiplo commum L de H e K.

VI. Provar que dividindo o menor multiplo commum de dois, ou mais numeros por cada um d'estes numeros se obtêem quocientes primos entre si.

VII. Quaes são as condições de divisibilidade de um numero por 22; 33; 44; 55;... 99?

VIII. Achar dois numeros conhecendo a sua somma 30 e o seu menor multiplo commum 36.

CAPITULO IV

Numeros primos — Composição do maximo divisor commum e do menor multiplo commum

161. Todo o numero inteiro tem sempre dois divisores (§ 102), a unidade e o proprio numero, e póde ter ainda mais divisores.

Numero primo *é o numero inteiro, que só tem por divisores a unidade e o proprio numero.*

O numero 7 é primo, porque só é divisivel (§ 102) por 1 e por 7; o numero 6 não é primo, porque, além de ser divisivel por 1 e por 6, admitte os divisores 2 e 3.

162. Dois numeros primos são primos entre si, porque sendo, como deve suppor-se, desiguaes, só têem o divisor commum 1. A inversa não é verdadeira, isto é, dois numeros pódem ser primos entre si sem serem primos. Os numeros 8 e 9 estão n'este caso. Pelo mesmo modo se demonstra que tres ou mais numeros primos são sempre primos entre si.

163. **Theorema.** *Qualquer numero inteiro ou é primo com um numero primo, ou é um dos seus multiplos.*

Com effeito, o maximo divisor commum de dois numeros, dos quaes um é primo, ha de ser um dos divisores do numero primo, e por consequencia (§ 161) só póde ser 1 ou o proprio numero primo. No primeiro caso ambos os numeros são primos entre si (§ 131), no segundo caso o numero, que não é primo, é um multiplo do numero primo.

164. **Corollario.** *Todo o numero primo é primo com qualquer dos numeros inteiros inferiores,* porque, não podendo estes numeros ser multiplos d'aquelle numero primo, só podem ter com elle o divisor commum unidade.

165. **Theorema.** *Todo o numero primo, que divide um producto, divide pelo menos um dos seus factores.*

Se o numero 5 for primo e dividir o producto $12 \times 18 \times 15$, ha de pelo menos dividir um dos tres factores 12, 18 ou 15.

Um producto $12 \times 18 \times 15$ de mais de dois factores, póde sempre considerar-se composto de dois factores, 12 e 18×15.

Se o numero 5 divide o primeiro factor 12, o theorema é verdadeiro, se não divide 12, é 5 primo com 12 (§ 163), e por consequencia (§ 143) o producto 18×15 é divisivel por 5. Raciocinando sobre este producto, como se raciocinou sobre o primitivo producto, que tinha mais um factor, reconhece-se que ou 18 ou 15 ha de ser divisivel por 5.

166. **Corollario.** *Um numero primo não póde dividir um producto de numeros primos sem ser igual a um d'elles,* porque, devendo (§ 165) ser divisor de outro numero primo, só o poderá ser, se ambos os numeros forem iguaes entre si.

167. **Theorema.** *O menor divisor* (além de unidade) *de qualquer numero multiplo é numero primo.*

Com effeito, o menor divisor de qualquer inteiro não póde ser numero multiplo, porque, se o fosse, os divisores d'este numero multiplo seriam divisores (§ 106) d'aquelle inteiro e deixaria o numero multiplo de ser o menor divisor.

168. **Theorema.** *Todo o numero inteiro inferior ao quadrado de um numero primo, senão é numero primo, admitte um divisor primo menor que o mesmo numero primo.*

Represente N um numero inteiro inferior ao quadrado de um numero primo, 11 por exemplo. Não sendo N um numero primo, admittirá para divisor (§ 167) um numero primo P, e designando Q o numero inteiro, que se obtem dividindo N por P, será

$$N = PQ$$

e portanto $\quad PQ < 11^2 \quad$ ou $\quad PQ < 11 \times 11$

É evidente que P ha de ser inferior, igual ou superior a 11. Da ultima desigualdade conclue-se que não póde ser $P >$ ou $= 11$ sem ser $Q < 11$ e como Q é um inteiro, que divide PQ ou N segue-se que em taes hypotheses o menor divisor de N divide exactamente Q e é portanto inferior a 11. Sendo $P < 11$ o theorema é igualmente verdadeiro. Logo N ou é primo ou admitte um divisor primo inferior a 11.

169. Excluindo da serie natural dos numeros inteiros todos os numeros multiplos contidos n'ella, obtem-se uma taboa de numeros primos. O processo empregado para fazer essa exclusão foi inventado por Eratosthenes, que lhe deu o nome de *crivo*.

Para construir uma taboa de numeros primos pelo methodo denominado *crivo de Eratosthenes* escrevam-se os numeros inteiros 1, 2, 3, 5, 7, etc. até ao limite que se quizer, com exclusão de todos os numeros pares, excepto 2 que é entre os numeros pares o unico que é primo. Risquem-se depois os multiplos de 3 e para isso convém advertir que o menor d'esses multiplos ainda não riscado é 3^2 ou 9, pois que todo o inteiro inferior a 3^2 é primo ou (§ 168) admitte o divisor 2. Sabendo-se que 9 é o primeiro multiplo de 3, que deve riscar-se, não é difficil reconhecer que o terceiro numero (15), a contar de 9 exclusivamente, tambem é divisivel por 3, e assim successivamente, de modo que entre dois multiplos consecutivos de 3 fiquem apenas dois inteiros. Depois de se excluirem os multiplos de 3, segue-se excluir os multiplos de 5 por ser este o numero primo immediatamente superior a 3. O menor multiplo de 5, que tem de ser riscado é 5^2, porque os numeros inferiores a 25, que não forem primos, devem estar riscados já, porque (§ 168) hão de ser multiplos de algum numero primo inferior a 5. Riscando pois 25, e a partir d'este numero todos os outros de 5 em 5, de sorte que entre dois consecutivos haja quatro nu-

meros, tem-se a certeza de que o quadro já não contém multiplos de 5. Continua-se depois o processo excluindo os multiplos de 7, começando em 7^2 ou 49, e seguindo de 7 em 7 numeros, e assim se prosegue excluindo os multiplos dos numeros primos, que successivamente vão sendo dados pela taboa, até se chegar ao fim d'ella.

170. Theorema. *A serie dos numeros primos é illimitada*, isto é, por maior que seja um numero primo ha sempre outro ainda maior.

Para provar que, sendo 23, por exemplo, um numero primo, ha ainda outro numero primo maior que 23, escreva-se o producto de todos os numeros primos desde 1 até 23 e junte-se-lhe 1. Ter-se-ha assim uma expressão

$$1.2.3.5.7.11.13.17.19.23+1$$

que evidentemente representa um numero maior que 23, que póde ser, ou não primo.

Se aquella somma fôr um numero primo, então ha com effeito um numero primo maior que 23, e por consequencia é verdadeiro o theorema.

Se aquella somma[1] não fôr um numero primo, então ha de ter um divisor primo (§ 167), que não póde ser nenhum dos factores do producto indicado, porque dividindo a somma por um dos ditos factores deve achar-se (§ 105) o resto 1. Logo o divisor primo, que póde admittir a somma acima indicada, deve ser maior que 23, e portanto, ainda no caso da somma não ser um numero primo, se reconhece que existe um numero primo maior que 23.

Applicando o mesmo raciocinio a qualquer outro numero primo, por maior que elle pareça, prova-se igualmente que ha um numero primo maior ainda que elle.

171. Para se conhecer, sem recorrer á taboa dos numeros primos, se um numero N é multiplo ou primo, divide-se N por os numeros primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc., segundo a ordem da sua grandeza, até se chegar a uma divisão em que o resto seja nullo ou em que o quociente seja menor que o divisor. Se em todas estas divisões apparecer resto o numero é primo, se alguma d'ellas se fizer exactamente o numero é multiplo.

Funda-se este processo em que *todo o numero multiplo é o producto de um numero primo por um inteiro igual ou superior ao mesmo numero primo.*

Seja N um numero multiplo, cujo menor divisor é (§ 167) o numero primo P. Ter-se-ha

$$N=PQ$$

---

[1] Representando p um numero primo póde effectivamente ser, ou não um numero primo a somma $1\times2\times3\times5\times7\times11\times\ldots\times p+1$. Se se faz successivamente p igual a 2, 3, 5, 7, 11 acham-se os numeros primos 3, 7, 31, 211, 2311; se se faz p igual a 13, 17 e 19 acham-se os numeros multiplos $30031=59\times509$; $510511=19\times97\times277$ e $9699691=347\times27953$.

Taboa dos numeros primos desde 1 até 4801

1	251	593	953	1321	1733	2143	2593	3011	3467	3907	4349
2	257	599	967	1327	1741	2153	2609	3019	3469	3911	4357
3	263	601	971	1361	1747	2161	2617	3023	3491	3917	4363
5	269	607	977	1367	1753	2179	2621	3037	3499	3919	4373
7	271	613	983	1373	1759	2203	2633	3041	3511	3923	4391
11	277	617	991	1381	1777	2207	2647	3049	3517	3929	4397
13	281	619	997	1399	1783	2213	2657	3061	3527	3931	4409
17	283	631	1009	1409	1787	2221	2659	3067	3529	3943	4421
19	293	641	1013	1423	1789	2237	2663	3079	3533	3947	4423
23	307	643	1019	1427	1801	2239	2671	3083	3539	3967	4441
29	311	647	1021	1429	1811	2243	2677	3089	3541	3989	4447
31	313	653	1031	1433	1823	2251	2683	3109	3547	4001	4451
37	317	659	1033	1439	1831	2267	2687	3119	3557	4003	4457
41	331	661	1039	1447	1847	2269	2689	3121	3559	4007	4463
43	337	673	1049	1451	1861	2273	2693	3137	3571	4013	4481
47	347	677	1051	1453	1867	2281	2699	3163	3581	4019	4483
53	349	683	1061	1459	1871	2287	2707	3167	3583	4021	4493
59	353	691	1063	1471	1873	2293	2711	3169	3593	4027	4507
61	359	701	1069	1481	1877	2297	2713	3181	3607	4049	4513
67	367	709	1087	1483	1879	2309	2719	3187	3613	4051	4517
71	373	719	1091	1487	1889	2311	2729	3191	3617	4057	4519
73	379	727	1093	1489	1901	2333	2731	3203	3623	4073	4523
79	383	733	1097	1493	1907	2339	2741	3209	3631	4079	4547
83	389	739	1103	1499	1913	2341	2749	3217	3637	4091	4549
89	397	743	1109	1511	1931	2347	2753	3221	3643	4093	4561
97	401	751	1117	1523	1933	2351	2767	3229	3659	4099	4567
101	409	757	1123	1531	1949	2357	2777	3251	3671	4111	4583
103	419	761	1129	1543	1951	2371	2789	3253	3673	4127	4591
107	421	769	1151	1549	1973	2377	2791	3257	3677	4129	4597
109	431	773	1153	1553	1979	2381	2797	3259	3691	4133	4603
113	433	787	1163	1559	1987	2383	2801	3271	3697	4139	4621
127	439	797	1171	1567	1993	2389	2803	3299	3701	4153	4637
131	443	809	1181	1571	1997	2393	2819	3301	3709	4157	4639
137	449	811	1187	1579	1999	2399	2833	3307	3719	4159	4643
139	457	821	1193	1583	2003	2411	2837	3313	3727	4177	4649
149	461	823	1201	1597	2011	2417	2843	3319	3733	4201	4651
151	463	827	1213	1601	2017	2423	2851	3323	3739	4211	4657
157	467	829	1217	1607	2027	2437	2857	3329	3761	4217	4663
163	479	839	1223	1609	2029	2441	2861	3331	3767	4219	4673
167	487	853	1229	1613	2039	2447	2879	3343	3769	4229	4679
173	491	857	1231	1619	2053	2459	2887	3347	3779	4231	4691
179	499	859	1237	1621	2063	2467	2897	3359	3793	4241	4703
181	503	863	1249	1627	2069	2473	2903	3361	3797	4243	4721
191	509	877	1259	1637	2081	2477	2909	3371	3803	4253	4723
193	521	881	1277	1657	2083	2503	2917	3373	3821	4259	4729
197	523	883	1279	1663	2087	2521	2927	3389	3823	4261	4733
199	541	887	1283	1667	2089	2531	2939	3391	3833	4271	4751
211	547	907	1289	1669	2099	2539	2953	3407	3847	4273	4759
223	557	911	1291	1693	2111	2543	2957	3413	3851	4283	4783
227	563	919	1297	1697	2113	2549	2963	3433	3853	4289	4787
229	569	929	1301	1699	2129	2551	2969	3449	3863	4297	4789
233	571	937	1303	1709	2131	2557	2971	3457	3877	4327	4793
239	577	941	1307	1721	2137	2579	2999	3461	3881	4337	4799
241	587	947	1319	1723	2141	2591	3001	3463	3889	4339	4801

representando Q um numero inteiro, que, segundo os casos, será igual ou superior a P.

Logo dividindo qualquer multiplo N pelo seu menor divisor (além da unidade) obtem-se um quociente igual ou superior ao mesmo divisor.

Dando, pois, ao divisor primo os valores successivamente crescentes 2, 3, 5, 7, etc., os quocientes completos irão diminuindo e, não sendo exacta nenhuma das divisões effectuadas, bastará que se chegue a uma divisão, em que o quociente incompleto seja menor que o divisor correspondente, para se poder concluir que o numero ensaiado não é multiplo e por consequencia que é um numero primo.

Dividindo 179 pelos divisores primos

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17

acham-se os quocientes incompletos

89, 59, 35, 25, 16, 13, 10

e como todas estas divisões dão resto, e na ultima o quociente completo é menor que o divisor, segue-se que 179 é numero primo.

172. **Theorema.** *Todo o numero multiplo é igual a um producto de factores primos, iguaes ou desiguaes.*

Sendo 60984 um numero multiplo ha de forçosamente existir (§ 167) algum numero primo que o divida exactamente. E com effeito é facil conhecer (§ 114) que o numero dado é divisivel por 2. Dividindo 60984 por 2 acha-se

$$60984 = 2 \times 30492$$

Ou o numero 30492 é primo, e então 60984 é effectivamente o producto de dois numeros primos, ou não é primo e admitte por consequencia (§ 167) um divisor primo. Dividindo por 2 o quociente precedentemente achado, obtem-se

$$30492 = 2 \times 15246$$

e portanto (§ 55)

$$60984 = 2 \times 2 \times 15246 \quad \text{ou} \quad 60984 = 2^2 \times 15246$$

Tornando a dividir por 2 o quociente acha-se

$$15246 = 2 \times 7623 \quad \text{e} \quad 60984 = 2^3 \times 7623$$

O quociente 7623 já não é divisivel por 2, mas admitte (§ 118) o divisor 3, e por isso, dividindo-o por este numero primo, tem-se

$$7623 = 3 \times 2541$$

e dividindo por 3 o quociente 2541 vem

$$7623 = 3^2 \times 847$$

e por consequencia $60984 = 2^3 \times 3^2 \times 847$

O quociente 847 não admitte o divisor primo 3, nem 5, mas é divisivel por 7, porque

$$847 = 7 \times 121$$

e o numero 121 admitte o divisor 11 (§ 122) e dá

$$121 = 11^2 \quad \text{e} \quad 847 = 7 \times 11^2$$

Combinando este valor de 847 com o ultimo que se obteve para 60984, acha-se $60984 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11^2$.

Esta igualdade, ou antes a seguinte

$$60984 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 11 \times 11$$

prova que o numero 60984 é realmente igual a um producto de factores primos, a saber: tres factores iguaes a 2, dois factores iguaes a 3, um igual a 7 e dois iguaes a 11.

Applicando este processo a qualquer outro numero multiplo reconhece-se que é sempre possivel decompol-o em factores primos.

Na pratica, quando se quer decompor um numero em factores primos, escreve-se esse numero á esquerda de uma linha vertical, e á direita d'esta e do numero lança-se o menor numero primo, pelo qual é divisivel o numero dado. Por baixo d'este escreve-se o quociente correspondente áquelle primeiro divisor, e pela parte inferior d'este, ou á direita do quociente obtido, escreve-se o menor numero primo, que divide o ultimo quociente. Faz-se a segunda divisão, põe-se este quociente por baixo do primeiro, lança-se á direita o menor numero primo que divide o segundo quociente, e assim se vae procedendo até se chegar a uma divisão, em que o quociente seja primo. Applicando este processo ao numero 169884 acha-se

169884	2
84942	2
42471	3
14157	3
4719	3
1573	11
143	11
13	13
1	

ou $$169884 = 2^2 \times 3^3 \times 11^2 \times 13$$

Na applicação d'este processo é necessario começar por verificar qual é o menor dos numeros primos 2, 3, 5, 7, 11, etc., que dividem exactamente o numero dado, effectuar depois a divisão por esse numero primo, e proceder com o quociente como se procedeu com o numero dado.

Para se saber qual é o menor numero primo que divide exactamente o numero dado, ou algum dos quocientes é preciso muitas vezes empregar o processo descripto no § 171.

173. **Theorema.** *Ha só um systema de factores primos capaz de produzir um numero dado.*

Sendo $2^5.3^2.7^4$ um producto de factores primos, ou antes um producto de potencias de factores primos, não é possivel formar com outros factores primos, nem com os mesmos affectados de outros expoentes, um producto igual áquelle.

Com effeito, representando $A^a \times B^b \times C^c$ um producto de factores primos A, B, C, e suppondo que é

$$2^5.3^2.7^4 = A^a \times B^b \times C^c$$

ter-se-ha (§ 100)

$$2^5.3^2.7^4 : A = A^{a-1} \times B^b \times C^c$$

Porém, sendo A um numero primo, não póde A dividir o producto de factores primos, $2^5 \times 3^2 \times 7^4$, senão sendo A (§ 165) igual a algum dos numeros primos. Suppondo que A é igual a 2 a ultima igualdade reduz-se a

$$2^5.3^2.7^4 : 2 \quad \text{ou} \quad 2^4.3^2.7^4 = 2^{a-1} \times B^b \times C^c$$

Dividindo ambos os membros d'esta igualdade por 2^4 vem

$$3^2.7^4 = 2^{a-5} \times B^b \times C^c$$

e como existe no segundo membro um factor primo, 2, que não se encontra no primeiro, segue-se que a precedente igualdade sómente será verdadeira se fôr

$$2^{a-5} = 1 \quad \text{ou (§ 100)} \quad 2^a : 2^5 = 1$$

Logo (§ 75) deve ser $a = 5$ e portanto, não só o factor primo A do segundo membro, deve ser igual a algum dos factores primos do primeiro membro, mas devem tambem ser iguaes entre si os expoentes dos dois factores primos iguaes.

O mesmo raciocinio é applicavel a qualquer outro factor primo.

174. **Theorema.** *Um numero inteiro é divisivel por outro, quando todos os factores primos d'este existem n'aquelle com expoentes respectivamente iguaes ou superiores e* inversamente.

Todo o numero N divisivel por $2^3 \times 3^2 \times 7$ ha de conter pelo menos os factores primos 2, 3 e 7 com expoentes iguaes ou superiores aos que elles têem no producto $2^3 \times 3^2 \times 7$, e inversamente todo o numero que tiver aquelles factores primos com expoentes não menores que os de $2^3 \times 3^2 \times 7$ é divisivel por este producto.

A primeira parte é facil demonstral-a, porque, se N é divisivel por $2^3 \times 3^2 \times 7$, será (§ 102)

$$N = 2^3.3^2.7 \times Q$$

sendo o quociente Q um numero inteiro.

Ora se Q é um numero primo differente de 2, 3 e 7, ou se não é primo, mas contém só factores primos differentes d'aquelles, é evidente que o numero N divisivel por $2^3 \times 3^2 \times 7$ contém estes factores primos 2, 3 e 7 exactamente com os mesmos expoentes que elles têem no divisor. Se Q é um dos factores primos 2, 3 ou 7, ou se é multiplo de algum d'estes factores ou de todos, tambem é evidente que N contém os factores primos 2, 3 e 7, e que os expoentes de alguns d'elles, ou de todos, são maiores que os seus correspondentes no divisor.

Inversamente todo o numero, como $2^3 \times 3^8 \times 7^2 \times 11^5$, que contém 2^3, 3^2 e 7, é divisivel por o producto $2^3 \times 3^2 \times 7$, porque sendo (§ 70)

$$2^3 \times 3^8 \times 7^2 \times 11^5 = 2^3 \times (3^2 \times 3^6) \times (7 \times 7) \times 11^5$$

será (§§ 54 e 55)

$$2^3 \times 3^8 \times 7^2 \times 11^5 = (2^3 \times 3^2 \times 7) \times (3^6 \times 7 \times 11^5)$$

Logo dividindo $2^3 \times 3^8 \times 7^2 \times 11^5$ por $2^3 \times 3^2 \times 7$ obtem-se o quociente $3^6 \times 7 \times 11^5$ inteiro.

175. No theorema precedente funda-se o processo pelo qual se acham todos os divisores de um numero inteiro.

Estes divisores devem constar de um, dois, tres, etc. dos divisores primos, em que se decompõe o numero dado, com um expoente igual ou inferior ao que o mesmo numero primo tem no numero dado.

Querendo formar todos os divisores do numero 3024, começa-se por o decompor em factores primos,

$$3024 = 2^4 \times 3^3 \times 7$$

e depois escreve-se em tantas linhas horisontaes, quantos são os divisores primos do numero dado, o numero 1 seguido de todas as potencias de cada um dos divisores primos, desde a que corresponde ao expoente 1 até á que tem por expoente o expoente do mesmo divisor no numero dado.

Obtem-se n'este exemplo os numeros

$$\begin{array}{lllll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3 & 2^4 \\ 1, & 3, & 3^2, & 3^3 & \\ 1, & 7 & & & \end{array}$$

que são evidentemente divisores de 3024. Multiplicando dois numeros quaesquer escriptos em linhas differentes, por exemplo 2 e 3^3, ou tres numeros um de cada linha, como 2^4, 3^2 e 7 obtêem-se para productos numeros que tambem (§ 174) são divisores do numero dado.

Multiplicando todos os factores da primeira linha por cada um dos da segunda, obtem-se uma serie de divisores

$$\begin{array}{lllll}
1, & 2, & 2^2, & 2^3, & 2^4 \\
3, & 2\times 3, & 2^2\times 3, & 2^3\times 3, & 2^4\times 3 \\
3^2, & 2\times 3^2, & 2^2\times 3^2, & 2^3\times 3^2, & 2^4\times 3^2 \\
3^3, & 2\times 3^3, & 2^2\times 3^3, & 2^3\times 3^3, & 2^4\times 3^3
\end{array}$$

que comprehende, além dos que estavam nas duas primeiras linhas, todos os que podem formar-se com um factor de cada uma das mesmas linhas.

Multiplicando todos os divisores do quadro precedente por cada um dos que occupam a terceira linha, acham-se os productos

$$\begin{array}{lllll}
 & 1, & 2, & 2^2, & 2^3, & 2^4 \\
 & 3, & 2\times 3, & 2^2\times 3, & 2^3\times 3, & 2^4\times 3 \\
 & 3^2, & 2\times 3^2, & 2^2\times 3^2, & 2^3\times 3^2, & 2^4\times 3^2 \\
 & 3^3, & 2\times 3^3, & 2^2\times 3^3, & 2^3\times 3^3, & 2^4\times 3^3 \\
7, & 2\times 7, & 2^2\times 7, & 2^3\times 7, & 2^4\times 7 \\
3\times 7, & 2\times 3\times 7, & 2^2\times 3\times 7, & 2^3\times 3\times 7, & 2^4\times 3\times 7 \\
3^2\times 7, & 2\times 3^2\times 7, & 2^2\times 3^2\times 7, & 2^3\times 3^2\times 7, & 2^4\times 3^2\times 7 \\
3^3\times 7, & 2\times 3^3\times 7, & 2^2\times 3^3\times 7, & 2^3\times 3^3\times 7, & 2^4\times 3^3\times 7
\end{array}$$

que constituem todos os divisores do numero dado, porque é evidente que nenhum d'elles deixa de ser divisor (§ 174) de 3024, e não é possivel formar com os factores primos 2, 3 e 7 productos differentes d'aquelles, senão dando a 2 um expoente maior de 4 ou a 3 um expoente maior de 3, etc., e estes productos não podem ser, como está provado, divisores de 3024.

176, Na pratica effectuam-se muito facilmente todas as multiplicações de que dependem os divisores de um numero. Querendo achar os divisores do numero $70875 = 3^4\times 5^3\times 7$ escrevem-se em uma linha horisontal os numeros 1, 3, 9, 9×3 ou 27, e 27×3 ou 81. Por baixo dispõem-se n'outra linha e similhantemente as potencias de 5 até 5^3 e em outra linha os numeros 1 e 7, como em seguida se vê

$$\begin{array}{lllll}
1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\
1 & 5 & 25 & 125 & \\
1 & 7 & & &
\end{array}$$

Multiplicam-se os numeros da primeira linha por 1 e depois por 5, estes productos multiplicam-se por 5, o que equivale a multiplicar os primeiros por 25, e assim seguidamente.

Procedendo assim acham-se para divisores de 70875 os numeros

1,	3,	9,	27,	81	7,	21,	63,	189,	567
5,	15,	45,	135,	405	35,	105,	315,	945,	2835
25,	75,	225,	675,	2025	175,	525,	1575,	4725,	14175
125,	375,	1125,	3375,	10125	875,	2625,	7875,	23625,	70875

177. É facil calcular, quantos são os divisores de um numero decomposto em factores primos, sem effectivamente formar todos os seus divisores.

Suppondo que o numero decomposto em factores primos produz

$3^4 \times 5^3 \times 7$, ter-se-hão tres linhas de divisores, porque são tres os factores primos differentes, a primeira com $4+1$ divisores, a segunda com $3+1$, e a terceira e ultima com $1+1$ divisores.

Os productos de todos os numeros da primeira linha por cada um dos da segunda são tantos, quantas as unidades que se obtêem tomando a somma $4+1$, como multiplicando, $3+1$ vezes, ou

$$(4+1)(3+1)$$

Os productos, que resultam d'estas multiplicações, sendo multiplicados por cada um dos $1+1$ numeros da terceira linha dão

$$(4+1)(3+1)(1+1)$$

divisores. Logo o numero total dos divisores de 70875 é igual a $5 \times 4 \times 2$ ou 40.

Em geral, *o numero de divisores de qualquer numero inteiro é igual ao producto dos expoentes dos factores primos depois de augmentados de uma unidade.*

178. Theorema. *O maximo divisor commum de dois, ou mais numeros inteiros é igual ao producto das menores potencias dos factores primos communs a todos os ditos numeros*, isto é, suppondo $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$; $792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$ e $1782 = 2 \times 3^4 \times 11$ será 2×3^2 ou 18 o maximo divisor commum de 756, 792 e 1782.

Sabe-se, com effeito, que todo o divisor dos productos $2^2 \times 3^3 \times 7$, $2^3 \times 3^2 \times 11$ e $2 \times 3^4 \times 11$ só deve conter (§ 174) divisores primos que existam nos numeros de que elle é divisor, e portanto, suppondo que estes numeros só têem os divisores communs 2 e 3, é claro que o numero, que os dividir a todos, não póde conter factores primos differentes de 2 e 3. Não basta, porém, que um numero não contenha factores primos differentes de 2 e 3 para ser divisor dos numeros dados, é necessario ainda juntar a esta condição a de não serem os expoentes de 2 e 3 no divisor maiores que os expoentes dos mesmos numeros nos dividendos.

Conhecidas as condições necessarias para um numero ser divisor commum de dois ou mais, é facil determinar as que caracterisam o maior de todos os divisores communs. No exemplo escolhido o maximo divisor commum deve conter 2 e 3, que são os unicos factores primos communs a todos os numeros dados, e os expoentes d'estes factores primos devem ser respectivamente 1 e 2, porque se se desse a 2 o expoente 2, por exemplo, deixaria o producto $2^2 \times 3^2$ de dividir 1782 ou $2 \times 3^4 \times 11$.

Este mesmo raciocinio é applicavel a quaesquer outros numeros.

179. Comparando a composição do maximo divisor commum (§ 178) de dois, ou mais numeros inteiros com a de qualquer outro divisor commum (§ 174) dos mesmos numeros, reconhece-se que todos os factores primos, que entram na composição d'este, entram na composição do maximo divisor commum com expoentes

iguaes ou superiores aos seus e que o maximo divisor commum póde conter factores primos, que não existam nos outros divisores communs.

D'esta comparação resulta, pois, um outro modo de demonstrar, que, *todo o divisor commum de dois ou mais numeros inteiros é divisor do seu maximo divisor commum.*

180. Do theorema do § 178 deriva um segundo meio de achar o maximo divisor commum de dois ou mais numeros.

Querendo achar o maximo divisor commum dos numeros 11088, 2820, 1134 e 156, decompõem-se estes numeros em factores primos (§ 172), e suppondo que é

$$11088 = 2^4 \times 3^2 \times 7 \times 11, \quad 2820 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 47, \quad 1134 = 2 \times 3^4 \times 7$$

e

$$156 = 2^2 \times 3 \times 13$$

ver-se-ha quaes são os factores primos communs a todos estes productos, e quaes são os menores dos quatro expoentes de cada factor primo commum. Os factores primos communs a todos são 2 e 3, e os menores expoentes de 2 e 3 são 1 e 1, logo o maximo divisor commum dos quatro numeros dados é 2×3 ou 6. Foi tambem este o resultado, que anteriormente (§ 137) se obteve por outro processo.

181. **Theorema.** *O menor multiplo commum de dois ou mais numeros inteiros é igual ao producto das maximas potencias de todos os factores primos que entram nos numeros dados,* isto é, suppondo $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$, $792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$ e $1872 = 2 \times 3^4 \times 11$, será $2^3 \times 3^4 \times 7 \times 11$ ou 49896 o menor multiplo commum de 756, 792 e 1782.

Todo o numero divisivel por cada um dos productos $2^2 \times 3^3 \times 7$, $2^3 \times 3^2 \times 11$ e $2 \times 3^4 \times 11$ deve conter (§ 174) cada um dos factores primos, que entram no divisor com um expoente igual ou superior ao que o dito factor primo tem no mesmo divisor, logo qualquer multiplo commum d'aquelles tres productos ha de conter pelo menos todos os factores primos, que se encontram nos productos, com expoentes iguaes ou superiores aos que elles têem nos referidos productos.

No exemplo de que se trata, qualquer multiplo commum deve conter os factores primos 2, 3, 7 e 11, e póde conter ainda outros, e os expoentes hão de ser iguaes, ou superiores a 3 e 4, para os factores primos 2 e 3, e iguaes, ou superiores a 1 para os factores 7 e 11. O menor de todos os multiplos communs dos numeros dados é pois $2^3 \times 3^4 \times 7 \times 11$.

182. Comparando a composição do menor multiplo commum (§ 181) de dois, ou mais numeros inteiros, com a de qualquer outro multiplo commum (§ 174) dos mesmos nnmeros, reconhece-se que todos os factores primos, que entram na composição do menor

multiplo, entram na composição de todos os outros multiplos communs com expoentes iguaes, ou superiores aos que ali têem, e que além d'estes factores primos, os multiplos communs podem admittir outros, que não existam no menor d'elles.

D'esta comparação resulta, pois, um outro meio de demonstrar, que, *todo multiplo commum de dois, ou mais inteiros é multiplo do seu menor multiplo commum.*

183. Do theorema § 181 deriva um segundo meio de achar o menor multiplo commum de dois ou mais numeros.

Para se obter o menor multiplo commum dos numeros 12, 18, 15 e 35, decompõem-se estes numeros em factores primos (§ 172) e acha-se

$$12=2^2\times3. \quad 18=2\times3^2, \quad 15=3\times5, \quad 35=5\times7$$

Os factores primos que entram em todos estes productos são 2, 3, 5 e 7, e o menor multiplo commum dos mesmos productos é

$$2^2\times3^2\times5\times7=1260$$

como em outra occasião (§ 158) se reconheceu.

184. **Theorema.** *O producto de dois numeros inteiros é igual ao producto do seu maximo divisor commum pelo seu menor multiplo commum*[1].

Este theorema anteriormente demonstrado (§ 153) póde tambem demonstrar-se comparando a composição do maximo divisor commum (§ 178) de dois numeros com a do seu menor multiplo commum (§ 181).

Com effeito, o producto de dois numeros póde sempre decompor-se em dois factores, dos quaes um, formado pelas maximas potencias de todos os factores primos communs aos dois numeros e pelas potencias unicas dos não communs, constitue (§ 181) o menor multiplo commum dos dois numeros que se multiplicaram, e o outro factor, formado pelas menores potencias dos factores primos communs, constitue (§ 178) o maximo divisor commum dos mesmos dois numeros.

---

[1] O producto de tres, ou mais numeros não primos entre si dois a dois é sempre maior que o producto do maximo divisor commum d'elles pelo seu menor multiplo commum.

Com effeito, suppondo que dois d'elles admittem um factor primo commum, entrarão no producto de todos elles duas potencias do factor primo commum e, comtudo uma só d'ellas, a maior, existirá no producto do maximo divisor commum pelo menor multiplo commum. Quando o factor primo, que suppozemos ser commum a dois dos numeros dados, o é a todos elles, ainda succede o mesmo, porque de tres ou mais potencias do dito factor primo, que entram no producto de todos os numeros considerados, apenas duas, a menor e a maior, se encontram no producto do maximo divisor commum pelo menor multiplo commum.

É evidente, porém, que sendo unidade o maximo divisor commum de numeros primos entre si dois a dois (§ 132) será o *producto de tres ou mais numeros primos entre si dois a dois igual ao menor multiplo commum de todos elles.*

EXERCICIOS

I. Formar a taboa dos numeros primos desde 1 até 400.

II. Reconhecer quaes são entre os seguintes numeros os que são primos 107, 391, 409, 443, 713, 1961, 1973, 2017, 7663, 7921, 8059, 9091.

III. Decompor em factores primos os seguintes numeros 90, 250, 1350, 2000, 5200, 33264, 42471, 107653, 531441, 3382071.

IV. Achar todos os divisores dos numeros 24, 120, 360, 3125, 7574, 18000, 27720, 190512.

V. Provar que qualquer numero inteiro é igual ao producto de dois divisores equidistantes dos extremos, suppondo que todos os divisores do numero estão escriptos por ordem de grandeza.

VI. Achar por meio dos factores primos o maximo divisor commum e o menor multiplo commum dos seguintes grupos de numeros 180 e 270; 126, 588 e 8232; 3915, 4374 e 6966; 1380, 1404, 1500 e 1560; 18, 27, 42, 56 e 90.

VII. Demonstrar que todo o numero, que é quadrado de um numero inteiro, admitte um numero impar de divisores.

VIII. De quantos modos se póde decompor um numero em um producto de dois factores?

IX. Provar que todo o numero, que contém n factores primos distinctos, póde decompor-se em um producto de dois factores primos entre si de 2^{n-1} modos differentes.

X. Demonstrar que, sendo A e B dois numeros primos entre si e B um numero primo, a potencia $B-1$ de A dividida por B dá 1 de resto (Theorema de Fermat).

XI. Achar o menor numero inteiro que tem 36 divisores, incluindo 1 e o proprio numero.

XII. Demonstrar que, sendo A e B dois numeros primos entre si, ha uma infinidade de potencias de A que divididas por B dão 1 de resto. O expoente de uma d'estas potencias é o numero que designa, quantos são os numeros primos com B e inferiores a B, e o menor de todos elles é submultiplo ou divisor de todos os outros expoentes (Theorema de Euler).

LIVRO III

OPERAÇÕES SOBRE NUMEROS FRACCIONARIOS

CAPITULO I

Simplificação de quebrados e reducção ao mesmo denominador Addição e subtracção de quebrados

185. Um quebrado (§ 18) differe de um inteiro em que este numero representa a unidade repetida mais ou menos vezes, e aquelle representa uma parte aliquota da unidade repetida 2, 3, ou mais vezes.

D'esta simples consideração resulta, que, de dois ou mais quebrados, que têem o mesmo denominador, o maior é aquelle que tem por numerador um numero maior, e de dois ou mais quebrados que têem o mesmo numerador, o maior é o que tem me-

nor denominador. É, com effeito, evidente que o quebrado $\frac{7}{4}$ representa uma quantidade maior do que a expressa pelo quebrado $\frac{3}{4}$, porque, emquanto aquella contém 7 partes iguaes á quarta parte da unidade, esta apenas consta de 3 d'essas partes. O quebrado $\frac{4}{7}$ é ao contrario menor que $\frac{4}{3}$, porque, apesar de comprehenderem ambos 4 partes, cada uma das partes do primeiro quebrado é menor, que cada uma das do segundo, por isso que são precisas 7 das primeiras para darem uma unidade, emquanto 3 das do segundo bastam para produzirem a mesma unidade.

186. Assim como, decompondo em partes iguaes a grandeza, que se toma para unidade, e repetindo uma d'essas partes, se obtem uma grandeza, que póde exprimir-se por um quebrado; assim tambem, decompondo em partes iguaes uma grandeza differente da que se tomou para unidade e repetindo similhantemente uma das partes, que resultou da decomposição, se obtem uma nova grandeza, que póde ainda exprimir-se por um quebrado.

D'este modo de generalisar a primeira idéa de quebrado resulta a distincção dos quebrados em *quebrados da unidade*, ou simplesmente quebrados, *quebrados de inteiros* e *quebrados de quebrados*.

O quebrado $\frac{3}{4}$ de hora é um quebrado da unidade, porque representa 3 das 4 partes iguaes em que a hora se imagina decomposta; o quebrado $\frac{3}{4}$ de 20 horas representa um quebrado de inteiro, porque comprehende 3 partes, das quaes 4 fazem 20 horas; e finalmente o quebrado $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ da hora é um quebrado de quebrado, que consta de 3 partes, das quaes 4 equivalem a $\frac{5}{6}$ da hora.

Os quebrados de inteiros e os quebrados de quebrados reduzem-se a quebrados da unidade, logo que a grandeza tomada para unidade se substitua por outra, de valor tal que o inteiro, ou o quebrado se converta em unidade.

Basta, porém, como mais tarde se reconhecerá, saber effectuar as operações sobre quebrados da unidade para com facilidade se poder operar sobre quebrados de inteiros e quebrados de quebrados.

187. **Theorema.** *Um quebrado não muda de valor, quando ambos os seus termos se multiplicam ou dividem pelo mesmo numero inteiro*, isto é,

$$\frac{5}{8}=\frac{5\times3}{8\times3} \quad \text{e} \quad \frac{5}{8}=\frac{5:3}{8:3}$$

Este theorema póde considerar-se demonstrado já, porque (§ 78) todo o quebrado $\frac{5}{8}$ equivale a um quociente $5:8$, e este não muda de valor, quando (§ 95) ambos os termos se multiplicam, ou dividem pelo mesmo inteiro, isto é,

$$\frac{5}{8}=5:8=(5\times3):(8\times3)=\frac{5\times3}{8\times3}$$

e

$$\frac{5}{8}=5:8=(5:3):(8:3)=\frac{5:3}{8:3}$$

Não ha comtudo difficuldade em o demonstrar directamente partindo da propria noção de quebrado.

Com effeito, quando se multiplica por 3 o denominador 8 do quebrado, a unidade, que antes estava dividida em 8 partes iguaes, deve agora conter 8×3 partes, e é claro, que cada uma das novas partes é 3 vezes menor, que uma das antigas, porque basta decompor qualquer d'estas em 3 partes iguaes para ter aquellas. São precisas pois 3 das novas partes da unidade para produzirem uma das antigas divisões da unidade, e por consequencia 5 das antigas partes equivalem a $3+3+3+3+3$ das novas, isto é,

$$\frac{5}{8}=\frac{3+3+3+3+3}{8\times3} \quad \text{ou} \quad \frac{5}{8}=\frac{5\times3}{8\times3}$$

Similhantemente se demonstra que é

$$\frac{5}{8}=\frac{5:3}{8:3}$$

188. Do theorema demonstrado no § anterior resulta que a mesma quantidade, póde ser representada por uma infinidade de quebrados $\frac{5}{8}$, $\frac{10}{16}$, $\frac{15}{24}$, $\frac{20}{32}$, etc., referidos todos á mesma unidade e differindo uns dos outros só nos valores dos seus termos. De todos estes quebrados o *mais simples* é aquelle, cujos termos são numeros menores.

Simplificar um quebrado, ou reduzil-o a uma expressão mais simples, *é procurar outro quebrado com o mesmo valor, cujos termos sejam numeros inteiros menores que os termos do quebrado proposto.* Chama-se *quebrado irreductivel* ao que já não póde simplificar-se.

189. **Theorema.** *Todo o quebrado, cujos termos são primos entre si, é irreductivel,* e vice-versa *os dois termos de qualquer quebrado irreductivel são primos entre si.*

Sendo $\frac{8}{15}$ um quebrado, cujos termos são primos entre si, será $\frac{8}{15}$ o mais simples de todos os quebrados do mesmo valor.

Com effeito, designando N e D dois numeros inteiros, e suppondo que é

$$\frac{N}{D}=\frac{8}{15}$$

ter-se-ha igualmente (§ 187)

$$\frac{N\times 15}{D\times 15}=\frac{8\times D}{15\times D}$$

e, como os denominadores d'estes quebrados são iguaes, é evidente que será tambem $N\times 15=8\times D$.

D'esta igualdade conclue-se que o producto $N\times 15$ é divisivel por 8, e como 8 é por hypothese primo com 15, segue-se (§ 143) que 8 é divisor de N. Designando n o quociente da divisão de N por 8, tem-se

$$N=8\times n$$

e portanto $$(8\times n)\times 15=8\times D$$

ou $$n\times 15=D$$

Conclue-se, pois, que para um quebrado $\frac{N}{D}$ ser igual a $\frac{8}{15}$ é preciso que seja $$\frac{N}{D}=\frac{8\times n}{15\times n}$$

designando n qualquer numero inteiro. Logo não ha quebrado mais simples que $\frac{8}{15}$.

A proposição inversa tambem é verdadeira, porque, sendo irreductivel o quebrado, os seus termos não podem ter divisor commum, visto que, se o tivessem, bastaria supprimil-o para apparecer um quebrado ainda mais simples que o proposto.

190. Simplifica-se um quebrado dividindo ambos os seus termos por um divisor commum. Em geral convém simplificar os quebrados antes de effectuar sobre elles quaesquer operações.

Para simplificar o quebrado $\frac{35595}{55935}$ dividem-se ambos os termos por o divisor commum 5 (§ 114), e depois dividem-se por 9 (§ 118) os dois termos do quebrado resultante $\frac{7119}{11187}$. Effectuando estas operações acha-se $\frac{35595}{55935}=\frac{7119}{11187}=\frac{791}{1243}$.

Não admittindo os dois termos d'este ultimo quebrado nenhum dos divisores communs 2, 3, 5, 9 ou 11 faceis de conhecer, fica-se ainda em duvida, se o referido quebrado poderá ou não simplificar-se mais.

O meio directo de desvanecer esta duvida consiste em procurar o maximo divisor commum dos numeros 791 e 1243. Empregando este meio (§ 139 ou 180) acha-se que o maximo divisor commum d'elles é 113, e por consequencia que o quebrado $\frac{791}{1243}$ póde sim-

plificar-se. Dividindo por 113, tanto o numerador como o denominador, obtem-se afinal

$$\frac{35595}{55935}=\frac{7}{11}$$

O quebrado $\frac{7}{11}$ é (§ 189) irreductivel.

Na pratica, quando se quer simplificar um quebrado, procura-se immediatamente o maximo divisor commum dos seus dois termos e divide-se por elle cada um d'estes, ou vão-se successivamente supprimindo os divisores 2, 3, 5, 9 ou 11, em quanto fôr possivel, e depois procura-se o maximo divisor commum dos termos do quebrado resultante da ultima simplificação.

191. Assim como se póde simplificar um quebrado dividindo ambos os termos por um divisor inteiro, assim tambem se póde tornar menos simples um quebrado multiplicando (§ 187) os dois termos pelo mesmo numero inteiro.

No § 189 demonstrou-se, que, sendo 8 e 15 dois numeros primos entre si, isto é, sendo $\frac{8}{15}$ um quebrado irreductivel, não póde outro quebrado $\frac{N}{D}$, cujos termos sejam inteiros, ser igual a $\frac{8}{15}$ sem que seja

$$N=8\times n \quad \text{e} \quad D=15\times n$$

e, como n representa um numero inteiro, segue-se que os dois termos do quebrado $\frac{N}{D}$ devem ser equimultiplos (multiplos iguaes) dos termos 8 e 15 do quebrado irreductivel $\frac{8}{15}$.

Resulta do exposto, que só é possivel reduzir um quebrado a outro de igual valor com o denominador igual a um numero dado, quando este numero é multiplo do denominador do quebrado irreductivel correspondente ao quebrado proposto. N'este caso deve tambem incluir-se aquelle em que o dito numero é multiplo do denominador do quebrado proposto, porque então (§ 106) é elle tambem multiplo do denominador do quebrado irreductivel.

Póde, por exemplo, reduzir-se o quebrado $\frac{15}{24}$ a outro cujo denominador seja 16, porque, dividindo 15 e 24 pelo seu maximo divisor commum 3, acha-se

$$\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$$

e 16 é multiplo de 8. E com effeito é

$$\frac{15}{24}=\frac{10}{16}$$

Póde tambem reduzir-se o quebrado $\frac{15}{24}$ a outro, cujo denomina-

dor seja 48, porque (§ 187)

$$\frac{15}{24}=\frac{15\times2}{24\times2}=\frac{30}{48}$$

e effectivamente sendo 30 e 48 equimultiplos de 15 e 24, e sendo estes numeros equimultiplos de 5 e 8, não podem (§ 106) 30 e 48 deixar de ser equimultiplos de 5 e 8.

Não é possivel comtudo reduzir $\frac{15}{24}$ a ter por denominador 18, 33, etc., porque estes numeros inteiros não são multiplos de 8.

192. Dois ou mais quebrados podem sempre reduzir-se a terem por denominador commum qualquer multiplo commum dos denominadores dos quebrados irreductiveis iguaes aos mesmos quebrados. N'este caso estão evidentemente os numeros, que forem multiplos dos denominadores dos quebrados propostos, porque elles hão de ser tambem multiplos dos denominadores dos quebrados irreductiveis.

Os quebrados $\frac{15}{24}$ e $\frac{12}{18}$, que são respectivamente iguaes aos quebrados irreductiveis $\frac{5}{8}$ e $\frac{2}{3}$, podem reduzir-se a outros de igual valor com um denominador commum, comtanto que este seja um dos multiplos communs dos denominadores 8 e 3. E como qualquer multiplo commum de 8 e de 3 deve ser (§ 159 ou 182) multiplo do menor multiplo commum 24 dos mesmos numeros, segue-se que os quebrados propostos só poderão reduzir-se a outros de igual denominador, quando este fôr multiplo de 24.

Para reduzir os quebrados $\frac{15}{24}$ e $\frac{12}{18}$ a terem por denominador 120, que é multiplo de 8×3, é necessario dividir 120 por 8 e por 3, para se saber qual é o numero, por que se hão de multiplicar os dois termos do quebrado irreductivel igual ao primeiro quebrado, e qual o numero, por que se hão de multiplicar os dois termos do outro quebrado. Suppondo que é

$$120:8=15 \quad \text{e} \quad 120:3=40$$

ter-se-ha $\frac{15}{24}=\frac{5}{8}=\frac{5\times15}{8\times15}=\frac{75}{120}$ e $\frac{12}{18}=\frac{2}{3}=\frac{2\times40}{3\times40}=\frac{80}{120}$

Querendo reduzir os dois quebrados ao denominador 864, que é multiplo de 24 e de 18, não é necessario substituir os quebrados pelos quebrados irreductiveis correspondentes, basta dividir 864 por 24 e por 18, e depois multiplicar os termos do primeiro quebrado pelo primeiro quociente e os do segundo pelo segundo quociente. Sendo pois

$$864:24=36 \quad \text{e} \quad 864:18=48$$

ter-se-ha $\frac{15}{24}=\frac{15\times36}{24\times36}=\frac{540}{864}$ e $\frac{12}{18}=\frac{12\times48}{18\times48}=\frac{576}{864}$

193. *Reduzem-se dois ou mais quebrados ao mesmo denominador, multiplicando ambos os termos de cada um pelo producto dos denominadores de todos os outros.*

Applicando esta regra aos quebrados

$$\frac{3}{8},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{7}{12}$$

acha-se

$$\frac{3\times6\times12}{8\times6\times12},\quad \frac{5\times8\times12}{6\times8\times12},\quad \frac{7\times8\times6}{12\times8\times6}$$

ou

$$\frac{216}{576},\quad \frac{480}{576},\quad \frac{336}{576}$$

O denominador commum n'este caso é um dos multiplos communs dos tres denominadores, porque é o producto de todos elles, porém não é o menor multiplo commum.

194. A reducção de quebrados ao mesmo denominador é o meio, que geralmente se emprega, quando se quer descobrir qual é o maior de dois, ou mais quebrados. Querendo, por exemplo, escrever os tres quebrados $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{12}$ por ordem de grandeza reduzem-se ao mesmo denominador e reconhece-se (§ 185) immediatamente que é

$$\frac{480}{576} > \frac{336}{576} > \frac{216}{576}$$

e por consequencia

$$\frac{5}{6} > \frac{7}{12} > \frac{3}{8}$$

Poder-se-ia tambem reduzir os quebrados ao mesmo numerador, empregando uma regra analoga á do § 193, como abaixo se vê

$$\frac{3\times5\times7}{8\times5\times7},\quad \frac{5\times3\times7}{6\times3\times7},\quad \frac{7\times3\times5}{12\times3\times5}$$

ou

$$\frac{105}{280},\quad \frac{105}{126},\quad \frac{105}{180}$$

porque evidentemente (§ 185) é

$$\frac{105}{126} > \frac{105}{180} > \frac{105}{280}$$

e portanto

$$\frac{5}{6} > \frac{7}{12} > \frac{3}{8}$$

195. *O menor denominador commum, que se póde dar a dois ou mais quebrados, é igual ao menor multiplo commum dos denominadores dos quebrados irreductiveis iguaes aos quebrados propostos.*

O menor multiplo commum dos denominadores 8, 6 e 12 dos quebrados irreductiveis $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{12}$ é 24, logo 24 é o menor denominador commum, que podem ter os mesmos quebrados.

Reduzindo-os effectivamente a este denominador obtem-se

$$\frac{9}{24},\quad \frac{20}{24},\quad \frac{14}{24}$$

Se os quebrados fossem $\frac{33}{44}$, $\frac{42}{49}$ e $\frac{12}{18}$, não se poderia concluir que o menor multiplo commum dos denominadores 44, 49 e 18 era o menor denominador commum, visto não serem os quebrados irreductiveis. Para os reduzir ao menor denominador commum tornar-se-hão irreductiveis os quebrados, e depois procurar-se-ha o menor multiplo commum dos denominadores dos quebrados

$$\frac{3}{4},\quad \frac{6}{7},\quad \frac{2}{3}$$

que se obtiverem.

O menor multiplo commum de 4, 7 e 3 é $4\times7\times3$ ou 84, visto serem primos dois a dois os numeros 4, 7 e 3, logo, reduzindo os quebrados ao menor denominador commum, acha-se

$$\frac{3\times7\times3}{4\times7\times3},\quad \frac{6\times4\times3}{7\times4\times3},\quad \frac{2\times4\times7}{3\times4\times7}$$

ou

$$\frac{63}{84},\quad \frac{72}{84},\quad \frac{56}{84}$$

Para reduzir ao menor denominador commum os quebrados irreductiveis

$$\frac{211}{240},\quad \frac{91}{180},\quad \frac{429}{560}$$

decompõem-se os denominadores em factores primos e, suppondo que é

$$240=2^4\times3\times5,\qquad 180=2^2\times3^2\times5,\qquad 560=2^4\times5\times7$$

formar-se-ha o menor multiplo commum (§ 183)

$$2^4\times3^2\times5\times7=5040$$

dos referidos denominadores. Dividindo este menor multiplo por cada um dos denominadores achar-se-hão os quocientes

$$3\times7=21,\qquad 2^2\times7=28,\qquad 3^2=9$$

pelos quaes devem ser multiplicados os dois termos do primeiro, segundo e terceiro quebrados. Os quebrados propostos reduzem-se portanto a

$$\frac{211\times21}{240\times21},\quad \frac{91\times28}{180\times28},\quad \frac{429\times9}{560\times9}$$

$$\frac{4431}{5040},\quad \frac{2548}{5040},\quad \frac{3861}{5040}$$

196. Na pratica simplificam-se quasi sempre os quebrados antes de os reduzir ao mesmo denominador. Quando, porém, aconteça terem-se reduzido ao mesmo denominador quebrados redu-

ctiveis, é ainda possivel simplifical-os de modo que continuem a ter um denominador commum. Consegue-se isto dividindo os dois termos de cada quebrado pelo maximo divisor commum dos termos de todos elles.

Sejam $\frac{540}{864}$ e $\frac{576}{864}$ os quebrados que devem ser simplificados de modo que depois tenham o menor denominador commum.

É evidente que se satisfaz a esta condição supprimindo nos termos de cada quebrado o maximo divisor commum dos numeros 540, 576 e 864. Empregando o methodo do § 180 obtem-se

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5, \qquad 576 = 2^6 \times 3^2, \qquad 864 = 2^5 \times 3^3$$

logo o maximo divisor commum é $2^2 \times 3^2 = 36$.

Dividindo por 36 os termos de cada quebrado vem

$$\frac{540}{864} = \frac{540:36}{864:36} = \frac{15}{24} \quad \text{e} \quad \frac{576}{864} = \frac{576:36}{864:36} = \frac{16}{24}$$

197. *A addição de quebrados, que têem o mesmo denominador, effectua-se sommando os numeradores, e dando á somma por denominador o denominador commum dos quebrados propostos.*

Para achar o valor de $\frac{7}{12} + \frac{11}{12}$ reflectir-se-ha que o primeiro d'estes quebrados representa 7 partes, das quaes 12 fazem uma unidade, o segundo representa 11 partes da mesma grandeza, e por consequencia a somma deve constar de $7 + 11$ partes, das quaes 12 valem uma unidade. Logo

$$\frac{7}{12} + \frac{11}{12} = \frac{7+11}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

O quebrado $\frac{3}{2}$ é (§ 18) improprio, e converte-se (§ 81) em $1\frac{1}{2}$ quando se separa o quociente incompleto da fracção complementar.

198. *A addição de quebrados, que não têem o mesmo denominador, effectua-se reduzindo-os ao mesmo denominador, sommando os numeradores, e dando á somma o denominador commum.*

Para effectuar a somma indicada

$$\frac{7}{15} + \frac{10}{27} + \frac{14}{45}$$

reduzem-se os quebrados ao mesmo denominador, procurando o menor multiplo commum de 15, 27 e 45, isto é, de

$$3 \times 5, \qquad 3^3, \qquad 5 \times 3^2$$

que é

$$3^3 \times 5$$

e applicando a regra do § 195 tem-se

$$\frac{7\times3^2}{15\times3^2}+\frac{10\times5}{27\times5}+\frac{14\times3}{45\times3}=\frac{63}{135}+\frac{50}{135}+\frac{42}{135}=\frac{63+50+42}{135}$$

ou

$$\frac{7}{15}+\frac{10}{27}+\frac{14}{45}=\frac{155}{135}$$

Simplificando o quebrado $\frac{155}{135}$ e extrahindo ao resultado a parte inteira vem

$$\frac{7}{15}+\frac{10}{27}+\frac{14}{45}=1+\frac{4}{27}$$

199. *A somma de um inteiro com um quebrado póde effectuar-se como a somma de quebrados, comtanto que o inteiro se tome como um quebrado que tem 1 por denominador.*

Para achar o valor de $4+\frac{5}{8}$ reflectir-se-ha que o inteiro 4 e o quebrado $\frac{4}{1}$ têem exactamente o mesmo valor, porque ambos representam 4 partes iguaes á unidade, isto é,

$$4+\frac{5}{8}=\frac{4}{1}+\frac{5}{8}$$

O menor multiplo commum dos denominadores 1 e 8 é evidentemente 8, e portanto

$$4+\frac{5}{8}=\frac{4\times8}{1\times8}+\frac{5}{8}=\frac{4\times8+5}{8}$$

Effectuando as operações indicadas acha-se

$$4+\frac{5}{8}=\frac{37}{8}$$

Para reduzir um numero mixto $\left(4+\frac{5}{8}\right)$ *a quebrado, multiplica-se o inteiro* (4) *pelo denominador* (8), *junta-se ao producto o numerador* (5) *do quebrado, e dá-se á somma o denominador* (8) *do mesmo quebrado.*

200. Para effectuar a somma

$$3+\frac{7}{8}+2+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+7$$

na qual umas parcellas são inteiras e outras não, procede-se como se todas fossem quebrados, dando o denominador 1 a cada uma das parcellas inteiras. Acham-se assim os seguintes valores successivos da precedente somma indicada

$$\frac{3}{1}+\frac{7}{8}+\frac{2}{1}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{1}$$

$$1,\quad 2^3,\quad 1,\quad 2^2,\quad 2\times3,\quad 1$$

$$2^3\times3=24$$

$$\frac{3.24}{24}+\frac{7.3}{8.3}+\frac{2.24}{24}+\frac{3.6}{4.6}+\frac{5.4}{6.4}+\frac{7.24}{24}$$

$$\frac{72+21+48+18+20+168}{24}=\frac{347}{24}$$

e portanto $$3+\frac{7}{8}+2+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+7=\frac{347}{24}=14+\frac{11}{24}$$

201. A somma não depende da ordem das parcellas, ainda que todas, ou algumas sejam numeros fraccionarios.

No § precedente achou-se

$$3+\frac{7}{8}+2+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+7=\frac{3\cdot24+7\cdot3+2\cdot24+3\cdot6+5\cdot4+7\cdot24}{24}$$

e como o segundo membro (§ 27) não muda de valor, quando se troca a ordem ás parcellas do numerador, segue-se que

$$3+\frac{7}{8}+2+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+7=\frac{3\cdot24+2\cdot24+7\cdot24+7\cdot3+3\cdot6+5\cdot4}{24}$$

ou $$3+\frac{7}{8}+2+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+7=3+2+7+\frac{7}{8}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$$

202. Na pratica, quando se quer achar a somma de muitas parcellas, umas inteiras e outras fraccionarias, prefere-se quasi sempre sommar todas as parcellas inteiras, como se ellas estivessem em primeiro logar, sommar todas as parcellas fraccionarias e sommar depois as duas sommas. Empregando este processo achar-se-ha

$$3+\frac{7}{8}+2+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+7=(3+2+7)+\left(\frac{7}{8}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)=$$
$$=12+\frac{7\cdot3+3\cdot6+5\cdot4}{24}$$

ou $$3+\frac{7}{8}+2+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+7=12+\frac{21+18+20}{24}=12+\frac{59}{24}=$$
$$=12+2+\frac{11}{24}=14+\frac{11}{24}$$

203. *A subtracção de quebrados, que têem o mesmo denominador, effectua-se subtrahindo os numeradores dos subtractivos, ou diminuidores, do numerador do additivo, ou diminuendo, e dando ao resto o denominador commum dos quebrados*, isto é,

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}$$

Estes dois quebrados $\frac{7}{8}$ e $\frac{3}{8}$ podem considerar-se como dois inteiros, 7 e 3, referidos a uma unidade 8 vezes menor que a unidade adoptada, e portanto a differença procurada é igual a $7-3$ d'essas unidades 8 vezes menores que a referida unidade adoptada ou $\frac{7-3}{8}$ d'esta mesma unidade.

204. *A subtracção de quebrados, que não têem o mesmo denominador, effectua-se reduzindo os quebrados ao mesmo denominador e procedendo depois como no § precedente.*

Para se obter o valor de $\frac{31}{40}-\frac{3}{8}$, reduzir-se-ha o quebrado $\frac{3}{8}$ á denominação de $\frac{31}{40}$, visto ser 40 um multiplo de 8, e achar-se-ha

$$\frac{31}{40}-\frac{3}{8}=\frac{31}{40}-\frac{15}{40}=\frac{31-15}{40}=\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$$

205. Quando algum dos termos da subtracção é inteiro, procede-se como se elle fosse um quebrado com o denominador 1.

Se é o additivo, que é inteiro, tem-se

$$4-\frac{3}{5}=\frac{4}{1}-\frac{3}{5}=\frac{4\times5}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4\times5-3}{5}$$

ou

$$4-\frac{3}{5}=\frac{17}{5}$$

Se o additivo é 1 a differença $1-\frac{5}{8}$ reduz-se a $\frac{8-5}{8}$ ou $\frac{3}{8}$.

Quando o subtractivo é inteiro tem-se

$$\frac{18}{5}-2=\frac{18}{5}-\frac{2}{1}=\frac{18}{5}-\frac{2\times5}{5}=\frac{18-2\times5}{5}$$

ou

$$\frac{18}{5}-2=\frac{8}{5}$$

Conclue-se d'isto: 1.º, *o excesso de um inteiro sobre um quebrado é igual ao producto do inteiro pelo denominador do quebrado menos o numerador sobre o mesmo denominador;* 2.º, *o excesso da unidade sobre um quebrado proprio é igual ao excesso do denominador sobre o numerador dividido pelo denominador*; 3.º, *o excesso de um quebrado improprio sobre um inteiro é igual ao excesso do numerador sobre o producto do inteiro pelo denominador dividido pelo denominador.*

206. Para se calcular o valor de uma expressão composta de varios termos, uns inteiros e outros quebrados, reduzem-se os inteiros a quebrados, e depois todos os quebrados ao mesmo denominador, ou opera-se sobre os inteiros isoladamente, reduzindo-os a um só, e do mesmo modo sobre os quebrados, e depois effectua-se, segundo as circumstancias, a addição ou subtracção dos numeros resultantes.

Pelo primeiro modo ter-se-ha

$$7+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}-2+\frac{6}{7}-3=\frac{7}{1}+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}-\frac{2}{1}+\frac{6}{7}-\frac{3}{1}=$$
$$=\frac{7.56}{56}+\frac{3.14}{56}-\frac{5.7}{56}-\frac{2.56}{56}+\frac{6.8}{56}-\frac{3.56}{56}$$

ou

$$7+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}-2+\frac{6}{7}-3=\frac{7.56+3.14-5.7-2.56+6.8-3.56}{56}$$

porque a addição e subtracção de quebrados com o mesmo denominador reduz-se á addição e subtracção dos seus numeradores.

Effectuando as operações indicadas no segundo membro acha-se

$$7+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}-2+\frac{6}{7}-3=\frac{482-315}{56}=\frac{167}{56}=2+\frac{55}{56}$$

Advertindo que o valor final de $7.56+3.14-5.7-2.56+$ $+6.8-3.56$ não depende (§ 43) da ordem, por que estes productos estão escriptos, ter-se-ha

$$\frac{7.56+3.14-5.7-2.56+6.8-3.56}{56}=\frac{7.56-2.56-3.56+3.14-5.7+6.8}{56}$$

e por consequencia

$$7+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}-2+\frac{6}{7}-3=(7-2-3)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{8}+\frac{6}{7}\right)$$

Vê-se pois que o resultado póde calcular-se effectuando as operações sobre os inteiros isoladamente, depois sobre os quebrados, e finalmente sobre os numeros resultantes d'estes calculos parciaes.

Empregando este processo, obtem-se

$$7+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}-2+\frac{6}{7}-3=2+\frac{42-35+48}{56}=2+\frac{55}{56}$$

207. Se o additivo fôr $9+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ e o subtractivo $6+\frac{3}{4}+\frac{29}{30}$ procurar-se-ha o menor multiplo commum de 3, 5, 4 e 30, que é 60, e reduzir-se-hão a elle todos os denominadores, isto é, far-se-ha

$$\left(9+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)-\left(6+\frac{3}{4}+\frac{29}{30}\right)=\left(\frac{540}{60}+\frac{40}{60}+\frac{48}{60}\right)-\left(\frac{360}{60}+\frac{45}{60}+\frac{58}{60}\right)$$

e portanto será

$$\left(9+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)-\left(6+\frac{3}{4}+\frac{29}{30}\right)=\frac{540+40+48}{60}-\frac{360+45+58}{60}$$

ou $$\left(9+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)-\left(6+\frac{3}{4}+\frac{29}{30}\right)=\frac{540+40+48-(360+45+58)}{60}$$

e $$\left(9+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)-\left(6+\frac{3}{4}+\frac{29}{30}\right)=\frac{628-463}{60}=\frac{165}{60}=2+\frac{45}{60}=2+\frac{3}{4}$$

A expressão

$$\left(9+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)-\left(6+\frac{3}{4}+\frac{29}{30}\right)=\frac{(540+40+48)-(360+45+58)}{60}$$

póde reduzir-se (§ 34) a

$$\left(9+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)-\left(6+\frac{3}{4}+\frac{29}{30}\right)=\frac{540+40+48-360-45-58}{60}$$

e como o segundo membro é igual a

$$\frac{540}{60}+\frac{40}{60}+\frac{48}{60}-\frac{360}{60}-\frac{45}{60}-\frac{58}{60} \quad \text{ou} \quad 9+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-6-\frac{3}{4}-\frac{29}{30}$$

segue-se que

$$\left(9+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)-\left(6+\frac{3}{4}+\frac{29}{30}\right)=9+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-6-\frac{3}{4}-\frac{29}{30}$$

Logo o parenthesis precedido do signal — póde supprimir-se, quando dentro está indicada uma somma de inteiros e quebrados, comtanto que cada uma das parcellas passe para fóra do parenthesis com o signal —.

EXERCICIOS

I. Reduzir á expressão mais simples os quebrados $\frac{21000}{290000}$, $\frac{264}{368}$, $\frac{125}{875}$, $\frac{16}{48}$, $\frac{24}{120}$, $\frac{1932}{2100}$, $\frac{222}{999}$, $\frac{4444}{9999}$, $\frac{5050}{9999}$, $\frac{700700}{999999}$, $\frac{223344}{556666}$, $\frac{35623698}{104030201}$.

II. Escrever uma serie de quebrados de valor igual a cada uma das seguintes fracções $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{10}{17}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{16}{101}$.

III. Reduzir ao denominador commum 630 os quebrados $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{9}$, ao denominador commum 216 os quebrados $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{36}$, $\frac{18}{27}$, $\frac{48}{54}$, ao denominador commum 68040 os quebrados $\frac{125}{750}$, $\frac{248}{672}$, $\frac{801}{972}$.

IV. Reduzir ao mesmo denominador os quebrados $\frac{3}{8}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{90}{150}$ e $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{19}{32}$ e $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{39}{48}$, $\frac{101}{192}$.

V. Reduzir ao mesmo denominador commum os quebrados $\frac{4}{7}$, $\frac{10}{17}$, $\frac{25}{177}$ e $\frac{21}{27}$, $\frac{42}{54}$, $\frac{50}{80}$, $\frac{125}{450}$ e $\frac{22}{99}$, $\frac{333}{999}$, $\frac{4444}{9999}$.

VI. Effectuar as seguintes addições $\frac{3}{8}+\frac{7}{12}+\frac{5}{6}$, $\frac{27}{82}+\frac{43}{54}+\frac{72}{126}$, $\frac{103}{405}+\frac{230}{674}+\frac{825}{427}$, $\frac{7}{60}+\frac{13}{30}+\frac{4}{33}+\frac{5}{22}$.

VII. Effectuar as seguintes subtracções $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}$, $\frac{18}{24}-\frac{1}{6}-\frac{2}{5}$, $\frac{45}{47}-\frac{2}{9}-\frac{5}{7}$, $6-\frac{2}{8}$, $1-\frac{2}{5}$, $8-\frac{6}{7}$, $12-\frac{25}{3}$, $16-\frac{27}{4}-\frac{2}{5}$, $\frac{28}{3}-6$, $\frac{45}{8}-3$.

VIII. Effectuar as seguintes operações indicadas $6+\frac{2}{5}$, $8+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}$, $12-\frac{2}{9}+\frac{6}{7}$, $2+\frac{10}{27}-3+\frac{29}{4}-\frac{2}{7}+5$, $7-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{12}{25}+\frac{7}{8}$, $100+\frac{2}{3}-\left(12+\frac{1}{5}\right)$, $27-\frac{2}{6}+\frac{3}{8}-\left(\frac{4}{15}+\frac{12}{27}-5\right)$.

IX. Escrever por ordem de grandeza os quebrados $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$.

X. Reduzir á expressão mais simples os quebrados $\frac{23}{115}$, $\frac{46}{115}$, $\frac{69}{115}$, $\frac{92}{115}$ de modo que conservem todos um denominador igual.

XI. Reduzir ao mesmo numerador os quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{12}{17}$.

XII. Reduzir ao menor numerador commum os quebrados $\frac{5}{6}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{14}{49}$, $\frac{25}{72}$.

XIII. Provar que, se forem iguaes os quebrados $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$ etc., será $\frac{a+a'+a''+\text{etc.}}{b+b'+b''+\text{etc.}}$ igual a qualquer dos ditos quebrados.

XIV. Provar que, se forem iguaes os quebrados $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$, será $\frac{a'-a}{b'-b}$ ou $\frac{a-a'}{b-b'}$ igual a qualquer dos dois quebrados.

XV. Demonstrar que a somma de dois quebrados irreductiveis não póde ser numero inteiro senão quando os denominadores forem iguaes.

CAPITULO II

Multiplicação e divisão de quebrados
Decomposição de um quebrado na somma de outros cujos denominadores são as potencias successivas de um numero dado

208. **Theorema.** *O producto de dois quebrados é igual ao quebrado, que tem por numerador o producto dos numeradores e por denominador o producto dos denominadores*, isto é,

$$\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{5\times2}{8\times3}$$

Considerando $\frac{2}{3}$ como multiplicador, o producto deve constar (§ 49) de duas parcellas, cada uma das quaes é 3 vezes menor que o multiplicando $\frac{5}{8}$; e como este quebrado contém 5 partes iguaes, segue-se que basta fazer cada uma d'ellas 3 vezes menor, para se obter um todo 3 vezes menor que $\frac{5}{8}$.

Mas, para tornar 3 vezes menor cada uma das ditas partes, é sufficiente (§ 187) multiplicar por 3 o denominador 8 do quebrado $\frac{1}{8}$ que a representa, logo o numero 3 vezes menor que $\frac{5}{8}$ é igual a

$$\frac{1}{8\times3}+\frac{1}{8\times3}+\frac{1}{8\times3}+\frac{1}{8\times3}+\frac{1}{8\times3} \quad \text{ou} \quad \frac{5}{8\times3}$$

e por consequencia $\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{8\times3}+\frac{5}{8\times3}=\frac{5\times2}{8\times3}$

Se se tivesse considerado $\frac{5}{8}$ como multiplicador e $\frac{2}{3}$ como multiplicando, achar-se-ia tambem

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{2\times5}{3\times8}$$

Reconhece-se n'este exemplo que $\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}$ é menor que $\frac{5}{8}$, porque este producto póde considerar-se como a somma de duas parcellas, cada uma das quaes é 3 vezes menor que $\frac{5}{8}$, e é sabido que são necessarias tres d'essas parcellas para darem a somma $\frac{5}{8}$.

Pelo contrario o producto $\frac{5}{8}\times\frac{4}{3}$ deve ser maior que $\frac{5}{8}$ porque é a somma de 4 parcellas, cada umas das quaes é 3 vezes menor que $\frac{5}{8}$ e bastam tres d'ellas para darem $\frac{5}{8}$.

Em geral, *todo o producto de dois factores será maior ou menor que um dos seus factores, conforme o outro factor fôr maior ou menor que* 1.

209. **Corollario.** Advertindo que o producto de dois numeros inteiros não depende (§ 52) da ordem dos factores, ter-se-ha

$$\frac{5\times2}{8\times3}=\frac{2\times5}{3\times8}$$

e por consequencia $\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}$

O producto de dois quebrados não depende da ordem dos factores.

210. **Escolio.** Decompor $\frac{5}{8}$ em 3 partes iguaes e tomar uma d'essas partes, como parcella, 2 vezes é proceder com o quebrado $\frac{5}{8}$, como deve proceder-se com a unidade para se formar o quebrado $\frac{2}{3}$.

Logo a somma de 2 parcellas 3 vezes menores que $\frac{5}{8}$ é igual (§ 186) ao quebrado $\frac{2}{3}$ do quebrado $\frac{5}{8}$ ou

$$\frac{2}{3}\text{ de }\frac{5}{8}=\frac{5}{8\times3}+\frac{5}{8\times3}$$

e portanto $\frac{2}{3}\text{ de }\frac{5}{8}=\frac{5\times2}{8\times3}=\frac{2\times5}{3\times8}$

Todo o quebrado de quebrado reduz-se a quebrado de unidade multiplicando os numeradores dos dois quebrados, e dando ao producto por denominador o producto dos denominadores. O quebrado $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{8}$ da unidade equivale portanto a $\frac{10}{24}$, ou $\frac{5}{12}$ da unidade.

211. Antes de effectuar a multiplicação de quebrados convém reduzil-os á expressão mais simples. Póde, porém, acontecer que os factores tomados isoladamente sejam irreductiveis e comtudo o producto admitta simplificação.

Dá-se isto unicamente, quando o numerador de algum dos quebrados não é primo com o denominador de outro.

Querendo multiplicar os quebrados irreductiveis $\frac{8}{9}$ e $\frac{25}{28}$ convém pois, antes de effectuar a multiplicação, supprimir o divisor commum 4 dos numeros 8 e 28, porque, embora mude de valor cada um dos factores, é evidente (§§ 208, 187 e 93) que o producto não muda. Acha-se assim

$$\frac{8}{9}\times\frac{25}{28}=\frac{2}{9}\times\frac{25}{7}=\frac{50}{63}$$

212. **Theorema.** *O producto de tres, ou mais quebrados é igual ao quebrado, que tem por numerador o producto de todos os nume-*

radores e por denominador o producto de todos os denominadores, isto é,

$$\frac{7}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{6}{11}\times\frac{3}{4}=\frac{7\times2\times6\times3}{8\times5\times11\times4}$$

Demonstrou-se já (§ 208) que

$$\frac{7}{8}\times\frac{2}{5}=\frac{7\times2}{8\times5}$$

e portanto (§ 51) que

$$\frac{7}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{6}{11}=\frac{7\times2}{8\times5}\times\frac{6}{11}$$

ou (§ 208)

$$\frac{7}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{6}{11}=\frac{7\times2\times6}{8\times5\times11}$$

e finalmente

$$\frac{7}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{6}{11}\times\frac{3}{4}=\frac{7\times2\times6}{8\times5\times11}\times\frac{3}{4}=\frac{7\times2\times6\times3}{8\times5\times11\times4}$$

213. **Corollario.** *O producto de qualquer numero de quebrados não depende da ordem dos factores.*

214. **Theorema.** *O producto de um quebrado por um inteiro é igual a um quebrado, que tem por numerador o producto do numerador do quebrado pelo inteiro, e por denominador o denominador do mesmo quebrado*, isto é,

$$\frac{7}{8}\times5=\frac{7\times5}{8}$$

Póde demonstrar-se este theorema imitando o raciocinio empregado no § 208, ou considerando o inteiro como um quebrado que tem 1 no denominador, e effectuando depois a multiplicação dos quebrados. Empregando este ultimo processo, tem-se

$$\frac{7}{8}\times5=\frac{7}{8}\times\frac{5}{1}=\frac{7\times5}{8}$$

215. **Corollario.** *O producto de um inteiro por um quebrado não depende da ordem dos factores*, isto é, tem sempre o mesmo valor ou o inteiro seja multiplicador e o quebrado multiplicando, ou o quebrado multiplicador e o inteiro multiplicando.

216. **Escolio.** Decompor 5 em 8 partes iguaes e tomar uma d'essas partes, como parcella, 7 vezes, é proceder com o inteiro 5 como deve proceder-se com a unidade, quando se quer formar o quebrado $\frac{7}{8}$. Logo a somma de 7 parcellas 8 vezes menores que 5 é igual ao quebrado $\frac{7}{8}$ do inteiro 5 (§ 186), isto é,

$$\frac{7}{8}\text{ de }5=\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}$$

e como este segundo membro é igual a $\frac{5\times7}{8}$ ou $\frac{7}{8}\times5$ segue-se que

$$\frac{7}{8}\text{ de }5=\frac{7}{8}\times5=\frac{7\times5}{8}$$

ou que *todo o quebrado de inteiro se reduz a quebrado de unidade multiplicando o numerador por o inteiro e dando ao producto por denominador o denominador do quebrado.* O quebrado $\frac{7}{8}$ de 5 unidades equivale por consequencia ao quebrado $\frac{35}{8}$ de uma unidade.

217. **Theorema.** *Qualquer potencia de um quebrado é igual a outro quebrado, cujos termos são as potencias do mesmo grau dos termos correspondentes do quebrado proposto,* isto é, para elevar um quebrado a uma potencia é necessario elevar tanto o numerador como o denominador a essa potencia.

Com effeito (§ 69)

$$\left(\tfrac{7}{8}\right)^3=\tfrac{7}{8}\times\tfrac{7}{8}\times\tfrac{7}{8}$$

e (§ 212)

$$\tfrac{7}{8}\times\tfrac{7}{8}\times\tfrac{7}{8}=\tfrac{7\times7\times7}{8\times8\times8}=\tfrac{7^3}{8^3}$$

logo

$$\left(\tfrac{7}{8}\right)^3=\tfrac{7^3}{8^3}$$

Este theorema póde tambem demonstrar-se advertindo que (§ 78)

$$\left(\tfrac{7}{8}\right)^3=(7:8)^3$$

e (§ 101)

$$(7:8)^3=7^3:8^3=\tfrac{7^3}{8^3}$$

218. **Corollario.** *Qualquer potencia de um quebrado irreductivel é outro quebrado irreductivel,* porque sendo, por exemplo, 7 e 8 primos entre si, tambem 7^3 e 8^3 hão de ser (§ 147) primos entre si.

219. Multiplica-se uma somma, ou differença de quebrados, ou de quebrados e inteiros, por uma expressão analoga, reduzindo cada factor a um só numero, e multiplicando depois os numeros resultantes. Sendo $4+\frac{5}{8}$ um dos factores e $3-\frac{2}{7}$ o outro, effectua-se primeiro a somma indicada n'aquelle factor e depois a subtracção indicada no segundo. Achar-se-ha portanto (§ 199)

$$4+\tfrac{5}{8}=\tfrac{4\times8+5}{8}=\tfrac{37}{8}$$

e (§ 205)

$$3-\tfrac{2}{7}=\tfrac{3\times7-2}{7}=\tfrac{19}{7}$$

d'onde (§ 208)

$$\left(4+\tfrac{5}{8}\right)\left(3-\tfrac{2}{7}\right)=\tfrac{37}{8}\times\tfrac{19}{7}=\tfrac{37\times19}{8\times7}=\tfrac{703}{56}$$

ou

$$\left(4+\tfrac{5}{8}\right)\left(3-\tfrac{2}{7}\right)=12+\tfrac{31}{56}$$

220. **Theorema.** *O quociente resultante da divisão de um quebrado por outro póde obter-se, ou invertendo os termos ao divisor*

e multiplicando o quebrado invertido pelo quebrado dividendo; ou dividindo os dois termos d'este quebrado pelos termos correspondentes do quebrado divisor, isto é,

$$\frac{5}{8}:\frac{2}{7}=\frac{5}{8}\times\frac{7}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{5}{8}:\frac{2}{7}=\frac{5:2}{8:7}$$

Considerando o divisor $\frac{2}{7}$ como multiplicando, o que é permittido sempre (§ 209), o quociente $\frac{5}{8}:\frac{2}{7}$ é evidentemente o numero que se fórma de 1 como $\frac{5}{8}$ se fórma de $\frac{2}{7}$. Ora $\frac{5}{8}$ fórma-se de $\frac{2}{7}$ decompondo este numero em duas parcellas iguaes, escrevendo uma d'ellas 7 vezes, decompondo a somma 1 em 8 partes iguaes, e finalmente tomando 5 d'estas ultimas partes. Logo para se obter o quociente $\frac{5}{8}:\frac{2}{7}$ decompor-se-ha 1 em duas partes iguaes, tomar-se-ha $\frac{1}{2}$ sete vezes, decompor-se-ha depois a somma $\frac{7}{2}$ em 8 partes iguaes e sommar-se-hão 5 d'estas partes. Ter-se-ha portanto

$$\frac{5}{8}:\frac{2}{7}=\frac{7}{8\times2}+\frac{7}{8\times2}+\frac{7}{8\times2}+\frac{7}{8\times2}+\frac{7}{8\times2}$$

ou $\frac{5}{8}:\frac{2}{7}=\frac{7\times5}{8\times2}$ e finalmente (§ 208) $\frac{5}{8}:\frac{2}{7}=\frac{5}{8}\times\frac{7}{2}$

Dividindo os dois termos do quebrado $\frac{7\times5}{8\times2}$ por o producto 7×2 acha-se (§§ 187, 99 e 96)

$$\frac{7\times5}{8\times2}=\frac{7\times5:(7\times2)}{8\times2:(7\times2)}=\frac{5:2}{8:7}$$

e portanto $\frac{5}{8}:\frac{2}{7}=\frac{5:2}{8:7}$

Este segundo modo de dividir quebrados só se emprega, quando os dois termos do quebrado dividendo são multiplos dos termos correspondentes do divisor.

221. Antes de effectuar uma divisão de quebrados convém reduzir tanto o dividendo como o divisor á expressão mais simples. Póde comtudo acontecer, que, sendo irreductiveis os dois quebrados, o quociente admitta simplificação. Isto só póde succeder, quando dois termos do mesmo nome, ambos os numeradores ou ambos os denominadores, admittem algum divisor commum, como succede no seguinte exemplo

$$\frac{45}{56}:\frac{27}{88}=\frac{5}{7}:\frac{3}{11}=\frac{5}{7}\times\frac{11}{3}=\frac{55}{21}$$

222. **Theorema.** *O quociente resultante da divisão de um inteiro por um quebrado é igual ao producto, que se obtem invertendo*

os termos ao divisor, e multiplicando o quebrado invertido pelo inteiro, isto é,

$$6:\frac{4}{5}=6\times\frac{5}{4}$$

Póde demonstrar-se este theorema imitando o raciocinio empregado no § 220, ou considerando o inteiro como um quebrado, cujo denominador é 1, e praticando depois a regra da divisão de quebrados, como em seguida se vê

$$6:\frac{4}{5}=\frac{6}{1}:\frac{4}{5}=\frac{6}{1}\times\frac{5}{4}=6\times\frac{5}{4}$$

223. **Corollario.** *O quociente resultante da divisão de um inteiro por um quebrado irreductivel só é inteiro, quando o numerador do quebrado divide exactamente o inteiro*, porque, sendo $6:\frac{4}{5}$ igual a $\frac{6\times5}{4}$, é sabido que 4 não póde ser primo com 5 e dividir o producto 6×5 sem ser (§ 143) um dos divisores de 6.

O quociente será maior que o dividendo, quando o divisor fôr um quebrado proprio, e menor que o dividendo, no caso contrario. Ter-se-ha, por exemplo,

$$24:\frac{4}{5}=30 \quad \text{e} \quad 28:\frac{7}{5}=20$$

No primeiro caso o producto de 30 por $\frac{4}{5}$ deve ser menor que 30, considerado como multiplicando, porque o multiplicador $\frac{4}{5}$ é menor que 1; no segundo caso o producto de 20 por $\frac{7}{5}$ deve ser maior que 20, por ser o factor $\frac{7}{5}$ maior que 1.

224. **Theorema.** *Um quebrado não muda de valor, quando ambos os seus termos se multiplicam, ou dividem pelo mesmo numero fraccionario*, isto é,

$$\frac{28}{42}=\frac{28\times\frac{5}{7}}{42\times\frac{5}{7}} \quad \text{ou} \quad \frac{28}{42}=\frac{28:\frac{7}{5}}{42:\frac{7}{5}}$$

Este theorema é uma generalisação do que se demonstrou no § 187 e póde demonstrar-se facilmente do seguinte modo.

Por este § é

$$\frac{28}{42}=\frac{28\times5}{42\times5}=\frac{28\times5:7}{42\times5:7}$$

e pelos §§ 78 e 214 é

$$\frac{28\times5:7}{42\times5:7}=\frac{\frac{28\times5}{7}}{\frac{42\times5}{7}}=\frac{28\times\frac{5}{7}}{42\times\frac{5}{7}}$$

logo

$$\frac{28}{42}=\frac{28\times\frac{5}{7}}{42\times\frac{5}{7}}$$

Por um raciocinio analogo se demonstra que é

$$\frac{28}{42}=\frac{28:\frac{7}{5}}{42:\frac{7}{5}}$$

225. **Escolio.** Póde simplificar-se um quebrado multiplicando ambos os termos por um quebrado proprio, ou dividindo-os por um quebrado improprio, comtanto que os dois productos, ou os dois quocientes, sejam inteiros. Assim tem-se por exemplo

$$\frac{28}{42}=\frac{28\times\frac{5}{7}}{42\times\frac{5}{7}}=\frac{20}{30} \quad \text{ou} \quad \frac{28}{42}=\frac{28:\frac{7}{5}}{42:\frac{7}{5}}=\frac{20}{30}$$

Não se pense, comtudo, que possa simplificar-se um quebrado, cujos termos são primos entre si, dividindo ambos os seus termos por algum quebrado. Com effeito, se os dois termos de um quebrado forem exactamente divisiveis por algum quebrado irreductivel, o numerador d'este será necessariamente (§ 223) um divisor commum dos dois referidos termos, e deixarão, portanto, estes de ser primos entre si, como se havia supposto.

226. **Theorema.** *O quociente resultante da divisão de um quebrado por um inteiro é igual ao quebrado, que se obtem multiplicando o denominador do quebrado proposto pelo inteiro, ou dividindo por este o seu numerador*, isto é,

$$\frac{15}{16}:5=\frac{15}{16\times5} \quad \text{ou} \quad \frac{15}{16}:5=\frac{15:5}{16}$$

Póde demonstrar-se este theorema raciocinando como nos §§ 220 e 222, ou reduzindo o inteiro a quebrado e effectuando depois a divisão dos quebrados por qualquer das regras conhecidas.

Conforme a regra, que se seguir, achar-se-ha

$$\frac{15}{16}:5=\frac{15}{16}:\frac{5}{1}=\frac{15}{16}\times\frac{1}{5}=\frac{15}{16\times5}$$

ou

$$\frac{15}{16}:5=\frac{15}{16}:\frac{5}{1}=\frac{15:5}{16:1}=\frac{15:5}{16}$$

D'estes dois modos de dividir um quebrado por um inteiro o ultimo só se emprega, quando o numerador do quebrado é divisivel pelo inteiro.

227. **Theorema.** *O quebrado, que tem por numerador a somma dos numeradores de dois ou mais quebrados e por denominador a somma dos denominadores dos mesmos quebrados, tem um valor medio, entre os valores do menor e do maior dos ditos quebrados*, isto é, sendo

$$\frac{5}{8}<\frac{7}{9}<\frac{11}{12}$$

será

$$\frac{5}{8}<\frac{5+7+11}{8+9+12}<\frac{11}{12}$$

Com effeito, por ser $\frac{5}{8}$ o menor dos tres quebrados, será

$$\frac{5}{8}.9<7 \qquad \frac{5}{8}.12<11$$

e portanto

$$\frac{5}{8}.9+\frac{5}{8}.12<7+11$$

mas (§ 79) $\frac{5}{8}\cdot 8=5$

logo $\frac{5}{9}\cdot 9+\frac{5}{8}\cdot 12+\frac{5}{8}\cdot 8<7+11+5$

ou $\frac{5}{8}(9+12+8)<7+11+5$

e finalmente $\frac{5}{8}<\frac{5+7+11}{8+9+12}$

Do mesmo modo, por ser $\frac{11}{12}$ o maior dos tres quebrados, ter-se-ha

$$7<\frac{11}{12}\cdot 9 \qquad 5<\frac{11}{12}\cdot 8$$

e, como se sabe que é, $11=\frac{11}{12}\cdot 12$

será $7+5+11<\frac{11}{12}\cdot 9+\frac{11}{12}\cdot 8+\frac{11}{12}\cdot 12$

ou $5+7+11<\frac{11}{12}(8+9+12)$

e finalmente $\frac{5+7+11}{8+9+12}<\frac{11}{12}$

228. **Corollario I.** *O valor de qualquer quebrado approxima-se da unidade, quando aos seus dois termos se junta o mesmo numero.*

O quebrado $\frac{5}{8}$, por exemplo, approxima-se da unidade, isto é, augmenta, quando aos dois termos se junta qualquer numero n, porque applicando o theorema anterior aos quebrados $\frac{5}{8}$ e $\frac{n}{n}$ tem-se

$$\frac{5}{8}<\frac{5+n}{8+n}<1$$

Se o quebrado fôr improprio ter-se-ha similhantemente

$$\frac{n}{n} \quad \text{ou} \quad 1<\frac{8+n}{5+n}<\frac{8}{5}$$

229. **Corollario II.** *O quebrado, que tem por numerador a somma de dois ou mais numeros, e por denominador o numero d'elles, está comprehendido entre o menor e o maior dos ditos numeros.*

Dando por denominador a unidade a cada um dos numeros e escrevendo os quebrados resultantes por ordem de grandeza, será

$$\frac{8}{1}<\frac{10}{1}<\frac{14}{1}<\frac{17}{1}<\frac{26}{1}$$

por exemplo, e portanto (§ 227)

$$\frac{8}{1}<\frac{8+10+14+17+26}{1+1+1+1+1}<\frac{26}{1} \quad \text{ou} \quad 8<\frac{8+10+14+17+26}{5}<26$$

230. Chama-se **meio arithmetico** *de dois, ou mais numeros ao numero unico, que póde substituir-se a cada um d'elles sem alterar a sua somma.* O meio arithmetico dos numeros 8, 10, 14, 17 e 26 é, pois, o numero desconhecido x, que satisfaz á seguinte condição

$$x+x+x+x+x=8+10+14+17+26$$

e, porque o primeiro membro equivale ao producto $5x$, tem-se (§ 75)

$$x=\frac{8+10+14+17+26}{5}=15$$

Logo *o meio arithmetico de dois ou mais numeros é igual á somma de todos elles dividida pelo seu numero.*

231. **Problema.** *Dado qualquer quebrado, determinar o numerador de outro, que diffira do primeiro menos de* $\frac{1}{b}$.

Seja, por exemplo, $\frac{5}{7}$ o quebrado que se deseja reduzir a outro de denominador 9 e do qual diffira menos de $\frac{1}{9}$. Comprehende-se que devem haver dois quebrados, que satisfaçam ao problema, um menor e outro maior que $\frac{5}{7}$. Representando por x o numerador do primeiro, será $x+1$ o numerador do segundo e é evidente que o numero x deve satisfazer simultaneamente ás desigualdades

$$\frac{x}{9}<\frac{5}{7}<\frac{x+1}{9}$$

pois que d'ellas resulta ser a differença $\frac{x+1}{9}-\frac{x}{9}=\frac{1}{9}$ maior do que qualquer das differenças $\frac{5}{7}-\frac{x}{9}$ ou $\frac{x+1}{9}-\frac{5}{7}$, como se pretende.

Multiplicando por 9 os tres quebrados vem

$$x<\frac{5\times 9}{7}<x+1$$

Logo x e $x+1$ são dois numeros inteiros consecutivos, um menor e outro maior que $\frac{5\times 9}{7}=6+\frac{3}{7}$, e por consequencia é $x=6$ e os dois quebrados pedidos são $\frac{6}{9}$ e $\frac{7}{9}$.

Do mesmo modo se procede em qualquer outro exemplo.

232. O processo empregado no § antecedente póde servir para achar um quebrado mais simples do que outro, embora diffira d'este menos do que certa quantidade, quando, sem lhe alterar o valor, não possa tornar-se sufficientemente simples.

Seja, por exemplo, $\frac{3640}{9801}$ um quebrado irreductivel, ao qual se

pretende substituir outro de menor denominador, embora entre os dois haja uma differença inferior a $\frac{1}{100}$.

Procedendo, como se ensinou no § anterior, acha-se

$$\frac{x}{100} < \frac{3640}{9801} < \frac{x+1}{100}$$

e suppondo que é $364000 : 9801 = 37 + \frac{1363}{9801}$

ter-se-ha $\frac{37}{100} < \frac{3640}{9801} < \frac{38}{100}$

Póde pois substituir-se o quebrado $\frac{3640}{9801}$ por qualquer dos quebrados $\frac{37}{100}$ ou $\frac{38}{100}$, na certeza de que entre aquelle quebrado e qualquer d'estes a differença não chega a ser $\frac{1}{100}$.

233. Problema. *Decompor um quebrado* $\frac{C}{B}$ *em uma somma de quebrados, cujos denominadores successivos sejam* 1, A, A^2, A^3, etc., *representando* A *qualquer numero inteiro.*

Dividindo o numerador do quebrado pelo seu denominador e designando por Q e R o quociente incompleto e o resto, será (§ 81)

$$\frac{C}{B} = Q + \frac{R}{B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Multiplicando o resto R d'esta divisão por A e dividindo o producto RA por B, ter-se-ha similhantemente

$$\frac{RA}{B} = Q' + \frac{R'}{B}$$

e dividindo ambos os membros por A (§§ 226 e 91)

$$\frac{R}{B} = \frac{Q'}{A} + \frac{R' : B}{A}$$

designando Q' (Q *linha*) e R' o quociente incompleto e o resto d'esta segunda divisão.

Substituindo este valor de $\frac{R}{B}$ na igualdade (1) vem

$$\frac{C}{B} = Q + \frac{Q'}{A} + \frac{R' : B}{A} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Procedendo com o quociente $R' : B$, como se procedeu com o quebrado $\frac{R}{B}$, achar-se-ha

$$\frac{R'}{B} = \frac{Q''}{A} + \frac{R'' : B}{A}$$

suppondo que Q'' (Q *duas linhas*) e R'' representam o quociente incompleto e o resto da divisão de $R'A$ por B.

Substituindo na igualdade (2) o valor de $R' : B$ tem-se

$$\frac{C}{B} = Q + \frac{Q'}{A} + \frac{Q''}{A^2} + \frac{R'' : B}{A^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Continuando sempre com o mesmo processo, isto é, multiplicando o resto de cada divisão por A e dividindo o producto por B, ter-se-ha

$$\frac{C}{B} = Q + \frac{Q'}{A} + \frac{Q''}{A^2} + \frac{Q'''}{A^3} + \frac{Q''''}{A^4} + \frac{R'''' : B}{A^4} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

e é evidente que, se algum dos restos R'''', por exemplo, fôr zero, a igualdade precedente converter-se-ha em

$$\frac{C}{B} = Q + \frac{Q'}{A} + \frac{Q''}{A^2} + \frac{Q'''}{A^3} + \frac{Q''''}{A^4}$$

Se nenhum dos restos fôr nullo, o numero de parcellas do segundo membro será illimitado.

Tomando para exemplo o quebrado $\frac{2369}{144}$ e fazendo $A=6$, achar-se-ha, seguindo o processo exposto,

$$\frac{2369}{144} = 16 + \frac{2}{6} + \frac{4}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{3}{6^4}$$

N'este exemplo acontece ser zero o resto da quinta divisão, e por isso o segundo membro da igualdade contém apenas 5 parcellas.

Fazendo $\frac{C}{B} = \frac{55}{12}$ e $A=8$ acha-se

$$\frac{55}{12} = 4 + \frac{4}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{2}{8^3} + \frac{5}{8^4} + \frac{2}{8^5} + \text{etc.}$$

e, por mais divisões que se façam, jámais apparecerá uma sem resto. O numero de parcellas da somma é n'este caso illimitado.

Quando o quebrado é proprio o primeiro quociente Q é nullo, como se observa em

$$\frac{23}{24} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \frac{4}{5^5} + \frac{3}{5^6} + \text{etc.}$$

234. Convém advertir que os numeradores Q', Q'', Q''', etc., dos diversos quebrados devem ser menores que o denominador A do primeiro. Com effeito, devendo os restos R, R', R'', etc., de todas as divisões, ser menores que o seu divisor B, segue-se que serão proprios os quebrados $\frac{R}{B}$, $\frac{R'}{B}$, $\frac{R''}{B}$, etc., e consequentemente que os productos d'estes quebrados pelo numero inteiro A não poderão deixar de ser inferiores a A (§ 208). Logo tambem as sommas

$$Q' + \frac{R'}{B},\ Q'' + \frac{R''}{B},\ Q''' + \frac{R'''}{B},\ \text{etc.}$$

iguaes respectivamente a $\frac{RA}{B}$, $\frac{R'A}{B}$, $\frac{R''A}{B}$, etc., devem ser menores

que A e com maior razão serão menores que A as parcellas Q', Q'', Q''', etc., das mesmas sommas.

235. **Theorema.** *A somma* $Q+\frac{Q'}{A}+\frac{Q''}{A^2}+\frac{Q'''}{A^3}+$ *etc., proveniente de um quebrado irreductivel* $\frac{C}{B}$ *constará de um numero limitado de parcellas*[1], *quando todos os factores primos de B se contiverem em A; e constará de um numero illimitado de parcellas, quando alguns dos factores primos de B, ou todos não forem divisores de A.*

O numero de parcellas da somma será limitado, quando em alguma das divisões o resto fôr nullo (§ 233). Ora prevê-se facilmente, quando isto deve acontecer, notando que os restos R', R'', R''', etc. que resultam das divisões de RA, $R'A$, $R''A$, etc. por B, são iguaes aos que se acham dividindo CA, CA^2, CA^3, etc. por B. Demonstra-se que estes restos são iguaes áquelles reflectindo que da igualdade

$$C=BQ+R$$

se deriva

$$CA=B\times AQ+RA$$

e que, sendo a differença entre CA e RA um multiplo de B, estes dois productos (§ 105) divididos por B devem dar restos iguaes. Mas suppondo tambem que é (§ 233)

$$RA=BQ'+R'$$

ter-se-ha

$$CA=B\times AQ+BQ'+R'$$

ou (§ 105)

$$CA=\text{multiplo de } B+R'$$

e consequentemente

$$CA^2=\text{multiplo de } B+R'A$$

Logo CA^2 e $R'A$ divididos por B dão restos iguaes.

Do mesmo modo se demonstra que CA^3 e $R''A$, CA^4 e $R'''A$, etc. divididos por B dão restos iguaes.

Admittindo, pois, que todos os factores primos de B existem em A, é evidente que as potencias de A de certo grau em diante hão de ser divisiveis por B, e suppondo que A^3, por exemplo, é a menor d'essas potencias, será tambem (§ 106) CA^3 divisivel por B, e por-

---

[1] Os numeradores Q', Q'', Q''', etc., quando são em numero illimitado, reproduzem-se periodicamente.

Com effeito, os restos, sendo em numero illimitado, hão de necessariamente repetir-se, porque são todos menores que o numero B, que serve de divisor em todas as divisões successivas. Repetindo-se os restos, hão de tambem repetir-se os dividendos parciaes, que se seguirem, visto que são o resultado da multiplicação dos mesmos restos pelo factor A. Sendo iguaes dois dividendos parciaes e igual o divisor, que é sempre B, os quocientes incompletos correspondentes serão iguaes entre si e o mesmo succederá aos restos seguintes.

tanto a somma terá apenas 4 parcellas, se o quebrado $\frac{C}{B}$ fôr improprio, e 3, se fôr proprio.

Não existindo em A todos os divisores primos de B, nenhuma das potencias de A é divisivel por B e, como C é primo com B, nenhum dos restos (§ 143) será nullo. N'este caso o numero de parcellas é illimitado.

Suppondo que é $\frac{C}{B}=\frac{79}{48}$ e $A=54$ todos os factores primos (2 e 3) de 48 existem em 54 ou 2×3^3 e, como $(2\times3^3)^4$ é a menor potencia de 54 divisivel por 48, segue-se que o quebrado $\frac{79}{48}$ produzirá uma somma de 5 parcellas, como em seguida se vê

$$\frac{79}{48}=1+\frac{34}{54}+\frac{47}{54^2}+\frac{13}{54^3}+\frac{27}{54^4}$$

Quando o quebrado é $\frac{36}{77}$ e $A=8$ nenhum dos factores primos (7 e 11) de 77 existe em 8, e por isso o numero de parcellas da somma será illimitado. O mesmo acontece, quando o quebrado é $\frac{11}{12}$ e $A=8$, porque entre os divisores primos (2 e 3) de 12 ha um que não é divisor de 8. O calculo dá para estes dois exemplos

$$\frac{36}{73}=\frac{3}{8}+\frac{7}{8^2}+\frac{4}{8^3}+\frac{3}{8^4}+\frac{7}{8^5}+\frac{4}{8^6}+\frac{3}{8^7}+\text{etc.}$$

$$\frac{11}{12}=\frac{7}{8}+\frac{2}{8^2}+\frac{5}{8^3}+\frac{2}{8^4}+\frac{5}{8^5}+\frac{2}{8^6}+\frac{5}{8^7}+\text{etc.}$$

Em ambos estes exemplos é $Q=0$, porque os quebrados $\frac{36}{73}$ e $\frac{11}{12}$ são proprios.

EXERCICIOS

I. Effectuar as seguintes multiplicações indicadas $7\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{9}$, $\frac{3}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}$, $\frac{14}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{6}{7}\times\frac{2}{8}$, $4\frac{8}{3}\times5\frac{3}{11}$, $5\left(\frac{4}{8}+\frac{5}{6}\right)\frac{2}{3}$, $\left(\frac{7}{8}-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{7}{8}+\frac{2}{5}\right)$, $\frac{226}{372}\times\frac{127}{945}\times\frac{820}{647}$.

II. Effectuar as seguintes divisões indicadas $4:\frac{3}{8}$, $5:\frac{11}{12}$, $10:\frac{5}{6}$, $8:\frac{21}{7}$, $\frac{12}{55}:\frac{4}{11}$, $\frac{108}{187}:\frac{12}{17}$, $\frac{4}{5}:\frac{3}{7}$, $\frac{7}{8}:\frac{3}{10}:\frac{5}{2}$, $\frac{824}{325}:\frac{12}{67}$.

III. Effectuar as seguintes operações indicadas $\left(6\times\frac{3}{2}-\frac{5}{7}\right)\frac{2}{3}:\frac{4}{10}$, $\left(\frac{5}{8}\right)^2:\left(\frac{5}{8}\right)^2:\frac{5}{8}$, $\left(\frac{7}{9}\right)^2:\left(\frac{3}{4}\right)^2:\left(\frac{11}{3}\right)^2$, $\left(3\times\frac{6}{8}-\frac{7}{8}-2\right):\left(5-\frac{1}{8}\right)\times\left(4+\frac{3}{2}\right)$.

IV. Achar os meios arithmeticos dos numeros (10, 11, 12, 13), (8, 9, 10, 11, 12), (25, 60, 83, 72, 95), $\left(3, \frac{5}{8}, \frac{4}{7}, \frac{2}{5}\right)$.

V. Decompor em series de quebrados, cujos denominadores sejam as potencias successivas de 21, os quebrados $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{72}{65}$, $\frac{33}{28}$, $\frac{25}{62}$, $\frac{43}{55}$, $\frac{37}{26}$, $\frac{40}{49}$ e $\frac{32}{63}$.

VI. Achar os quebrados capazes de produzirem as series:

$\frac{9}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{1}{4^4}$, $\frac{9}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{3}{4^5}+\frac{2}{4^6}+\frac{1}{4^7}+\frac{3}{4^8}+\frac{2}{4^9}+\frac{1}{4^{10}}+$etc., $\frac{5}{6}+\frac{5}{6^2}+$ $+\frac{5}{6^3}+\frac{5}{6^4}+$etc., $\frac{99}{100}+\frac{99}{100^2}+\frac{99}{100^3}+$etc., $\frac{83}{99}+\frac{83}{99^2}+\frac{83}{99^3}+$etc., $\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{5}{10^3}+$ $+\frac{3}{10^4}+\frac{5}{10^5}+$etc., $\frac{7}{8}+\frac{5}{8^2}+\frac{6}{8^3}+\frac{4}{8^4}+\frac{3}{8^5}+\frac{4}{8^6}+\frac{3}{8^7}+\frac{4}{8^8}+$etc.

VII. Reduzir a quebrados da unidade os seguintes quebrados de inteiros e de quebrados: $\frac{11}{17}$ de $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ de 5, $\frac{15}{17}$ de $\frac{3}{7}$ de 4, $\frac{18}{25}$ de $\frac{2}{9}$.

VIII. Provar que o meio arithmetico, ou differencial entre a somma dos numeradores e a somma dos denominadores de uma serie de quebrados é igual á somma dos meios arithmeticos dos dois termos de cada um dos quebrados.

IX. Calcular com um erro ou differença inferior a $\frac{1}{12}$ os valores das fracções $\frac{15}{17}$, $\frac{123}{125}$, $\frac{83}{87}$.

X. Perguntando-se a um capitão, que recolhia da campanha com 36 soldados, quantos homens tinha a companhia antes de entrar em combate, respondeu: $\frac{1}{4}$ morreu no campo, $\frac{1}{8}$ ficou prisioneiro, $\frac{1}{6}$ está no hospital, e $\frac{1}{12}$ morreu de fadigas e de ferimentos. Quantos homens tinha a companhia?

XI. Um sujeito, a quem se perguntou que horas eram, respondeu: são $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{7}{12}$ de $\frac{6}{7}$ de 24 horas. Quantas horas eram?

XII. Um tanque póde encher-se de agua por meio de tres torneiras e esgotar-se por meio de uma quarta torneira. Das tres primeiras abrindo uma enche-se o tanque em tres horas e $\frac{2}{5}$ de hora, abrindo outra e fechando a primeira, enche-se o tanque em 2 horas e $\frac{3}{4}$ de hora, e finalmente, estando aberta só a terceira torneira, são precisas 4 horas e meia para se encher o tanque. A quarta torneira é tal, que estando ella aberta e fechadas as outras tres, o tanque esgota-se em 3 horas e $\frac{3}{5}$ da hora. Quantas horas são precisas para se encher o tanque estando abertas as quatro torneiras?

XIII. Um sujeito comprou uma propriedade pagando no acto da escriptura $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{8}{9}$ do preço por que a tinha ajustado, e ficou depois a dever ao vendedor 12:125$000 réis. Por quanto foi vendida a propriedade?

XIV. Demonstrar que qualquer quociente não muda de valor, quando ambos os seus termos se multiplicam ou dividem pelo mesmo numero fraccionario.

CAPITULO III

Operações sobre numeros decimaes—Dizima periodica

236. Definiu-se já (§ 20) numero decimal aquelle que designa quantas partes decimaes (§ 19) da unidade se contêem n'uma grandeza dada.

Nem todas as grandezas se compõem de um numero exacto de partes 10, 100, 1000, etc., vezes menores que uma certa unidade, e por isso grandezas ha que, sendo commensuraveis (§ 3) com a

unidade escolhida, não podem comtudo exprimir-se exactamente por numeros decimaes.

237. *Todo o numero decimal equivale ao quebrado que tem por numerador o mesmo numero, depois de supprimida a virgula, e por denominador o numero escripto com o algarismo 1 seguido de tantos zeros, quantas são as casas decimaes*, isto é,

$$32{,}675 = \frac{32675}{1000}$$

Com effeito, o numero 32,675 contém 5 millesimas, 7 centesimas ou 70 millesimas, 6 decimas ou 600 millesimas, 2 unidades ou 2000 millesimas e 3 dezenas de milhar ou 30000 millesimas. Reunindo em um só numero todas as millesimas contidas em 32,675 acha-se 32675 millesimas; e como uma millesima é uma grandeza que tomada 1000 vezes produz uma unidade, segue-se que 32,675 é um numero que se compõe de 32675 partes das quaes 1000 fazem uma unidade, ou que (§ 18)

$$32{,}675 = \frac{32675}{1000}$$

238. *Um numero decimal não muda de valor quando á direita se acrescentam ou supprimem zeros*, isto é,

$$32{,}675 = 32{,}67500$$

Esta igualdade é evidente, porque os zeros escriptos á direita do numero decimal não alteram a posição dos outros algarismos relativamente á virgula, que por convenção marca a posição do algarismo das unidades, e por consequencia todos os algarismos conservam o mesmo valor relativo.

A mesma proposição póde demonstrar-se recorrendo á theoria dos quebrados. Com effeito, sendo (§ 237)

$$32{,}675 = \frac{32675}{1000}$$

e (§ 187) $$\frac{32675}{1000} = \frac{32675 \times 100}{1000 \times 100} = \frac{3267500}{100000}$$

será $$32{,}675 = \frac{3267500}{100000}$$

ou (§ 237) $$32{,}675 = 32{,}67500$$

239. Diz-se que dois ou mais *numeros decimaes* são da *mesma especie numerica*, quando o numero de casas de dizima é o mesmo em todos. Reduzem-se numeros decimaes á mesma especie numerica, acrescentando ou supprimindo zeros á direita d'elles, de modo que fiquem todos com igual numero de casas de dizima. Os numeros 32,675; 0,685470 e 574,82 reduzidos á mesma especie numerica transformam-se em 32,67500; 0,68547 e 574,82000.

A reducção de numeros decimaes á mesma especie numerica corresponde á redução de quebrados ao mesmo denominador.

240. A addição de numeros decimaes effectua-se como a dos inteiros depois de se haverem reduzido á mesma especie numerica (§ 239).

É evidente que supprimindo a virgula, depois de se reduzirem os numeros a terem a mesma especie numerica, podem as parcellas considerar-se como numeradores de quebrados, que têem um denominador commum, porque sendo

$$483+52{,}73+8{,}345=483{,}000+52{,}730+8{,}345$$

será $$483+52{,}73+8{,}345=\frac{483000+52730+8345}{1000}$$

Na pratica é desnecessario acrescentar ou supprimir zeros para reduzir á mesma especie numerica todas as parcellas, comtanto que estas se escrevam por baixo umas das outras, de modo que as virgulas fiquem na mesma linha vertical. A operação dispõe-se portanto de um dos seguintes modos.

483,000	483
52,730	52,73
8,345	8,345
544,075	544,075

241. A subtracção de numeros decimaes faz-se como a dos inteiros depois de estarem reduzidos á mesma especie numerica.

Para subtrahir 0,05398 de 23,6047, notar-se-ha que (§ 239)

$$23{,}6047-0{,}05398=23{,}60470-0{,}05398=\frac{2360470}{100000}-\frac{5398}{100000}$$

e por consequencia que

$$23{,}6047-0{,}05398=\frac{2360470-5398}{100000}$$

Na pratica escreve-se o subtractivo por baixo do additivo, de modo que as virgulas fiquem na mesma vertical, e effectua-se a subtracção por qualquer dos modos abaixo indicados.

23,60470	23,6047
0,05398	0,05398
23,55072	23,55072

A subtracção faz-se pelo mesmo processo, quando um dos numeros é inteiro e o outro decimal. Os exemplos seguintes indicam a maneira de operar n'este caso.

845		845,000		937,6504	937,6504
0,647	ou	0,647		268	ou 268,0000
844,353		844,353		669,6504	669,6504

242. A subtracção de decimaes póde tambem effectuar-se por meio dos complementos arithmeticos (§ 42).

Partindo do principio que o resto de uma subtracção não varia, quando a ambos os termos se junta o mesmo numero, tem-se

$$32{,}65 - 18{,}437 = (32{,}65 + 81{,}563) - (18{,}437 + 81{,}563)$$

e como 81,563 é o complemento arithmetico de 18,437, isto é, o numero que junto com 18,437 dá 100, segue-se que

$$32{,}65 - 18{,}437 = 32{,}65 + 81{,}563 - 100$$

A operação dispõe-se como abaixo se vê

$$\begin{array}{r} 32{,}65 \\ 81{,}563 \\ \hline 1)14{,}213 \end{array}$$

O emprego dos complementos torna-se realmente vantajoso (§ 45) quando é necessario effectuar muitas addições e subtracções.

243. *O producto de dois numeros decimaes, ou de um numero decimal por um numero inteiro, obtem-se multiplicando os dois numeros, como se fossem inteiros* (sem fazer caso das virgulas), *e dando ao producto tantas casas para dizima, quantas são as casas decimaes dos dois factores.*

Convertendo os numeros decimaes em quebrados (§ 237) tem-se

$$32{,}658 \times 0{,}34 = \frac{32658}{1000} \times \frac{34}{100}$$

e como (§§ 208 e 63)

$$\frac{32658}{1000} \times \frac{34}{100} = \frac{32658 \times 34}{1000 \times 100} = \frac{32658 \times 34}{100000}$$

segue-se que $\quad 32{,}658 \times 0{,}34 = \frac{32658 \times 34}{100000}$

ou (§ 237) $\quad 32{,}658 \times 0{,}34 = 11{,}10372$

suppondo que é $\quad 32658 \times 34 = 1110372$

Quando o producto dos dois numeros inteiros tem menos algarismos do que a parte decimal do producto dos numeros decimaes, escrevem-se á esquerda d'aquelle producto os zeros, que forem necessarios para se poder collocar a virgula no seu logar. Suppondo que se quer achar o valor do producto indicado $0{,}63 \times 0{,}00485 \times \times 0{,}07$, effectua-se o producto dos inteiros 63, 485 e 7, e dá-se a este producto 213885 um numero de casas de dizima igual a $2 + 5 + 2$ ou 9. Logo

$$0{,}63 \times 0{,}00485 \times 0{,}07 = 0{,}000213885$$

244. **Theorema.** *Multiplica-se um numero decimal por* 10, 100, 1000, etc., *deslocando a virgula para a direita* 1, 2, 3, etc., *casas*, isto é,

$$64{,}573 \times 100 = 6457{,}3$$

Segundo a regra da multiplicação de decimaes (§ 243) o producto de 64,573 por 100 obtem-se multiplicando 64573 por 100 e dando ao producto 6457300 (§ 62) tres casas de dizima. Tem-se pois

$$64{,}573 \times 100 = 6457{,}300$$

ou (§ 238) $$64{,}573 \times 100 = 6457{,}3$$

Recorrendo á definição de numero decimal chega-se tambem ao mesmo resultado, porque, sendo 64,573 o mesmo que 64573 millesimas da unidade, ter-se-ha

$$64{,}573 \times 100 = 64573 \times 1 \text{ millesima} \times 100$$

ou (§ 55) $$64{,}573 \times 100 = 64573 \times 100 \text{ millesimas}$$

e como uma decima tem 100 millesimas, segue-se que

$$64{,}573 \times 100 = 64573 \times 1 \text{ decima} = 64573 \text{ decimas}$$

245. *Uma potencia de qualquer numero decimal obtem-se formando a potencia do mesmo grau do numero sem a virgula, e dando depois ao resultado tantas casas de dizima, quantas são as unidades do producto do numero de casas decimaes do numero dado pelo expoente da potencia,* isto é,

$$(0{,}4)^3 = \frac{4^3}{1000} = 0{,}064$$

Esta regra funda-se na definição de potencia (§ 69) e na regra da multiplicação de decimaes (§ 243). Pela primeira é

$$(0{,}4)^3 = 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4$$

e pela segunda é $$0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 4^3 : 1000$$

logo $$(0{,}4)^3 = 4^3 : 1000 = 64 : 1000 = 0{,}064$$

246. *O quociente de dois numeros decimaes, ou de um numero inteiro e um numero decimal, obtem-se mudando a virgula para a direita igual numero de casas em ambos os numeros, de modo que o divisor fique inteiro, effectuando a divisão, como se o dividendo fosse tambem inteiro, e dando ao quociente incompleto e ao resto tantas casas de dizima, quantas ficaram existindo no dividendo.*

Suppondo que 564572,83 é o dividendo e 1,245 o divisor, será (§ 237)

$$564572{,}83 : 1{,}245 = \frac{56457283}{100} : \frac{1245}{1000}$$

ou (§§ 187 e 220)

$$564572{,}83 : 1{,}245 = \frac{564572830}{1000} : \frac{1245}{1000} = \frac{564572830 : 1245}{1000 : 1000}$$

e por consequencia

$$564572{,}83 : 1{,}245 = 564572830 : 1245 = 453472 + \frac{190}{1245}$$

N'esta divisão o divisor tem mais casas de dizima que o dividendo, e por isso o divisor não póde tornar-se inteiro sem o dividendo o ficar tambem. Do mesmo modo se raciocinaria se o dividendo fosse inteiro e o divisor decimal.

Se o dividendo tiver mais casas de dizima que o divisor, achar-se-ha similhantemente

$$564{,}57283 : 12{,}45 = \frac{56457283}{100000} : \frac{1245}{100} = \frac{56457283 : 1245}{100000 : 100}$$

e por consequencia

$$564{,}57283 : 12{,}45 = \frac{56457283 : 1245}{1000}$$

ou

$$564{,}57283 : 12{,}45 = \left(45347 + \frac{268}{1245}\right) : 1000$$

e finalmente

$$564{,}57283 : 12{,}45 = 45{,}347 + \frac{0{,}268}{1245}$$

Logo, para dividir 564,57283 por 12,45, desloca-se a virgula duas casas para a direita, tanto no dividendo como no divisor, divide-se sem fazer caso da virgula 56457,283 por 1245 e dão-se 3 casas de dizima ao quociente incompleto 45347 e outras 3 ao resto 268.

Quando o dividendo é um numero decimal e o divisor numero inteiro, a divisão faz-se como no exemplo anterior, com a differença de não ser necessario mudar a virgula aos dois numeros.

247. **Theorema.** *Divide-se um numero inteiro ou decimal por* 10, 100, 1000, etc., *collocando a virgula de modo que o dividendo fique com* 1, 2, 3, etc., *casas de dizima a mais*, isto é,

$$324645 : 1000 = 324{,}645 \quad \text{e} \quad 324{,}645 : 100 = 3{,}24645$$

Se o dividendo é inteiro, tem-se (§ 78)

$$324645 : 1000 = \frac{324645}{1000}$$

e (§ 237)

$$\frac{324645}{1000} = 324{,}645$$

ou

$$324645 : 1000 = 324{,}645$$

Se o dividendo fôr numero decimal, será

$$324{,}645 : 100 = \frac{324645}{1000} : 100$$

e como (§§ 226 e 63) $\frac{324645}{1000} : 100 = \frac{324645}{100000}$

segue-se que será

$$\frac{324645}{1000} : 100 \text{ ou } 324{,}645 : 100 = 3{,}24645$$

248. Reduzir um quebrado, ou quociente indicado a dizima é achar um numero decimal, que seja exacta ou approximadamente igual ao quebrado, ou quociente proposto.

Pretendendo-se obter um numero decimal com 4 casas de dizima, por exemplo, que seja exacta ou approximadamente igual ao quebrado $\frac{207}{16}$ procurar-se-ha o valor de N, que faz

$$\frac{N}{10^4}=\frac{207}{16}$$

designando N o numero inteiro, que resulta da suppressão da virgula no numero decimal desconhecido.

Da igualdade precedente segue-se (§ 75)

$$N=\frac{207\times 10^4}{16}$$

Logo acha-se o numero decimal procurado (§§ 74 e 62) escrevendo 4 zeros á direita do numerador do quebrado, dividindo o numero resultante pelo denominador do mesmo quebrado, e dando ao quociente achado tantas casas de dizima, quantos foram os zeros, que se escreveram á direita do numerador. Na pratica vão-se escrevendo os zeros a um e um nos successivos dividendos parciaes, á medida que se tornam necessarios para achar os diversos algarismos do quociente, tendo comtudo o cuidado de pôr uma virgula no quociente assim que se escrever o primeiro zero no dividendo. Em seguida estão os typos d'estes dois modos de proceder

```
2070000 | 16          207 | 16
 47      12,9375      47   12,9375
 150                  150
   60                   60
   120                  120
     80                   80
      0                    0
```

Para reduzir a dizima o quociente indicado 253,45:8 procede-se analogamente. Suppunhamos que a dizima procurada deve ter 5 casas decimaes, por exemplo. Multiplicaremos o dividendo 253,45 por 10^5, dividiremos o producto por 8 e ao quociente achado daremos 5 casas decimaes. N'este caso, como o dividendo é decimal, bastará supprimir-lhe a virgula e escrever 3 zeros á direita.

Na pratica, porém, effectua-se a divisão, como de ordinario, tendo comtudo o cuidado de collocar no quociente uma virgula, logo que se baixa o primeiro algarismo decimal do dividendo e de escrever um zero á direita de cada dividendo parcial inferior ao divisor, até existirem no quociente todos os algarismos decimaes, que elle deve ter. A operação dispõe-se assim

```
253,45 | 8
 13      31,68125
  54
   65
    10
     20
      40
       0
```

N'este exemplo, e, em geral, quando o divisor é numero digito, a divisão faz-se mais commodamente seguindo o processo do § 89. A reducção de um quebrado a dizima é um caso particular da theoria exposta no § 233. É o caso em que é $A=10$.

249. Theorema. *A dizima proveniente de um quebrado irreductivel, cujo denominador não admitte divisores primos differentes de 2 e 5, é exacta ou limitada e contém tantas casas decimaes, quantas são as unidades do expoente da maior das potencias de 2 ou 5, que divide o denominador do quebrado.*

Seja $\frac{C}{B}$ um quebrado irreductivel, que se suppõe igual a um numero decimal com m casas de dizima. Designando por $\frac{N}{10^m}$ o numero decimal, será

$$\frac{N}{10^m}=\frac{C}{B}$$

ou

$$N=\frac{C\times 10^m}{B}$$

Ora é evidente que a dizima será limitada ou exacta, e conterá m casas decimaes, unicamente quando N fôr um numero inteiro, isto é, quando o denominador B do quebrado proposto dividir exactamente o producto $C\times 10^m$ do numerador por alguma potencia de 10. Porém, sendo $\frac{C}{B}$ um quebrado irreductivel, é (§ 189) B primo com C, e não póde portanto (§ 143) B dividir o producto $C\times 10^m$, sem dividir 10^m.

Logo a condição necessaria para um quebrado irreductivel produzir uma dizima limitada ou exacta, é que o seu denominador divida uma potencia de 10. A menor das potencias de 10 divisivel pelo denominador do quebrado terá por expoente o numero de casas de dizima do numero decimal igual ao quebrado.

O denominador B só póde ser divisor de 10^m, quando não admittir (§ 174) divisores primos differentes de 2 e 5, que são os unicos, que admitte 10, e os expoentes d'aquelles divisores, não excedam m.

Suppondo, pois, $B=2^m\times 5^n$ e $m>n$ o quebrado $\frac{C}{B}$ ou $\frac{C}{2^m\times 5^n}$ equivalerá a um numero decimal com m casas de dizima.

O quebrado $\frac{207}{16}$ produziu (§ 248) uma dizima exacta, porque o

seu denominador $16=2^4$ não contém factores primos differentes de 2 e 5.

O quociente 253,45:8 produziu um numero decimal exacto com mais tres casas de dizima do que as do dividendo, porque o divisor $8=2^3$ não contém factores primos differentes de 2 e 5.

No quebrado irreductivel $\frac{3267}{400}$ o denominador $400=2^4\times5^2$ tambem não contém factores primos differentes de 2 e 5, e 4 é o expoente da maior das potencias de 2 e 5 que dividem 400. Acha-se effectivamente

$$\frac{3267}{400}=8,1675$$

250. **Theorema.** *A dizima proveniente de um quebrado irreductivel, cujo denominador admitte divisores primos differentes de 2 e 5, é illimitada*, isto é, *não contém um numero exacto de casas decimaes.*

Com effeito, sendo B primo com C e admittindo divisores, que 10 não admitte, nunca $C\times10^m$ será divisivel por B, por maior valor que tenha m, e portanto jámais se encontrará um resto nullo nas divisões successivas, a que tem de se proceder para se reduzir o quebrado a dizima.

251. **Theorema.** *Toda a dizima illimitada proveniente de uma divisão é periodica.*

Com effeito, se a dizima é illimitada, por mais divisões que se façam, nunca o resto será nullo, e como os restos, em numero illimitado, são menores que o divisor commum das diversas divisões, segue-se que necessariamente alguns, ou todos os restos hão de repetir-se no decurso das divisões successivas. Havendo, porém, restos iguaes, os dividendos parciaes, que se seguirem, hão de tambem ser iguaes, porque resultam da multiplicação d'elles pelo mesmo numero 10. Sendo iguaes os dividendos parciaes e igual o divisor, que é sempre o mesmo, os quocientes incompletos serão tambem iguaes entre si e o mesmo succederá aos novos restos. E, como os quocientes incompletos são expressos pelos algarismos da dizima, segue-se que esta é periodica.

252. Quando a dizima é illimitada, o quociente de que ella provem, só póde representar-se por uma dizima approximadamente. Se a dizima é limitada, póde tambem convir em certos casos substituir á verdadeira dizima outra com menos casas decimaes, comtanto que o erro, que d'ahi resulte, possa reputar-se insignificante.

Querendo dividir 8645,064 por 472, de modo que o quociente seja um numero decimal, que diffira do verdadeiro quociente menos de $\frac{1}{10^5}$ ou 0,00001 proceder-se-ha como se procedeu no problema mais geral do § 248, isto é, multiplicar-se-ha o dividendo por 10^5, e dividir-se-ha o producto 864506400 por 472. A disposição do processo é a seguinte.

```
8645,064 | 472
3925       18,31581
 1490
   746
  2744
   3840
     640
     168
```

Reconhece-se effectivamente n'esta divisão que o verdadeiro quociente é $18,31581 + \frac{1}{10^5} \cdot \frac{168}{472}$, e, como o quebrado $\frac{168}{472}$ deve ser menor que 1, é claro que o numero 18,31581 tomado como quociente envolve um erro inferior a $\frac{1}{10^5}$.

253. A *dizima periodica* póde ser *simples* ou *mixta*. É simples, quando o periodo começa em seguida á virgula, é mixta, quando entre o primeiro periodo e a virgula ha alguns algarismos.

As dizimas periodicas 0,424242 etc., 0,403403403 etc., são simples; as dizimas periodicas 0,32656565 etc., 0,4723723723 etc., 0,00323232 etc., são mixtas.

254. Theorema. *É mixta toda a dizima periodica proveniente de um quebrado proprio e irreductivel, cujo denominador não é primo com* 10.

Seja $\frac{C}{B}$ um quebrado no qual é $C < B$ e B admitte divisores primos 2 ou 5 misturados com outros.

Dividindo $C \times 10$ por B tem-se o primeiro algarismo da dizima. Sendo (§ 81)

$$C \times 10 = BQ + R$$

será Q o primeiro algarismo da dizima e, para que o seja tambem d'um periodo, é necessario que em alguma das seguintes divisões appareça o resto C, porque a esta seguir-se-ha evidentemente outra com o quociente Q e o resto R.

Ora estes restos podem obter-se dividindo por B os productos $C \times 10$, $C \times 10^2$, $C \times 10^3$, etc., porque da igualdade precedente deduz-se (§§ 57 e 55)

$$C \times 10^2 = B(Q \times 10) + R \times 10$$

e portanto é certo (§ 103) que $C \times 10^2$ e $R \times 10$ divididos por B dão restos iguaes. Designando este resto por R', isto é, sendo

$$R \times 10 = BQ' + R'$$

será

$$R \times 10^2 = B(Q' \cdot 10) + R' \times 10$$

d'onde se conclue que $R' \times 10$ e $R \times 10^2$ divididos por B dão restos iguaes, e como é tambem

$$C \times 10^3 = B(Q \times 10^2) + R \times 10^2$$

segue-se que $C \times 10^3$ e $R' \times 10$ divididos por B dão iguaes res-

tos. Assim se prova que os restos successivos se obtêem dividindo $C \times 10$, $C \times 10^2$, $C \times 10^3$, etc. por B.

Seja, pois, $C \times 10^m$ o numero que dividido por B dá o resto C, isto é, seja

$$C \times 10^m = B\,Q' + C$$

ou

$$C(10^m - 1) = B\,Q'$$

Esta igualdade só é verdadeira, quando B divide o producto $C(10^m - 1)$, e é sabido que, sómente quando ella fôr verdadeira, é que os periodos começarão em seguida á virgula. Mas, sendo por hypothese B primo com C (§ 193), a igualdade não póde realisar-se (§ 143) sem que B divida $10^m - 1$, isto é, sem que se verifique a seguinte igualdade

$$10^m = B\,Q'' + 1$$

e é evidente (§ 136) que esta igualdade não póde existir, quando B e 10 não são primos entre si.

Logo, quando B e 10 não são primos entre si, o primeiro algarismo da dizima não pertence a periodo algum, e tem-se portanto uma dizima periodica mixta[1].

255. **Theorema.** *Toda a dizima periodica simples, que não tem todos os algarismos iguaes a 9, póde ser produzida por uma divisão, na qual o dividendo é um dos periodos e o divisor o numero escripto com tantos noves, quantos são os algarismos de cada periodo.*

Designando por a e b o dividendo e divisor de que provém a dizima 0,424242 etc., e procedendo com aquelles dois termos exactamente como se procede, quando se reduz um quebrado a dizima (§ 248), ter-se-ha

$$\begin{array}{l|l}
a & b \\ \cline{2-2}
10 & 0{,}42 \\ \cline{1-1}
10 \cdot a & \\
-4b & \\ \cline{1-1}
10a - 4b & \\
\qquad\quad 10 & \\ \cline{1-1}
10^2 \cdot a - 4 \cdot 10b & \\
\qquad\qquad -2b & \\ \cline{1-1}
10^2 \cdot a - 4 \cdot 10b - 2b &
\end{array}$$

e, como para que o terceiro algarismo da dizima seja 4 é preciso que entre o ultimo resto $12^2 a - 4 . 10b - 2b$ e o primeiro a se verifique a igualdade

$$10^2 a - 4 \cdot 10b - 2b = a$$

segue-se que será

$$10^2 a - a = 4 \cdot 10 \cdot b + 2b$$

ou

$$(10^2 - 1)\,a = (4 \cdot 10 + 2)\,b$$

[1] Do theorema de Fermat generalisado por Euler resulta que, quando B e 10 são primos entre si, ha uma infinidade de valores de m que verificam a igualdade

$$10^m = B\,Q'' + 1$$

Logo *é simples toda a dizima periodica proveniente de um quebrado irreductivel e proprio, que tem por denominador um numero primo com* 10.

e $$\frac{a}{b}=\frac{4\cdot 10+2}{10^2-1}=\frac{42}{99}$$

que é o que se queria demonstrar.

Se se applicasse o mesmo processo á dizima 0,9999 etc., achar-se-ia

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline 10 & 0{,}9 \\ \hline 10a & \\ -9b & \\ \hline 10a-9b & \end{array} \qquad \text{e} \qquad 10a-9b=a \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{b}=\frac{9}{9}=1$$

e comtudo é evidente que dividindo 9 por 9 é impossivel achar 0,999 etc., no quociente.

A razão d'isto é porque, devendo ser qualquer resto menor que o divisor b, ter-se-ha

$$10a-9b<b \qquad \text{ou} \qquad 10a<10b$$

E como, quando a e b são iguaes a 9, a precedente desigualdade é absurda, segue-se que $10a-9b$ não é n'este caso o resto da divisão.

256. **Theorema.** *Toda a dizima periodica mixta, na qual os algarismos do periodo não são iguaes a 9, póde ser produzida por uma divisão, em que o dividendo é o excesso da parte da dizima que termina no fim do primeiro periodo sobre a parte não periodica da mesma dizima e o divisor é o numero escripto com tantos noves, quantos são os algarismos do periodo, seguido de tantos zeros, quantos são os algarismos da parte não periodica.*

Designando por a e b os dois termos da divisão capaz de produzir a dizima 0,023949494 etc., e imaginando effeituada a divisão, de modo que esta dizima venha no quociente, achar-se-ha

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline 10 & 0{,}02394 \\ \hline 10\cdot a & \\ \quad 10 & \\ \hline 10^2\cdot a & \\ -2b & \\ \hline 12^2\cdot a-2b & \\ \qquad 10 & \\ \hline 10^3 a-2\cdot 10b & \\ \qquad -3b & \\ \hline 10^3 a-2\cdot 10b-3b & \\ \qquad\qquad 10 & \\ \hline 10^4 a-2\cdot 10^2b-3\cdot 10b & \\ \qquad\qquad -9b & \\ \hline 10^4 a-2\cdot 10^2b-3\cdot 10b-9b & \\ \qquad\qquad\qquad 10 & \\ \hline 10^5 a-2\cdot 10^3b-3\cdot 10^2b-9\cdot 10b & \\ \qquad\qquad\qquad -4b & \\ \hline 10^5 a-2\cdot 10^3b-3\cdot 10^2b-9\cdot 10b-4b & \end{array}$$

Os restos $10^3a-2.10b-3b$ e $10^5a-2.10^3b-3.10^2b-$ $-9\cdot10b-4b$ devem ser iguaes para que o novo algarismo do quociente seja 9, e por isso

$$10^5a-2.10^3b-3.10^2b-9.10b-4b=10^3a-2.10b-3b$$

ou $$10^5a-10^3a=2.10^3b+3.10^2b+9.10b+4b-2.10b-3b$$

e, tirando o factor commum 10^3a no primeiro membro e b no segundo,

$$(10^2-1)10^3a=(2.10^3+3.10^2+9.10+4-2.10-3)b$$

ou $$99000a=(2394-23)b$$

e finalmente[1] $$\frac{a}{b}=\frac{2394-23}{99000}$$

Chega-se ao mesmo resultado partindo da igualdade

$$0{,}0239494 \text{ etc.}=\frac{1}{1000}(23+0{,}9494 \text{ etc.})$$

e notando que, sendo a dizima periodica simples 0,9494 etc. produzida (§ 255) por $\frac{94}{99}$, a dizima 0,0239494 etc., será produzida por $\frac{1}{1000}\left(23+\frac{94}{99}\right)$ ou $\frac{23.99+94}{99000}$.

Substituindo $100-1$ a 99 no ultimo quebrado obtem-se $\frac{23\times100-23+94}{99000}$ ou $\frac{2394-23}{99000}$.

257. Dos theoremas demonstrados nos §§ 255 e 256 conclue-se, que uma dizima periodica nunca é rigorosamente igual ao quebrado, ou quociente que a produziu.

Assim, por exemplo, quando se reduz a dizima o quebrado $\frac{42}{99}$ acha-se, conforme o numero de periodos, que entrarem no quociente incompleto,

$$\frac{42}{99}=0{,}42+\frac{0{,}42}{99},\ \frac{42}{99}=0{,}4242+\frac{0{,}0042}{99},\ \frac{42}{99}=0{,}424242+\frac{0{,}000042}{99} \text{ etc.}$$

ou

$$\frac{42}{49}=0{,}42+\frac{1}{100}\cdot\frac{42}{99},\ \frac{42}{99}=0{,}4242+\frac{1}{100^2}\cdot\frac{42}{99},\ \frac{42}{99}=0{,}424242+\frac{1}{100^3}\cdot\frac{42}{99}, \text{ etc.}$$

e, desprezando em cada uma d'estas sommas a segunda parcella, obtêem-se as dizimas 0,42; 0,4242; 0,424242; etc., que vão suc-

---

[1] Este theorema não é verdadeiro para uma dizima 0,73999 etc, em que o periodo seja 9, como facilmente se demonstra raciocinando como no § 255 ou por modo indirecto partindo da expressão $\frac{739-73}{900}$ que se acharia, se elle fosse verdadeiro, e reparando que ella se reduz a $\frac{73.10+9-73}{900}$ ou $\frac{73.9+9}{900}$ que é igual a 0,74, isto é, a uma dizima finita. Não ha portanto quociente algum, que produza 0,73999 etc.

cessivamente differindo menos do quebrado $\frac{42}{99}$ sem comtudo chegarem a ser iguaes a elle, ainda mesmo que se imaginem compostas de um numero excessivamente grande de periodos.

Em geral, chama-se **limite de uma quantidade variavel** *a uma quantidade constante, da qual a variavel se approxima indefinidamente, sem comtudo chegar a ser rigorosamente igual a ella.*

258. **Theorema.** *O limite de qualquer dizima periodica simples é igual ao quebrado, que tem por numerador um dos periodos e por denominador o numero escripto com tantos noves, quantos são os algarismos do periodo,* isto é,

$$\text{lim. } 0{,}403403403 \text{ etc.} = \frac{403}{999}$$

Designando por P_1, P_2, P_3, P_4, etc., a dizima composta de 1, 2, 3, 4, etc., periodos, será, por exemplo

$$P_2 = 0{,}403403$$

e multiplicando por 1000, a fim de passar um dos periodos para a esquerda da virgula,

$$1000\,P_2 = 403{,}403$$

ou (§ 36)

$$1000\,P_2 = 403{,}403403 - 0{,}000403$$

Subtrahindo d'esta igualdade a primeira, vem

$$1000\,P_2 - P_2 = 403{,}403403 - 0{,}000403 - 0{,}403403$$

ou

$$999\,P_2 = 403 - 0{,}000403$$

e finalmente dividindo por 999 e notando (§§ 237 e 74) que

$$0{,}000403 = \frac{403}{1000000} = \frac{1}{1000^2} \cdot 403$$

acha-se (§§ 92 e 93)

$$P_2 = \frac{403}{999} - \frac{1}{1000^2} \cdot \frac{403}{999}$$

Fazendo o mesmo raciocinio sobre a dizima composta de 3, 4 ou mais periodos, acha-se successivamente

$$P_3 = \frac{403}{999} - \frac{1}{1000^2} \times \frac{403}{999}$$

$$P_4 = \frac{403}{999} - \frac{1}{1000^3} \times \frac{403}{999}$$

e, em geral, sendo n o numero dos periodos

$$P_n = \frac{403}{999} - \frac{1}{1000^n} \frac{403}{999}$$

Comparando todas estas igualdades reconhece-se que, tomando a dizima com mais periodos, o seu valor vae-se approximando do que-

brado $\frac{403}{999}$ sem comtudo nunca chegar a ser igual a elle e que o excesso do mesmo quebrado sobre o valor variavel da dizima com 2, 3, 4, ou mais periodos é $\frac{1}{1000^2}\cdot\frac{403}{999}$, $\frac{1}{1000^3}\cdot\frac{403}{999}$, $\frac{1}{1000^4}\cdot\frac{403}{999}$, etc. Ora é evidente que estes productos podem decrescer indefinidamente[1], isto é, sem se poder marcar ao seu decrescimento outro limite que não seja zero; logo a differença entre $\frac{403}{999}$ e o valor variavel de P_n decresce indefinidamente, quando n cresce tambem indefinidamente, e por consequencia é (§ 257)

$$\frac{403}{999} = \lim. P_n \quad \text{ou} \quad \frac{403}{999} = \lim. 0{,}403403403 \text{ etc.}$$

Applicando o mesmo raciocinio á dizima 0,999 etc., acha-se

$$\lim. 0{,}999 \text{ etc.} = 1$$

259. **Theorema.** *O limite de qualquer dizima periodica mixta é igual ao quebrado, que tem por numerador o excesso da parte da dizima, que termina no fim do primeiro periodo, sobre a parte não periodica da mesma dizima, e por denominador o numero escripto com tantos noves, quantos são os algarismos de cada periodo, seguido de tantos zeros, quantos são os algarismos da parte não periodica,* isto é[2],

$$\lim. 0{,}2365454 \text{ etc.} = \frac{23654-236}{99000}$$

---

[1] Para se provar que os productos $\frac{1}{1000}\cdot\frac{403}{999}$, $\frac{1}{1000^2}\cdot\frac{403}{999}$, $\frac{1}{1000^3}\cdot\frac{403}{999}$, etc. decrescem indefinidamente, é sufficiente demonstrar que, por mais pequena que se imagine uma quantidade δ, hão de existir sempre valores taes de n que façam

$$\frac{1}{1000^n}\frac{403}{999} < \delta \quad \text{ou} \quad \frac{403}{999\,\delta} < 1000^n$$

Suppondo por exemplo $\delta = \frac{1}{10^{100}}$, que é evidentemente um valor muito pequeno, e advertindo que $1000^n = 10^{3n}$, ter-se-ha $\frac{403\cdot 10^{100}}{999} < 10^{3n}$ ou $\frac{403}{999} < 10^{3n-100}$, e basta portanto fazer $3n-100$ igual ou seperior a 1 para esta desigualdade ser satisfeita. Mas da igualdade $3n-100=1$ deduz-se $n=33\frac{2}{3}$, logo, em se tomando a dizima com 34 ou mais periodos, acha-se um numero que differe de $\frac{403}{999}$ menos de $\frac{1}{10^{100}}$.

[2] Demonstra-se muitas vezes este theorema reduzindo a dizima periodica mixta a dizima periodica simples. Raciocinando assim, tem-se

$$0{,}2365454 \text{ etc.} = \frac{1}{1000}(236 + 0{,}5454 \text{ etc.})$$

e, como no segundo membro somente 0,5454 etc. varia, quando varia o numero de periodos,

$$\lim. 0{,}2365454 \text{ etc.} = \frac{1}{1000}(236 + \lim. 0{,}5454 \text{ etc.})$$

Designando por P_1, P_2, P_3, etc., a parte da dizima illimitada, que termina no fim de 1, 2, 3, etc., periodos, será

$$P_2 = 0{,}2365454$$

Multiplicando por 1000 os dois membros d'esta igualdade, para os periodos começarem em seguida á virgula, vem

$$1000\,P_2 = 236{,}5454$$

Tornando a multiplicar por 100, a fim de passar um dos periodos para a esquerda da virgula, acha-se

$$100 \cdot 1000\,P_2 = 23654{,}54$$

ou (§ 36)

$$100 \cdot 1000\,P_2 = 23654{,}5454 - 0{,}0054$$

e, subtrahindo d'esta igualdade a segunda, obtem-se

$$100 \cdot 1000\,P_2 - 1000\,P_2 \quad \text{ou} \quad (100-1)\,1000\,P_2 = 23654 - 236 - 0{,}0054$$

e portanto

$$99000\,P_2 = 23654 - 236 - \frac{1}{100^2} \cdot 54$$

e finalmente

$$P_2 = \frac{23654-236}{99000} - \frac{1}{100^2} \cdot \frac{54}{99000}$$

Fazendo as mesmas considerações sobre 3, 4, etc., periodos, acha-se

$$P_3 = \frac{23654-236}{99000} - \frac{1}{100^3} \cdot \frac{54}{99000}$$

$$P_4 = \frac{23654-236}{99000} - \frac{1}{100^4} \cdot \frac{54}{99000}$$

.....

e em geral

$$P_n = \frac{23654-236}{99000} - \frac{1}{100^n} \cdot \frac{54}{99000}$$

representando n o numero de periodos que entram na dizima limitada P_n, que se considera.

Reconhece-se á vista d'estas igualdades que, por maior que seja o numero de periodos, sempre a dizima é menor que o quebrado $\frac{23654-236}{99000}$ e, como a differença $\frac{1}{100^n} \cdot \frac{54}{99000}$ entre este quebrado e os valores successivamente crescentes da dizima vae diminuindo, á

---

e (§ 258) $\quad \lim.\ 0{,}2365454 \text{ etc.} = \frac{1}{1000}\left(236 + \frac{54}{99}\right)$

ou $\quad \lim.\ 0{,}2365454 \text{ etc.} = \frac{236 \times 99 + 54}{99000}$

e substituindo 99 por $100 - 1$

$$\lim.\ 0{,}2365454 \text{ etc.} = \frac{23654-236}{99000}$$

medida que augmenta n e póde mesmo tornar-se menor que qualquer quantidade, sem comtudo se reduzir a zero, segue-se que (§ 257) o referido quebrado é effectivamente o limite para que tendem os valores variaveis da dizima, quando o numero dos periodos vae constantemente augmentando[1].

Applicando o mesmo raciocinio a uma dizima periodica mixta, na qual o periodo seja 9, achar-se-ha evidentemente

$$\lim. 0{,}45999 \text{ etc.} = \frac{459-45}{900}$$

e como $$\frac{459-45}{900} = \frac{45\times 10+9-45}{900} = \frac{45\cdot 9+9}{900} = \frac{45+1}{100}$$

segue-se que lim. 0,45999 etc. = 0,46.

EXERCICIOS

I. Effectuar as seguintes operações indicadas $7{,}035+0{,}80648+74{,}06=?$ $0{,}58674-0{,}3104=?$ $4{,}26-0{,}05472=?$ $1-0{,}34060=?$ $625{,}78-19=?$ $\frac{5}{8}+3{,}47=?$ $\frac{22}{45}+0{,}3268+16=?$

II. Effectuar por complementos as seguintes operações indicadas $0{,}06247-0{,}0037+5{,}068=?$ $826{,}04-0{,}398-12{,}6-246=?$ $0{,}42685-0{,}3065-0{,}064+0{,}40809-0{,}001=?$

III. Effectuar as seguintes multiplicações $426{,}834\times 0{,}001=?$ $62{,}03\times 10000=?$ $0{,}0006208\times 0{,}0426=?$ $0{,}3\times 0{,}05\times 0{,}007\times 0{,}0009=?$ $\frac{81}{195}\times 0{,}1\times 0{,}604=?$

IV. Achar o valor de cada um dos seguintes quocientes indicados com um erro inferior a 1 ou a $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc. : $624{,}7208 : 10=?$ $30{,}60478 : 0{,}001=?$ $0{,}6208 : 0{,}02=?$ $607{,}08432 : 0{,}275=?$ $0{,}0628 : 3{,}6459702=?$

V. Effectuar as seguintes operações indicadas $42-0{,}6+0{,}031-6{,}7$? $(0{,}5-0{,}12) : 0{,}01=?$ $\left(\frac{7}{9}+\frac{3}{4}-0{,}06\right)\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{8}\right)\times 0{,}0204=?$

VI. Reduzir a dizima os seguintes quebrados $\frac{127}{32}$, $\frac{14}{25}$, $\frac{16}{21}$, $\frac{27}{35}$, $\frac{33}{40}$, $\frac{72}{75}$, $\frac{32}{44}$, $\frac{22}{57}$, $\frac{324}{432}$.

VII. Reduzir a quebrados irreductiveis as seguintes dizimas 0,75; 0,343434; 0,0125; 2,68464.

VIII. Achar os quebrados capazes de produzirem as seguintes dizimas periodicas ou os limites das mesmas dizimas 0,7272 etc., 0,0702702702 etc., 0,2454545 etc. 0,30666 etc., 0,040525525525 etc., 4,222 etc , 5,0343131 etc., 82,064064064 etc., 62,999 etc., 35,9090909090 etc., 71,0404040404 etc., 48,050050050 etc.

IX. Demonstrar que as dizimas periodicas, cujos periodos são iguaes a 43; 4343; 434343; etc., têem limites iguaes, ou podem ser produzidas por a mesma divisão.

X. Considerando 26 como periodo na dizima, 0,345262626 etc., acha-se $\frac{34526-345}{99000}$ para limite da mesma dizima, e considerando 62 como periodo, acha-se o limite igual a $\frac{345262-3452}{990000}$. Provar que estes dois limites são iguaes.

---

[1] Os theoremas dos §§ 258 e 259 podem ser demonstrados considerando-os como corollarios dos §§ 255 e 256. A demonstração, porém, deixaria de ter a conveniente generalidade, por não serem applicaveis os §§ 255 e 256 ás dizimas, em que o periodo é 9.

LIVRO IV

RAIZES QUADRADA E CUBICA
OPERAÇÕES SOBRE NUMEROS INCOMMENSURAVEIS

CAPITULO I

Raiz quadrada

260. **Raiz quadrada** *de um numero é o numero, que elevado ao quadrado* (§ 69), *produz o numero dado.*

Indica-se a raiz quadrada de um numero escrevendo este de baixo do signal $\sqrt{}$, que se chama *radical.*

A expressão $\sqrt{49}$, que se lê *raiz quadrada de* 49, é igual a 7, porque 7×7 ou 7^2 dá 49. A raiz quadrada de $\frac{9}{16}$ ou $\sqrt{\frac{9}{16}}$ é $\frac{3}{4}$, porque (§ 217) o quadrado de $\frac{3}{4}$ ou $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ é $\frac{3 \times 3}{4 \times 4}$ ou $\frac{9}{16}$.

261. **Theorema.** *Todo o numero inteiro, que não é potencia exacta ou perfeita de outro numero inteiro, tambem não é potencia perfeita de numero fraccionario,* isto é, *nenhum numero inteiro é potencia perfeita de numero fraccionario.*

Com effeito, todo o numero fraccionario póde representar-se por um quebrado irreductivel, isto é, (§ 189) por um quebrado cujos termos são primos entre si, e como qualquer potencia de um quebrado é (§ 217) outro quebrado, cujos termos são as potencias do mesmo grau dos termos do quebrado proposto, e estas potencias são (§ 147) numeros primos entre si, se as suas raizes o forem tambem, segue-se que o quebrado resultante é irreductivel, e por consequencia que jámais póde converter-se em numero inteiro.

262. A raiz quadrada de um numero inteiro, que não é quadrado perfeito de outro numero inteiro, não póde ser representada por nenhum numero inteiro ou fraccionario, e portanto só póde exprimir uma grandeza, que não contenha um numero exacto de vezes nem a unidade, nem qualquer das suas partes aliquotas. *A raiz quadrada de um numero inteiro, que não é quadrado de outro numero inteiro é, pois* (§ 5), *um numero incommensuravel. A raiz quadrada de um numero fraccionario, que não é quadrado perfeito de outro numero fraccionario, é tambem,* e pelo mesmo motivo, *um numero incommensuravel.* Chamam-se geralmente *quantidades irracionaes* as raizes quadradas de numeros, que não são quadrados perfeitos, e *quantidades racionaes* as raizes quadradas de numeros que são quadrados perfeitos. As expressões $\sqrt{81}$, $\sqrt{\frac{25}{36}}$ e $\sqrt{11,9025}$, por exemplo, representam *quantidades racionaes,* porque os nu-

meros 81, $\frac{25}{36}$ e 11,9025, affectos dos radicaes, são os quadrados dos numeros 9, $\frac{5}{6}$ e 3,45. As expressões $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{5}{4}}$, $\sqrt{0,4}$, etc., representam *quantidades irracionaes*, porque não ha numero, inteiro ou fraccionario, que elevado ao quadrado produza 2, 3, $\frac{5}{4}$, 0,4 etc.

As expressões $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e em geral todas as expressões irracionaes, representam quantidades incommensuraveis (§ 3) com a unidade adoptada, porque, se as referidas quantidades fossem commensuraveis com a unidade, seria possivel decompor tanto aquellas como esta em partes da mesma grandeza, e por consequencia representar as primeiras quantidades por numeros inteiros, ou fraccionarios.

263. **Theorema.** *Todo o numero incommensuravel representa uma quantidade comprehendida entre duas quantidades commensuraveis, cuja differença póde ser representada pelo quebrado* $\frac{1}{d}$, *no qual* d *designa qualquer numero inteiro.*

Imaginando a unidade decomposta em *d* partes iguaes, e tomando 1, 2, 3, 4, etc., d'essas partes, obtem-se uma serie de quantidades commensuraveis com a unidade, que podem crescer além de todo o limite, porque, por maior que seja o numero de partes da unidade contidas n'uma d'ellas, ainda é possivel, juntando-lhe outra, formar uma quantidade maior, á qual tambem se póde acrescentar outra parte da unidade, e assim successiva e indefinidamente. Podendo estas diversas quantidades commensuraveis com a unidade crescer além de todo o limite é evidente que, por maior que seja uma quantidade incommensuravel com a unidade, ha de existir na série d'aquellas quantidades uma, a partir da qual todas sejam maiores que a quantidade incommensuravel. Suppondo que essa quantidade comprehende x das d partes da unidade, e por consequencia que o seu valor numerico é $\frac{x}{d}$, a quantidade incommensuravel será maior que a quantidade representada por $\frac{x}{d}$, e menor que a quantidade representada por $\frac{x+1}{d}$.

Logo toda a quantidade incommmensuravel está comprehendida entre duas quantidades representadas pelos numeros $\frac{x+1}{d}$ e $\frac{x}{d}$ cuja differença é $\frac{1}{d}$.

264. Da proposição prececedente resulta que toda a quantidade incommensuravel póde ser representada approximadamente por um

dos numeros $\frac{x}{d}$ ou $\frac{x+1}{d}$, e que o erro proveniente de se adoptar um d'elles para a representar é inferior a $\frac{1}{d}$.

Como, porém, d representa qualquer numero inteiro, é evidente que o erro que se commette, quando se exprime uma quantidade incommensuravel por um numero commensuravel, póde diminuir indefinidamente, sem comtudo jámais se reduzir a zero.

As fracções $\frac{x+1}{d}$ e $\frac{x}{d}$, que representam quantidades entre as quaes se comprehende a quantidade incommensuravel, tendem a confundir-se, quando o denominador d augmenta de valor. O *limite* commum (§ 257), para que tendem as referidas fracções, é o que propriamente constitue o *numero incommensuravel.*

265. *Raiz quadrada de um numero* N, *que não é quadrado perfeito, é pois o limite para que tendem todos os numeros commensuraveis, que vão crescendo, ou decrescendo, segundo alguma lei, de modo que os seus quadrados sejam todos menores, ou todos maiores que o numero* N. Logo $\sqrt{N}$ representa um numero maior que todos os numeros commensuraveis, cujos quadrados são inferiores a N, e menor que todos os numeros commensuraveis, cujos quadrados são maiores que N. Suppondo, por exemplo, que 5 é maior que os quadrados de 2; 2,2; 2,23; 2,236; etc., e menor que os quadrados de 3; 2,3; 2,24; 2,237; etc., dir-se-ha que $\sqrt{5}$ é maior que os numeros 2; 2,2; 2,23; etc., e menor que os numeros 3; 2,3; 2,24; etc.

Em geral, chama-se $\sqrt{N}$ *approximada até ás unidades á raiz quadrada do maior quadrado inteiro contido em* N.

Representando y um numero inteiro e suppondo que é

$$y^2 < N < (y+1)^2$$

dir-se-ha que y e $y+1$ são raizes quadradas de N approximadas até ás unidades, a primeira *por defeito* ou falta e a segunda *por excesso.*

266. Conhecido o methodo de achar a raiz quadrada de qualquer numero com um erro inferior a 1, é facil extrahir uma raiz quadrada com um erro inferior a qualquer outro numero.

Para se obter o valor de $\sqrt{N}$ com um erro inferior a $\frac{1}{d}$ convém reflectir, que ha de existir (§ 263) um valor de x, que satisfaça as desigualdades

$$\frac{x}{d} < \sqrt{N} < \frac{x+1}{d}$$

e que, basta conhecer esse valor, para se terem os valores $\frac{x}{d}$ e $\frac{x+1}{d}$ de $\sqrt{N}$ com a approximação desejada.

Mas o valor de x que satisfizer áquellas desigualdades ha de tambem satisfazer ás seguintes

$$\left(\frac{x}{d}\right)^2 < N < \left(\frac{x+1}{d}\right)^2$$

ou (§ 217) a estas

$$x^2 < Nd^2 < (x+1)^2$$

e finalmente ás que se seguem

$$x < \sqrt{Nd^2} < x+1$$

Logo x é o maior inteiro contido em $\sqrt{Nd^2}$, ou a raiz quadrada approximada por defeito até ás unidades de Nd^2. *Obtem-se portanto* $\sqrt{N}$ *com um erro inferior a* $\frac{1}{d}$ *multiplicado* N *pelo quadrado de* d, *extrahindo a raiz quadrada exacta, ou approximada até ás unidades ao producto* Nd^2 *e dividindo a raiz achada por* d.

A raiz quadrada de 5,3 com um erro inferior a $\frac{1}{4}$ é a raiz quadrada de $5{,}3 \times 4^2$, com um erro inferior a 1, dividida por 4. Ora $\sqrt{5{,}3.16}$ ou $\sqrt{84{,}8}$ com um erro inferior a 1 é 9 ou 10, porque

$$9^2 < 84{,}8 < (9+1)^2$$

logo $\sqrt{5{,}3}$ com um erro inferior a $\frac{1}{4}$ é $\frac{9}{4}$ ou $\frac{9+1}{4}$, isto é, 2,25 ou 2,5. A primeira raiz é por *defeito*, a segunda é por *excesso*.

267. Para se poder extrahir qualquer raiz quadrada convém saber de cór os quadrados dos numeros digitos. Reconhece-se á vista da seguinte taboa dos numeros digitos

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

e dos seus quadrados

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

que desde 1 até 100 ha sómente 10 numeros inteiros, que sejam quadrados perfeitos, e que a raiz quadrada de qualquer numero maior que 100 deve conter mais de um algarismo inteiro.

268. **Theorema.** *O quadrado da somma de duas parcellas é igual ao quadrado da primeira parcella, mais o dobro do producto da primeira parcella pela segunda e mais o quadrado da segunda,* isto é,

$$(5+7)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \cdot 7 + 7^2$$

Sabe-se (§ 69) que

$$(5+7)^2 = (5+7)(5+7)$$

e (§ 59) $\quad (5+7)(5+7) = 5^2 + 7 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 7^2$

ou (§§ 52 e 51)

$$(5+7)(5+7) = 5^2 + 2 \times 5 \cdot 7 + 7^2$$

269. **Corollario I.** *O quadrado de um numero inteiro composto de dezenas e unidades é igual ao quadrado das dezenas mais o dobro das dezenas pelas unidades e mais o quadrado das unidades,* isto é,

$$(6435)^2 = (6430)^2 + 2 \times 6430 \cdot 5 + 5^2$$

ou, designando em geral por d e u as dezenas e unidades de um numero, $(d+u)^2 = d^2 + 2du + u^2$.

270. **Corollario II.** O algarismo das unidades de um numero inteiro, que é quadrado perfeito, só póde ser algum dos algarismos das unidades dos quadrados dos numeros digitos, porque das tres parcellas, em que póde decompor-se o quadrado de um numero composto de dezenas e unidades, sómente a ultima, o quadrado das unidades, deixa de acabar em zero. Quando a raiz acaba em zeros, o quadrado ha de acabar (§ 74) em dobrado numero de zeros.

Logo *não é quadrado perfeito* 1.º, *o numero inteiro que tiver na casa das unidades algum dos algarismos* 2, 3, 7 ou 8; 2.º, *o numero inteiro que tiver á direita um numero impar de zeros.*

271. **Theorema.** *A somma de dois numeros multiplicada pela sua differença é igual á differença dos quadrados dos mesmos numeros,* isto é,

$$(8+6)(8-6) = 8^2 - 6^2$$

Considerando $8-6$ como um só numero tem-se (§ 57)

$$(8+6)(8-6) = 8(8-6) + 6(8-6)$$

e como (§ 57)

$$8(8-6) + 6(8-6) = 8^2 - 8 \cdot 6 + 6 \cdot 8 - 6^2 = 8^2 - 6^2$$

segue-se que effectivamente é

$$(8+6)(8-6) = 8^2 - 6^2$$

272. **Corollario.** *A differença dos quadrados de dois numeros inteiros consecutivos é igual ao dobro do menor mais um,* isto é,

$$86^2 - 85^2 = 2 \cdot 85 + 1$$

Pelo § anterior é

$$86^2 - 85^2 = (86+85)(86-85)$$

mas o segundo factor reduz-se a unidade, visto serem consecutivos os dois numeros inteiros 86 e 85, e o primeiro reduz-se a $1+2.85$, por ser $86 = 85+1$, logo

$$86^2 - 85^2 = 2 \cdot 85 + 1$$

273. A raiz quadrada de um numero inteiro ou decimal menor que 100 approximada até as unidades não precisa de processo especial para ser conhecida. Basta recorrer á taboa (§ 267) dos qua-

drados dos numeros digitos para com facilidade se terem aquellas raizes quadradas.

Querendo, por exemplo, a raiz quadrada de 57,32 approximada até ás unidades, desprezar-se-ha a parte decimal, e procurar-se-ha (§ 265) depois a raiz do maior quadrado inteiro contido em 57. Sabendo de cór os quadrados dos numeros digitos, ou tendo á vista a taboa d'elles, verifica-se immediatamente que 49 ou 7^2 é o maior quadrado inteiro contido em 57, e por consequencia o maior quadrado inteiro contido em 57,32, isto é, que

$$7^2 < 57{,}32 < (7+1)^2 \quad \text{ou} \quad 7 < \sqrt{57{,}32} < 7+1$$

e portanto que 7 ou $7+1$, é a raiz quadrada de 57,32 com um erro inferior a 1.

274. **Theorema.** *A raiz quadrada exacta ou approximada até ás unidades de qualquer numero inteiro ou decimal consta de tantos algarismos, quantas são as classes de dois algarismos, contadas da casa das unidades para a esquerda no numero dado.*

Tomando, por exemplo, o numero 7896152,605, e substituindo a primeira classe da esquerda pelo algarismo 1 e cada uma das outras por dois zeros, obtem-se o numero 1000000 ou 100^{4-1}, que é menor que o numero proposto. Substituindo cada uma das classes por dois zeros e escrevendo á esquerda de todas o algarismo 1, tem-se o numero 100000000 ou 100^4 evidentemente maior que o proposto. Logo

$$100^{4-1} < 7896152{,}605 < 100^4$$

Mas (§§ 74 e 72)

$$100^{4-1} = (10^2)^{4-1} = (10^{4-1})^2 \quad \text{e} \quad 100^4 = (10^2)^4 = (10^4)^2$$

logo $$(10^{4-1})^2 < 7896152{,}605 < (10^4)^2$$

e finalmente $$10^{4-1} < \sqrt{7896152{,}605} < 10^4$$

A raiz quadrada de 7896152,605 excede portanto o menor de todos os numeros inteiros escriptos com 4 algarismos e é inferior ao menor de todos os que têem 5 algarismos.

275. **Theorema.** *Decompondo o maior inteiro contido em qualquer numero dado em classes de dois algarismos da casa das unidades para a esquerda, e extrahindo a raiz quadrada exacta, ou approximada por defeito até ás unidades, ao numero formado por* 1, 2, 3, etc., *classes da esquerda, obtem-se* 1, 2, 3, etc., *algarismos da esquerda da raiz quadrada exacta, ou approximada por defeito até ás unidades, do numero dado.*

Suppondo que 2, 28, 281, etc., são as raizes quadradas approximadas até ás unidades de 7, 789, 78961, etc., serão 2, 8, 1, etc., as primeiros algarismos da esquerda da raiz quadrada de qualquer oumero, 7896152,605, por exemplo, de que 7, 89, 61, etc., são ns primeiras classes da esquerda.

Admittindo que 2 é a raiz quadrada de 7 approximada até ás unidades por defeito, ter-se-ha (§ 265)

$$2^2 < 7 < 3^2$$

e como 3^2 e 7 são dois numeros inteiros, cuja differença jámais póde ser inferior a 1, segue-se que será tambem

$$2^2 < 7{,}896152605 < 3^2$$

Multiplicando todos estes numeros por 1000000 ou 1000^2 acha-se

$$2^2 \times 1000^2 < 7896152{,}605 < 3^2 \times 1000^2$$

ou (§ 71) $$(2 \times 1000)^2 < 7896152{,}605 < (3 \times 1000)^2$$

e finalmente $$2000 < \sqrt{7896152{,}605} < 3000$$

Estas desigualdades mostram: 1.º, que o primeiro algarismo da esquerda da raiz quadrada de 7896152,605 é 2, isto é, a raiz quadrada de 7 approximada até ás unidades; 2.º, que a raiz quadrada approximada até ás unidades tem 4 algarismos, isto é, tantos, quantas são (§ 274) as classes de 2 algarismos da parte inteira do numero dado.

Admittindo, que 28 é a raiz quadrada de 789 approximada até ás unidades por defeito, será (§ 265)

$$28^2 < 789 < (28+1)^2$$

e como 789 e $(28+1)^2$ são dois numeros inteiros, que não podem differir menos de 1 unidade, segue-se que tambem será

$$28^2 < 789{,}6152605 < (28+1)^2$$

D'estas desigualdades deduz-se

$$28^2 \times 100^2 < 7896152{,}605 < (28+1)^2 \times 100^2$$

e $$2800 < \sqrt{7896152{,}605} < 2900$$

Logo os dois primeiros algarismos de $\sqrt{7896152{,}605}$ são 2 e 8.

276. **Theorema.** *Subtrahindo de um numero inteiro ou decimal o quadrado das dezenas da sua raiz quadrada, e dividindo o numero de dezenas do resto pelo dobro das dezenas da raiz, acha-se um quociente igual ou superior ao algarismo das unidades da raiz.*

Suppondo que 281 é o numero de dezenas da raiz quadrada de 7896152,605, e designando por u o algarismo das unidades da raiz d'este numero, será $2810+u$ a sua raiz quadrada approximada até ás unidades, e portanto, se esta raiz for approximada por defeito, ter-se-ha

$$7896152{,}605 > (2810+u)^2$$

ou (§ 269) $7896152{,}605 > (2810)^2 + 2 \cdot 2810u + u^2$

e portanto $7896152{,}605 - (2810)^2 > 2 \cdot 2810u + u^2$

Ora o numero de dezenas da somma $2 \cdot 2810u + u^2$ é evidentemente igual ou superior a $2 \cdot 281u$, e, como o numero de dezenas da differença $7896152{,}605 - (2810)^2$ é tambem igual ou superior ao numero de dezenas d'aquella somma, segue-se que o numero de dezenas da mesma differença ou é igual a $2 \cdot 281u$, ou é maior que este producto. No primeiro caso o quociente resultante da divisão do numero de dezenas de $7896152{,}605 - (2810)^2$ por $2 \cdot 281$ é exactamente igual a u, isto é, igual ao algarismo das unidades da raiz; no segundo caso o mesmo quociente é evidentemente maior que u.

N'esta demonstração suppoz-se que o numero dado não era quadrado perfeito, e comtudo as conclusões seriam as mesmas se elle fosse quadrado exacto.

Effectivamente, designando por N um quadrado perfeito, e continuando a suppor que a raiz tem 281 dezenas e u unidades, será

$$N = (2810 + u)^2$$

e por consequencia

$$N - (2810)^2 = 2 \cdot 2810u + u^2$$

e como o numero de dezenas de $N - (2810)^2$ é igual ao numero de dezenas de $2 \cdot 2810u + u^2$, e este é igual ou superior a $2 \cdot 281u$, segue-se que o numero de dezenas d'aquella differença dividido por $2 \cdot 281$ dá no quociente o algarismo u, ou um numero maior que u.

277. Dos §§ 275 e 276 deduz-se um methodo facil de extrahir a raiz quadrada a um numero inteiro ou decimal maior que 100 approximada até ás unidades, quando se sabe (§ 273) extrahir a raiz do mesmo grau e com a mesma approximação a um numero inteiro ou decimal menor que 100.

Com effeito, decompondo a parte inteira de um numero em classes de dois algarismos a partir da casa das unidades, e extrahindo a raiz quadrada approximada até ás unidades da primeira classe da esquerda, que póde ter um ou dois algarismos, mas que é sempre menor que 100, obtem-se o primeiro algarismo da raiz (§ 275). Quadrando o numero formado por este algarismo seguido de um zero, subtrahindo o quadrado resultante ao numero formado pelas duas primeiras classes, e dividindo as dezenas do resto pelo dobro do primeiro algarismo da raiz, tem-se o segundo algarismo da raiz (§ 276), ou um quociente maior que elle. Para se decidir qual d'estes dois casos se dá, formam-se as duas ultimas partes do quadrado (§ 269) do numero composto do primeiro algarismo da raiz e do que se suppõe ser o segundo, e subtrahe-se a somma das ditas partes do resto da subtracção acima effectuada. Se a subtrac-

ção for possivel, o algarismo achado na divisão é o segundo algarismo da raiz; se não for possivel, sujeita-se aos mesmos ensaios o algarismo immediatamente inferior, e assim se procede até se chegar a uma subtracção possivel. Para se obter o terceiro algarismo da raiz procede-se com as tres primeiras classes do numero, e com o numero formado pelos dois primeiros algarismos da raiz, como se procedeu com as duas primeiras classes e com o primeiro algarismo da raiz para se obter o segundo. Depois de achado o terceiro algarismo calcula-se o quarto, o quinto e todos os mais pelo mesmo processo.

278. **Problema.** *Extrahir a raiz quadrada com um erro inferior a 1 a qualquer numero inteiro ou decimal.*

Seja 7896152,605 o numero, cuja raiz quadrada se procura. Decomponha-se a parte inteira do numero em classes de dois algarismos da direita para a esquerda, e disponha-se a operação como abaixo se vê

$$\begin{array}{rl|l}
 & \sqrt{7'89'61'52,605} & 2810 \\
 & 4 & 48\times 8 \\
789-(20)^2= & 389 & 561\times 1 \\
 & 384 & 5620\times 0 \\
78961-(280)^2= & 561 & \\
 & 561 & \\
7896152,605-(2810)^2= & 052,605 &
\end{array}$$

A primeira classe da esquerda é 7, a raiz quadrada de 7 approximada até ás unidades é 2; logo (§ 275) o primeiro algarismo da raiz quadrada de 7896152,605 é 2. Para se conhecer o segundo algarismo da raiz é necessario (§ 275) procurar a raiz quadrada de 789, e como 2 é o algarismo das dezenas d'esta raiz, segue-se que (§ 276) o numero de dezenas do resto $789-(20)^2$ é igual ou superior a $2.2u$, sendo u o segundo algarismo da raiz. Ora $789-(20)^2$ é igual a 389, e portanto 38 dividido por 2.2 ou 4 deve dar no quociente u ou um numero maior que u. Dividindo 38 por 4 acha-se o quociente incompleto 9, e formando as ultimas duas partes do desenvolvimento de $(20+9)^2$ acha-se $2.20.9+9^2$, ou 441, que é maior que 389; logo tambem o quadrado de 29 excede 789, e por consequencia o segundo algarismo da raiz é inferior a 9. Para ver se 8 satisfaz[1] escreve-se á direita de 2.2 ou 4 o algarismo 8, multiplica-se 48, ou $40+8$, por 8, e escreve-se o producto 384 por baixo de 389. A subtracção agora é possivel, e por isso escreve-se já o algarismo 8 na raiz e conclue-se que 28 é a raiz quadrada de 789 e é o numero de dezenas da raiz quadrada de 78961.

O numero de dezenas de $78961-(280)^2$ dividido (§ 276) por

[1] Em geral, designando d as dezenas e u o algarismo das unidades da raiz, junta-se a $2d$ a parcella u e, multiplicando a somma $2d+u$ por u, obtem-se $2du+u^2$.

2.28 dá o terceiro algarismo da raiz ou um quociente maior que elle, e como

$$78961-(280)^2=561$$

segue-se que o terceiro algarismo é igual ou inferior a $\frac{56}{2.28}$, isto é, igual ou inferior a 1. Escrevendo á direita de 56 o algarismo 1, multiplicando por 1 o numero resultante 561, ou $(2.280+1)$, e subtrahindo o producto de 561, acha-se o resto zero. Logo 281 é a raiz quadrada exacta de 78961 e 2, 8 e 1 são os tres primeiros algarismos da raiz approximada de 7896152,605. O quarto algarismo d'esta ultima raiz acha-se como o terceiro.

279. Em qualquer das subtracções precedentemente effectuadas o resto nunca deve exceder o dobro da ultima raiz achada[1].

Achando-se, por exemplo, que a raiz do maior quadrado inteiro contido em 7896152,605 é 2810, o resto, isto é,

$$7896152{,}605-(2810)^2$$

não póde evidentemente exceder a 2.2810 ou 5620, porque, se fôr igual ou superior a $2.2810+1$, será

$$7896152{,}605-(2810)^2=\text{ou}>2.2810+1$$

e por consequencia

$$7896152{,}605=\text{ou}>(2810)^2+2.2810+1$$

ou (§ 269) $$7896152{,}605=\text{ou}>(2810+1)^2$$

e deixará de ser $(2810)^2$ o maior quadrado inteiro contido em 7896152,605.

280. Da doutrina exposta no §§ precedentes deduz-se a seguinte:

Regra da extracção da raiz quadrada. *A raiz quadrada de qualquer numero approximada até ás unidades obtem-se decompondo o maior inteiro contido n'elle em classes de dois algarismos da direita para a esquerda, e extrahindo a raiz approximada até ás unidades á primeira classe da esquerda. Esta raiz é exactamente o primeiro algarismo da raiz procurada. Subtrahindo o quadrado d'este algarismo da primeira classe do numero dado, escrevendo á direita do resto a segunda classe, separando com um ponto o algarismo das unidades do numero resultante, e dividindo a parte d'este numero que fica á esquerda do ponto pelo dobro da raiz achada, tem-se um quociente incompleto, que é igual ou superior ao segundo algarismo da raiz. Verifica-se, se este quociente iguala ou excede o*

[1] Quando o resto é igual, ou inferior á raiz achada, o erro d'esta raiz é menor que meia unidade. Com effeito, sendo N o numero dado e a a raiz achada, será $N-a^2$ o resto, e suppondo que é $N-a^2=$ ou $<a$ ter-se-ha evidentemente $N=$ ou $<a^2+a$ e portanto

$$N<a^2+a+\tfrac{1}{4}=\left(a+\tfrac{1}{2}\right)^2$$

Logo $$a^2<N<\left(a+\tfrac{1}{2}\right)^2$$

segundo algarismo da raiz, escrevendo-o, quando não excede a 9, á direita do dobro da raiz achada, multiplicando o numero assim formado pelo dito quociente, e vendo se o producto póde subtrahir-se do numero que acima se formou com o resto e a segunda classe. Se a subtracção é possivel, o quociente obtido é effectivamente o segundo algarismo da raiz, se não é possivel, toma-se o inteiro immediatamente inferior e sujeita-se ao mesmo processo, e assim se continua até se chegar ao maior numero digito, para o qual a referida subtracção seja possivel. Se o quociente é maior que 9, o primeiro numero que se sujeita ao ensaio é 9. Depois de achado o segundo algarismo da raiz, e de effectuada a competente subtracção, baixa-se para o lado do resto a terceira classe, separa-se com um ponto o ultimo algarismo da direita, e assim se continua a operação, até se terem baixado todas as classes, em que se decompoz o numero. Se em alguma das divisões parciaes o quociente fór nulio, escrever-se-ha zero na raiz e baixar-se-ha a classe immediata.

281. Tira-se a prova a uma extracção de raiz quadrada, considerando esta operação como uma divisão, na qual o dividendo é o numero dado, o divisor e o quociente incompleto são iguaes á raiz achada, e o resto da divisão é o resto da extracção da raiz.

No exemplo do § 278 deve, com effeito, ser

$$7896152{,}605 = (2810)^2 + 52{,}605$$

A prova por um divisor (§ 130) applica-se a estas operações facilmente, quando os numeros são inteiros, porque se reduz a extrahir o divisor escolhido (9 ou 11) á raiz achada, a quadrar o resultado obtido, excluindo d'elle o referido divisor, a juntar o numero achado ao resto da extracção da raiz, lançando fóra d'esta somma o divisor, e finalmente a ver se este ultimo resto é igual ao que fica depois de extrahido o divisor ao numero dado.

Quando os numeros são decimaes, ainda se póde applicar o mesmo processo, tendo, comtudo, o cuidado de desprezar a parte decimal tanto do numero dado, como do resto da extracção da raiz, visto que as proposições dos §§ 116 e 121 sómente são applicaveis aos numeros inteiros.

Basta, com effeito, provar que é

$$7896152 = (2810)^2 + 52$$

para se adquirir a certeza de que tambem será

$$7896152{,}605 = (2810)^2 + 52{,}605$$

282. **Problema.** *Extrahir a raiz quadrada com um erro menor que* $\frac{1}{d}$ *a qualquer numero inteiro ou decimal.*

Seja 27584372,325 o numero, ao qual se quer extrahir a raiz quadrada com um erro inferior a $\frac{1}{1000}$.

Como se sabe (§ 266), a resolução d'este problema reduz-se a multiplicar 27584372,325 por $(1000)^2$, a extrahir á parte inteira do producto a raiz quadrada com um erro inferior a 1, e a dividir por 1000 a raiz achada.

A raiz quadrada de $27584372,325 \times (1000)^2$ ou 27584372325000 com um erro inferior a 1 é 5252082, e dividindo este numero por 1000 tem-se a raiz 5252,082 do numero dado com um erro inferior a 0,001. O numero 5252,083 é tambem igual á raiz quadrada do numero dado com um erro inferior a 0,001.

Na pratica, quando se quer extrahir a raiz quadrada a um numero, inteiro ou decimal, com um erro inferior a $\frac{1}{1000\ldots}$, faz-se com que o numero tenha um numero de casas decimaes igual ao dobro dos zeros escriptos no denominador do quebrado, desprezando para esse fim as casas decimaes que porventura elle tenha a mais, ou acrescentando-lhe á direita os zeros que forem necessarios para completar as que lhe faltarem, extrahe-se depois a raiz quadrada até ás unidades ao numero resultante, sem fazer caso da virgula (§ 280), e colloca-se a virgula na raiz achada, de modo que esta fique com tantas casas de dizima, quantos são os zeros do denominador da fracção $\frac{1}{1000\ldots}$.

Muitas vezes nem se está com o cuidado de reduzir o numero das casas de dizima ao dobro do das casas de dizima, com que deve ficar a raiz. Divide-se então o numero em classes de dois algarismos, a partir da casa das unidades para um e outro lado, começa-se a extracção da raiz pela esquerda, e vão-se abaixando successivamente as classes de dois algarismos até a raiz ter as casas correspondentes á approximação desejada, tendo cuidado de collocar uma virgula na raiz, logo que se tiver baixado a primeira classe decimal. A operação dispõe-se assim:

$\sqrt{27584372,325}$	5252,082
25	102 × 2
258	1045 × 5
204	10502 × 2
5443	1050408 × 8
5225	10504162 × 2
21872	
21004	
8683250	
8403264	
27998600	
21008324	
6990276	

Se o limite da approximação da raiz fôr $\frac{1}{8}$, proceder-se-ha similhantemente, como abaixo se vê

$$
\begin{array}{l|l}
\quad 27584372{,}325 & \\
\qquad\qquad\quad 64 = 8^2 & \\
\hline
1\ 10\ 33\ 74\ 89\ 300 & \\
16\ 55\ 06\ 23\ 39\ 50 & \\
\hline
17'65'39'98'28{,}800 & 42016 \\
16 & 82 \times 2 \\
\overline{165} & 8401 \times 1 \\
164 & 84026 \times 6 \\
\overline{13998} & \\
\quad 8401 & \\
\overline{559728} & \\
\quad 504156 & \\
\overline{55572} &
\end{array}
$$

Logo a raiz quadrada de 27584372,325 com um erro inferior a $\frac{1}{8}$ é $\frac{42016}{8}$ ou $\frac{42017}{8}$, isto é, 5252 ou 5252,125.

283. **Problema.** *Extrahir a raiz quadrada a um numero, inteiro ou decimal, com um erro inferior a um numero* e *maior que* 1.

Para se resolver este problema, basta extrahir ao numero dado a raiz com um erro inferior a $\frac{1}{1:e}$, porque (§ 222) este quebrado é evidentemente igual a e.

A raiz quadrada de 23578528,74 com um erro inferior a 10 obtem-se pois procurando a raiz do mesmo numero com um erro inferior a $\frac{1}{1:10}$ e por consequencia multiplicando 23578528,74 por $(1:10)^2$, ou dividindo o mesmo numero pelo quadrado de 10, extrahindo ao resultado a raiz com um erro inferior a 1 e multiplicando por 10 a raiz achada.

Ora a raiz de $23578528{,}74 \times \frac{1}{10^2}$ ou de 235785,2874 com um erro inferior a 1 é 485, logo a raiz de 23578528,74 com um erro inferior a 10 é 4850.

284. A raiz quadrada de um quebrado nunca póde ser um numero inteiro, porque nenhum numero inteiro elevado ao quadrado, ou mesmo a qualquer outra potencia, deixa de dar numero inteiro. A raiz quadrada de um quebrado será pois outro quebrado, ou um numero incommensuravel, conforme o dito quebrado fôr ou não quadrado perfeito.

Para que um quebrado seja quadrado perfeito é preciso portanto que haja outro quebrado, que elevado ao quadrado produza o quebrado proposto, e designando aquelle quebrado por $\frac{a}{b}$ e a

sua raiz quadrada pelo quebrado irreductivel $\frac{x}{y}$, será $\frac{a}{b}=\left(\frac{x}{y}\right)^2$ ou (§ 217)

$$\frac{a}{b}=\frac{x^2}{y^2}$$

e como (§§ 147 e 189) $\frac{x^2}{y^2}$ deve tambem ser irreductivel, segue-se que a e b, ou são respectivamente iguaes a x^2 e y^2, ou são equimultiplos d'estes dois numeros. Logo *todo o quebrado, que é quadrado perfeito, póde simplificar-se de modo que ambos os termos fiquem sendo quadrados perfeitos. A raiz quadrada de um quebrado, cujos termos são quadrados perfeitos, obtem-se extrahindo a raiz quadrada a ambos os termos.*

Exemplo:

$$\sqrt{\frac{8}{18}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$$

285. Quando os dois termos de um quebrado irreductivel não são quadrados perfeitos, a raiz quadrada do quebrado só póde obter-se approximadamente.

Para se extrahir a raiz quadrada de $\frac{26}{45}$ com um erro inferior a $\frac{1}{100}$ multiplica-se (§ 266) $\frac{26}{45}$ por $(100)^2$ e extrahe-se a raiz quadrada á parte inteira do producto $\frac{26}{45}\times 100^2$ ou $\frac{260000}{45}$ com um erro inferior a 1. Dividindo 260000 por 45 acha-se 5777,77... e, como para extrahir a raiz quadrada com um erro inferior a 1 a qualquer numero decimal é desnecessario attender á dizima, segue-se, que $\sqrt{5777}$ com um erro inferior a 1 dividida por 100 é igual á $\sqrt{\frac{26}{45}}$ com um erro inferior a $\frac{1}{100}$, isto é, $\sqrt{\frac{26}{45}}=0,76$ com um erro inferior a $\frac{1}{100}$.

Na pratica reduz-se logo o quebrado a dizima, até esta conter um numero de casas decimaes duplo do numero de casas, que deve ter a raiz, e extrahe-se depois a raiz quadrada ao numero decimal. Acha-se por este modo

$$\sqrt{\frac{26}{45}}=\sqrt{0,5777}=0,76$$

286. Outro methodo empregado para extrahir a raiz quadrada a um quebrado, consiste em tornar o denominador um quadrado perfeito extrahindo depois a raiz quadrada ao numerador, com a approximação que se requer na raiz do quebrado, e ao denominador, sem erro algum.

Pedindo-se, por exemplo, a raiz quadrada de $\frac{8}{7}$ com um erro in-

ferior a 0,01, multiplicar-se-hão por 7 ambos os termos do quebrado, para tornar quadrado perfeito o seu denominador, e extrahir-se-ha, tanto ao numerador como ao denominador do quebrado resultante $\frac{56}{49}$, a raiz quadrada, ao numerador com um erro inferior a 0,01 e ao denominador sem erro algum. Achar-se-ha por este modo que a raiz quadrada de $\frac{8}{7}$ com um erro inferior a 0,01 é $\frac{7,48}{7}$ ou $\frac{7,49}{7}$.

Sabe-se, com effeito, que, se fôr

$$(7,48)^2 < 56 < (7,49)^2$$

será

$$\frac{(7,48)^2}{7^2} < \frac{56}{49} < \frac{(7,49)^2}{7^2}$$

e portanto

$$\frac{7,48}{7} < \sqrt{\frac{8}{7}} < \frac{7,49}{7}$$

Logo qualquer dos numeros $\frac{7,48}{7}$ ou $\frac{7,49}{7}$ diffirirá de $\sqrt{\frac{8}{7}}$ não só menos de 0,01, como se pedia, porém menos de $\frac{0,01}{7}$ ou $\frac{1}{700}$.

287. Para tornar o denominador de um quebrado um quadrado perfeito basta multiplicar ambos os termos do quebrado pelo denominador. É, porém, possivel muitas vezes tornar o denominador um quadrado perfeito multiplicando ambos os termos por um numero mais pequeno. Para se obter este menor numero, decompõe-se o denominador em factores primos (§ 172) e fórma-se um producto com todos os factores, que entram no denominador com expoente impar. Suppondo que o denominador é $6174 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^3$, formar-se-ha o producto dos factores 2 e 7, que têem expoentes impares, e ter-se-ha (§§ 71 e 72)

$$6174 \times 14 \quad \text{ou} \quad 2 \times 3^2 \times 7^3 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7^4 = (2 \times 3 \times 7^2)^2$$

Empregando este processo acha-se

$$\sqrt{\frac{4589}{6174}} = \sqrt{\frac{4589 \times 14}{(2 \times 3 \times 7^2)^2}} = \frac{\sqrt{64246}}{294} = \frac{253,46}{294}$$

EXERCICIOS

I. Extrahir a raiz quadrada aos seguintes numeros 106929; 941139684; 0,00427716; 6825,238225; $\frac{841}{529}$; $\frac{4445}{4805}$; $\frac{2268}{7623}$.

II. Extrahir com um erro inferior a 1 a raiz quadrada aos seguintes numeros 43618; 215643; 230,016; 52568,003; 72644,78; $\frac{8125}{256}$; $\frac{3726}{841}$.

III. Extrahir com um erro inferior a $\frac{1}{500}$ a raiz quadrada aos seguintes numeros 627; 0,4; 10; 47,65; $\frac{407,08}{26,237}$; $\frac{80,036}{0,047}$.

IV. Extrahir com um erro inferior a 40 a raiz quadrada aos seguintes numeros 6082035168; $\frac{1253487}{0,001}$; 6087321584,039; $\frac{6035723}{7849}$.

V. Provar que não é quadrado perfeito o numero, que pela exclusão dos noves der de resto 2, 3, 5, 6 ou 8.

VI. Provar que não é quadrado perfeito o numero, que pela exclusão dos onzes der de resto 2, 6, 7, 8 ou 10.

VII. Provar que não é quadrado perfeito o numero inteiro, que tiver 5 na casa das unidades, e não tiver 2 na casa das dezenas.

VIII. Provar que todo o numero impar, que é quadrado perfeito, é igual a um multiplo de 8 mais 1.

IX. Provar que o quadrado de qualquer numero primo maior que 5 é igual a um multiplo de 12 augmentado de 1.

X. Provar que o quadrado de um numero primo com 5 é igual a um multiplo de 5 augmentado ou diminuido de 1.

CAPITULO II

Raiz cubica

288. **Raiz cubica** *de um numero é o numero, que elevado ao cubo* (§ 69) *produz o numero dado.*

Indica-se a raiz cubica de um numero escrevendo o numero debaixo do radical $\sqrt{}$ e sobrepondo a este o algarismo 3. Assim, por exemplo,

$$\sqrt[3]{27}=3$$

lê-se *raiz cubica de* 27 *igual a* 3.

Diz-se, que um numero é cubo perfeito, quando é o producto de tres factores iguaes. Os numeros 27, $\frac{8}{27}$ e 0,125 são cubos perfeitos, porque são iguaes aos seguintes productos indicados $3.3.3$, $\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}$ e $0,5.0,5.0,5$.

289. Em geral chama-se *raiz quarta, raiz quinta, raiz sexta,* etc.. de um numero ao numero, que elevado á potencia quarta, quinta, sexta, etc., produz o numero dado. Estas raizes indicam-se, como a raiz cubica, escrevendo o numero por baixo do radical e sobrepondo a este o numero, que indica a ordem ou grau da raiz. Este numero chama-se *indice* da raiz. Tem-se, por exemplo,

$$\sqrt[4]{16}=2 \qquad \sqrt[5]{32}=2 \qquad \sqrt[6]{64}=2$$

porque $\qquad 2^4=16 \qquad 2^5=32 \qquad 2^6=64$

290. A raiz cubica de um numero inteiro, que não é cubo perfeito de outro numero inteiro, não póde ser representada exactamente nem por um numero inteiro, nem por um numero fracciorio (§ 261).

O mesmo acontece á raiz quarta, quinta, sexta, etc., do numero inteiro, que não é potencia quarta, quinta, sexta, etc. de outro numero inteiro.

A raiz terceira, quarta, quinta, etc., *de numero inteiro, que não é terceira, quarta, quinta,* etc., *potencia exacta de outro numero inteiro, é pois um numero incommensuravel* (§ 5).

A raiz terceira, quarta, quinta, etc., *de um numero fraccionario, que não é terceira, quarta, quinta,* etc., *potencia exacta de numero fraccionario, é tambem um numero incommensuravel.*

Em geral chamam-se *quantidades irracionaes* ás raizes segundas, terceiras, quartas, etc., de numeros, que não são potencias exactas d'aquelles graus, e *quantidades racionaes* ás raizes de numeros, que são potencias exactas.

As expressões $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{0,16}$, representam quantidades irracionaes e por consequencia incommensuraveis, as expressões $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$, $\sqrt[4]{0,0016}$, representam quantidades racionaes.

291. *Raiz cubica de um numero* N, *que não é cubo perfeito, é o limíte para que tendem todos os numeros commensuraveis, que vão crescendo ou decrescendo, segundo alguma lei, de modo que os seus cubos sejam todos menores, ou todos maiores que o numero* N.

A expressão $\sqrt[3]{N}$ significa, pois, um numero maior que todos os numeros commensuraveis, cujos cubos são inferiores a N, e menor que todos os numeros commensuraveis, cujos cubos são maiores que N.

A $\sqrt[3]{5}$, por exemplo, é maior que os numeros 1; 1,7; 1,709; etc., e menor que os numeros 2; 1,8; 1,71; etc., porque

$$1^3 < (1,7)^3 < (1,709)^3 < \ldots < 5 < \ldots < (1,71)^3 < (1,8)^3 < 2^3$$

Em geral chama-se $\sqrt[3]{N}$ *approximada até ás unidades á raiz cubica do maior cubo inteiro contido em* N.

Sendo y um numero inteiro e

$$y^3 < N < (y+1)^3$$

será y a raiz cubica de N approximada até ás unidades *por defeito* e $y+1$ a raiz cubica de N approximada até ás unidades *por excesso.*

292. A raiz cubica dos numeros, que não são cubos perfeitos, só póde ser obtida approximadamente. Basta, porém, saber calcular qualquer raiz cubica com um erro inferior a 1, para facilmente se poder obtel-a com um erro inferior a $\frac{1}{d}$.

Designando $\frac{x}{d}$ a $\sqrt[3]{N}$ approximada por defeito com um erro inferior a $\frac{1}{d}$ será

$$\left(\frac{x}{d}\right)^3 < N < \left(\frac{x+1}{d}\right)^3 \quad \text{ou (§ 217)} \quad \frac{x^3}{d^3} < N < \frac{(x+1)^3}{d^3}$$

e por consequencia $x^3 < Nd^3 < (x+1)^3$

e $x < \sqrt[3]{Nd^3} < x+1$

Logo x é o maior inteiro contido em $\sqrt[3]{Nd^3}$ ou a raiz cubica approximada por defeito até ás unidades de Nd^3. *Obtem-se, portanto,* $\sqrt[3]{N}$ *com um erro inferior a* $\frac{1}{d}$ *multiplicando* N *pelo cubo de* d, *extrahindo a raiz cubica exacta, ou approximada até ás unidades ao producto* Nd^3 *e dividindo a raiz achada por* d

A raiz cubica de 5,3 com um erro inferior a $\frac{1}{4}$ é a raiz cubica de $5{,}3 \times 4^3$, com um erro inferior a 1, dividida por 4. Ora $\sqrt[3]{5{,}3 \times 64}$ ou $\sqrt[3]{339{,}2}$ com um erro inferior a 1 é 6 ou 7, porque

$$6^3 < 339{,}2 < (6+1)^3$$

logo $\sqrt[3]{5{,}3}$ com um erro inferior a $\frac{1}{4}$ é $\frac{6}{4}$ ou $\frac{7}{4}$, isto é, 1,5 ou 1,75. A primeira raiz é por *defeito*, a segunda é por *excesso*.

293. Para se poder extrahir uma raiz cubica convém saber de cór os cubos dos numeros digitos, ou, pelo menos, ter presente a seguinte taboa dos mesmos cubos.

Numeros digitos	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
Cubos	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729

Desde 1 até 1000 inclusivè ha, pois, sómente 10 numeros inteiros, que sejam cubos perfeitos.

294. **Theorema.** *O cubo da somma de duas parcellas é igual ao cubo da primeira parcella, mais o triplo do quadrado da primeira parcella multiplicado pela segunda parcella, mais o triplo da primeira parcella multiplicado pelo quadrado da segunda parcella e mais o cubo da segunda parcella,* isto é,

$$(5+7)^3 = 5^3 + 3 \times 5^2 \cdot 7 + 3 \times 5 \cdot 7^2 + 7^3$$

Pela definição de potencia (§ 69) é

$$(5+7)^3 = (5+7)(5+7)(5+7) \quad \text{ou} \quad (5+7)^3 = (5+7)^2(5+7)$$

mas (§ 268) $(5+7)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \cdot 7 + 7^2$

logo $(5+7)^3 = (5^2 + 2 \times 5 \cdot 7 + 7^2)(5+7)$

ou (§ 59)

$$(5+7)^3 = 5^3 + 2 \times 5^2 \cdot 7 + 5 \cdot 7^2 + 5^2 \cdot 7 + 2 \times 5 \cdot 7^2 + 7^3$$
$$(5+7)^3 = 5^3 + (2+1)5^2 \cdot 7 + (1+2)5 \cdot 7^2 + 7^3$$

e finalmente

$$(5+7)^3 = 5^3 + 3 \times 5^2 \cdot 7 + 3 \times 5 \cdot 7^2 + 7^3$$

295. **Corollario I.** *O cubo de um numero inteiro composto de dezenas e de unidades é igual ao cubo das dezenas, mais o triplo*

do quadrado das dezenas pelas unidades, mais o triplo das dezenas pelo quadrado das unidades e mais o cubo das unidades, isto é,

$$(265)^3 = (260)^3 + 3\,(260)^2\,5 + 3 \cdot 260 \cdot 5^2 + 5^3$$

ou, designando por d as dezenas e por u as unidades,

$$(d+u)^3 = d^3 + 3\,d^2u + 3\,d\,u^2 + u^3$$

296. **Corollario II.** *Não é cubo perfeito o numero inteiro, que terminar em zeros, quando o numero d'estes não fôr divisivel por* 3; porque, se o numero acaba no algarismo zero, a sua raiz ha de forçosamente ter zero na casa das unidades, e o cubo de um numero acabado em zeros termina (§ 74) em um numero de zeros divisivel por 3.

297. **Corollario III.** *A differença dos cubos de dois numeros inteiros consecutivos é igual ao triplo do quadrado do menor, mais o triplo do menor e mais* 1, isto é,

$$86^3 - 85^3 = 3 \cdot 85^2 + 3 \cdot 85 + 1$$

Com effeito, sendo $86 = 85 + 1$
será (§ 294)

$$86^3 = (85+1)^3 = 85^3 + 3 \times 85^2 \cdot 1 + 3 \times 85 \cdot 1^2 + 1^3$$

ou $$86^3 = 85^3 + 3 \cdot 85^2 + 3 \cdot 85 + 1$$

e, subtrahindo 85^3 a ambos os membros, obtem-se a igualdade que se quer demonstrar.

298. A extracção da raiz cubica approximada até ás unidades de um numero inteiro, ou decimal menor que 1000 não depende de processo especial.

Basta ter presente os cubos dos numeros digitos para com facilidade se acharem estas raizes. Para se ter $\sqrt[3]{226,25}$ com um erro inferior a 1 é necessario conhecer dois cubos consecutivos entre os quaes esteja 226,25. Ora sabe-se que

$$6^3 \text{ ou } 216 < 226 < 343 \text{ ou } 7^3$$

logo a $\sqrt[3]{226,25}$ é 6 ou 7; porque evidentemente é

$$6^3 < 226,25 < 7^3$$

299. **Theorema.** *A raiz cubica exacta, ou approximada até ás unidades de qualquer numero inteiro, ou decimal consta de tantos algarismos, quantas são as classes de* 3 *letras da parte inteira.*

Notando que o numero 77581309673,72, por exemplo, tem 4 classes de 3 algarismos á esquerda da virgula, póde verificar-se que é

$$1000^{4-1} < 77581309673,72 < 1000^4$$

e portanto (§ 72)

$$(10^{4-1})^3 < 77581309673,72 < (10^4)^3$$

e $$10^{4-1} < \sqrt[3]{77581309673,72} < 10^4$$

300. **Theorema.** *Decompondo o maior inteiro contido em qualquer numero dado em classes de tres algarismos da casa das unidades para a esquerda, e extrahindo a raiz cubica exacta, ou approximada por defeito até ás unidades, ao numero formado por* 1, 2, 3, etc., *classes da esquerda, obtem-se* 1, 2, 3, etc., *algarismos da esquerda da raiz cubica exacta, ou approximada por defeito até ás unidades do numero dado.*

Suppondo que as raizes cubicas approximadas até ás unidades por defeito dos numeros 77, 77581, 77581309, etc., são 4, 42, 426, etc., serão 4, 2, 6, etc., os primeiros algarismos da esquerda da raiz cubica de 77581309673,72 approximada até ás unidades.

Com effeito, sendo 4 a raiz approximada de 77, será (§ 291)

$$4^3 < 77 < (4+1)^3$$

e, por serem $(4+1)^3$ e 77 numeros inteiros, a sua differença será necessariamente igual ou superior a 1, e ter-se-ha

$$4^3 < 77,58130967372 < (4+1)^3$$

$$4^3 \times 1000^3 < 77581309673,72 < (4+1)^3 \times 1000^3$$

e $$4000 < \sqrt[3]{77581309673,72} < 5000$$

D'estas desigualdades conclue-se: 1.º, que o primeiro algarismo da esquerda de $\sqrt[3]{77581309673,72}$ é 4, isto é, a raiz cubica de 77 approximada por defeito até ás unidades; 2.º, que a raiz cubica approximada até ás unidades tem 4 algarismos, isto é, tantos, quantas são as classes de 3 algarismos, que tem a parte inteira do numero dado (§ 299).

Admittindo que 42 é a raiz cubica de 77581 appproximada até ás unidades, será (§ 291)

$$42^3 < 77581 < (42+1)^3$$

e, como $(42+1)^3$ e 77581 são dois numeros inteiros, juntando ao menor d'estes a fracção 0,30967372, ainda se obterá uma somma inferior ao maior, e portanto será

$$42^3 < 77581,30967372 < (42+1)^3$$

ou $$42^3 \times 100^3 < 77581309673,72 < 43^3 \times 100^3$$

e finalmente $$4200 < \sqrt[3]{77581309673,72} < 4300$$

Logo 2 é o segundo algarismo da raiz.

301. **Theorema.** *Subtrahindo de um numero inteiro ou decimal o cubo das dezenas da sua raiz cubica, e dividindo o numero de*

centenas do resto pelo triplo do quadrado das dezenas da raiz, acha-se um quociente igual ou superior ao algarismo das unidades da raiz.

Sendo 426 o numero de dezenas da raiz cubica de 77581309673,72 e u o algarismo das unidades da mesma raiz, será $4260 + u$ a raiz cubica approximada por defeito até ás unidades, e portanto

$$77581309673,72 > (4260 + u)^3$$

ou (§ 295)

$$77581309673,72 > (4260)^3 + 3\,(4260)^2 \cdot u + 3 \cdot 4260 \cdot u^2 + u^3$$

e finalmente

$$77581309673,72 - (4260)^3 > 3\,(4260)^2\,u + 3 \cdot 4260 \cdot u^2 + u^3$$

O numero de centenas da differença indicada no primeiro membro d'esta desigualdade é evidentemente igual, ou superior ao numero de centenas da somma indicada no segundo membro, e este numero de centenas é igual ou superior a $3(426)^2.u$, logo dividindo as centenas contidas no resto $77581309673,72 - (4260)^3$ por $3(426)^2$ acha-se um quociente igual, ou superior ao verdadeiro algarismo u das unidades.

Se o numero dado fôr um cubo perfeito, chegar-se-ha por o mesmo raciocinio a igual resultado.

302. Combinando os theoremas dos §§ 300 e 301 é facil descobrir o methodo de extrahir a raiz cubica a um numero inteiro ou decimal com um erro inferior a 1, comtanto que se conheçam as raizes dos numeros inferiores a 1000.

Com effeito, decompondo a parte inteira em classes de tres algarismos da direita para a esquerda, e extrahindo a raiz cubica á ultima, tem-se o primeiro algarismo da raiz (§ 300). Escrevendo um zero á direita d'este algarismo, elevando ao cubo o numero resultante, subtrahindo este cubo do numero composto das duas classes da esquerda, e dividindo o numero de centenas do resto pelo triplo do quadrado do algarismo achado (§ 301), tem-se um quociente igual, ou superior ao algarismo das unidades. Para se distinguir, qual d'estes dois casos se dá, formam-se as ultimas tres partes do cubo (§ 295) do numero formado pelo primeiro algarismo da raiz e pelo que se suppõe ser o segundo, e vê-se, se a somma das ditas partes póde ou não ser subtrahida do resto acima achado. Se a subtracção fôr possivel, o quociente incompleto é effectivamente o algarismo das unidades; se não fôr possivel, é necessario repetir a mesma operação com o algarismo immediatamente inferior, e, se este não satisfizer, com outro ainda menor, e assim successivamente até se encontrar um para o qual a subtracção seja possivel. Obtidos os dois algarismos, procura-se o terceiro de um modo analogo áquelle, por que se obteve o segundo, e assim successivamente.

303. **Problema.** *Extrahir a raiz cubica com um erro inferior a 1 a qualquer numero inteiro ou decimal.*

Seja 77581309673,72 o numero dado. Decomponha-se este numero em classes de tres algarismos da casa das unidades para a esquerda.

A raiz cubica da primeira classe, 77, da esquerda é 4, logo 4 é o primeiro algarismo da raiz. Para se ter o segundo algarismo é necessario extrahir a raiz cubica a 77581, e como se sabe já que esta raiz tem 4 dezenas, segue-se que o numero de centenas de $77581-(40)^3$ dividido pelo numero de centenas de $3(40)^2$ dá ou o segundo algarismo da raiz ou um numero ainda maior.

$$
\begin{array}{rrl}
 & \sqrt[3]{77'581'309'673,72} & \mid\ 4265 \\
 & 64 & \overline{4800} = 3d^2 \\
 & \overline{135'81} & 122 = 3\times 40+2 \quad 244 = 3du+u^2 \\
2\cdot 5044 = & \overline{100\,88} & \overline{5044} = 3d^2+3du+u^2 \\
 & \overline{34\,933'09} & 4 = u^2 \\
 & & \overline{529200} = 3(420)^2 = 3d'^2 \\
 & & 1266 = 3\cdot 420+6 \quad 7596 = 1266\cdot 6 \\
6\cdot 536796 = & \overline{32\,207\,76} & \overline{536796} \\
 & \overline{2\,725\,336'73,72} & 36 \\
 & & \overline{54442800} \\
 & & 12785 = 3\cdot 4260+5 \quad 63925 \\
5\cdot 54506725 = & \overline{2\,725\,336\,25} & \overline{54506725} \\
 & \overline{48,72} &
\end{array}
$$

Dividindo 135 por 48 acha-se 2, e portanto é necessario examinar agora se 2 é com effeito o segundo algarismo da raiz. Sendo certo (§ 301) que este quociente 2 não póde ser menor que o algarismo procurado, é evidente que basta saber que é possivel a subtração $77581-(42)^3$ para se poder concluir que o algarismo procurado é realmente 2.

Mas (§ 295)

$$(42)^3 = (40)^3 + 3(40)^2\cdot 2 + 3\cdot 40\cdot 2^2 + 2^3$$

logo

$$77581 - 42^3 = 77581 - 40^3 - 3(40)^2\cdot 2 - 3\cdot 40\cdot 2^2 - 2^3$$

e, como se suppõe effectuada já a subtracção $77581-40^3$, segue-se (§ 34) que será

$$77581 - 42^3 = 13581 - [3\cdot(40)^2\cdot 2 + 3\cdot 40\cdot 2^2 + 2^3]$$

logo, em vez de se subtrahir $(42)^3$ de 77581, é melhor subtrahir a somma $3(40)^2\cdot 2 + 3(40)\cdot 2^2 + 2^3$ do resto 13581 ultimamente achado. Para mais facilmente se calcular a somma d'aquellas tres partes do desenvolvimento do cubo, tirar-se-ha á somma indicada o factor commum 2 e no resultado

$$(3\cdot 40^2 + 3\cdot 40\cdot 2 + 2^2)2$$

tornar-se-ha a tirar o factor commum 2 ás duas ultimas parcellas do primeiro factor. Achar-se-ha por este modo[1]

$$3 \cdot 40^2 \cdot 2 + 3 \cdot 40 \cdot 2^2 + 2^3 = [3 \cdot 40^2 + (3 \cdot 40 + 2) 2] 2$$

Escrevendo á direita do producto $3 \cdot 4$, depois de effectuado, o algarismo 2 tem-se

$$3 \cdot 40 + 2 = 122 \quad \text{ou} \quad 3d + u$$

multiplicando esta somma 122 por 2, e juntando o resultado $(3 \cdot 40 + 2) \cdot 2$ ou 244 a $3 \cdot 40^2$ ou 4800, acha-se o numero 5044, que multiplicado por 2 dá

$$5044 \cdot 2 = 3 \cdot 40^2 \cdot 2 + 3 \cdot 40 \cdot 2^2 + 2^3 \quad \text{ou} \quad [(3d + u) u + 3d^2] u$$

Subtrahindo agora 5044×2 ou 10088 de 13581, acha-se 3493, e portanto

$$77581 - 42^3 = 3493$$

Para se ter o terceiro algarismo da raiz do numero dado é necessario extrahir a raiz cubica a 77581309, e, como é já conhecido o numero 42 de dezenas da dita raiz, basta seguir-se o processo já explicado para se obter o referido algarismo. É possivel, porém, evitar a elevação da raiz achada 42 ao cubo, de que aliás se precisa para se formar o divisor $3 \cdot 42^2$.

Pela ordem por que se dispoz a operação tem-se[2]

$$244 = 3(40) \cdot 2 + 2^2 \qquad 5044 = 3(40) \cdot 2 + 2^2 + 3(40)^2$$

e

$$4 = 2^2$$

Sommando ordenadamente acha-se

$$5292 = 3 \cdot 40^2 + 2 \cdot 3 \cdot 40 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2$$

ou

$$5292 = 3(40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2)$$

e finalmente (§ 273) $\quad 5292 = 3 \cdot (42)^2$

Multiplicando por 100 ambos os membros vem

$$529200 = 3(42)^2 \times 10^2 = 3(420)^2$$

Conhecido o triplo do quadrado de 42 determina-se o terceiro

---

[1] Representando em geral por d e u o numero de dezenas e o algarismo das unidades da raiz, as tres ultimas parcellas do desenvolvimento de $(d + u)^3$ são $3d^2u + 3du^2 + u^3$ e é evidente que esta somma se reduz a $[(3d + u) d + u^2] u$.

[2] Sommando as tres parcellas $3du + u^2$, $3du + u^2 + 3d^2$ e u^2 obtem-se a expressão $3d^2 + 6du + 3u^2$ da qual se deduz $3(d^2 + 2du + u^2)$, que é igual a $3(d + u)^2$.

algarismo da raiz, como se determinou o segundo, e assim se continua até ao fim.

304. Os restos obtidos nas diversas subtracções, que successivamente se vão fazendo, não podem nunca exceder ao triplo do quadrado da raiz achada augmentado do triplo da mesma raiz, porque, se algum resto excedesse esta somma em uma unidade, a raiz teria (§ 297) um erro por defeito igual a um exactamente, e, se o resto excedesse a mesma somma em mais de uma unidade, o erro seria ainda maior que 1.

305. Do que fica exposto deduz-se a seguinte:

Regra da extracção da raiz cubica. *A raiz cubica de qualquer numero approximada até ás unidades obtem-se decompondo o maior inteiro contido n'elle em classes de tres algarismos da direita para a esquerda, e extrahindo a raiz approximada até ás unidades á primeira classe da esquerda. Esta raiz é exactamente o primeiro algarismo da raiz procurada. Subtrahindo o cubo d'este algarismo da primeira classe do numero dado, escrevendo á direita do resto a classe immediata, separando com um ponto os dois ultimos algarismos do numero resultante, e dividindo a parte d'elle, que fica á esquerda do ponto, pelo triplo do quadrado da raiz achada tem se um quociente incompleto, que é igual ou superior ao segundo algarismo da raiz. Verifica-se se este quociente satisfaz, ou não, escrevendo á direita do triplo da raiz achada o algarismo que se quer sujeitar á prova, multiplicando o numero assim formado pelo mesmo algarismo, escrevendo o producto por baixo do triplo do quadrado da raiz achada, sommando estes dois numeros, multiplicando a somma pelo algarismo, que se experimenta, e vendo se é possivel subtrahir este producto do numero, que se formou com o resto e a segunda classe. Se a subtracção é possivel, o algarismo ensaiado é o segundo algarismo da raiz, se não satisfaz, é preciso repetir os mesmos ensaios com os algarismos sucessivamente menores até encontrar um que satisfaça. O algarismo achado por este modo escreve-se na raiz, e depois de effectuada a subtracção escreve-se á direita do resto a terceira classe e separam-se com um ponto os dois ultimos algarismos. Para se obter o terceiro algarismo da raiz divide-se o numero, que fica á esquerda do ponto, pelo triplo do quadrado da raiz achada. Este divisor acha-se sommando os seguintes numeros: 1.º, a somma do triplo do primeiro algarismo com o segundo algarismo multiplicada por este algarismo; 2.º, a somma d'este primeiro numero com o triplo do quadrado do primeiro algarisma seguido de dois zeros; 3.º, o quadrado do segundo algarismo. Escrevendo á direita d'esta somma dois zeros tem-se o triplo do quadrado das dezenas da raiz cubica do numero formado pelas tres primeiras classes da esquerda. Continuando com o processo, como até aqui, acha-se o terceiro algarismo da raiz e depois o quarto, quinto,* etc.

306. Tira-se a prova a uma extracção de raiz cubica, elevando ao cubo a raiz achada e juntando-lhe o resto, ou extrahindo os noves, ou onzes á raiz, elevando ao cubo o resto obtido, lançando fóra do resultado os noves ou onzes, sommando o numero resultante d'esta exclusão com o resto da extracção da raiz, e lançando fóra os noves ou onzes a esta somma.

É evidente que, para a operação estar certa, é necessario que o ultimo resto seja igual ao que se obtem extrahindo ao numero dado os noves, ou onzes, ou que, se se empregou a primeira prova, a somma do cubo da raiz com o resto seja igual ao numero dado.

307. **Problema.** *Extrahir a raiz cubica com um erro menor que* $\frac{1}{d}$ *a qualquer numero inteiro ou decimal.*

Seja 7,3254 o numero dado e 0,01 ou $\frac{1}{100}$ o limite superior do erro admissivel.

Para se obter $\sqrt[3]{7,3254}$ com um erro menor que $\frac{1}{100}$, deve (§ 292) multiplicar-se 7,3254 por 100^3, extrahir-se a raiz cubica á parte inteira de $7,3254 \times 100^3$ ou 7325400 com um erro inferior a 1 e dividir-se a raiz achada por 100.

Procedendo d'este modo acha-se

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt[3]{7'325'400} & 194 \\
\underline{1} & \overline{300} \\
\underline{63'25} & 351 = 39 \times 9 \\
\underline{5859} & \overline{651} \\
\underline{4664'00} & \underline{81} \\
 & \overline{108300} \\
 & \underline{2296} = 574 \times 4 \\
\underline{442384} & \overline{110596} \\
\underline{24016} &
\end{array}
$$

Logo $\sqrt[3]{7,3254} = 1,94$ com um erro por defeito menor que $\frac{1}{100}$.

Na pratica, quando o limite da approximação é da fórma $\frac{1}{1000\ldots}$, não se costuma supprimir a virgula, mas tem-se o cuidado de a collocar na raiz, logo que se baixa a classe, que está á direita da virgula no numero dado, e de ir baixando as classes completas de tres algarismos, até a raiz ter as casas de dizima que requer a approximação.

Para achar $\sqrt[3]{273458965,32}$ com um erro inferior a $\frac{1}{100}$ ou 0,01 procede-se como em seguida se vê

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt[3]{273'458'965,32} & 649,07 \\
\underline{216} & \underline{10800} \\
\quad 57\,4'58 & \quad 736 = 184 \cdot 4 \\
\quad \underline{46\,1\,44} & \underline{11536} \\
\quad 11\,3\,14\,9'65 & \quad 16 \\
 & \underline{1228800} \\
 & \quad 17361 = 1929 \cdot 9 \\
\quad 11\,2\,15\,4\,49 & \underline{1246161} \\
\underline{\quad 99\,5\,16\,3200'00} & \quad 81 \\
 & \underline{12636030000} \\
 & \quad 1362949 = 194707 \cdot 7 \\
\quad 88\,4\,61\,7506\,43 & \underline{12637392949} \\
\quad \underline{11\,0\,54\,5693\,57} &
\end{array}$$

Logo $\sqrt[3]{273458965,32} = 649,07$ com um erro por defeito menor que 0,01.

308. Um quebrado irreductivel só é cubo perfeito, quando ambos os seus termos o são, porque, não podendo ser numero inteiro a raiz cubica de um quebrado $\frac{a}{b}$ irreductivel, será, designando por $\frac{x}{y}$ a raiz cubica de $\frac{a}{b}$,

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{x}{y}\right)^3 \quad \text{ou (§ 217)} \quad \frac{a}{b} = \frac{x^3}{y^3}$$

e como o quebrado $\frac{x}{y}$ sempre se póde considerar irreductivel, segue-se que $\frac{x^3}{y^3}$ tambem o será (§§ 147 e 189), e portanto que ou é

$$a = x^3 \quad \text{e} \quad b = y^3 \quad \text{ou} \quad a = m \cdot x^3 \quad \text{e} \quad b = m \cdot y^3$$

Logo para extrahir a raiz cubica a um quebrado convém primeiro simplifical-o, e depois examinar se os termos do quebrado irreductivel são cubos perfeitos.

A raiz cubica do quebrado, cujos termos são cubos perfeitos, obtem-se extrahindo a raiz cubica tanto ao numerador como ao denominador, isto é,

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3}{5}$$

E com effeito o cubo de $\frac{3}{5}$ é (§ 217) $\frac{3^3}{5^3}$ ou $\frac{27}{125}$.

309. Quando os dois termos do quebrado não são cubos perfeitos, póde reduzir-se o quebrado a dizima e extrahir-se ao numero decimal resultante a raiz cubica com a approximação que se desejar.

Para calcular $\sqrt[3]{\frac{16}{25}}$ com um erro inferior a 0,0001 ou $\frac{1}{10000}$ re-

duz-se $\frac{16}{25}$ a dizima, e extrahe-se a raiz a 0,64 com um erro inferior a $\frac{1}{10000}$, isto é, calcula-se $\sqrt[3]{640000000000}$ com um erro inferior a 1 e divide-se por 10000 a raiz achada. Ora é evidente que esta operação equivale a multiplicar $\frac{16}{25}$ por 10000^3, a extrahir com um erro inferior a 1 a raiz cubica a $\frac{16 \cdot 10000^3}{25}$ ou 640000000000 e a dividir o resultado por 10000.

Acha-se assim

$$\sqrt[3]{640000000000} = 8617$$

com um erro por defeito inferior a 1, e portanto

$$\sqrt[3]{\frac{16}{25}} = 0{,}8617 \text{ com um erro por defeito inferior a } 0{,}0001$$

310. Outro modo de extrahir a raiz cubica a um quebrado, que não é cubo perfeito, consiste em tornar o denominador um cubo perfeito, extrahir a raiz cubica approximada ao numerador e a raiz cubica exacta ao denominador, e formar com as duas raizes os termos de um quebrado.

Applicando este processo ao quebrado $\frac{16}{25}$, cujo denominador se torna um cubo perfeito multiplicando-o por 5, tem-se

$$\sqrt[3]{\frac{16}{25}} = \sqrt[3]{\frac{80}{125}} = \frac{\sqrt[3]{80}}{5}$$

e extrahindo a raiz cubica a 80 com um erro inferior a 0,0001 (§ 307) vem

$$\sqrt[3]{80} = 4{,}3088$$

e portanto $$\sqrt[3]{\frac{16}{25}} = \frac{4{,}3088}{5} = 0{,}86176$$

O erro da raiz 0,86176 é evidentemente menor que $\frac{0{,}0001}{5}$ ou $\frac{1}{50000}$.

311. Para tornar o denominador de um quebrado cubo perfeito, sem que o quebrado mude de valor, é necessario escolher um factor conveniente pelo qual se multipliquem os dois termos do quebrado.

Quando o denominador é numero primo, o menor factor, que póde tornal-o cubo perfeito, é o quadrado do denominador. Não sendo primo o denominador, o meio mais geral de achar o factor, que satisfaz áquella condição, é decompor o denominador em factores primos, e formar um producto com os factores primos, cujos expoentes não são multiplos de 3, dando a cada factor o expoente

1 ou 2 conforme o expoente d'elle no denominador do quebrado der o resto 2 ou 1 dividido por 3.

Se o denominador decomposto em factores primos der $2^2.3.5^4.7^9.11^3$, o menor factor, que convém introduzir, deve conter os factores primos 2, 3 e 5, o primeiro com o expoente 1, ou sem expoente, e os outros com o expoente 2. É facil, com effeito, verificar que o producto $2^2.3.5^4.7^9.11^3 \times 2.3^2.5^2$ é um cubo perfeito, porque evidentemente é igual a

$$2^3.3^3.5^6.7^9.11^3 \quad \text{ou (§ 72)} \quad 2^3.3^3.(5^2)^3.(7^3)^3.11^3$$

e (§ 71) $$2^2.3.5^4.7^9.11^3 \times 2.3^2.5^2 = (2.3.5^2.7^3.11)^3$$

EXERCICIOS

I. Extrahir as raizes cubicas dos seguintes numeros: 1259712; 257259456; 997002999; 51,895117; 0,008998912; $\frac{1331}{2209}$; $\frac{512000}{884737}$; $\frac{35644289}{42144192}$.

II. Extrahir com um erro inferior a 0,1 as seguintes raizes cubicas: $\sqrt[3]{5206834}$, $\sqrt[3]{4236,068}$, $\sqrt[3]{608375692,6235}$, $\sqrt[3]{\frac{1560}{27}}$, $\sqrt[3]{\frac{5784062}{325}}$, $\sqrt[3]{\frac{7862932}{2646}}$.

III. Extrahir com um erro inferior a $\frac{1}{700}$ as raizes cubicas dos seguintes numeros: 325; 0,8; 0,27; 52,65; 4837,0068; $\frac{0,3827}{0,00248}$.

IV. Extrahir com um erro inferior a 50 as seguintes raizes cubicas: $\sqrt[3]{125034867}$, $\sqrt[3]{9043256482,125}$, $\sqrt[3]{\frac{5538629748}{328}}$.

V. Extrahir com um erro inferior a $\frac{3}{8}$ as raizes cubicas dos numeros 6293; 8547,06; $\frac{647}{225}$.

VI. Provar que não é cubo perfeito o numero que pela exclusão dos noves der de resto 2, 3, 4, 5, 6 ou 7.

VII. Provar que não é cubo perfeito o numero que é divisivel por um numero primo, e não o é por o cubo do mesmo numero primo.

VIII. Provar que não é cubo perfeito o numero impar, que não fôr igual a um multiplo de 8 augmentado ou diminuido de 1 ou de 5.

IX. Provar que para um quebrado ser cubo perfeito é necessario e sufficiente que o seja o producto de um dos seus termos pelo quadrado do outro.

X. Provar que são desiguaes as differenças entre um numero irracional $\sqrt[3]{N}$ e as duas raizes cubicas de N approximadas até ás unidades, uma por defeito e outra por excesso.

CAPITULO III

Operações sobre numeros incommensuraveis—Calculo de radicaes

312. As definições dadas anteriormente sobre as operações ordinarias da arithmetica, suppõem que todos os numeros são inteiros ou fraccionarios, e excluem portanto a hypothese de todos elles, ou sómente alguns serem incommensuraveis.

O symbolo $\sqrt{3}$, por exemplo, representa uma grandeza determi-

nada (§ 264) e comtudo é impossivel exprimil-a sem erro algum por um numero inteiro ou fraccionario.

É certo, porém, que $\sqrt{3}$ é (§ 264) o *limite* commum de duas series de numeros commensuraveis, uma crescente, outra decrescente. O mesmo acontece[1] com o symbolo $\sqrt{2}$. A expressão symbolica $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ representa, portanto, uma somma de grandezas determinadas, que jámais poderá ser expressa exactamente por algum numero inteiro ou fraccionario.

313. Imaginando duas series de numeros commensuraveis, uma formada de numeros que tendam para $\sqrt{3}$ como limite e outra de numeros que tendam para $\sqrt{2}$, e sommando os numeros correspondentes d'estas duas series ter-se-ha uma serie de sommas de numeros commensuraveis.

Admittindo que *esta serie de sommas tem um limite e que o limite da somma é igual á somma dos limites das parcellas*, definir-se ha *somma de dois ou mais numeros incommensuraveis o limite das sommas dos numeros commensuraveis, que successivamente se vão approximando dos referidos numeros incommensuraveis segundo alguma lei.*

314. Admittindo que *uma differença, cujos termos são numeros commensuraveis, que tendem para limites incommensuraveis, tem limite e que o limite da differença é igual á differença entre os limites do additivo e subtractivo*, chama-se *differença de dois numeros incommensuraveis ao limite das differenças dos numeros commensuraveis, que successivamente se vão approximando dos referidos numeros incommensuraveis segundo alguma lei.*

315. Em geral, admittiremos como evidente, que *os resultados de quaesquer operações praticadas sobre numeros commensuraveis, que successiva e indefinidamente se vão approximando segundo alguma lei de numeros incommensuraveis, tendem para um limite; e que este limite é igual ao resultado das operações indicadas sobre os numeros incommensuraveis, que são limites dos referidos numeros commensuraveis.*

316. Admittindo este principio geral ter-se-ha por definição:

Producto de dois ou mais numeros incommensuraveis é o limite dos productos dos numeros commensuraveis, que successivamente se vão approximando dos referidos numeros incommensuraveis segundo alguma lei;

---

[1] O symbolo $\sqrt{2}$ representa a diagonal de um quadrado, cujo lado se tomou para unidade. O symbolo $\sqrt{3}$ representa a diagonal de um cubo, cuja aresta se escolheu para unidade. É certo que, tanto uma como outra diagonal, são grandezas bem determinadas, e comtudo nenhuma d'ellas poderá exprimir-se exactamente por um numero inteiro ou fraccionario, emquanto não se mudar de unidade. O mesmo acontece á somma das duas diagonaes, isto é, a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, quando o lado do quadrado e a aresta do cubo são iguaes á unidade adoptada.

Quociente de dois numeros incommensuraveis é o limite dos quocientes dos numeros commensuraveis, que successivamente se vão approximando dos referidos numeros incommensuraveis segundo alguma lei;

Raiz m *de um numero incommensuravel é o limite para que tendem todos os numeros commensuraveis, que vão crescendo ou decrescendo segundo alguma lei, de modo que as suas potencias de grau* m *sejam todas menores, ou todas maiores que o referido numero incommensuravel.*

317. **Theorema.** *O producto de radicaes do mesmo indice é igual á raiz do mesmo indice do producto de todos os numeros escriptos debaixo dos radicaes,* isto é,

$$\sqrt[m]{A}\times\sqrt[m]{B}\times\sqrt[m]{C}=\sqrt[m]{A\times B\times C}$$

Suppondo que $\sqrt[m]{A}$, $\sqrt[m]{B}$ e $\sqrt[m]{C}$ são commensuraveis, isto é, que A, B e C são potencias perfeitas do grau m, é

$$a^m=A \qquad b^m=B \qquad c^m=C$$

designando a, b e c as raizes m de A, B e C.

Multiplicando ordenadamente estas equações, tem-se

$$a^m\times b^m\times c^m=A\times B\times C \qquad \text{ou (§ 71)} \qquad (a\times b\times c)^m=A\times B\times C$$

e consequentemente

$$a\times b\times c=\sqrt[m]{A\times B\times C} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt[m]{A}\times\sqrt[m]{B}\times\sqrt[m]{C}=\sqrt[m]{A\times B\times C}$$

Não sendo commensuraveis todos, ou alguns dos factores do producto $\sqrt[m]{A}\times\sqrt[m]{B}\times\sqrt[m]{C}$, será este por definição (§ 316) o limite para que tendem os productos dos factores commensuraveis, que têem por limite os factores dados, e como aquelle limite é por definição $\sqrt[m]{A\times B\times C}$ segue-se que será tambem n'este caso

$$\sqrt[m]{A}\times\sqrt[m]{B}\times\sqrt[m]{C}=\sqrt[m]{A\times B\times C}$$

Este theorema póde enunciar-se assim: *a raiz* m *de um producto é igual ao producto das raizes* m *dos seus factores.*

318. **Corollario.** *A potencia* n *de uma raiz do grau* m *é igual á raiz* m *da potencia* n *do numero escripto debaixo do radical,* isto é,

$$(\sqrt[m]{A})^n=\sqrt[m]{A^n}$$

Pela definição de potencia é

$$(\sqrt[m]{A})^n=\sqrt[m]{A}\times\sqrt[m]{A}\times\ldots$$

e pelo § anterior é

$$\sqrt[m]{A}\times\sqrt[m]{A}\times\ldots=\sqrt[m]{A\times A\times\ldots}=\sqrt[m]{A^n}$$

Logo $$(\sqrt[m]{A})^n=\sqrt[m]{A^n}$$

319. **Theorema.** *O producto de um numero* A *pela raiz* m *de* B *é igual á raiz* m *do producto de* A^m *por* B, isto é,

$$A\sqrt[m]{B}=\sqrt[m]{A^m\times B}$$

Sendo qualquer numero A igual a $\sqrt{A^2}$, $\sqrt[3]{A^3}$, $\sqrt[4]{A^4}$, etc. será em geral

$$A\sqrt[m]{B}=\sqrt[m]{A^m}\times\sqrt[m]{B}$$

e portanto (§ 317)

$$A\sqrt[m]{B}=\sqrt[m]{A^m\times B}$$

Por meio d'esta proposição póde metter-se debaixo de um radical qualquer numero que esteja a multiplical-o, ou inversamente póde simplificar-se um radical tirando para fóra d'elle os factores, que forem potencias perfeitas do grau designado pelo indice do radical.

320. **Theorema.** *O quociente resultante da divisão de radicaes do mesmo indice é igual á raiz do mesmo indice do quociente resultante da divisão dos numeros escriptos debaixo dos radicaes*, isto é,

$$\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}}=\sqrt[m]{\frac{A}{B}}$$

Suppondo conhecido o quociente Q resultante da divisão indicada no primeiro membro, ter-se-ha

$$\sqrt[m]{A}=Q\times\sqrt[m]{B}$$

elevando a m ambos os membros (§ 71)

$$A=Q^m\times B$$

e

$$\frac{A}{B}=Q^m \quad \text{ou} \quad Q=\sqrt[m]{\frac{A}{B}}$$

Logo

$$\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}}=\sqrt{\frac{A}{B}}$$

Enuncia-se este theorema do seguinte modo: *a raiz* m *de um quebrado é igual á raiz* m *do numerador sobre a raiz* m *do denominador.*

321. **Theorema.** *O radical, cujo indice é um numero multiplo, póde decompor-se em uma serie de radicaes sobrepostos, que tenham por indices os divisores do numero multiplo*, isto é,

$$\sqrt[2\cdot3]{A}=\sqrt{\sqrt[3]{A}}=\sqrt[3]{\sqrt{A}}$$

Representando por a o valor de $\sqrt[2\cdot3]{A}$ tem-se

$$A=a^{2\cdot3}$$

e portanto (§ 72)

$$A=(a^2)^3 \quad \text{ou} \quad A=(a^3)^2$$

D'estas igualdades tira-se

$$\sqrt[3]{A}=a^2 \quad \text{ou} \quad \sqrt{A}=a^3$$

e finalmente

$$\sqrt{\sqrt[3]{A}}=a=\sqrt[2\cdot 3]{A} \quad \text{ou} \quad \sqrt[3]{\sqrt{A}}=a=\sqrt[2\cdot 3]{A}$$

Por meio d'esta proposição póde extrahir-se qualquer raiz, cujo indice admitta só os divisores primos 2 e 3, não empregando senão os processos conhecidos de extracção das raizes quadradas e cubicas. Ter-se-ha, por exemplo,

$$\sqrt[8]{A}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{A}}} \quad \sqrt[12]{A}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{A}}}=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{A}}}=\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{A}}}$$

322. **Theorema.** *Um radical não muda de valor numerico, quando se multiplica pelo mesmo numero inteiro o indice e o expoente do numero, que o radical affecta, ou quando se divide este expoente e o indice por um dos seus divisores communs.*

Seja a o valor numerico de $\sqrt[3]{A^2}$, isto é,

$$a=\sqrt[3]{A^2}$$

Elevando ambos os membros ao cubo vem

$$a^3=(\sqrt[3]{A^2})^3=A^2$$

e, elevando ambos os membros d'esta igualdade á potencia m, tem-se (§ 72)

$$(a^3)^m=(A^2)^m \quad \text{ou} \quad a^{3m}=A^{2m}$$

Extrahindo a raiz do grau $3m$ acha-se finalmente

$$\sqrt[3m]{a^{3m}} \quad \text{ou} \quad a=\sqrt[3m]{A^{2m}}$$

e portanto

$$\sqrt[3]{A^2}=\sqrt[3m]{A^{2m}}$$

Com este principio é facil simplificar um radical, quando o seu indice e o expoente da quantidade que elle affecta, não são primos entre si.

323. Reduzem-se radicaes ao mesmo indice, exactamente como se reduzem quebrados ao mesmo denominador, tratando os indices dos radicaes, como denominadores de quebrados, e os expoentes das quantidades affectas dos radicaes, como numeradores.

A reducção de radicaes ao mesmo indice é uma operação indispensavel para elles se poderem multiplicar ou dividir. Applicando estas regras á seguinte multiplicação de radicaes, acha-se

$$\sqrt{7}\times\sqrt[3]{5}\times\sqrt[4]{13}=\sqrt[12]{7^6}\times\sqrt[12]{5^4}\times\sqrt[12]{13^3}=\sqrt[12]{7^6\times 5^4\times 13^3}$$

EXERCICIOS

I. Demonstrar que a raiz m de qualquer numero A com um erro inferior a $\frac{1}{d}$ póde obter-se extrahindo a raiz m ao producto $A \cdot d^m$ com um erro inferior a 1 e dividindo por d o resultado.

II. Calcular $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}$ com um erro inferior a 0,01.

III. Demonstrar a igualdade $\frac{\sqrt[4]{21}}{\sqrt[4]{5+\sqrt{4}}}=\sqrt[4]{5-\sqrt{4}}$.

IV. Demonstrar a igualdade $\sqrt{4+\sqrt{12}}\times\sqrt{4-\sqrt{12}}=2$

V. Demonstrar a igualdade $\sqrt[3]{496125}=15\sqrt[3]{147}$.

VI. Demonstrar a igualdade $\sqrt{720}-\sqrt{320}=4\sqrt{5}$.

VII. Achar com um erro inferior a 0,1 os valores de $\sqrt[3]{124}$, $\sqrt[6]{435}$, $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt[9]{21}$.

VIII. Demonstrar a igualdade $\sqrt[8]{9}\cdot\sqrt[9]{8}\cdot\sqrt[6]{5}=\sqrt[12]{10800}$.

IX Demonstrar a igualdade $\frac{\sqrt[6]{11}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[12]{\frac{121}{125}}$.

X. Deduzir as condições necessarias para serem commensuraveis os quocientes $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt[3]{B}}$ e $\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$ quando A e B representam numeros commensuraveis.

LIVRO V

PROPORÇÕES, PROGRESSÕES E LOGARITHMOS

CAPITULO I

Proporções e progressões por differença

324. **Rasão por differença**, ou **rasão arithmetica**, *é a expressão, que mostra, quanto um numero excede, ou é inferior, a outro.* Indica-se uma rasão por differença escrevendo este numero depois d'aquelle e collocando entre os dois o signal —. As expressões 7 — 4 e 4 — 7 são duas rasões arithmeticas, das quaes a primeira mostra, que 7 excede 4 em 7 — 4 ou 3 unidades e a segunda, que 4 é excedido por 7 em 7 — 4 ou 3 unidades. Chama-se *antecedente da rasão* ao numero escripto á esquerda do signal — e *consequente da rasão* ao numero escripto depois do mesmo signal. *Expoente da rasão* é o valor absoluto do numero de unidades e partes da unidade, que representa o excesso do maior dos termos da rasão sobre o outro.

325. A rasão arithmetica póde ser de *maior desigualdade, de igualdade* ou de *menor desigualdade*, conforme o antecedente é superior, igual ou inferior ao consequente.

A rasão arithmetica de igualdade equivale a uma igualdade, assim a rasão arithmetica 4 — 4, cujo expoente é zero, exprime o mesmo que a igualdade 4 = 4.

A rasão arithmetica de maior desigualdade corresponde evidentemente a uma subtracção indicada, e por isso o seu expoente (§ 324) não muda de valor (§ 36), quando se junta ou subtrahe o mesmo numero, tanto ao antecedente, ou additivo, como ao consequente, ou subtractivo. O excesso de 7 sobre 4, por exemplo, é o mesmo que o de $7+3$ sobre $4+3$ ou o de $7-3$ sobre $4-3$.

A rasão arithmetica de menor[1] desigualdade differe de uma subtracção indicada sómente na ordem em que estão escriptos os seus dois termos, isto é, em o subtractivo estar á esquerda do additivo. Como, porém, o excesso de um numero sobre outro não depende da ordem, por que os dois se escrevem, segue-se, que n'esta especie de rasões arithmeticas tambem o expoente se conserva o mesmo, quando aos dois termos se junta ou subtrahe o mesmo numero. Sendo, por exemplo, $7-4$ ou 3 o que falta a 4 para ser igual a 7, será tambem 3 ou $(7+2)-(4+2)$ o que falta a $4+2$ para ser igual a $7+2$, logo as rasões arithmeticas $4-7$ e $(4+2)-(7+2)$ são iguaes, porque exprimem a mesma falta.

Na rasão arithmetica de igualdade tambem o expoente não muda de valor, quando a ambos os termos da rasão se junta ou diminue o mesmo numero.

326. **Proporção por differença** *ou* **proporção arithmetica** *é a expressão que mostra a igualdade de duas rasões por differença.*

A proporção arithmetica, ou por differença, consta de quatro termos, dos quaes o primeiro e ultimo se chamam *extremos*, e os outros *meios*. Chamam-se *antecedentes da proporção* aos antecedentes das duas rasões, e *consequentes da proporção* aos consequentes das rasões.

A igualdade

$$8-6=12-10$$

é uma proporção por differença, porque mostra a igualdade das duas rasões de maior desigualdade $8-6$ e $12-10$. Os antecedentes d'esta proporção são 8 e 12, e os consequentes 6 e 10. Os termos 8 e 10 são *extremos*, os termos 6 e 12 são *meios*.

327. **Theorema.** *Em todo a proporção por differença é a somma dos meios igual á somma dos extremos.*

A proporção

$$8-6=12-10$$

póde considerar-se equivalente a uma rasão arithmetica de igualdade, na qual o antecedente é $8-6$ e o consequente $12-10$; mas

[1] Logo que se admitta a existencia de quantidades negativas, desapparece a necessidade de distinguir a rasão arithmetica de maior desigualdade da rasão arithmetica de menor desigualdade. A primeira terá por expoente uma quantidade positiva, a segunda uma quantidade negativa.

o expoente d'esta rasão não muda de valor (§ 325), quando a cada um dos dois termos se junta $6+10$ ou $10+6$, logo

$$8-6+6+10=12-10+10+6 \quad \text{ou} \quad 8+10=12+6$$

328. **Theorema.** *Quatro numeros escriptos por ordem tal, que a somma dos dois extremos seja igual á somma dos dois do meio formam proporção arithmetica ou por differença.* Assim se os numeros 15, 4, 17 e 6 forem taes que seja

$$15+6=4+17 \quad \text{será} \quad 15-4=17-6$$

Com effeito, sendo $(15+6)-(4+17)$ uma rasão de igualdade, tambem $[(15+6)-(6+4)]-[(4+17)-(4+6)]$ será uma rasão de igualdade, porque o expoente não deixa de ser zero, quando se subtrahe $6+4$ ou $4+6$ ao antecedente e ao consequente. Tem-se pois

$$(15+6)-(6+4)=(4+17)-(4+6)$$

ou (§ 34) $$15+6-6-4=4+17-4-6$$

e finalmente $$15-4=17-6$$

329. Estes dois theoremas (§§ 327 e 328) constituem a propriedade fundamental e caracteristica das proporções por differença ou arithmeticas. O primeiro representa a propriedade fundamental directa das proporções, e o segundo a sua propriedade fundamental inversa.

330. Conhecidos tres dos quatro termos de uma proporcão arithmetica é facil calcular o termo desconhecido, porque ou elle occupa *um dos extremos, e então é igual á somma dos meios menos o extremo conhecido, ou occupa um dos meios, e é igual á somma dos extremos menos o meio conhecido.*

Representando por x o termo desconhecido, e suppondo que é

$$15-4=17-x \quad \text{será (§ 327)} \quad 15+x=17+4$$

e $$15+x-15 \quad \text{ou} \quad x=17+4-15$$

Se fosse $$15-4=x-6$$

seria (§ 327) $$4+x=15+6$$

e $$4+x-4 \quad \text{ou} \quad x=15+6-4$$

331. Em toda a proporção arithmetica podem trocar-se os logares aos termos, comtanto que os dois que occupam os meios ou extremos continuem a ser meios ou extremos, ou passem juntamente para extremos ou para meios. É evidente que com taes mudanças de logar, ou não varia a somma dos meios nem a dos extremos, ou se converte uma somma na outra, e em ambos os casos a somma dos meios continua a ser igual á somma dos extremos.

Admittindo, pois, que é verdadeira a proporção

$$12-7=8-3$$

deverá tambem admittir-se, que são verdadeiras as seguintes proporções

$$12-8=7-3 \qquad 7-12=3-8 \qquad 8-3=12-7$$

Passa-se da primeira proporção para as tres seguintes *alternando*, *invertendo* ou *transpondo* a *proporção dada*.

Alternar *uma proporção é trocar os logares dos meios.* **Inverter** *é trocar os termos em cada rasão.* **Transpor** *é trocar as rasões.*

Quando se alterna uma proporção, os meios continuam a ser meios e os extremos continuam a ser extremos; quando se inverte, ou quando se transpõe, uma proporção, os meios passam para extremos e os extremos para meios.

332. Em toda a proporção arithmetica podem juntar-se ou tirar-se numeros aos seus termos, comtanto que a nova somma dos meios continue a ser igual á nova somma dos extremos.

Póde, pois, juntar-se ou tirar-se o mesmo numero a um extremo e a um meio, porque assim se augmenta ou diminue do mesmo numero a somma dos extremos e a somma dos meios; ou juntar-se um numero a um extremo ou meio, e diminuir-se o mesmo numero do outro extremo ou meio.

333. **Proporção arithmetica continua** *é a que tem iguaes entre si os dois meios ou os dois extremos.*

Invertendo ou transpondo (§ 331) uma proporção, cujos extremos são iguaes, obtem-se uma proporção com os meios iguaes. Geralmente é assim que se apresentam as proporções continuas.

Os dois meios iguaes de uma proporção arithmetica continua constituem um só meio termo, que se chama *meio arithmetico* ou *meio differencial dos outros dois numeros dados.*

334. **Theorema.** *O meio termo de uma proporção arithmetica continua é igual á semi-somma dos extremos.*

Sendo, por exemplo,

$$8-x=x-12$$

uma proporção continua por differença, será (§ 327)

$$x+x=8+12$$

e, como (§ 49) a somma $x+x$ é igual ao producto $2\times x$ ou $2x$,

$$2x=8+12$$

e (§ 75) $$x=\frac{8+12}{2}$$

Se fosse $$x-8=12-x$$

seria tambem $x+x=8+12$

e $x=\frac{8+12}{2}$

É facil descobrir (§ 230) a rasão porque ao meio termo de uma proporção arithmetica continua se chama meio arithmetico, ou differencial dos dois termos extremos.

335. **Progressão por differença** *ou* **progressão arithmetica** *é uma serie de numeros, que vão augmentando ou diminuindo constantemente, de modo que a differença entre dois numeros consecutivos seja sempre a mesma.*

Cada um dos numeros chama-se *termo da progressão*, e a differença constante entre quaesquer dois termos seguidos da progressão é a *rasão da progressão*.

A progressão é *crescente*, quando os seus termos vão sempre augmentando, e é *decrescente*, quando os termos vão diminuindo. Geralmente indica-se a progressão arithmetica pondo á esquerda dos seus termos o signal ÷

As series de numeros

÷21; 18; 15; 12; 9; 6; etc. ÷0; 3; 6; 9; 12; 15; etc.

formam duas progressões arithmeticas, nas quaes a rasão é 3. A primeira é decrescente, a segunda é crescente[1].

336. **Theorema.** *Qualquer termo de uma progressão arithmetica crescente é igual ao primeiro termo, mais o producto da rasão pelo numero dos termos menos um, ou pelo numero dos termos intermedios mais um.*

Designando a o primeiro termo de uma progressão arithmetica, ou por differença, e r a rasão, será $a+r$ (§ 335) o segundo termo, $(a+r)+r$ ou $a+2r$ o terceiro termo, $a+3r$ o quarto termo, $a+4r$ o quinto termo, e assim successivamente.

Comparando os termos

$$\div a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ a+4r,\ a+5r,\ a+6r, \text{ etc.}$$

d'esta progressão reconhece-se, que cada um d'elles é a somma de duas parcellas, das quaes a primeira é constantemente a, e a segunda é o producto da rasão r por um factor variavel 1, 2, 3, etc., que mostra, quantos são os termos escriptos á esquerda de cada termo.

Representando por u o termo de ordem n, isto é, o que tem antes de si $n-1$ termos, será, pois

$$u=a+(n-1)r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

[1] Quando se admittem as quantidades negativas, a progressão arithmetica crescente distingue-se da progressão arithmetica decrescente, em ser a rasão positiva na primeira e negativa na segunda. Da admissão de taes quantidades resulta que a progressão arithmetica decrescente póde continuar indefinidamente.

Suppondo que i é o numero de termos intermedios, isto é, o numero de termos comprehendidos entre a e u, será

$$i+2=n \quad \text{ou} \quad i+1=n-1$$

e portanto $$u=a+(i+1)r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

337. **Corollario.** *Qualquer termo de uma progressão arithmetica decrescente é igual ao primeiro termo diminuido do producto da rasão pelo numero dos termos menos um, ou pelo numero dos termos intermedios mais um.*

Escrevendo a progressão decrescente

$$\div a,\ a-r,\ a-2r,\ a-3r,\ a-4r, \ldots u$$

em ordem inversa, obtem-se a progressão crescente

$$\div u, \ldots a-4r,\ a-3r,\ a-2r,\ a-r,\ a$$

na qual o ultimo termo a é (§ 337) dado pela igualdade

$$a=u+(n-1)r \quad \text{ou pela} \quad a=u+(i+1)r$$

D'estas igualdades deduzem-se

$$u=a-(n-1)r \quad \text{ou} \quad u=a-(i+1)r \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

338. As igualdades (1), (2) e (3) podem servir para achar qualquer termo de uma progressão arithmetica, quando se conhece a rasão, outro termo da progressão considerado como primeiro e o numero de termos comprehendidos entre o termo conhecido e o desconhecido, ou o numero total dos termos incluindo ambos, e chamam-se formulas do *termo geral de qualquer progressão por differença ou arithmetica.*

As igualdades (1) e (2) convertem-se nas igualdades (3), mudando o signal aos productos $(n-1)r$ e $(i+1)r$.

339. **Problema.** *Calcular o vigessimo quinto termo de uma progressao arithmetica crescente, suppondo que o primeiro d'elles é* 0,2 *e a rasão é* 0,05.

Formando os termos successivos da progressão, a partir do termo 0,2, não será difficil chegar a conhecer o termo de ordem 25; é comtudo muito mais facil recorrer a uma das formulas (1) ou (2) do § 336, fazendo n'ella $a=0{,}2$, $n=25$, $r=0{,}05$.

A primeira das ditas formulas dá

$$u_{25}=0{,}2+(25-1).0{,}05 \quad \text{ou} \quad u_{25}=0{,}2+24.0{,}05=1{,}4$$

e a segunda

$$u_{25}=0{,}2+(23+1).0{,}05 \quad \text{ou} \quad u_{25}=0{,}2+24.0{,}05=1{,}4$$

340. As formulas

$$u=a+(n-1)r \quad \text{e} \quad u=a-(n-1)r$$

que dão o termo geral de qualquer progressão crescente, ou decrescente, servem tambem para calcular qualquer das quatro quantidades a, n, r, u, quando se conhecem os valores das outras tres.

Com effeito, da igualdade

$$u = a + (n-1)r \quad \text{deduz-se} \quad u - a = (n-1)r$$

e por consequencia

$$r = \frac{u-a}{n-1} \quad \text{e} \quad a = u - (n-1)r$$

Da mesma igualdade se deduz successivamente

$$u - a = (n-1)r \qquad n - 1 = \frac{u-a}{r}$$

e

$$n = \frac{u-a}{r} + 1 \quad \text{ou (§ 199)} \quad n = \frac{u-a+r}{r}$$

Se a progressão fôr decrescente, ter-se-ha

$$u = a - (n-1)r \qquad a = u + (n-1)r$$

$$r = \frac{a-u}{n-1} \qquad n = \frac{a-u}{r} + 1 = \frac{a-u+r}{r}$$

Mudando em todas estas formulas $n-1$ em $i+1$, ou n em $i+2$, vem para a progressão crescente

$$a = u - (i+1)r,\ r = \frac{u-a}{i+1},\ i+2 = \frac{u-a+r}{r} \quad \text{ou} \quad i = \frac{u-a-r}{r}$$

e para a progressão decrescente[1]

$$a = u + (i+1)r,\ r = \frac{a-u}{i+1},\ i+2 = \frac{a-u+r}{r} \quad \text{ou} \quad i = \frac{a-u-r}{r}$$

341. **Problema.** *Inserir 9 meios arithmeticos, ou por differença entre os numeros 5 e 16.*

Inserir 9 meios arithmeticos entre dois numeros é formar uma progressão arithmetica, de que estes dois numeros sejam o primeiro e ultimo termos, e na qual haja 9 termos entre os extremos.

Para resolver este problema é preciso portanto calcular a rasão r da progressão, suppondo que $a = 5$, $u_{11} = 16$ e $n = 11$ ou $i = 9$.

Substituindo estes valores nas correspondentes formulas (§ 340) acha-se

$$r = \frac{16-5}{11-1} \quad \text{ou} \quad r = \frac{16-5}{9+1}$$

e effectuando as operações

$$r = 1{,}1$$

---

[1] Admittindo a existencia das quantidades negativas, basta mudar r em $-r$ nas formulas relativas ás progressões crescentes para se terem as formulas analogas das progressões decrescentes.

A progressão vem pois a ser

$$\div 5;\ 6{,}1;\ 7{,}2;\ 8{,}3;\ 9{,}4;\ 10{,}5;\ 11{,}6;\ 12{,}7;\ 13{,}8;\ 14{,}9;\ 16$$

Na pratica, quando se não sabem de cór as formulas demonstradas no § 340, substituem-se os valores numericos n'uma das formulas (1) ou (2) do § 336, e deduz-se de uma ou de outra o valor de r.

342. **Theorema.** *Inserindo igual numero de meios arithmeticos entre cada dois termos consecutivos de uma progressão arithmetica, obtem-se uma nova progressão arithmetica.*

Inserindo 4 meios arithmeticos (§ 341) entre cada par de termos consecutivos da progressão $\div 3, 5, 7, 9$ obtem-se a serie dos numeros

$$3;\ 3{,}4;\ 3{,}8;\ 4{,}2;\ 4{,}6;\ 5;\ 5{,}4;\ 5{,}8;\ 6{,}2;\ 6{,}6;\ 7;\ 7{,}4;\ 7{,}8;\ 8{,}2;\ 8{,}6;\ 9$$

que tambem estão em progressão.

Com effeito, os 6 termos, desde 3 até 5 inclusivè, formam uma progressão, cuja rasão é $\frac{5-3}{4+1}$ ou $\frac{r}{4+1}$, designando, em geral, por r a rasão da progressão $\div 3, 5, 7, 9$.

Os 6 termos, desde 5 até 7, constituem outra progressão, na qual a rasão é $\frac{7-5}{4+1}$ ou $\frac{r}{4+1}$. Os 6 termos immediatos, desde 7 até 9, tambem estão em progressão, tendo a rasão igual a $\frac{9-7}{4+1}$ ou $\frac{r}{4+1}$.

Todas estas progressões successivas têem, pois, a mesma rasão, e como o ultimo termo de cada uma é primeiro da immediata, segue-se, que todas ellas não formam senão uma só progressão.

Em geral, sendo r a rasão de uma progressão e i o numero de termos inseridos entre cada dois termos consecutivos, será a rasão da nova progressão $\frac{r}{i+1}$.

343. **Theorema.** *Quatro termos de uma progressão arithmetica formam proporção arithmetica, quando entre o primeiro e o segundo ha tantos termos intermedios, como entre o terceiro e o quarto.*

Sejam a, b, t e u quatro termos de uma progressão arithmetica dispostos de modo que haja i termos intermedios tanto entre a e b, como entre t e u. Ter-se-ha (§ 336)

$$b = a + (i+1)r \qquad u = t + (i+1)r$$

e subtrahindo a primeira igualdade da segunda (ou esta d'aquella, se a progressão fôr decrescente) virá (§ 36)

$$u - b = t - a$$

e, trocando os extremos (§ 331),

$$a-b=t-u$$

344. Corollario I. *Em qualqner progressão arithmetica a somma dos termos equidistantes dos extremos é constante e igual á somma dos extremos.*

Sejam a e u os extremos de uma progressão, b e t dois termos equidistantes dos extremos, isto é, dois termos taes que, se houver i termos intermedios entre b e a, haja i termos intermedios entre t e u. Ter-se-ha pelo theorema anterior

$$a-b=t-u$$

e portanto (§ 327) $$b+t=a+u$$

345. Corollario II. *Quando o numero de termos da progressão arithmetica é impar, o termo collocado a igual distancia dos extremos é igual ao meio arithmetico dos extremos, ou de quaesquer dois termos equidistantes d'elles.*

Quando é impar o numero de termos da progressão, ha um que dista igualmente dos extremos. Representando-o por m, será

$$m=a+(i+1)r \qquad u=m+(i+1)r$$

e portanto $$u-m=m-a$$

ou (§§ 334 e 344) $$m=\frac{a+u}{2}=\frac{b+t}{2}$$

346. Corollario III. *Quando um dos termos da progressão arithmetica é zero, a somma de dois termos quaesquer da progressão é igual a outro termo d'ella.*

Com effeito, suppondo que é $a=0$, ter-se-ha (§ 344)

$$b+t=u$$

347. Theorema. *A somma dos termos de uma progressão arithmetica, ou por differença é igual á semi-somma dos extremos multiplicada pelo numero dos termos.*

Designando S a somma dos numeros $a, b, c, d \ldots q, s, t, u$ em progressão arithmetica, ou o *termo sommatorio* da progressão será

$$S=a+b+c+d+\cdots+q+s+t+u$$

e $$S=u+t+s+q+\cdots+d+c+b+a$$

Sommando ordenadamente estas duas sommas indicadas vem

$$S+S=(a+u)+(b+t)+(c+s)+\cdots+(s+c)+(t+b)+(u+a)$$

ou (§ 344)

$$2S=(a+u)+(a+u)+(a+u)+\cdots+(a+u)+(a+u)+(a+u)$$

e como esta somma tem tantas parcellas iguaes a $a+u$, quantos

são os termos da progressão, segue-se que, se fôr n o numero d'elles, será (§ 49)

$$2S=(a+u)n$$

ou (§ 93)

$$S=\frac{a+u}{2}\times n$$

348. Problema. *Calcular a somma dos numeros inteiros desde 1 até 1000.*

A serie 1, 2, 3,... 1000 de numeros inteiros fórma uma progressão arithmetica, cuja rasão é igual a 1 e o numero dos termos é 1000, logo

$$S=\frac{1+1000}{2}.1000 \quad \text{ou} \quad S=500500$$

Em geral a somma dos numeros inteiros desde 1 até n é dada pela igualdade $S=\frac{n(n+1)}{2}$.

349. Problema. *Calcular a somma dos 1000 primeiros numeros pares.*

A serie 2, 4, 6, 8,... dos numeros pares fórma uma progressão arithmetica, cuja rasão é 2. O valor do termo de ordem 1000 n'esta progressão é (§ 336) dado pela igualdade

$$u=2+(1000-1)2 \quad \text{ou} \quad u=2000$$

logo

$$S=\frac{2+2000}{2}.1000 \quad \text{ou} \quad S=1001000$$

Em geral a somma dos n primeiros numeros pares é igual a $(n+1)n$.

EXERCICIOS

I. Calcular o termo desconhecido em cada uma das seguintes proporções $\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{7}\right)-(0,67-0,0043)=2\sqrt{5}-x$; $\left(\frac{6}{8}+2x\right)-\sqrt[4]{2}=5-\left(\frac{7}{8}-x\right)$; $0,625-(4+3x)=6,3-(2+x)$.

II. Sendo 172 o termo de ordem 50 de uma progressão por differença e 3,5 a rasão, calcular o primeiro termo, suppondo: 1.º, que a progressão é crescente; 2.º, que a progressão é decrescente.

III. Sendo 5,2 e 185,4 dois termos de uma progressão por differença e 0,28832 a rasão, calcular o numero de termos intermedios.

IV. Inserir 30 meios arithmeticos entre 2 e 901.

V. Inserir entre 5 e 525 um numero 2^6-1 de meios arithmeticos, não calculando senão meios arithmeticos entre dois numeros dados.

VI. Calcular a somma de 25 termos de uma progressão por differença, suppondo que o primeiro é 4 e a rasão 0,3.

VII. Calcular a somma de 12 termos de uma progressão por differença, suppondo que a rasão é $\frac{3}{7}$ e o ultimo termo 629.

VIII. Sendo 32 o undecimo termo de uma progressão por differença e 264 a somma d'esses 11 termos, calcular o primeiro termo e a rasão.

IX. Sendo 364 a somma de 14 termos de uma progressão por differença e 20 o primeiro, calcular o ultimo termo e a rasão.

X. Sendo 12 o primeiro termo de uma progressão por differença, 5 a rasão e 77 o ultimo termo, calcular o numero de termos e a somma.

XI. Sendo 2 o primeiro termo de uma progressão por differença e 80 o vigessimo setimo, calcular a rasão e a somma.

XII. Sendo 2 o primeiro termo de uma progressão arithmetica, 345 o ultimo e 8675 a somma, calcular a rasão e o numero dos termos.

XIII. Sendo 156 a somma de 25 termos de uma progressao arithmetica e 0,27 a rasão, calcular o primeiro e o ultimo termos.

XIV. A que condição deve satisfazer uma progressão arithmetica, para que a somma de quaesquer dois dos seus termos seja outro termo da mesma progressão?

XV. A que condição tem de satisfazer o primeiro termo de uma progressão arithmetica e a rasão para que, dividindo a somma dos primeiros n termos da progressão por a somma dos n termos immediatos, se obtenha um quociente independente do valor particular de n?

CAPITULO II

Proporções por quociente — Divisões proporcionaes

350. **Rasão por quociente, rasão geometrica,** ou *simplesmente* **rasão** *é a expressão que mostra o quociente de dois numeros.*

O numero, que serve de dividendo, chama-se *antecedente da rasão*, e o que serve de divisor *consequente da rasão. Expoente da rasão* é o numero, que se obtem, quando se effectua a divisão.

Qualquer das expressões $7:5$ ou $\frac{7}{5}$ representa uma rasão, na qual 7 é o antecedente, 5 o consequente e o quebrado $\frac{7}{5}$ o expoente.

A rasão $7:5$ $\left(\text{ou } \frac{7}{5}\right)$ lê-se 7 *está para* 5, ou mais resumidamente 7 *para* 5, e póde tambem ler-se, como se lêem os quocientes ou os quebrados.

Diz-se que duas rasões são inversas ou reciprocas, quando o seu producto é igual á unidade.

Uma rasão geometrica não muda de valor (§ 95 ou 191), quando pelo mesmo numero se multiplica, ou divide tanto o antecedente como o consequente.

351. **Rasão composta** *é a rasão que tem por antecedente o producto dos antecedentes de outras rasões, e por consequente o producto dos consequentes das mesmas rasões.*

As rasões, que entram na formação de uma rasão composta, chamam-se *rasões componentes* da rasão composta.

A expressão $(5.8.6):(4.3.7)$ ou $\frac{5.8.6}{4.3.7}$ é uma rasão composta, cujas rasões componentes podem ser $5:4$, $8:3$ e $6:7$.

352. **Proporção por quociente, proporção geometrica** ou simplesmente **proporção** *é a expressão, que mostra a igualdade de duas rasões por quociente.*

A proporção geometrica consta de quatro termos, dos quaes o primeiro e ultimo são chamados *extremos* da proporção e os outros *meios*.

Os antecedentes e consequentes das duas rasões denominam-se tambem *antecedentes e consequentes da proporção.*

Qualquer das igualdades

$$8:3=32:12 \quad \text{ou} \quad \frac{8}{3}=\frac{32}{12}$$

representa, pois, uma proporção, que tem por extremos 8 e 12, por meios 3 e 32, por antecedentes 8 e 32 e por consequentes 3 e 12.

Quando as rasões são escriptas em fórma de quocientes indicados, substitue-se geralmente o signal = pelo signal :: que se lê *assim como.*

A proporção 8:3::32:12 lê-se portanto 8 *está para* 3, *assim como* 32 *está para* 12.

353. **Theorema.** *Em toda a proporção por quociente é o producto dos meios igual ao producto dos extremos.*

Sendo $6:5::12:10$ ou $\frac{6}{5}=\frac{12}{10}$ serão $\frac{6}{5}$ e $\frac{12}{10}$ dois quocientes, ou dois quebrados iguaes, e portanto, reduzindo estes quebrados ao mesmo denominador, ter-se-ha tambem

$$\frac{6\times10}{5\times10}=\frac{12\times5}{10\times5}$$

e por consequencia (§ 185)

$$6\times10=12\times5$$

que é o que se queria demonstrar.

354. **Theorema.** *Quatro numeros, escriptos por ordem tal que o producto dos dois extremos seja igual ao producto dos dois do meio, formam proporção geometrica ou por quociente.*

Os numeros 6, 7, 12 e 14 formarão a proporção $6:7::12:14$ se porventura o producto 6×14 dos extremos fôr igual ao producto 7×12 dos meios.

Com effeito, sendo $6\times14=7\times12$ será tambem o quebrado $\frac{6\times14}{7\times14}$, que tem por denominador o producto do segundo e quarto numeros, igual ao quebrado $\frac{7\times12}{7\times14}$, isto é.

$$\frac{6\times14}{7\times14}=\frac{7\times12}{7\times14}$$

e, dividindo por 14 os dois termos do primeiro quebrado e por 7 os do segundo, ter-se-ha (§ 187)

$$\frac{6}{7}=\frac{12}{14} \quad \text{ou} \quad 6:7::12:14$$

355. Estes dois ultimos theoremas (§§ 353 e 354) comprehendem a propriedade fundamental e caracteristica das proporções geometricas. O primeiro exprime a propriedade fundamental directa d'esta especie de proporções; o segundo a propriedade fundamental inversa.

356. Conhecidos tres dos quatro termos de uma proporção, é facil calcular o termo desconhecido, porque *qualquer extremo é igual ao producto dos meios dividido pelo extremo conhecido, e qualquer meio é igual ao producto dos extremos dividido pelo meio conhecido.*

Representando x o termo desconhecido, e admittindo que é

$$9:3::15:x \quad \text{ou} \quad \frac{9}{3}=\frac{15}{x}$$

será pela propriedade fundamental directa (§ 353)

$$9 \cdot x = 3 \times 15$$

e portanto (§ 75) $\quad x=\frac{3\times 15}{9} \quad$ ou $\quad x=5$

Se o termo desconhecido fôr um meio, isto é, se fôr

$$18:6::x:5 \quad \text{ou} \quad \frac{18}{6}=\frac{x}{5}$$

ter-se-ha tambem (§ 353)

$$6 \cdot x = 18 \times 5$$

e $\quad x=\frac{18\times 5}{6} \quad$ ou $\quad x=15$

357. Em toda a proporção geometrica podem trocar-se os logares dos seus termos, comtanto que os dois meios, ou os dois extremos, continuem a ser meios, ou extremos, ou passem ambos para extremos, indo então os extremos para meios. É evidente que sempre que a mudança de logar estiver subordinada a esta condição, a proporção subsistirá, porque ou não varia nem o producto dos meios, nem o dos extremos, ou este producto se converte n'aquelle e aquelle n'este.

Admittindo, por exemplo, que é

$$3:4::6:8 \quad \text{ou} \quad \frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

deverá tambem admittir-se que é

$$3:6::4:8 \qquad 4:3::8:6 \qquad 6:8::3:4$$

ou $$\frac{3}{6}=\frac{4}{8} \qquad \frac{4}{3}=\frac{8}{6} \qquad \frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

Passa-se da primeira proporção para cada uma das tres seguintes *alternando*, *invertendo* ou *transpondo* a proporção dada.

Alternar *é trocar os meios*, **inverter** *é mudar os termos em cada rasão*, **transpor** *é trocar as rasões.*

358. Em toda a proporção geometrica podem mudar-se os valo-

res dos seus termos, comtanto que o producto dos meios não deixe de ser igual ao dos extremos.

Póde-se, pois, multiplicar, ou dividir pelo mesmo numero um extremo e um meio, porque por este modo virá multiplicado ou dividido pelo referido numero tanto o producto dos extremos como o dos meios (§§ 53 e 93), e por consequencia, se estes dois productos eram iguaes, tambem depois o serão.

Por motivo analogo é tambem permittido multiplicar ou dividir um dos extremos, ou um dos meios, por qualquer numero, quando o outro extremo, ou o outro meio, se divide ou multiplica pelo mesmo numero.

Enunciam-se abreviada, porém inexactamente, estes dois principios, dizendo que sobre os dois extremos, ou sobre os dois meios, podem praticar-se operações inversas, e sobre um meio e um extremo podem praticar-se operações analogas.

Sendo, por exemplo,

$$5 : 24 :: 3 :: 4x \quad \text{ou} \quad \frac{5}{24} = \frac{3}{4x}$$

póde deduzir-se da proporção (§ 356) o valor do quarto termo $4x$ e depois o valor da incognita x, ou dividir os dois consequentes (um meio e um extremo) por 4, e da proporção resultante

$$5 : 6 :: 3 : x \quad \text{ou} \quad \frac{5}{6} = \frac{3}{x}$$

tirar $$x = \frac{6 \times 3}{5} \quad \text{ou} \quad x = 3{,}6$$

Se se quizesse calcular o valor de x da proporção

$$8{,}75 : 7 :: 15 : 4x \quad \text{ou} \quad \frac{8{,}75}{7} = \frac{15}{4x}$$

conviria mais dividir por 4 o quarto termo x e multiplicar por o mesmo numero o primeiro termo, para evitar termos fraccionarios, e obter-se-ia por este modo a proporção

$$35 : 7 :: 15 : x \quad \text{ou} \quad \frac{35}{7} = \frac{15}{x}$$

que ainda póde simplificar-se, dividindo por 7 os dois termos da primeira rasão, e depois dividindo por 5 os dois antecedentes, resultando d'ahi

$$5 : 1 :: 15 : x \quad \text{ou} \quad \frac{5}{1} = \frac{15}{x}$$

e $$1 : 1 :: 3 : x \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1} = \frac{3}{x}$$

e finalmente $$x = 3$$

Emprega-se tambem o mesmo principio para desembaraçar de denominadores os termos de uma proporção. Quando os termos fraccionarios são um meio e um extremo, multiplica-se tanto um

como outro pelo seu menor multiplo commum. Suppondo que é

$$\tfrac{3}{4} : \tfrac{5}{6} :: 8 : x$$

multiplicar-se-hão os termos fraccionarios pelo menor multiplo commum 12 dos denominadores 4 e 6 e ter-se-ha

$$\tfrac{3}{4} \times 12 : \tfrac{5}{6} \times 12 :: 8 : x \quad \text{ou} \quad 9 : 10 :: 8 : x$$

e por consequencia $x = \frac{80}{9}$ ou $x = 8\frac{8}{9}$

Quando os termos fraccionarios são dois meios, ou dois extremos, multiplicam-se todos os quatro termos da proporção pelo menor multiplo commum de todos os denominadores.

359. **Proporção continua** ou **proporção geometrica continua** *é a proporção por quociente, na qual são iguaes entre si os dois meios, ou os dois extremos.*

Invertendo, ou transpondo, (§ 357) uma proporção, cujos extremos são iguaes, obtem-se uma proporção com os meios iguaes. É debaixo d'esta ultima fórma, que geralmente se consideram as proporções continuas.

As proporções continuas escrevem-se algumas vezes sem o meio termo repetido, pondo á sua esquerda o signal ∺ As expressões

$$4 : 6 :: 6 : 9; \quad \tfrac{4}{6} = \tfrac{6}{9}; \quad ∺ 4 : 6 : 9$$

são portanto diversos modos de representar a mesma proporção continua.

360. **Theorema.** *O meio termo de uma proporção geometrica continua é igual á raiz quadrada do producto dos extremos.*

Sendo

$$\tfrac{4}{x} = \tfrac{x}{9} \quad \text{ou} \quad 4 : x :: x : 9$$

uma proporção, será pela propriedade fundamental directa (§ 353)

$$x \cdot x \quad \text{ou} \quad x^2 = 4 \times 9$$

e por consequencia

$$x = \sqrt{4 \times 9} \quad \text{ou} \quad x = 6$$

361. Em qualquer proporção continua

$$a : x :: x : b \quad \text{ou} \quad ∺ a : x : b$$

o valor de x está comprehendido entre os de a e de b, porque sendo

$$\tfrac{a}{x} = \tfrac{x}{b}$$

é evidente que ou $\frac{a}{x}$ é um quebrado proprio (§ 18), e n'esse caso $\frac{x}{b}$ tambem o será, ou tanto um como outro quebrado são improprios.

Na primeira hypothese é $a<x$ e $x<b$, isto é, $a<x<b$; na segunda hypothese é $a>x$ e $x>b$ ou $a>x>b$.

O meio termo de uma proporção continua é, pois, em grandeza um termo medio entre os extremos, e por isso se chama *meio geometrico*, ou *meio proporcional* entre os dois numeros, que occupam os extremos.

362. **Meio geometrico, ou meio proporcional** *de dois ou mais numeros é o numero unico, que póde substituir-se a cada um d'elles sem alterar o seu producto.* O meio geometrico dos numeros 2, 4 e 27 é, pois, o numero desconhecido x que satisfaz á seguinte condição

$$x\times x\times x=2\times 4\times 27$$

e, porque o primeiro membro equivale á potencia x^3, tem-se

$$x=\sqrt[3]{2\times 4\times 27}$$

Logo *o meio geometrico de dois ou mais numeros é igual á raiz do producto d'esses numeros, que tem por indice o numero d'elles.*

O meio geometrico de dois ou mais numeros tem sempre um valor comprehendido entre o menor e o maior d'elles.

Com effeito, sendo 2 o menor dos numeros considerados, será

$$\sqrt[3]{2}<\sqrt[3]{27}\qquad \sqrt[3]{2}<\sqrt[3]{4}\qquad \text{e}\qquad \sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$$

e, multiplicando os primeiros membros d'estas expressões e do mesmo modo os segundos, virá

$$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}<\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2}$$

e (§ 317) $$2<\sqrt[3]{27\times 4\times 2}$$

Similhantemente, sendo 27 o maior dos numeros dados, será

$$\sqrt[3]{27}>\sqrt[3]{4}\qquad \sqrt[3]{27}>\sqrt[3]{2}\qquad \sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{27}$$

e portanto $$\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{27}>\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{27}$$

e $$27>\sqrt[3]{27\times 4\times 2}$$

363. **Theorema.** *Em qualquer proporção geometrica a somma ou differença dos antecedentes está para a somma ou differença dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para o seu consequente*[1], isto é, sendo

---

[1] Da proporção geometrica continua $a:x::x:b$ deduz-se

$$a-x:x-b::a:x$$

e, suppondo (§ 361) $a>x>b$, será $a-x>x-b$. Logo o meio geometrico x de dois numeros a e b differe menos do menor b, que do maior a.

Da proporção arithmetica continua $a-y=y-b$ deduz-se que o meio arithmetico y de dois numeros a e b differe tanto de um como de outro.

Combinando estes resultados, conclue-se que *o meio geometrico de dois numeros dados é menor que o meio arithmetico.*

$$24 : 21 :: 8 : 7 \quad \text{ou} \quad \frac{24}{21} = \frac{8}{7}$$

será $\quad 24+8 : 21+7 :: 24 : 21 :: 8 : 7 \quad$ ou $\quad \frac{24+8}{21+7} = \frac{24}{21} = \frac{8}{7}$

e $\quad 24-8 : 21-7 :: 24 : 21 :: 8 : 7 \quad$ ou $\quad \frac{24-8}{21-7} = \frac{24}{21} = \frac{8}{7}$

Com effeito, tirando o valor do primeiro antecedente na proporção dada (§ 356) vem

$$24 = \frac{21 \times 8}{7}$$

juntando o segundo antecedente a cada um dos membros d'esta igualdade acha-se (§§ 58 e 199)

$$24+8 = \frac{21 \times 8}{7} + 8 = \left(\frac{21}{7}+1\right)8 = \frac{(21+7)8}{7}$$

e dividindo ambos os membros por $21+7$

$$\frac{24+8}{21+7} = \frac{8}{7} \quad \text{ou} \quad \frac{24+8}{21+7} = \frac{24}{21}$$

Subtrahindo o segundo antecedente aos dois membros da mesma igualdade, obtem-se (§ 205)

$$24-8 = \frac{21 \times 8}{7} - 8 = \left(\frac{21}{7}-1\right)8 = \frac{(21-7)8}{7}$$

e finalmente $\quad \frac{24-8}{21-7} = \frac{8}{7} = \frac{24}{21}$

364. **Corollario.** *Em qualquer proporção geometrica a somma dos antecedentes está para a sua differença, assim como a somma dos consequentes está para a differença dos mesmos.*

Sendo

$$15 : 12 :: 5 : 4$$

será (§ 363) $\quad \frac{15+5}{12+4} = \frac{15}{12} \quad$ e $\quad \frac{15-5}{12-4} = \frac{15}{12}$

e por consequencia

$$\frac{15+5}{12+4} = \frac{15-5}{12-4} \quad \text{ou} \quad 15+5 : 12+4 :: 15-5 : 12-4$$

Alternando a proporção (§ 357) obtem-se

$$15+5 : 15-5 :: 12+4 : 12-4 \quad \text{ou} \quad \frac{15+5}{15-5} = \frac{12+4}{12-4}$$

que é o que se queria demonstrar.

365. **Theorema.** *Em qualquer proporção geometrica a somma ou differença dos dois primeiros termos está para a somma ou differença dos dois ultimos, assim como o primeiro está para o terceiro, ou o segundo para o quarto*, isto é, sendo

$$32 : 20 :: 8 : 5 \quad \text{ou} \quad \frac{32}{20} = \frac{8}{5}$$

será $32+20:8+5::32:8::20:5$ ou $\frac{32+20}{8+5}=\frac{32}{8}=\frac{20}{5}$

e $32-20:8-5::32:8::20:5$ ou $\frac{32-20}{8-5}=\frac{32}{8}=\frac{20}{5}$

Alternando (§ 357) a proporção dada, e applicando á proporção resultante o theorema do § 363, obtêem-se as duas ultimas proporções.

É facil, comtudo, demonstral-as directamente tirando da proporção dada o valor do primeiro termo (§ 356)

$$32=\frac{20\times 8}{5}$$

e juntando, ou subtrahindo o segundo termo da proporção a ambos os membros da igualdade. Acha-se assim

$$32+20=\frac{20\times 8}{5}+20=20\left(\frac{8}{5}+1\right)=\frac{20(8+5)}{5}$$

e portanto $\frac{32+20}{8+5}=\frac{20}{5}$

ou, seguindo um processo analogo,

$$\frac{32-20}{8-5}=\frac{20}{5}$$

E, como alternando a proporção dada se obtem

$$32:8::20:5 \quad \text{ou} \quad \frac{32}{8}=\frac{20}{5}$$

segue-se que será

$$32+20:8+5::20:5::32:8$$

e $32-20:8-5::20:5::32:8$

366. Corollario. *Em qualquer proporção geometrica a somma dos dois primeiros termos está para a sua differença, assim como a somma dos dois ultimos termos está para a differença dos mesmos.*

Da proporção

$$60:20::12:4 \quad \text{ou} \quad \frac{60}{20}=\frac{12}{4}$$

deduz-se (§ 365)

$60+20:12+4::60:12$ ou $\frac{60+20}{12+4}=\frac{60}{12}$

e $60-20:12-4::60:12$ ou $\frac{60-20}{12-4}=\frac{60}{12}$

Estas duas proporções têem uma rasão commum, e portanto as outras duas rasões devem ser iguaes, logo

$60+20:12+4::60-20:12-4$ ou $\frac{60+20}{12+4}=\frac{60-20}{12-4}$

e alternando

$60+20:60-20::12+4:12-4$ ou $\frac{60+20}{60-20}=\frac{12+4}{12-4}$

367. Com o auxilio dos theoremas precedentes (§§ 363 a 366) é possivel em alguns casos calcular a incognita x, que entra em mais de um termo de uma proporção, reduzindo a um só os termos, que a envolvem.

Suppondo, por exemplo, que é

$$3:2::4+x:11-x$$

ter-se-ha (§ 365)

$$3+2:4+x+11-x::3:4+x$$

ou $\quad 5:15::3:4+x \quad$ (§ 358) $\quad 1:3::3:4+x$

e portanto (§ 396)

$$4+x=9 \quad \text{e finalmente} \quad x=9-4=5$$

Suppondo, em geral, que é

$$a:b::c+x:d+x$$

será $\quad a-b:(c+x)-(d+x)::a:c+x$

ou (§ 36) $\quad a-b:c-d::a:c+x$

D'esta proporção tira-se (§ 356)

$$c+x=\frac{(c-d)a}{a-b}$$

e $\quad x=\frac{(c-d)a}{a-b}-c=\frac{(c-d)a-(a-b)c}{a-b}$

Effectuando as multiplicações (§§ 57 e 34)

$$x=\frac{(ac-ad)-(ac-bc)}{a-b}=\frac{ac-ad-ac+bc}{a-b}$$

e finalmente $\quad x=\frac{bc-ad}{a-b}$

368. **Problema.** *Achar dois numeros que estejam na rasão de* 5:3, *e dos quaes um exceda o outro em* 3,2.

Suppondo que x e y são os numeros desconhecidos, deverá ser

$$5:3::x:y \quad \text{e} \quad x-y=3{,}2$$

Tomando, pois, a differença dos dois ultimos termos da proporção tem-se (§ 365)

$$5-3:x-y::3:y \quad \text{ou} \quad 2:3{,}2::3:y$$

e por consequencia (§ 356)

$$y=\frac{3{,}2\times 8}{2}=4{,}8$$

Logo o numero menor é 4,8, e o maior, que deve exceder este em 3,2, será 4,8 + 3,2 ou 8.

É facil, com effeito, verificar que os numeros 8 e 4,8 satisfazem ás duas condições do enunciado.

369. Theorema. *O producto dos primeiros termos de duas ou mais proporções geometricas está para o producto dos segundos termos das mesmas proporções, assim como o producto dos terceiros termos está para o producto dos quartos termos*, isto é, sendo

$$12 : 4 :: 6 : 2 \quad \text{ou} \quad \frac{12}{4} = \frac{6}{2}$$

$$18 : 30 :: 3 : 5 \quad \text{ou} \quad \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

$$26 : 13 :: 14 : 7 \quad \text{ou} \quad \frac{26}{13} = \frac{14}{7}$$

será

$$(12 \times 18 \times 26) : (4 \times 30 \times 13) :: (6 \times 3 \times 14) : (2 \times 5 \times 7)$$

Multiplicando ordenadamente as igualdades

$$\frac{12}{4} = \frac{6}{2} \qquad \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \qquad \frac{26}{13} = \frac{14}{7}$$

acha-se

$$\frac{12}{4} \times \frac{18}{30} \times \frac{26}{13} = \frac{6}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{14}{7}$$

e por consequencia (§ 212)

$$\frac{12 \times 18 \times 26}{4 \times 30 \times 13} = \frac{6 \times 3 \times 14}{2 \times 5 \times 7}$$

370. Corollario. *Uma proporção continúa a subsistir, quando todos os seus termos se elevam á mesma potencia*, isto é, se fôr

$$4 : 5 :: 16 : 20 \quad \text{ou} \quad \frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

será tambem

$$4^3 : 5^3 :: 16^3 : 20^3 \quad \text{ou} \quad \frac{4^3}{5^3} = \frac{16^3}{20^3}$$

O theorema precedente (§ 369) não deixa de ser verdadeiro, quando todas as proporções forem identicas, e por conseguinte sendo

$$4 : 5 :: 16 : 20 \quad \text{ou} \quad \frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

$$4 : 5 :: 16 : 20 \quad \text{ou} \quad \frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

$$4 : 5 :: 16 : 20 \quad \text{ou} \quad \frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

será tambem

$$(4 \times 4 \times 4) : (5 \times 5 \times 5) :: (16 \times 16 \times 16) : (20 \times 20 \times 20)$$

e

$$4^3 : 5^3 :: 16^3 : 20^3 \quad \text{ou} \quad \frac{4^3}{5^3} = \frac{16^3}{20^3}$$

371. Theorema. *Dividindo ordenadamente os termos de uma*

proporção pelos termos correspondentes de outra proporção acham-se quatro quocientes, que estão em proporção, isto é, sendo

$$24 : 18 :: 8 : 6 \quad \text{ou} \quad \frac{24}{18} = \frac{8}{6}$$

$$12 : 9 :: 20 : 15 \quad \text{ou} \quad \frac{12}{9} = \frac{20}{15}$$

será $(24 : 12) : (18 : 9) :: (8 : 20) : (6 : 15)$ ou $\frac{24:12}{18:9} = \frac{8:20}{6:15}$

Dividindo os dois membros da igualdade

$$\frac{24}{18} = \frac{8}{6}$$

por o mesmo numero ou por numeros iguaes, $\frac{12}{9}$ e $\frac{20}{15}$, hão de achar-se quocientes iguaes, logo

$$\frac{24}{18} : \frac{12}{9} = \frac{8}{6} : \frac{20}{15}$$

e por consequencia (§ 220)

$$\frac{24:12}{18:9} = \frac{8:20}{6:15} \quad \text{ou} \quad (24 : 12) : (18 : 9) :: (8 : 20) : (6 : 15)$$

372. **Theorema.** *Uma proporção continúa a subsistir, quando a todos os seus termos se extrahem raizes do mesmo grau,* isto é, se fôr

$$4 : 5 :: 16 : 20 \quad \text{ou} \quad \frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

será tambem

$$\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{5} :: \sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{20} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{20}}$$

Este theorema póde demonstrar-se indirectamente, elevando todos os termos da ultima proporção á terceira potencia.

Advertindo, porém, que, sendo iguaes os quocientes $\frac{4}{5}$ e $\frac{16}{20}$ tambem as suas raizes cubicas o serão, ter-se-ha

$$\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{16}{20}}$$

e portanto (§ 320)

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{20}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{5} :: \sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{20}$$

373. **Theorema.** *Em uma serie de rasões geometricas iguaes a somma dos antecedentes está para a somma dos consequentes, assim como qualquer antecedente para o seu consequente.* Sendo

$$6 : 4 :: 18 : 12 :: 42 : 28 :: 54 : 36 \quad \text{ou} \quad \frac{6}{4} = \frac{18}{12} = \frac{42}{28} = \frac{54}{36}$$

será $$6+18+42+54:4+12+28+36::6:4$$

ou $$\frac{6+18+42+54}{4+12+28+36}=\frac{6}{4}=\frac{18}{12}=\text{etc.}$$

Esta propriedade dos quocientes, ou dos quebrados (§ 78), póde reputar-se um caso particular do theorema do § 227. Querendo, comtudo, demonstral-a directamente póde proceder-se do seguinte modo.

Das igualdades $$\frac{6}{4}=\frac{18}{12}=\frac{42}{28}=\frac{54}{36}$$

deduz-se

$$6=\frac{6}{4}\cdot 4 \qquad 18=\frac{6}{4}\cdot 12 \qquad 42=\frac{6}{4}\cdot 28 \qquad 54=\frac{6}{4}\cdot 36$$

e d'estas, sommando-as ordenadamente,

$$6+18+42+54=\frac{6}{4}\cdot 4+\frac{6}{4}\cdot 12+\frac{6}{4}\cdot 28+\frac{6}{4}\cdot 36$$

ou, tirando o factor commum $\frac{6}{4}$,

$$6+18+42+54=\frac{6}{4}(4+12+28+36)$$

e finalmente $$\frac{6+18+42+54}{4+12+28+36}=\frac{6}{4}$$

Demonstra-se tambem esta propriedade das rasões iguaes partindo do theorema do § 363, do qual é uma generalisação.

Tomando só duas rasões iguaes tem-se a proporção

$$6:4::18:12$$

e, applicando-lhe o referido theorema (§ 363), acha-se

$$6+18:4+12::18:12$$

Substituindo esta segunda rásão (18 : 12) pela terceira (42 : 28) e applicando o mesmo theorema á proporção

$$6+18:4+12::42:28$$

tem-se $$6+18+42:4+12+28::42:28$$

continuando com o mesmo raciocinio chega-se á conclusão de que o theorema é verdadeiro, seja qual fôr o numero de rasões iguaes.

Este theorema serve para decompor, ou dividir, um numero em partes, ou parcellas, proporcionaes a numeros dados.

374. **Problema.** *Decompor qualquer numero* N *em partes proporcionaes aos numeros* a, b *e* c.

Sejam x, y e z as tres partes de N, que se pedem. Pelas condições do problema deve ser

$$x+y+z=N \quad \text{e} \quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

Da igualdade d'estas tres rasões deduz-se (§ 373)

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

e d'esta igualdade combinada com a primeira condição, a que devem satisfazer x, y e z, conclue-se

$$\frac{N}{a+b+c}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

Sendo

$$\frac{N}{a+b+c}=\frac{x}{a}$$

ter-se-ha tambem invertendo (§ 357)

$$\frac{a+b+c}{N}=\frac{a}{x} \quad \text{ou} \quad a+b+c:N::a:x$$

e notando que

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$$

concluir-se-ha

$$\begin{aligned} a+b+c:N&::a:x \\ &::b:y \\ &::c:z \end{aligned}$$

D'estas proporções deriva-se a seguinte regra para decompor um numero em partes proporcionaes a outros. *A somma dos numeros dados está para o numero que se quer decompor, assim como qualquer dos ditos numeros está para a parte, que lhe corresponde.*

Para decompor 72, por exemplo, em tres partes proporcionaes aos numeros 3, 2 e 4 formar-se-hão as proporções

$$\begin{aligned} 3+2+4:72&::3:x \\ &::2:y \\ &::4:z \end{aligned}$$

que resolvidas dão $x=24$, $y=16$, $z=32$.

375. **Problema.** *Decompor* 172 *em tres partes taes que a rasão da primeira para a segunda seja* 3:8 *e a da segunda para a terceira* 12:5.

N'este exemplo, assim como em todos os analogos, não se póde empregar immediatamente a regra precedente, por não serem iguaes as rasões geometricas, de que dependem os valores das quantidades desconhecidas.

Representando por x, y e z as tres partes de 172, as condições do problema ficarão representadas do seguinte modo

$$x+y+z=172 \qquad \frac{x}{y}=\frac{3}{8} \qquad \frac{y}{z}=\frac{12}{5}$$

Das duas ultimas proporções ou igualdades fraccionarias, deduz-se

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{8} \qquad \frac{y}{12}=\frac{z}{5}$$

é claro que, para ficarem iguaes estas quatro rasões, é necessario

dar aos quebrados $\frac{y}{8}$ e $\frac{y}{12}$ o mesmo denominador. Ora o menor multiplo commum (§ 153 ou 181) de 8 e 12 é 24, logo, multiplicando por 3 os consequentes da primeira proporção e por 2 os da segunda, acham-se as rasões iguaes

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{24}=\frac{z}{10}$$

Applicando agora a regra do § 374, isto é, decompondo 172 em partes proporcionaes a 9, 24 e 10 tem-se

$$\begin{aligned} 9+24+10 : 172 &:: 9 : x \\ &:: 24 : y \\ &:: 10 : z \end{aligned}$$

e $$x=36, \quad y=96, \quad z=40.$$

376. **Problema.** *Decompor 44912 em tres partes taes que a rasão da primeira para a segunda seja* $\frac{2}{3}:\frac{5}{4}$ *e a da segunda para a terceira seja* $\frac{3}{8}:\frac{6}{7}$.

N'este caso deve ser

$$x+y+z=44912 \quad \text{e} \quad \frac{x}{y}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}} \quad \frac{y}{z}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{6}{7}}$$

As duas ultimas proporções convertem-se em

$$\frac{x}{y}=\frac{8}{15} \quad \frac{y}{z}=\frac{21}{48}=\frac{7}{16}$$

multiplicando os dois termos da segunda rasão pelo menor multiplo commum dos seus denominadores, e d'ellas deduz-se

$$\frac{x}{8}=\frac{y}{15} \quad \frac{y}{7}=\frac{z}{16}$$

Convém agora tornar iguaes as duas rasões, que têem por antecedente y, e para isso procura-se o menor multiplo commum dos consequentes 15 e 7 das mesmas rasões e multiplicam-se depois os consequentes de cada proporção pelo numero capaz de reduzir ao dito menor multiplo o consequente de y. Procedendo assim, n'este exemplo, tem-se

$$\frac{x}{8\times7}=\frac{y}{15\times7} \quad \frac{y}{7\times15}=\frac{z}{16\times15}$$

e portanto $$\frac{x}{56}=\frac{y}{105}=\frac{z}{240}$$

Reduz-se, pois, a questão a decompor 44912 em partes proporcionaes a 56, 105 e 240.

Empregando a regra do § 374, acha-se

$$56+105+240 : 44912 :: 56 : x$$
$$:: 105 : y$$
$$:: 240 : z$$

e finalmente

$$x = 112 \times 56 = 6272$$
$$y = 112 \times 105 = 11760$$
$$z = 112 \times 240 = 26880$$

EXERCICIOS

I. Verificar se os seguintes numeros estão em proporção $19\frac{3}{8}$; 12,4; 0,823 e 0,52672.

II. Provar que quatro numeros a, b, c e d estarão em proporção, se porventura fôr $a+b : a-b :: c+d : c-d$.

III. Calcular x pela proporção $9 : 25 :: (16-x)^2 : (16+x)^2$.

IV. Calcular x pela proporção $\sqrt{4+x} : \sqrt{5-x} :: \sqrt{2+x} : \sqrt{4-x}$

V. Calcular x pela proporção $4+7x : 3+6x :: 6 : 5$.

VI. Calcular x pela proporção $8+4x : 8+9x :: 7+3x : 7+7x$.

VII. Deduzir a condição, a que devem satisfazer duas proporções, para que sommando-as ordenadamente, ou subtrahindo uma da outra ordenadamente, se obtenha uma nova proporção.

VIII. Provar que, em uma serie de rasões geometricas iguaes, o producto dos antecedentes está para o producto dos consequentes, assim como a potencia de qualquer dos antecedentes, que tem por expoente o numero de rasões, está para a potencia do mesmo grau do seu consequente.

IX. Decompor 225 em tres partes, que estejam entre si na mesma rasão que os numeros 50, 75 e 175.

X. Decompor 23,4979 em tres partes taes que a primeira esteja para a segunda na rasão de $\frac{3}{7} : 0{,}51$ e a segunda para a terceira na rasão de $\frac{5}{9} : 0{,}294$.

CAPITULO III

Progressões por quociente

377. **Progressão por quociente**[1], *ou* **progressão geometrica,** *é uma serie de numeros, cada um dos quaes é o producto do antecedente por um numero constante chamado* **rasão da progressão.**

A progressão é *crescente*, ou *divergente*, quando a rasão é maior que unidade; é *decrescente*, ou *convergente*, quando a rasão é me-

[1] Entende-se por **progressão harmonica** *uma serie de numeros, cujos denominadores estão em progressão arithmetica, quando os numeradores são iguaes.*

Os numeros 12, 6, 4, 3, $\frac{12}{5}$, 2, etc., formam progressão harmonica, porque são respectivamente iguaes aos quebrados $\frac{12}{1}$, $\frac{12}{2}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{12}{6}$, etc. que têem o mesmo numerador 12 e os denominadores em progressão arithmetica.

Tres numeros em progressão harmonica formam uma *proporção harmonica.*

Quando tres numeros, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$ por exemplo, estão em proporção harmonica, diz-se que o segundo é *meio harmonico* entre os dois restantes.

nor que unidade. Quando a rasão é igual a unidade, todos os termos são iguaes entre si e não ha propriamente progressão.

Indica-se geralmente uma progressão geometrica pondo á esquerda dos numeros, que a formam, ou dos seus *termos*, o signal $\div\div$.

A serie $\div\div 2$; 6; 18; 54; 162; 486; 1458; etc.
forma uma progressão geometrica divergente, ou crescente, porque a sua rasão 3 excede a unidade; a serie

$$\div\div 1458;\quad 486;\quad 162;\quad 54;\quad 18;\quad 6;\quad 2;\quad \text{etc.}$$

forma uma progressão decrescente, ou convergente, porque a sua rasão $\frac{1}{3}$ é menor que 1.

378. **Theorema.** *Qualquer termo de uma progressão por quociente é igual ao primeiro termo multiplicado pela rasão elevada ao numero de termos menos um, ou ao numero de termos intermedios mais um.*

Designando a o primeiro termo de uma progressão geometrica, ou por quociente e r a rasão da progressão, será (§ 377) $a \times r$, ou ar o segundo termo, $ar \times r$ ou ar^2 o terceiro termo, ar^3 o quarto termo e assim successivamente.

Comparando os termos

$$\div\div a;\ ar;\ ar^2;\ ar^3;\ ar^4;\ ar^5;\ ar^6;\ \text{etc.}$$

d'esta progressão reconhece-se, que cada um d'elles é o producto de dois factores, dos quaes o primeiro é constantemente a e o segundo é uma potencia de r, cujo expoente variavel 1, 2, 3, 4, etc. indica, quantos termos estão á esquerda do termo, que se considera.

Representando por u o termo de ordem n, isto é, o termo que tem $n-1$ termos antes de si, ter-se-ha pois

$$u = ar^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Suppondo que i é o numero de termos intermedios, e portanto $i+2=n$, será

$$u = ar^{i+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

As igualdades (1) e (2) servem para achar o *termo geral* de uma progressão geometrica, isto é, o valor de qualquer termo da progressão, quando se conhece outro termo, a rasão e o numero total dos termos, desde o primeiro até ao que se quer calcular inclusivè, ou o numero de termos intermedios.

379. Por meio das formulas (1) e (2) do termo geral póde resolver-se o seguinte problema: *dadas tres das quatro quantidades* u, a, r, n *ou* u, a, r, i, *calcular a quarta.*

Das formulas (1) e (2) deduzem-se effectivamente as expressões

$$a = \frac{u}{r^{n-1}} \quad \text{ou} \quad a = \frac{u}{r^{i+1}}$$

que dão o valor do primeiro termo, isto é, de um termo que está antes de u, quando se conhece u, r e n ou i.

Dividindo por a ambos os membros das formulas (1) e (2) e extrahindo, tanto a um como a outro, a raiz de indice $n-1$, ou a de indice $i+1$, acham-se as formulas

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} \quad \text{ou} \quad r = \sqrt[i+1]{\frac{u}{a}}$$

pelas quaes se calcula a rasão r.

Os valores de n e de i não podem ser deduzidos por emquanto, porque dependem da theoria dos logarithmos.

380. **Problema.** *Inserir 8 meios geometricos entre 3 e 1536.*

Inserir 8 meios geometricos entre dois numeros é formar uma progressão geometrica composta de $8+2$ ou 10 termos, dos quaes o primeiro e o ultimo sejam os numeros dados.

Para resolver este problema é preciso, pois, começar por deduzir o valor da rasão.

Fazendo $a=3$, $u=1536$ e $n=10$ ou $i=8$ n'uma das formulas (1) ou (2) acha-se

$$1536 = 3 \cdot r^9 \quad \text{ou} \quad r = \sqrt[9]{\frac{1536}{3}}$$

Dividindo 1536 por 3, extrahindo a raiz cubica ao quociente 512, e tornando depois a extrahir a raiz cubica (§ 321) á raiz achada, obtem-se

$$r = \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Conhecido o valor de r é facil formar a progressão

$$\div\div 3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48;\ 96;\ 192;\ 384;\ 768;\ 1536$$

que contém os 8 meios pedidos.

Quando o indice $n-1$ admitte factores primos differentes de 2 e 3, não é possivel calcular r por meio de extracções de raizes quadradas e cubicas. Empregam-se então os logarithmos.

381. **Theorema.** *Inserindo igual numero de meios geometricos entre cada dois termos consecutivos de uma progressão geometrica obtem-se uma nova progressão geometrica.*

Inserindo 4 meios geometricos (§ 380) entre cada par de termos consecutivos da progressão

$$\div\div 3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48;\ \text{etc.}$$

obtem-se a serie dos numeros

$$3;\ 3\sqrt[5]{2};\ 3(\sqrt[5]{2})^2;\ 3(\sqrt[5]{2})^3;\ 3(\sqrt[5]{2})^4;\ 6;\ 6\sqrt[5]{2};\ 6(\sqrt[5]{2})^2;\ 6(\sqrt[5]{2})^3;$$
$$6(\sqrt[5]{2})^4;\ 12;\ 12\sqrt[5]{2};\ 12(\sqrt[5]{2})^2;\ 12(\sqrt[5]{2})^3;\ 12(\sqrt[5]{2})^4;\ 24;\ \text{etc.}$$

que tambem formam progressão.

Com effeito, os 6 termos, de que 3 é o primeiro e 6 o ultimo, constituem uma progressão, cuja rasão é $\sqrt[4+1]{\frac{6}{3}}$ ou $\sqrt[4+1]{r}$ designando, em geral, por r a rasão da progressão dada.

Os 6 termos, de que 6 é o primeiro e 12 o ultimo, constituem outra progressão, na qual a rasão é $\sqrt[4+1]{\frac{12}{6}}$ ou $\sqrt[4+1]{r}$. Os 6 termos immediatos, desde 12 até 24, tambem formam uma progressão cuja rasão é $\sqrt[4+1]{\frac{24}{12}}$ ou $\sqrt[4+1]{r}$ e assim successivamente. Todas estas progressões successivas têem, pois, a mesma rasão, e como o ultimo termo de cada uma é primeiro termo da immediata, segue-se que todas ellas não constituem senão uma só progressão.

Em geral, sendo r a rasão de uma progressão geometrica, e i o numero de meios inseridos entre cada dois termos consecutivos, será $\sqrt[i+1]{r}$ a rasão da nova progressão.

382. **Theorema.** *Quatro termos de uma progressão geometrica formam proporção geometrica, quando entre o primeiro e o segundo ha tantos termos intermedios, como entre o terceiro e o quarto.*

Sejam a, b, t e u quatro termos de uma progressão geometrica, dispostos de modo que haja i termos intermedios tanto entre a e b, como entre t e u. Ter-se-ha (§ 378)

$$b = ar^{i+1} \qquad u = tr^{i+1}$$

Dividindo ordenadamente estas igualdades, obtem-se (§ 187 ou 224)

$$\frac{b}{u} = \frac{a}{t} \qquad \text{ou} \qquad b : u :: a : t$$

Alternando e invertendo a proporção (ou transpondo e alternando), vem

$$a : b :: t : u$$

383. **Corollario I.** *Em qualquer progressão geometrica o producto dos termos equidistantes dos extremos é constante e igual ao producto dos extremos.*

Sejam a e u os extremos de uma progressão geometrica, b e t dois termos equidistantes d'elles. Pelo theorema anterior é

$$a : b :: t : u$$

e portanto (§ 353)

$$bt = au$$

384. **Corollario II.** *Quando o numero de termos da progressão geometrica é impar, o termo collocado a igual distancia dos extremos é igual ao meio geometrico dos extremos, ou de quaesquer dois termos equidistantes dos extremos.*

Representando m o termo equidistante dos extremos, é

$$m = a r^{i+1} \qquad u = m r^{i+1}$$

e portanto

$$\frac{m}{u} = \frac{a}{m} \qquad \text{ou} \qquad a : m :: m : u$$

e finalmente (§§ 360 e 383)

$$m = \sqrt{au} = \sqrt{bt}$$

385. **Corollario III.** *Quando um dos termos da progressão geometrica é unidade, o producto de dois termos quaesquer da progressão é igual a outro termo d'ella.*

Com effeito, suppondo que é $a = 1$ tem-se (§ 383)

$$bt = u$$

386. **Theorema.** *O producto dos termos de uma progressão geometrica, ou por quociente, é igual á raiz quadrada do producto dos extremos elevada a uma potencia, cujo expoente é o numero total dos termos.*

Designando P o producto dos numeros $a, b, c, d, \ldots q, s, t, u$, em progressão geometrica, será

$$P = a \times b \times c \times d \times \ldots \times q \times s \times t \times u$$

e (§ 213)

$$P = u \times t \times s \times q \times \ldots \times d \times c \times b \times a$$

Multiplicando ordenadamente estes dois productos indicados, vem

$$P \times P = au \times bt \times cs \times \ldots \times sc \times tb \times ua$$

ou (§ 383)

$$P^2 = au \times au \times au \times \ldots \times au \times au \times au$$

ou (§ 317)

$$P = \sqrt{au} \times \sqrt{au} \times \sqrt{au} \times \ldots \times \sqrt{au} \times \sqrt{au} \times \sqrt{au}$$

e, como o segundo membro contém tantos factores iguaes a $\sqrt{au}$, quantos são os termos da progressão, segue-se que, se fôr n o numero d'elles, será

$$P = (\sqrt{au})^n$$

387. **Theorema.** *A somma dos termos de uma progressão por quociente é igual á differença entre o primeiro termo e o producto do ultimo pela rasão dividida pela differença entre a rasão e a unidade.*

Dividindo qualquer termo da progressão

$$\div\div a, b, c, d, \ldots q, s, t, u.$$

pelo termo antecedente, tem-se a rasão r (§ 377), isto é,

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \ldots = \frac{s}{q} = \frac{t}{s} = \frac{u}{t} = r$$

E, como em uma serie de quebrados ou de rasões iguaes, se póde (§ 373) substituir qualquer dos quebrados por outro, em que o numerador seja a somma dos numeradores e o denominador a somma dos denominadores, será

$$\frac{b+c+d+\ldots s+t+u}{a+b+c+\ldots q+s+t}=r$$

Mas no numerador d'este quebrado entram todos os termos da progressão menos o primeiro, e no denominador entram todos os termos menos o ultimo, logo, fazendo

$$S=a+b+c+d+\cdots+q+s+t+u$$

será $\frac{S-a}{S-u}=r$ ou $S-a:S-u::r:1$

Se a progressão é crescente, tem-se $r>1$ e (§ 365)

$$(S-a)-(S-u):r-1::S-u:1 \quad \text{ou} \quad u-a:r-1::S-u:1$$

e (§ 356) $S-u=\frac{u-a}{r-1}$

ou (§ 199)

$$S=u+\frac{u-a}{r-1}=\frac{ur-u+u-a}{r-1}$$

e finalmente $S=\frac{ur-a}{r-1}$ ..... (1)

Se a progressão é decrescente, será $r<1$, e (§ 356) de

$$S-u:S-a::1:r$$

tirar-se-ha $(S-u)-(S-a):1-r::S-u:1$

$$a-u:1-r::S-u:1 \qquad S-u=\frac{a-u}{1-r}$$

ou $S=u+\frac{a-u}{1-r}=\frac{u-ur+a-u}{1-r}$

e finalmente $S=\frac{a-ur}{1-r}$ ..... (2)

A formula (1) dá o *termo sommatorio* das progressões crescentes ou divergentes; a formula (2) o *termo sommatorio* das progressões decrescentes ou divergentes[1].

388. **Corollario.** Substituindo nas formulas (1) e (2) o valor do termo geral u (§ 378), obtêem-se as seguintes expressões do *termo sommatorio*

$$S=\frac{ar^n-a}{r-1} \quad \text{ou} \quad S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

para as progressões crescentes, e

[1] Admittindo a existencia das quantidades negativas desapparece a differença entre as formulas (1) e (2).

$$S=\frac{a-ar^n}{1-r} \quad \text{ou} \quad S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

para as progressões decrescentes.

389. **Problema.** *Calcular a somma de* 20 *termos da progressão geometrica, cujo primeiro termo é* 2 *e a rasão* 3.

Fazendo na formula do § precedente $a=2$, $r=3$, $n=20$, tem-se

$$S=\frac{2(3^{20}-1)}{3-1} \quad \text{ou} \quad S=3^{20}-1$$

A potencia 3^{20} póde calcular-se[1] por decomposição, como abaixo se vê, partindo da proposição demonstrada no § 72. Acha-se com effeito $3^{20}=(3^5)^4$, e elevando primeiro 3 á quinta potencia vem

$$3^{20}=(3^5)^4=(243)^4=(243^2)^2=(59049)^2=3486784401$$

Logo $$S=3486784400$$

390. **Problema.** *Calcular a somma de* 20 *termos da progressão geometrica, de que* 2 *é o primeiro termo e* $\frac{1}{3}$ *a rasão.*

Fazendo na formula $S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$a=2$, $r=\frac{1}{3}$ e $n=20$ vem

$$S=\frac{2\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1-\frac{1}{3^{20}}}{\frac{1}{3}}$$

e, multiplicando por 3^{20} os dois termos do quebrado,

$$S=\frac{3^{20}-1}{3^{19}}$$

Resolvendo o ultimo problema achou-se (§ 389)

$$3^{20}=3486784401$$

e como se sabe que $3^{19}=3^{20}:3$ segue-se que será

$$3^{19}=1162261467 \quad \text{e} \quad S=\frac{3486784400}{1162261467}$$

Este quebrado é irreductivel, porque o numerador não admitte (§ 118) o divisor 3, que evidentemente é o unico submultiplo primo do denominador.

391. **Theorema.** *As potencias successivas de um numero maior que* 1 *crescem illimitadamente*, isto é, de modo que, por maior que se imagine um numero, é sempre possivel achar entre aquellas potencias uma ainda maior que o dito numero.

As potencias successivas de qualquer numero maior que 1 vão

[1] Na pratica empregam-se os logarithmos, para se obter o valor de 3^{20}.

constantemente augmentando, porque, sendo N^3, por exemplo, o producto de N^2 por N e $N>1$ é claro que basta (§ 208) considerar N como multiplicador no producto $N^2 \times N$ para se concluir que é $N^3 > N^2$.

Sendo d o excesso de N sobre 1, será

$$N = 1 + d$$

e $$N^2 = (1+d)(1+d) \quad \text{ou} \quad N^2 = (1+d) + (1+d)d$$

Substituindo o segundo parenthesis por 1 fica o segundo membro menor que N^2 logo

$$N^2 > (1+d) + d \quad \text{ou} \quad N^2 > 1 + 2d$$

Multiplicando N^2 e $1 + 2d$ por N vem

$$N^3 > (1+2d)N \quad \text{ou} \quad N^3 > (1+2d) + (1+2d)d$$

Substituindo o segundo parenthesis por 1 obtem-se

$$N^3 > (1+2d) + d \quad \text{ou} \quad N^3 > 1 + 3d$$

Continuando a raciocinar do mesmo modo, acha-se

$$N^4 > (1+3d)N \quad \text{ou} \quad N^4 > (1+3d) + (1+3d)d$$

e com mais rasão ainda

$$N^4 > (1+3d) + d \quad \text{ou} \quad N^4 > 1 + 4d$$

e assim successivamente.

Representando, pois, K um numero excessivamente grande e N um numero maior que 1, é sempre possivel achar uma potencia N^x de N que seja ainda maior que K, porque, sendo, em geral,

$$N^x > 1 + xd$$

basta que seja $$1 + xd > K$$

para se ter $$N^x > K$$

Para reconhecer a possibilidade de achar um numero inteiro x que torne $1 + xd$ maior que K, é sufficiente advertir que todo o valor de x que fizer

$$xd > K - 1 \quad \text{ou} \quad x > \frac{K-1}{d}$$

satisfará á questão.

Ora, não sendo limitada a serie dos numeros inteiros (§ 9), é claro que, por maior que seja o quociente $\frac{K-1}{d}$, sempre ha de existir um inteiro x maior que $\frac{K-1}{d}$.

392. Theorema. *As potencias successivas de um numero menor*

que 1 diminuem constantemente, tendo zero por limite da sua diminuição, isto é, por menor que se imagine um numero, é sempre possivel achar entre aquellas potencias uma, que seja ainda menor que o dito numero, e por consequencia as potencias diminuem constantemente, sem jámais se reduzirem a zero.

As potencias successivas de qualquer numero menor que 1 vão constantemente diminuindo, porque, sendo $n<1$ será (§ 208), por exemplo, n^3 ou $n^2 \times n < n^2$ e assim successivamente.

Sendo n um numero menor que 1 e k um numero excessivamente pequeno, ha de existir uma potencia de n, que seja ainda menor que k.

Com effeito, sendo $n<1$ será $\frac{1}{n}>1$, e sendo k um numero muito pequeno será $\frac{1}{k}$ um numero muito grande. Mas no § precedente demonstrou-se que, embora $\frac{1}{k}$ seja muito grande, ha de existir uma potencia de $\frac{1}{n}$ que seja maior que $\frac{1}{k}$ logo, designando x o expoente d'essa potencia, ter-se-ha

$$\left(\frac{1}{n}\right)^x > \frac{1}{k} \quad \text{ou (§ 217)} \quad \frac{1}{n^x} > \frac{1}{k}$$

e por consequencia (§ 185) $n^x < k$

que é o que se queria demonstrar [1].

393. **Theorema.** *O limite da somma dos termos de qualquer progressão geometrica decrescente é igual ao primeiro termo dividido pelo excesso de 1 sobre a rasão.*

A somma de n termos de uma progressão decrescente é (§ 388)

$$S = \frac{a - ar^n}{1-r} \quad \text{ou (§ 91)} \quad S = \frac{a}{1-r} - \left(\frac{a}{1-r}\right) r^n$$

Quando n augmenta, isto é, quando a somma S abrange maior numero de termos, o valor de S augmenta, porque diminue o subtractivo $\left(\frac{a}{1-r}\right) \times r^n$, ou antes o factor r^n (§ 392), e como este factor, ou aquelle subtractivo, póde sempre diminuir, comtanto que augmente n, segue-se que, por maior que pareça um valor de S, ainda póde achar-se outro maior. Vê-se, pois, que S augmenta constantemente, emquanto augmentar n. Apesar, porém, de S au-

---

[1] Representando por $\frac{1}{1+d}$ qualquer numero $n<1$ e discorrendo como no § 391, acha-se

$$n^x < \frac{1}{1+xd}$$

e basta provar que de certo valor de x em diante a fracção $\frac{1}{1+xd}$ se torna menor que qualquer numero k para se concluir que é $n^x < k$.

gmentar constantemente, o seu valor não póde deixar de ser inferior a $\frac{a}{1-r}$, visto que $\left(\frac{a}{1-r}\right)r^n$ jámais se reduzirá a zero, e por isso a quantidade S ou $\frac{a-ar^n}{1-r}$ augmenta, sempre que augmentar n, mas tem por limite no seu augmento $\frac{a}{1-r}$.

Exprime-se abreviadamente este resultado assim

$$\lim. S = \frac{a}{1-r}$$

394. **Escolio.** Quando a progressão é crescente a formula (§ 388)

$$S = \frac{ar^n - a}{r-1} \quad \text{ou} \quad S = \left(\frac{a}{r-1}\right)r^n - \frac{a}{r-1}$$

mostra que, augmentando o valor de n, augmenta o de S, sem que este possa, n'este caso, ter um maximo de grandeza ou um *limite* no seu crescimento.

É do facto de S crescer sem limite, quando a progressão é crescente, e de ter limite no seu crescimento, quando a progressão é decrescente, que resulta chamar-se ás progressões crescentes *progressões divergentes*, e ás progressões decrescentes *progressões convergentes*.

395. **Problema.** *Achar o limite da somma dos termos da progressão decrescente, que tem o primeiro termo igual a* 2 *e a rasão igual a* $\frac{1}{3}$.

N'este exemplo é $a = 2$ e $r = \frac{1}{3}$

e portanto $\lim. S = \frac{2}{1-\frac{1}{3}}$ ou $\lim. S = 3$

396. Toda a dizima periodica simples equivale a uma progressão decrescente, na qual o primeiro termo é formado por o primeiro periodo e a rasão é um quebrado, cujo numerador é 1 e o denominador uma potencia de 10, que tem o expoente igual ao numero de algarismos de cada periodo.

A dizima 0,434343..., por exemplo, equivale á progressão

$$0{,}43 + 0{,}43 \times \frac{1}{100} + 0{,}43 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + 0{,}43 \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \text{etc.}$$

Calculando, pois, o limite d'esta somma (§ 395), obtem-se por um outro meio o limite da dizima periodica simples (§ 258).

Fazendo $a = 0{,}43$ e $r = \frac{1}{100}$ na formula $\lim. S = \frac{a}{r-1}$ tem-se

$$\lim. 0{,}434343\ldots = \frac{0{,}43}{1-\frac{1}{100}}$$

e, multiplicando por 100 ambos os termos do quebrado, acha-se

$$\lim. 0{,}434343\ldots = \frac{43}{100-1} \quad \text{ou} \quad \lim. 0{,}434343\ldots = \frac{43}{99}$$

397. O limite da dizima periodica mixta póde tambem calcular-se comparando a dizima com uma progressão decrescente.

Ter-se-ha, por exemplo,

$$0{,}265434343\ldots = 0{,}265 + 0{,}001\left[0{,}43 + 0{,}43\left(\frac{1}{100}\right) + 0{,}43\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right]$$

e portanto $\lim. 0{,}2654343\ldots = 0{,}265 + 0{,}001\left(\frac{0{,}43}{1-\frac{1}{100}}\right)$

ou $\lim. 0{,}265434343\ldots = 0{,}265 + \frac{43}{99000}$

e finalmente

$$\lim. 0{,}2654343\ldots = \frac{265\times 99+43}{99000} = \frac{26543-265}{99000}$$

EXERCICIOS

I. Calcular o decimo segundo termo da progressão geometrica, que tem 64 por primeiro termo e na qual a rasão é $\frac{1}{4}$.

II. Sendo 4374 o oitavo termo de uma progressão geometrica, cuja rasão é 3, calcular o primeiro termo e a somma dos 8 termos.

III. Calcular com 4 algarismos exactos a rasão de uma progressão geometrica, na qual o primeiro termo é 0,5 e o decimo 82,26.

IV. Calcular a somma de 7 termos de uma progressão geometrica, que tem por primeiro termo 128 e na qual a rasão é $\frac{1}{2}$.

V. Sendo 4095 a somma de 6 termos de uma progressão geometrica, cuja rasão é 4, calcular o ultimo termo e o primeiro.

VI. Calcular o producto de 12 termos de uma progressão geometrica, cuja rasão é 3, suppondo que o primeiro termo é 5.

VII. Achar o limite da somma dos termos da progressão decrescente, cuja rasão é $\frac{1}{5}$ e o primeiro termo 6.

VIII. A que condição deve satisfazer uma progressão geometrica, para que o producto de dois quaesquer dos seus termos seja tambem termo da mesma progressão?

IX. Calcular o limite da somma dos cubos (ou, em geral, da somma de potencias do mesmo grau) de uma serie de numeros em progressão geometrica, suppondo que a rasão da progressão é $\frac{1}{4}$ e o primeiro termo 5.

X. Sendo $\frac{a}{A} + \frac{a+r}{AR} + \frac{a+2r}{AR^2} + \frac{a+3r}{AR^3} + \cdots + \frac{a+(n-1)r}{AR^{n-1}} + \cdots$ uma somma de quebrados, cujos numeradores estão em progressão arithmetica e os denominadores em progressão geometrica crescente, provar que a somma tende para o limite $\frac{aR(R-1)+Rr}{A(R-1)^2}$. Calcular o limite da somma $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots$

CAPITULO IV

Logarithmos

398. Comparando as propriedades das progressões por quociente com as das progressões por differença, reconhece-se, que basta substituir nos enunciados d'estas as palavras addição, subtracção, multiplicação e divisão por multiplicação, divisão, elevação de potencia e extracção de raiz, para se obterem os enunciados das propriedades das progressões geometricas, ou por quociente. D'esta analogia entre as propriedades de umas e outras progressões deriva a theoria dos logarithmos, cujo fim principal é converter as multiplicações, divisões, elevações de potencias e extracções de raizes, em addições, subtracções, multiplicações e divisões.

399. Imaginem-se duas progressões crescentes

$$\div 0;\ a;\ 2a;\ 3a;\ldots(n-1)a;\ na;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$\div\div 1;\ A;\ A^2;\ A^3;\ldots\ A^{n-1};\ A^n;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

uma arithmetica e outra geometrica, dispostas de sorte que se correspondam termo a termo, e que o termo zero da primeira progressão corresponda ao termo 1 da segunda.

Inserindo i meios entre dois termos consecutivos de cada uma das progressões, obtêem-se (§§ 342 e 381) duas novas progressões, cujas rasões são respectivamente $\frac{a}{i+1}$ e $\sqrt[i+1]{A}$, visto serem a e A as rasões das progressões dadas (1) e (2).

Chamam-se **logarithmos**[1] *dos termos de uma progressão geo-*

---

[1] *Em qualquer systema de progressões, a um dado numero* N *corresponde um só logarithmo.*

Por maior que seja N sempre haverá na progressão geometrica dois termos, A^3 e A^4 por exemplo, entre os quaes se comprehenda (§ 391) N, suppondo $A > 1$. Admittindo, porém, que o mesmo numero N possa obter-se inserindo entre A^3 e A^4 ou i termos intermedios ou i', o termo da progressão arithmetica correspondente a N terá sempre o mesmo valor.

Com effeito, suppondo que N é o termo de ordem n a contar de A^3, quando se inserem i meios e o termo de ordem n', quando se inserem i' meios, será (§ 378) por hypothese

$$N = A^3 R^{n-1} = A^3 R'^{n'-1}$$

e por consequencia $$R^{n-1} = R'^{n'-1}$$

e (§ 381) $$\left(\sqrt[i+1]{A}\right)^{n-1} = \left(\sqrt[i'+1]{A}\right)^{n'-1}$$

Reduzindo ambos os radicaes ao mesmo indice (§ 323), acha-se

$$\sqrt[(i+1)(i'+1)]{A^{(n-1)(i'+1)}} = \sqrt[(i'+1)(i+1)]{A^{(n'-1)(i+1)}}$$

e portanto $$(n-1)(i'+1) = (n'-1)(i+1)$$

Designando por r e r' as rasões das progressões arithmeticas, que se obtêem

metrica começando por 1, *aos termos que lhes correspondem na progressão arithmetica começando por* 0.

Sendo

$$\begin{array}{lllllll} \div 0; & 1; & 2; & 3; & 4; & 5;\ldots. \\ \div\div 1; & 4; & 16; & 64; & 256; & 1024;\ldots. \end{array}$$

duas progressões, uma arithmetica e outra geometrica, e correspondendo o termo 0 da primeira progressão ao termo 1 da segunda, qualquer dos termos da progressão arithmetica será logarithmo do termo correspondente da progressão geometrica. Designa-se abreviadamente um logarithmo escrevendo *log.*, *lg.*, *l.*, etc, á esquerda do numero, a que elle corresponde. Escrever-se-ha, por exemplo, log. 16 = 2 em vez de *logarithmo de* 16 *igual a* 2.

Inserindo 1 meio entre cada dois termos d'aquellas progressões obter-se-hão as seguintes progressões

$$\begin{array}{lllllllllll} \div 0; & 0{,}5; & 1; & 1{,}5; & 2; & 2{,}5; & 3; & 3{,}5; & 4; & 4{,}5; & 5;\ldots. \\ \div\div 1; & 2; & 4; & 8; & 16; & 32; & 64; & 128; & 256; & 512; & 1024;\ldots. \end{array}$$

das quaes se deduzirá

$$1{,}5 = \log. 8; \quad 2{,}5 = \log. 32; \quad \text{etc.}$$

400. Não podendo obter-se todos os numeros maiores que 1, inserindo meios proporcionaes entre os termos de uma progressão geometrica, é natural acreditar-se que nem todos os numeros maiores que 1 tenham logarithmos.

Ora sendo i o numero de meios inseridos entre cada dois termos consecutivos, tanto da progressão arithmetica como da progressão geometrica, será $\frac{a}{i+1}$ a rasão (§ 336) da nova progressão arithmetica, e, como esta fracção póde tornar-se menor que qualquer numero dado, por menor que elle seja, dando a i valores sufficientemente grandes, segue-se que é sempre possivel fazer com que na progressão arithmetica a differença entre cada dois termos consecutivos se torne inferior a qualquer numero dado.

---

inserindo i e i' meios entre $3a$ e $4a$, têem-se (§ 362) as expressões

$$r = \frac{a}{i+1} \qquad r' = \frac{a}{i'+1}$$

que transformam a precedente igualdade em

$$\frac{(n-1)a}{r'} = \frac{(n'-1)a}{r}$$

ou

$$r(n-1) = r'(n'-1)$$

Logo é

$$3a + r(n-1) = 3a + r'(n'-1)$$

e portanto quer se insiram i meios, quer i' entre A^3 e A^4 e entre $3a$ e $4a$ sempre ao mesmo numero N da progressão geometrica corresponderá o mesmo termo na progressão arithmetica.

Basta, pois, admittir por convenção: 1.°, que *todos os numeros maiores que* 1 *têem logarithmos;* 2.°, que *a numero maior corresponde logarithmo maior;* para se poder concluir que o logarithmo de qualquer numero comprehendido entre dois termos consecutivos da progressão geometrica, correspondente a um determinado valor de i, é igual a qualquer dos termos da progressão arithmetica, que correspondem áquelles dois da geometrica, com um erro por defeito ou por excesso inferior a $\frac{a}{i+1}$.

Assim o logarithmo de um numero N, que não póde obter-se pela inserção de meios proporcionaes entre os termos da progressão geometrica (2), é o limite para que tendem os dois termos da progressão arithmetica, que são logarithmos dos dois da progressão geometrica, entre os quaes está comprehendido N, quando i cresce indefinidamente.

Adoptando, pois, as convenções acima enunciadas, dir-se-ha que, *logarithmo de um numero é o termo da progressão arithmetica correspondente a esse numero na progressão geometrica* (quando o numero dado póde ser introduzido na progressão); *e é o limite commum para que tendem os logarithmos de todos os numeros inferiores a* N, *e os de todos os numeros superiores a* N, *que podem ser introduzidos na progressão geometrica* (quando N não póde fazer parte da progressão).

401. **Problema.** *Sendo*

$$\begin{array}{lllllll} \div 0; & 1; & 2; & 3; & 4; & \text{etc.} \\ \div\div 1; & 10; & 100; & 1000; & 10000; & \text{etc.} \end{array}$$

as progressões, que definem um systema de logarithmos, calcular o logarithmo de 50 *com um erro inferior a* 0,1.

Como 50 está comprehendido entre os termos 10 e 100 da progressão geometrica, o logarithmo de 50 deve estar comprehendido entre os termos correspondentes, 1 e 2, da progressão arithmetica.

Inserindo entre 1 e 2 nove meios arithmeticos, obtem-se uma progressão, na qual a differença entre dois termos consecutivos é 0,1 e, inserindo entre 10 e 100 nove meios geometricos, obtem-se uma progressão, na qual hão de existir dois termos consecutivos, que sejam um menor e outro maior que 50.

Estas duas progressões são

$$\begin{array}{lllllllll} \div 1; & \frac{11}{10}; & \frac{12}{10}; \ldots & \frac{x}{10}; & \frac{x+1}{10}; \ldots & \frac{18}{10}; & \frac{19}{10}; & 2. \\ \div\div 10; & \sqrt[10]{10^{11}}; & \sqrt[10]{10^{12}}; \ldots & \sqrt[10]{10^{x}}; & \sqrt[10]{10^{x+1}}; \ldots & \sqrt[10]{10^{18}}; & \sqrt[10]{10^{19}}; & 100. \end{array}$$

e, suppondo que se calcula cada um dos termos da progressão geometrica e que se acha

$$\sqrt[10]{10^x} < 50 < \sqrt[10]{10^{x+1}}$$

será $$\frac{x}{10} < \log.50 < \frac{x+1}{10}$$

e concluir-se-ha portanto $\log.50 = \frac{x}{10}$ ou $= \frac{x+1}{10}$ com um erro inferior a 0,1.

Não havendo na arithmetica processo algum elementar para extrahir uma raiz, cujo indice admitta divisores primos differentes de 2 e 3, é impossivel calcular os termos d'aquella progressão geometrica. Evita-se, comtudo, este inconveniente inserindo entre 10 e 100 um numero i de meios geometricos maior que 9 e tal que a somma $i+1$ seja igual á potencia de 2 immediatamente superior a 10. Esta potencia é $2^4 = 16$ e fazendo portanto $i = 2^4 - 1$ obtêem-se as progressões

$$\div\ 1;\quad \frac{17}{16};\quad \frac{18}{16};\ldots\ldots\frac{y}{16};\quad \frac{y+1}{16};\ldots\ldots\frac{30}{16};\quad \frac{31}{16};\quad 2$$

$$\div\div 10;\quad \sqrt[16]{10^{17}};\quad \sqrt[16]{10^{18}};\ldots\sqrt[16]{10^{y}};\quad \sqrt[16]{10^{y+1}};\ldots\sqrt[16]{10^{30}};\quad \sqrt[16]{10^{31}};\quad 100$$

com as quaes se póde tambem calcular o logarithmo de 50, pois que, se fôr

$$\sqrt[16]{10^y} < 50 < \sqrt[16]{10^{y+1}}$$

será evidentemente $\log.50 = \frac{y}{16}$ ou $= \frac{y+1}{16}$ com um erro inferior a $\frac{1}{16}$, e por consequencia menor ainda que $\frac{1}{10}$, tendo sobre as outras progressões a vantagem de se determinar os termos successivos da progressão geometrica (§ 321) por simples extracções de raizes quadradas.

Nem mesmo é necessario calcular todos os termos d'estas progressões. Com effeito, por ser impar, $2^4 + 1$, o numero total dos termos de cada uma, haverá em cada progressão um termo equidistante dos extremos e que se sabe calcular.

Effectuando estes calculos acha-se (§ 345) que o termo equidistante dos extremos é $\frac{24}{16}$ na progressão arithmetica, e (§ 384) $\sqrt{10 \times 100} = 31{,}6228$ na progressão geometrica. Comparando as progressões

$$\div\ 1;\ldots\ldots\ldots\frac{24}{16};\ldots\ldots 2$$

$$\div\div 10;\ldots 31{,}6228;\ldots 100$$

e observando que é $$31{,}6228 < 50 < 100$$

e portanto $$\frac{24}{16} < \log.50 < 2$$

reconhece-se a desnecessidade de calcular os termos, que precedem

$\frac{24}{16}$ n'uma progressão e 31,6228 n'outra. Procedendo do mesmo modo com a parte da primeira progressão que vai desde $\frac{24}{16}$ até 2, e com a que lhe corresponde na progressão geometrica e advertindo que, por ser impar, 2^3+1, o numero total dos termos, tambem se póde calcular o termo equidistante dos extremos em cada progressão parcial, ter-se-hão, suppondo $\sqrt{31,6228 \times 100} = 56,2$, as novas progressões

$$\div \cdots\cdots \frac{24}{16}; \cdots\cdots \frac{28}{16}; \cdots\cdots 2$$
$$\div\div \cdots 31,6228; \ldots 56,2; \ldots 100$$

das quaes similhantemente se deduzirá

$$\frac{24}{16} < \log. 50 < \frac{28}{16}$$

reconhecendo-se portanto a desnecessidade de calcular os termos, que se seguem a $\frac{28}{16}$ e 56,2. Desde $\frac{24}{16}$ inclusivè até $\frac{28}{16}$, e desde 31,6228 até 56,2, ha tambem um numero impar, 2^2+1, de termos e por conseguinte cada uma d'estas progressões parciaes tem um termo equidistante dos extremos. Calculando este termo e achando-se $\sqrt{31,6228 \times 56,2} = 42,2$ obtêem-se as progressões

$$\div \cdots\cdots \frac{24}{16}; \cdots\cdots \frac{26}{16}; \cdots\cdots \frac{28}{16}$$
$$\div\div \cdots 31,6228; \ldots 42,2; \ldots 56,2$$

de que resulta $\frac{26}{16} < \log. 50 < \frac{28}{16}$

e finalmente inserindo um meio entre $\frac{26}{16}$ e $\frac{28}{16}$ e outro entre 42,2 e 56,2, acha-se

$$\div \cdots\cdots \frac{26}{16}; \quad \frac{27}{16}; \quad \frac{28}{16}$$
$$\div\div \cdots 42,2; \quad 48,6; \quad 56,2$$

e reconhece-se que é $\frac{27}{16} < \log. 50 < \frac{28}{16}$

ou $\log. 50 = \frac{27}{16}$ ou $= \frac{28}{16}$ com um erro inferior a $\frac{1}{16}$ e, com mais forte rasão, menor ainda que 0,1.

Este processo, posto que não seja de todos o mais simples, é comtudo sufficiente para mostrar a possibilidade de se obter pelo calculo o logarithmo de qualquer numero.

Á analyse superior pertence a deducção de outros processos mais uteis na pratica.

402. Tem-se supposto até aqui, que são crescentes as duas pro-

gressões adoptadas para definir os logarithmos, e portanto que só têem logarithmos os numeros maiores que 1. Se se tivesse supposto que a progressão geometrica era decrescente e a arithmetica crescente achar-se-hia que só os numeros menores que 1 teriam logarithmos.

Para que tenham logarithmos tanto os numeros maiores que 1, como os menores, é necessario admittir a existencia de quantidades ou numeros negativos, e portanto a possibilidade de continuar a progressão arithmetica para a esquerda do termo 0.

Ainda que o estudo das quantidades negativas pertença propriamente á algebra, não deixa comtudo de ser muito conveniente tratar d'elle n'este logar, visto que, sem o seu auxilio, é impossivel comprehender as regras empregadas no calculo logarithmico.

403. A noção de quantidade em arithmetica não comprehende senão dois elementos: a especie, que é determinada pela unidade, e o valor numerico ou absoluto; de sorte que, para duas quantidades serem iguaes, basta que tenham o mesmo valor absoluto e estejam referidas á mesma unidade. Imagine-se que um negociante comprou por 6 contos de réis uma mercadoria, que depois vendeu por 8 contos. É claro que, d'esta dupla transacção resultou para a *conta de ganhos* do negociante, um *ganho* de $8-6=2$ contos de reis. Se o negociante tivesse comprado por 8 contos e vendido por 6 a mercadoria, a sua *conta de ganhos* teria soffrido uma diminuição, uma *perda*, de $8-6=2$ contos de réis. Os 2 contos de réis, que o negociante ganhou na transacção realisada, e os que teria perdido, se a transacção se houvesse effectuado pelo segundo modo, são duas quantidades arithmeticamente iguaes, porque ambas se referem á mesma unidade, *conto de réis*, e ambas constam do mesmo numero de unidades. É certo, porém, que, para o negociante, ellas têem significações muito diversas, e até oppostas, porque, emquanto uma tem por effeito produzir um augmento na importancia final dos seus ganhos, a outra tende pelo contrário a diminuil-a.

A noção de quantidade em algebra é mais complexa do que em arithmetica. Em algebra a noção de quantidade comprehende os mesmos elementos, especie e valor absoluto, que em arithmetica e mais um, dependente do *modo de ser* d'ella relativamente a outra quantidade e que não é senão uma *qualidade* da quantidade tal como ella se considera em arithmetica. Assim as quantidades *dois contos de ganho* e *dois contos de perda*, que são iguaes em arithmetica, deixam de o ser em algebra, unicamente porque o seu modo de ser, relativamente ao resultado final da conta de ganhos, não é o mesmo em ambas, isto é, porque este resultado não é modificado exactamente no mesmo sentido pelo ganho, ou pela perda.

Diz-se, em geral, que as *qualidades* ou *modos de ser* de duas quantidades relativamente a uma terceira *são oppostos*, quando el

les são taes que, se um tende a augmentar o valor da terceira quantidade, o outro tende a diminuil-o e vice-versa. As quantidades *dois contos de ganho* e *dois contos de perda* têem qualidades ou modos de ser oppostos relativamente ao resultado final da *conta de ganhos*. As mesmas quantidades têem similhantemente modos de ser oppostos relativamente ao resultado final da *conta de perdas*, porque este resultado diminuirá com *o ganho de dois contos* e augmentará com a *perda* d'elles.

Distinguem-se em algebra as duas *qualidades* ou *modos de ser oppostos* d'uma quantidade affectando do signal + a quantidade com uma das duas qualidades e do signal — a quantidade com a qualidade opposta. As quantidades precedidas do signal + chamam-se *positivas*, as precedidas do signal — denominam-se *negativas*.

Em relação ao resultado da *conta de ganhos*, a quantia ganha pelo negociante é representada por + 2 contos de réis e a quantia perdida por — 2 contos de réis. Em relação ao resultado da *conta de perdas*, a primeira quantia será representada por — 2 contos de réis e a segunda por + 2 contos de réis. Nenhuma quantidade é positiva ou negativa senão relativamente a uma terceira quantidade. Não ha, pois, quantidades absolutamente positivas, nem absolutamente negativas.

O *adiantamento* e o *atraso* d'um relogio podem não ser quantidades distinctas em arithmetica; porém, são-o sempre em algebra, em virtude do seu modo de ser diverso em relação a um igual intervallo de tempo marcado por um relogio certo. E, como este intervallo parece augmentar, quando o relogio se adianta, e diminuir, quando se atraza, as duas quantidades, a de que o relogio se adianta e a de que se atrasa, devem algebricamente distinguir-se pelos seus signaes, precedendo uma do signal + e outra do signal —. O mesmo acontece com duas distancias percorridas na mesma estrada, quando o são em sentidos contrarios, por exemplo uma do sul para o norte e outra do norte para o sul.

404. *A addição de duas quantidades do mesmo signal effectua-se sommando os seus valores numericos, ou absolutos, e dando ao resultado o signal commum a ambas*, isto é,

$$(+6)+(+4)=+(6+4) \quad \text{e} \quad (-6)+(-4)=-(6+4)$$

Com effeito, *um ganho* (+ 6) seguido (+) de *outro ganho* (+ 4) equivale (=) a *um ganho* unico + (6 + 4). *Uma perda* (— 6) seguida (+) de *outra perda* (— 4) equivale (=) a *uma perda* unica — (6 + 4).

A addição de duas quantidades de signaes contrarios effectua-se subtrahindo o valor absoluto da que o tem menor do valor absoluto da maior e dando ao resultado o signal da maior, isto é,

$$(+8)+(-5) \quad \text{ou} \quad (-5)+(+8)=+(8-5)$$

e

$$(+5)+(-8) \quad \text{ou} \quad (-8)+(+5)=-(8-5)$$

Com effeito, um ganho seguido de uma perda, ou uma perda seguida de um ganho, equivale a um só ganho, ou a uma perda unica conforme o ganho parcial é superior ou inferior á perda parcial.

Da addição resulta immediatamente a subtracção, por serem inversas estas duas operações. Tem-se, pois,

$$(+3)-(+8)=-5,\ (+3)-(-5)=+8,\ (-3)-(+5)=-8,\ (-3)-(-8)=+5$$

A pratica da subtracção reduz-se a escrever o subtractivo com o signal trocado em seguida ao additivo. Assim,

$$(+3)-(+8)=+3-8=-5,\ (+3)-(-5)=+3+5=+8,$$
$$(-3)-(+5)=-3-5=-8,\ (-3)-(-8)=-3+8=+5$$

405. *Multiplicação algebrica é uma operação, que tem por fim achar uma quantidade, que se forme algebricamente d'uma quantidade chamada multiplicando, como outra chamada multiplicador se fórma algebricamente da unidade positiva.*

A quantidade $+4$ forma-se algebricamente de $+1$, sommando 4 parcellas iguaes a $+1$, isto é,

$$+4=(+1)+(+1)+(+1)+(+1)$$

Logo por definição é

$$(+6)\times(+4)=(+6)+(+6)+(+6)+(+6)=+(6\times4)$$
$$(-6)\times(+4)=(-6)+(-6)+(-6)+(-6)=-(6\times4)$$

A quantidade negativa -4 forma-se algebricamente de $+1$, trocando o signal a esta unidade e sommando 4 parcellas iguaes a -1; isto é,

$$-4=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)$$

Logo por definição é

$$(+6)\times(-4)=(-6)+(-6)+(-6)+(-6)=-(6\times4)$$
$$(-6)\times(-4)=(+6)+(+6)+(+6)+(+6)=+(6\times4)$$

Na pratica *obtem-se o producto algebrico de duas quantidades multiplicando os seus valores absolutos e dando ao resultado o signal +, quando ambas têem o mesmo signal, e o signal —, quando têem signaes contrarios.*

Da multiplicação resulta immediatamente a divisão, por serem estas duas operações inversas uma da outra. Tem-se, pois,

$$(+24):(+4)=+6,\ (-24):(+4)=-6,\ (+24):(-6)=-4,\ (-24):(-6)=+4.$$

406. De tudo, que fica exposto relativamente ás quantidades negativas, resulta, que uma subtracção não é uma operação impossivel, quando o subtractivo excede o additivo. Assim é, por exem-

plo, $3-8=-5$, porque inversamente sabe-se (§ 404) que é $8+(-5)=3$.

É permittido, pois, continuar a progressão arithmetica (1) para a esquerda do termo zero, e d'ahi resulta poderem adoptar-se as progressões

$$\div\ldots -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, 4a, \ldots$$
$$\div\div\ldots\ldots \frac{1}{A^3}, \frac{1}{A^2}, \frac{1}{A}, 1, A, A^2, A^3, A^4, \ldots$$

para definir um systema de logarithmos. É evidente agora que, ou seja $A>1$ ou $A<1$, sempre um numero positivo M tem logarithmo, quer se supponha $M>1$, quer $M<1$.

407. Em geral, póde haver tantos *systemas de logarithmos*, quantas forem as combinações verdadeiramente distinctas, que se possam fazer com duas progressões, uma arithmetica e outra geometrica. Seja, porém, qual fôr o systema de logarithmos adoptado, sempre o logarithmo de 1 será (§ 399) igual a zero.

Um *systema de logarithmos* ficará determinado, quando fôr conhecido um termo da progressão geometrica juntamente com o seu correspondente da progressão arithmetica.

É, com effeito, evidente que, se ao termo 9 de uma progressão geometrica corresponder 4 na progressão arithmetica, as progressões caracteriscas do systema de logarithmos, só podem ser estas

$$\div\ldots -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots$$
$$\div\div\ldots\ldots \frac{1}{9^2}, \frac{1}{9}, 1, 9, 9^2, 9^3, \ldots$$

ou outras, que provenham d'ellas pela inserção de igual numero de meios proporcionaes entre cada dois termos consecutivos.

Ordinariamente define-se um *systema de logarithmos*, dizendo qual é o termo da progressão geometrica, que corresponde ao termo 1 da progressão arithmetica. Aquelle termo denomina-se *base*[1] *do systema de logarithmos*. Em todos os systemas de logarithmos *o logarithmo da base é igual a* 1.

408. **Theorema.** *A rasão entre os logarithmos do mesmo numero*

---

[1] *Sendo* A *e* a *termos correspondentes das duas progressões, geometrica e arithmetica, e designando* a *um numero inteiro, será* $\sqrt[a]{A}$ *a base do systema de logarithmos definido por aquellas progressões*

Inserindo $a-1$ meios arithmeticos entre 0 e o numero inteiro a, formar-se-ha a progressão (§ 341)

$$\div 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots\ldots (a-1), \quad a$$

inserindo igual numero de meios geometricos entre 1 e A ter-se-ha a progressão (§ 380)

$$\div\div 1, \quad \sqrt[a]{A}, \quad (\sqrt[a]{A})^2, \quad (\sqrt[a]{A})^3 \ldots (\sqrt[a]{A})^{a-1}, \quad (\sqrt[a]{A})^a = A$$

Comparando estas progressões nota-se que ao termo $\sqrt[a]{A}$ da progressão geometrica corresponde o termo 1 da progressão arithmetica, e, portanto, que é,

$$\log. \sqrt[a]{A} = 1 \quad \text{e} \quad \sqrt[a]{A} = \text{base do systema de logarithmos}$$

tomados em systemas differentes é a mesma, seja qual fôr o valor do numero.

Sejam

$$\div 0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ldots(n-1)a,\ na,\ldots$$
$$\div\div 1,\ A,\ A^2,\ A^3,\ldots\ldots A^{n-1},\ A^n,\ldots$$

as progressões, que definem um dos systemas de logarithmos e

$$\div 0,\ a',\ 2a',\ 3a',\ldots(n-1)a',\ na',\ldots$$
$$\div\div 1,\ A,\ A^2,\ A^3,\ldots\ldots A^{n-1},\ A^n,\ldots$$

as que definem o outro systema.

O termo A^n da progressão commum aos dois systemas tem por logarithmo na no primeiro systema de progressões e na' no segundo systema. Designando por *Log.* os logarithmos do primeiro systema e por *log.* os do segundo, tem-se

$$\frac{\text{Log.}A^n}{\text{log.}A^n}=\frac{na}{na'}=\frac{a}{a'}$$

Vê-se, pois, que a relação entre os logarithmos é independente do valor de n, isto é, da ordem do termo de que se trata.

Quando o numero dado N não póde introduzir-se na progressão, os seus logarithmos obtêem-se com a approximação que se quizer. Suppondo que N está comprehendido entre os termos $A^3\times R^{n-1}$ e $A^3\times R^n$, que se obtêem inserindo i meios geometricos entre A^3 e A^4, ter-se-ha (§§ 400 e 315)

$$\text{Log.}\,N=\lim.\left[3a+\frac{a(n-1)}{i+1}\right]=a\times\lim.\left[3+\frac{(n-1)}{i+1}\right]$$

no primeiro systema de logarithmos e

$$\text{log.}\,N=\lim.\left[3a'+\frac{a'(n-1)}{i+1}\right]=a'\times\lim.\left[3+\frac{(n-1)}{i+1}\right]$$

no segundo systema de logarithmos.

Dividindo ordenadamente estas igualdades e supprimindo o factor commum $\lim.\left(3+\frac{n-1}{i+1}\right)$ acha-se

$$\frac{\text{Log.}\,N}{\text{log.}\,N}=\frac{a}{a'}$$

409. Sendo B a *base* de um systema de logarithmos designado por a abreviatura *log.*, e b a base de outro systema representado por *lg.*, será (§ 407) $\text{log.}\,B=1$ e $\text{lg.}\,b=1$; e como está demonstrado (§ 408) que é

$$\frac{\text{log.}\,A}{\text{lg.}\,A}=\frac{\text{log.}\,C}{\text{lg.}\,C}=\frac{\text{log.}\,D}{\text{lg.}\,D}=\ldots=\frac{\text{log.}\,B}{\text{lg.}\,B}=\frac{\text{log.}\,b}{\text{lg.}\,b}$$

segue-se que será

$$\frac{\text{log.}A}{\text{lg.}A}=\frac{\text{log.}C}{\text{lg.}C}=\frac{\text{log.}D}{\text{lg.}D}=\ldots=\frac{1}{\text{lg.}B}=\text{log.}b$$

e

$$\text{log.}A=\text{lg.}A\times\frac{1}{\text{lg.}B}\qquad \text{log.}C=\text{lg.}C\times\frac{1}{\text{lg.}B}\qquad \text{log.}D=\text{lg.}D\times\frac{1}{\text{lg.}B}$$

Este numero constante, pelo qual se multiplicam os logarithmos de base b, para se obterem os logarithmos dos mesmos numeros no systema de base B, chama-se **modulo** d'este systema de logarithmos em relação áquelle.

O modulo de um systema de logarithmos de base B *em relação a outro, cuja base é* b, *é, pois, igual a* 1 *dividido por o logarithmo da base* (B) *do novo systema tomado no antigo systema*[1].

410. São dois os systemas de logarithmos, de que se tem feito uso. O primeiro, cuja invenção é devida a Neper ou Napier, tem por base o numero[2] incommensuravel 2,718281828459045.., que geralmente se representa no calculo por a letra e. A estes logarithmos chama-se **logarithmos naturaes** ou **hyperbolicos**, e tambem **logarithmos neperianos**.

O outro systema de logarithmos, que é o geralmente empregado nos calculos numericos, chama-se systema de **logarithmos vulgares** ou de Briggs, por ser este celebre professor, quem pela primeira vez publicou, em 1617, uma taboa, que foi impressa em Londres com o titulo *Logarithmorum chilias prima*. A base do systema vulgar é 10.

Designando por *log.* os logarithmos vulgares e por l os logarithmos naturaes ou hyperbolicos, acha-se, por calculos impossiveis de desenvolver n'este livro, $\frac{1}{l.10}$ ou log.2,7182818... igual a 0,4342945... Logo o modulo dos logarithmos vulgares em relação aos logarithmos naturaes, ou simplesmente o *modulo dos logarithmos vulgares*, como ordinariamente se diz, é (§ 409) igual a 0,4342945...

411. **Theorema.** *O logarithmo de um producto de dois factores é igual á somma dos logarithmos dos mesmos factores*, isto é,

$$\log.(M \times N) = \log.M + \log.N$$

Sejam

$$\begin{array}{lllllllllll} \div\ldots. & -4a, & -3a, & -2a, & -a, & 0, & a, & 2a, & 3a, & 4a, & 5a,\ldots. \\ \div\div\ldots. & \frac{1}{A^4}, & \frac{1}{A^3}, & \frac{1}{A^2}, & \frac{1}{A}, & 1, & A, & A^2, & A^3, & A^4, & A^5,\ldots. \end{array}$$

as progressões, que definem os logarithmos.

Suppondo que os dois numeros M e N fazem parte da progressão geometrica, e são ambos maiores que 1, ter-se-ha, por exemplo,

$$\begin{array}{lll} M = A^2 & N = A^5 & M \times N = A^{2+5} \\ \log.M = 2a & \log.N = 5a & \log.M + \log.N = (2+5)a \end{array}$$

e, como $(2+5)a$ e $A^2 \times A^5$ ou A^{2+5} são (§§ 346 e 385) necessa-

[1] Póde tambem dizer-se que *modulo de um systema de logarithmos de base* B *em relação a outro, cuja base é* b, *é a rasão entre os logarithmos de qualquer numero tomados um no systema de base* B *e outro no de base* b.

[2] Este numero incommensuravel *e* representa o limite para que tende a expressão $\sqrt[\alpha]{1+\alpha}$, quando α tende para zero.

riamente termos correspondentes das progressões arithmetica e geometrica, será

$$\log.A^{2+5}=(2+5)a \quad \text{ou} \quad \log.(M\times N)=\log.M+\log.N$$

Suppondo que M e N são menores que 1, ter-se-ha, por exemplo,

$$M=\frac{1}{A^2} \qquad N=\frac{1}{A^5} \qquad M\times N=\frac{1}{A^{2+5}}$$

$$\log.M=-2a \qquad \log.N=-5a \qquad \log.M+\log.N=-2a+(-5a)$$

e, como $-2a+(-5a)$ ou (§ 404) $-2a-5a=-(2a+5a)$ é igual ao termo $-(2+5)a$ da progressão arithmetica, e este termo corresponde ao termo $\frac{1}{A^{2+5}}$ da progressão geometrica, será

$$\log.\frac{1}{A^{2+5}}=-2a+(-5a) \quad \text{ou} \quad \log.(M\times N)=\log.M+\log.N$$

Do mesmo modo se raciocinará, quando um dos numeros, M ou N, fôr maior que 1 e outro menor.

Não podendo os numeros M e N fazer parte da progressão geometrica, ter-se-ha, em geral,

$$R^{m-1}<M<R^m \qquad R^{n-1}<N<R^n$$

designando R a rasão $\sqrt[i+1]{A}$ da progressão, que se fórma introduzindo i termos entre cada dois termos consecutivos da progressão $\div\div 1$, A, A^2, etc. Inserindo i termos entre os termos consecutivos da progressão $\div 0$, a, $2a$, etc. e designando por r a rasão $\frac{a}{i+1}$ da progressão resultante, será

$$(m-1)r<\log.M<mr \qquad (n-1)r<\log.N<nr$$

Das primeiras desigualdades deduz-se

$$R^{m-1}\times R^{n-1}<M\times N<R^m\times R^n \quad \text{ou} \quad R^{m+n-2}<M\times N<R^{m+n}$$

e substituindo os logarithmos

$$(m+n-2)r<\log.(M\times N)<(m+n)r$$

Das ultimas desigualdades deduz-se

$$(m-1)r+(n-1)r<\log.M+\log.N<mr+nr$$

ou

$$(m+n-2)r<\log.M+\log.N<(m+n)r$$

Logo a differença entre as expressões $\log.(M\times N)$ e $\log.M+\log.N$, cujos valores estão comprehendidos entre $(m+n)r$ e $(m+n-2)r$, não póde deixar de ser inferior a $2r$ ou $\frac{2a}{i+1}$.

E como esta differença diminue, quando augmenta i, e póde mesmo tornar-se menor que qualquer grandeza dada, segue-se que o mesmo acontecerá á differença entre as quantidades $\log.(M\times N)$

e $\log.M+\log.N$, cujos valores não dependem de i. Logo é sempre verdadeira a igualdade

$$\log.(M\times N)=\log.M+\log.N$$

412. **Corollario I.** *O logarithmo do producto de mais de dois factores é igual á somma dos logarithmos dos factores*, isto é,

$$\log.(M\times N\times P\times Q)=\log.M+\log.N+\log.P+\log.Q$$

Considerando $M\times N\times P\times Q$ como um producto de dois factores, M e $N\times P\times Q$, tem-se (§ 411)

$$\log.(M\times N\times P\times Q)=\log.M+\log.(N\times P\times Q)$$

Decompondo similhantemente $N\times P\times Q$ em dois factores, vem

$$\log.(N\times P\times Q)=\log.N+\log.(P\times Q)$$

e $$\log.(M\times N\times P\times Q)=\log.M+\log.N+\log.P+\log.Q$$

413. **Corollario II.** *O logarithmo de uma potencia de qualquer quantidade é igual ao expoente da potencia multiplicado pelo logarithmo da quantidade.*

Suppondo $M=N=P=Q$, a ultima igualdade do § precedente reduz-se a

$$\log.M^4=4\log.M$$

414. **Theorema.** *O logarithmo de um quociente é igual ao logarithmo do dividendo menos o logarithmo do divisor*, isto é,

$$\log.\left(\frac{M}{N}\right)=\log.M-\log.N$$

Designando Q o valôr do quociente, será

$$\frac{M}{N}=Q \quad \text{ou} \quad M=N\times Q$$

e (§ 411)

$$\log.M=\log.N+\log.Q \quad \text{ou} \quad \log.Q=\log.M-\log.N$$

e finalmente $$\log.\left(\frac{M}{N}\right)=\log.M-\log.N$$

415. **Corollario.** Quando é $M=1$, tem-se (§ 399) $\log.M=0$ e por consequencia

$$\log.\left(\frac{1}{N}\right)=-\log.N$$

Em geral, qualquer logarithmo negativo é igual ao logarithmo d'um quebrado, cujo numerador é 1 e o denominador é o numero correspondente ao logarithmo tomado com o signal contrario.

416. **Theorema.** *O logarithmo da raiz de qualquer quantidade é igual ao logarithmo da quantidade dividido pelo indice da raiz*, isto é,

$$\log.\sqrt[m]{M}=\frac{\log.M}{m}$$

Designando por r a raiz m de M, isto é, suppondo

$$\sqrt[m]{M}=r \quad \text{ou} \quad M=r^m$$

será (§ 413)

$$\log. M = m \log. r \quad \text{e} \quad \frac{\log. M}{m} = \log. r = \log. \sqrt[m]{M}$$

417. **Theorema.** *O logarithmo vulgar de qualquer potencia de 10 é igual ao expoente da mesma potencia.*

A verdade d'este theorema reconhece-se facilmente comparando as progressões

$$\div\cdots\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

$$\div\div\cdots\cdots \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10}, 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \ldots$$

que definem o systema vulgar, cuja base é 10.

Póde, porém, demonstrar-se o mesmo theorema notando (§§ 413 e 407) que é

$$\lg. 10^5 = 5 \lg. 10 \quad \text{e} \quad \lg. 10 = 1$$

e por consequencia $\lg. 10^5 = 5$

418. **Theorema.** *Quando se multiplica, ou divide, um numero por qualquer potencia*[1] *de 10 o seu* **logarithmo vulgar** *augmenta, ou diminue de tantas unidades, quantas são as unidades do expoente de 10.*

Sendo $lg. N$ o logarithmo vulgar de N, será (§ 411)

$$\lg. (N \times 10^3) = \lg. N + \lg. 10^3$$

e, como no systema de logarithmos vulgares é (§ 417) $\lg. 10^3 = 3$, segue-se que será

$$\lg. (N \times 10^3) = \lg. N + 3$$

Do mesmo modo se tem (§§ 414 e 417)

$$\lg. \left(\frac{N}{10^3}\right) = \lg. N - \lg. 10^3 \quad \text{e} \quad \lg. \left(\frac{N}{10^3}\right) = \lg. N - 3$$

419. Os logarithmos vulgares dos numeros, que não são potencias exactas de 10, ou de $\frac{1}{10}$ comprehendem sempre uma parte fraccionaria. Assim o logarithmo vulgar de um numero comprehendido entre 10^5 e 10^6, por exemplo, deve ser um numero maior que 5 e menor que 6, e portanto igual a 5 mais uma fracção propria. A parte inteira de um logarithmo vulgar chama-se *caracteristica* e póde ser positiva ou negativa. A parte fraccionaria do logarithmo exprime-se ordinariamente por um numero decimal e denomina-se *mantissa* do logarithmo.

---

[1] Este theorema é verdadeiro para qualquer systema de logarithmos, comtanto que se supponha o numero multiplicado ou dividido por uma potencia da *base* do mesmo systema.

A *mantissa* de um logarithmo póde sempre calcular-se com a approximação (§ 401), que se quizer.

420. **Theorema.** *A caracteristica do logarithmo vulgar de qualquer numero inteiro, ou decimal, consta de tantas unidades, quantas são as casas, que no dito numero vão desde o algarismo das unidades exclusivamente, até ao primeiro algarismo significativo da esquerda inclusivamente, e é positiva, quando o numero é maior que 1, e negativa, quando é menor que 1.*

Se o numero é maior que 1, hão de haver duas potencias de 10 (considerando 1 e 10 como potencias de 10, cujos expoente são 0 e 1), entre as quaes o numero se comprehenda, de modo que seja, por exemplo,

$$10^3 < 8564{,}36 < 10^4$$

sendo 4 o numero de algarismos da parte inteira, e (§ 400)

$$\lg.10^3 < \lg.8564{,}36 < \lg.10^4$$

ou (§ 417) $$3 < \lg.8564{,}36 < 4$$

e por consequencia $$\lg.8564{,}36 = 3 + \delta$$

designando δ uma fracção propria, isto é, a mantissa do logarithmo.

Se o numero é menor que 1, como, por exemplo, 0,0062358, ter-se-ha evidentemente

$$0{,}001 < 0{,}0062358 < 0{,}01$$

$$\frac{1}{10^3} < 0{,}0062358 < \frac{1}{10^2}$$

e $$\lg.\frac{1}{10^3} < \lg.0{,}0062358 < \lg.\frac{1}{10^2}$$

$$-3 < \lg.0{,}0062358 < -2$$

e, como (§ 404) $$-3 + 1 = -(3 - 1) = -2$$

será $$\lg.0{,}0062358 = -3 + \delta$$

representando δ a mantissa do logarithmo.

421. **Theorema.** *A mantissa positiva do logarithmo de qualquer numero não depende da posição da virgula no mesmo numero.*

Deslocar a virgula para a direita, ou para a esquerda, em qualquer numero inteiro, ou decimal, equivale (§§ 62, 244 e 247) a multiplicar, ou dividir esse numero por alguma potencia de 10, e multiplicar ou dividir um numero por uma potencia de 10 corresponde (§ 418) a juntar ou subtrahir algumas unidades ao logarithmo do numero. Logo o deslocamento da virgula produz sómente mudança de valor na caracteristica, suppondo que, no caso da divisão, aquellas unidades foram subtrahidas á caracterisca, como, em geral, se pratica, para evitar que a mantissa fique negativa.

Sendo, por exemplo,

$$\lg. 643{,}58 = 2 + \delta$$

será $$\lg. 64358 = \lg. (643{,}58 \times 10^2) = (2 + \delta) + 2$$

ou $$\lg. 64358 = 4 + \delta$$

e $$\lg. 0{,}064358 = \lg. \frac{643{,}58}{10^4} = (2 + \delta) - 4$$

ou $$\lg. 0{,}064358 = -2 + \delta$$

N'este ultimo caso póde tambem escrever-se

$$\lg. 0{,}064358 = 2 + \delta - 3 - 1 = (2 - 3) - (1 - \delta)$$

Designando por δ' a differença $1 - \delta$, que é menor que 1, tem-se

$$\lg. 0{,}064358 = -1 - \delta'$$

Reconhece-se por este modo que os logarithmos dos numeros 643,58 e 0,064358 têem mantissas δ e δ' differentes, mas vê-se tambem que, para isto acontecer, foi necessario que a mantissa deixasse de ser positiva.

Sendo $$\delta = 0{,}8086025$$

será $$\delta' = 0{,}1913975, \qquad \lg. 643{,}58 = 2{,}8086025$$

e $$\lg. 0{,}064358 = -2 + 0{,}8086025$$

ou, como geralmente se escreve,

$$\lg. 0{,}064358 = \bar{2}{,}8086025$$

pondo o signal — por cima da caracteristica, para indicar que só ella é negativa.

Querendo este ultimo logarithmo todo negativo, ter-se-ha

$$\lg. 0{,}064358 = -1 - 0{,}1913975 \quad \text{ou} \quad \lg. 0{,}064358 = -1{,}1913975$$

422. **Disposição das taboas de logarithmos.** As caracteristicas dos logarithmos vulgares são tão faceis de obter (§ 420), que não ha necessidade de as incluir nas taboas dos logarithmos. É por isso que as taboas de Callet, e, em geral, quasi todas as outras, apenas contêem as mantissas positivas dos logarithmos de uma serie de numeros inteiros.

Basta comprehender a disposição dos logarithmos nas taboas de Callet para com facilidade se perceber a disposição adoptada nas taboas de Lalande [1], nas de J. Dupuis e em outras.

---

[1] As taboas de Lalande contêem os logarithmos dos numeros inteiros desde 1 até 10000 com cinco casas decimaes e com um erro inferior a $\frac{1}{2}$ unidade da quinta casa de dizima. A partir de log. 900 têem uma columna D com as differenças entre os logarithmos consecutivos. A approximação dada por estas taboas é sufficiente na maior parte das applicações. Só em calculos de grande precisão se exi-

Na primeira parte das taboas de Callet, intitulada *Chiliada I*, estão as mantissas positivas dos numeros inteiros, desde 1 até 1200, com 8 algarismos decimaes e um erro, por defeito ou por excesso, inferior a $\frac{1}{2}$ unidade da oitava casa de dizima. Cada pagina da *Chiliada I* tem 240 numeros com os seus logarithmos distribuidos por quatro columnas.

Na segunda parte das taboas estão os logarithmos dispostos por modo diverso. Em cada pagina d'ella ha 12 columnas[1] destinadas aos logarithmos. A primeira, a que tem *N* na parte superior, tem os numeros, as dez immediatas marcadas com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4,...9 contêem as mantissas positivas com um erro inferior a $\frac{1}{2}$ unidade da ultima casa decimal, e a ultima tem as differenças dos logarithmos dos numeros consecutivos com as suas partes decimaes.

Abrindo o livro na primeira pagina d'esta parte das taboas encontram-se na columna *N* os numeros inteiros desde 1020 até 1079 e na columna 0 as mantissas dos logarithmos d'estes mesmos numeros com 7 algarismos decimaes. Estas mantissas pertencem tambem (§ 421) aos logarithmos dos numeros da columna *N* seguidos de um zero (ou de mais).

Na columna 1 estão os quatro ultimos algarismos das mantissas dos logarithmos dos numeros da columna *N* seguidos do algarismo 1. Os tres primeiros algarismos d'estas mantissas são os correspondentes á columna 0 na mesma linha horisontal. Na columna 2 estão os quatro ultimos algarismos das mantissas dos logarithmos dos numeros da columna *N* seguidos do algarismo 2; os tres outros algarismos das mesmas mantissas estão, como os da columna 1, na columna 0. As columnas 3, 4, 5,...9 contêem, como as anteriores, os quatro ultimos algarismos dos logarithmos dos numeros da columna *N* seguidos de um dos algarismos 3, 4, 5,...9.

Percorrendo, pois, todas as paginas da segunda parte das taboas de Callet reconhece-se que na columna 0 estão as mantissas positivas dos logarithmos de todos os numeros inteiros desde 1020 até 10799, na columna 1 as dos logarithmos dos numeros de 10 em 10 desde 10201 até 107991, na columna 2 encontram-se as mantissas dos logarithmos dos numeros de 10 em 10 desde 10202 até 107992, e assim successivamente até á columna 9, onde es-

---

gem sete, ou mais algarismos decimaes. As taboas de sete decimaes de J. Dupuis têem os logarithmos dos numeros desde 1 até 100000. O mesmo auctor publicou em 1867 outras taboas em um pequeno volume contendo os logarithmos dos numeros desde 1 até 10000 com cinco casas de dizima.

[1] Além d'estas doze columnas ha do lado esquerdo duas outras, que, combinadas com a primeira das doze, servem para reduzir graus (ou horas), minutos e segundos a segundos, ou inversamente para reduzir segundos a graus (ou a horas), minutos e segundos.

tão os logarithmos dos numeros de 10 em 10 desde 10209 até 107999.

Póde, pois, dizer-se que esta segunda parte das taboas abrange os logarithmos de todos os numeros inteiros até 108000 inclusivè.

Os logarithmos dos numeros maiores que 10000 estão calculados com 8 casas de dizima.

423. **Problema.** *Procurar nas taboas o logarithmo de um numero inteiro, ou decimal.*

A caracteristica acha-se (§ 420) independentemente das taboas, a mantissa positiva procura-se nas taboas, sem fazer caso dos zeros, que porventura estejam á direita do numero, nem da posição da virgula no mesmo numero. Para se resolver este problema convêm distinguir o caso em que o numero está nas taboas, do caso em que elle excede os seus limites.

Caso I. O numero sem virgula, e se fôr necessario sem zeros á direita, não excede 108000.

Se o numero é menor que 1200 póde achar-se a mantissa do seu logarithmo na *Chiliada I*, ou mesmo na segunda parte das taboas de Callet, comtanto que se lhe acrescente um zero, quando elle não exceda 1020.

Para achar o logarithmo de 1015000 começa-se por determinar a caracteristica, que n'este exemplo é 6, supprimem-se depois os tres ultimos zeros, e entra-se com 1015 na *Chiliada I*, ou supprimem-se apenas os dois ultimos zeros e entra-se com 10150 na segunda parte das taboas. Acha-se por qualquer d'estes modos

$$\lg.1015000 = 6,00646604$$

Para se obter a mantissa positiva do logarithmo de 0,004367, cuja caracteristica é —3, despreza-se a virgula e entra-se com o numero resultante 4367 na columna *N*. As taboas dão

$$\lg.0,004367 = -3 + 0,6401832 \quad \text{ou} \quad \lg.0,004367 = \bar{3},6401832$$

O logarithmo de 10654 póde achar-se tambem entrando com este numero na columna *N*, visto ser elle inferior a 10800. Ha porém, outro meio de obter este logarithmo, que consiste em entrar com 1065 na columna *N*, e depois com o algarismo 4 na columna marcada com este mesmo algarismo. Acha-se então, conforme o meio que se empregar,

$$\lg.10654 = 4,0275127 \quad \text{ou} \quad \lg.10654 = 4,02751269$$

Se o numero composto de 5 algarismos fôr maior que 10800, o ultimo d'estes dois meios é o unico, que póde seguir-se.

Se o numero consta de 6 algarismos, mas não excede 108000, o unico meio, pelo qual póde então obter-se o logarithmo, consiste similhantemente em entrar na columna *N* com o numero composto

dos 5 primeiros algarismos e com o ultimo, ou o sexto algarismo, na columna designada por o mesmo algarismo.

Para se ter a mantissa positiva do logarithmo de 0,0107823 entra-se com 10782 na columna N e segue-se depois a linha horisontal d'este numero até se chegar á columna 3. Tem-se por este modo

$$\lg.0{,}0107823 = -2 + 0{,}03271141 \quad \text{ou} \quad \lg.0{,}0107823 = \overline{2}{,}03271141$$

Caso II. O numero, sem a virgula e sem zeros á direita, excede 108000.

N'este caso é sempre possivel collocar a virgula no numero, de modo que elle fique comprehendido entre dois inteiros consecutivos, que não excedam o limite 108000 das taboas.

Representando X o numero, cujo logarithmo se procura, e suppondo que A e B são os dois numeros inteiros consecutivos, entre os quaes se comprehende X, emprega-se então, para calcular o valor de $\lg.X$, a proporção

$$B - A : X - A :: \lg.B - \lg.A : \lg.X - \lg.A$$

que não dá $\lg.X$ com exactidão, mas que, em geral, o dá com sufficiente approximação[1], quando A, que se suppõe menor que B, é igual ou superior a 10000. Esta proporção costuma enunciar-se dizendo: *a differença dos numeros é proporcional á differença dos logarithmos.*

Querendo, por exemplo, o logarithmo de 8265,43 determina-se a caracteristica 3 e depois desloca-se a virgula, a fim de que a parte inteira seja o maior numero inferior a 108000. O numero dado fica, portanto, reduzido a 82654,3, que se comprehende entre os numeros 82654 e 82655. Recorrendo á regra das partes

---

[1] Fazendo na proporção $B = A + 1$, $X = A + h$ e designando por Δ a differença $\lg.B - \lg.A$ das taboas, tem-se $1 : h :: \Delta : \lg.(A + h) - \lg A$ ou $\lg.(A + h) = \lg.A + h\Delta$. Não sendo, porém, verdadeira a proporção ou, como tambem se diz, *a regra das partes proporcionaes*, será $\lg.(A + h) = \lg.A + \delta$, e, portanto, a differença $\delta - h\Delta$ ou $h\Delta - \delta$ dará o valor do erro que envolve o logarithmo de um numero $A + h$, quando este logarithmo fôr deduzido pela referida regra.

Está demonstrado (Vieille, *Théorie générale des approximations numériques)* que aquelle erro é inferior a $\frac{1}{2A^2}$, e portanto, que, se fôr $A =$ ou > 10000, será o mesmo erro menor que $\frac{1}{2.10^8}$ ou $\frac{1}{2}$ unidade da oitava casa decimal. Tal é o erro que se commetteria, empregando a regra das partes proporcionaes, se porventura Δ e $\lg.A$ fossem conhecidos com todo o rigor.

Advertindo, porém, que as taboas dão um valor Δ' differente do verdadeiro, e que a differença e entre Δ' e Δ é inferior a uma unidade da ordem do ultimo algarismo, concluir-se-ha que $\delta - h\Delta$ equivale a $\delta - h(\Delta' + e)$, e por conseguinte que é $\delta - h(\Delta' + e) < \frac{1}{2 \times A^2}$ ou $\delta - h\Delta' < he + \frac{1}{2 \times A^2}$.

Suppondo $e < \frac{1}{2 \times 10^7}$ e $A =$ ou > 10000 será $\delta - h\Delta' < \frac{1}{10^7}$, e portanto para numeros superiores a 10000 não haverá inconveniente em usar da proporção.

proporcionaes tem-se

$$82655 - 82654 : 82654,3 - 82654 :: \lg.82655 - \lg.82654 : \lg.82654,3 - \lg.82654$$

ou

$$1 : 0,3 :: \lg.82655 - \lg.82654 : \lg.82654,3 - \lg.82654$$

O terceiro termo d'esta proporção é igual á differença entre os logarithmos de dois numeros inteiros consecutivos, differença que nas taboas está calculada em relação á unidade a que se refere o ultimo algarismo da direita da mantissa.

N'este exemplo é $\lg.82655 - \lg.82654 = 0,0000052$, e por isso

$$\lg.82654,3 = \lg.82654 + 0,3 \times 0,0000052$$

ou

$$\lg.82654,3 = 4,9172639 + 0,00000156 = 4,9172639 + 0,0000016$$

e finalmente

$$\lg.82654,3 = 4,9172655 \quad \text{e} \quad \lg.8265,43 = 3,9172655$$

Na pratica póde deixar de se multiplicar a differença 0,3 dos numeros por a differença 52 das taboas, porque por baixo de 52 existe uma pequena taboa com os valores de 1, 2, 3,...9 decimos de 52.

O typo do calculo é o seguinte

lg.82654.....	9172639
0,3 × 52.....	156
	9172655

$$\lg.8265,43 = 3,9172655$$

Achar o logarithmo de 684357,2

lg.68435.....	8352783
0,7 × 64.....	448
0,02 × 64.....	128
	8352829

$$\lg.684357,2 = 5,8352829$$

Achar o logarithmo de 106345428

lg.106345.....	02671708
0,4 × 408.....	1632
0,02 × 408.....	816
0,008 × 408.....	3264
	02671883

$$\lg.106345428 = 8,02671883$$

Quando o numero tem tantos algarismos, que, depois de separada á esquerda uma parte que se contenha nas taboas, ainda ficam muitos algarismos, basta, em geral, attender só a tres d'estes algarismos, como no exemplo seguinte se póde observar[1].

[1] Em todos estes exemplos tem-se supposto, que é conhecido com exactidão o

Achar o logarithmo de 229574,386

lg.22957	.....	3609151
0,4	$\times$190.....	760
0,03	$\times$190.....	570
0,008	$\times$190.....	1520
0,0006	$\times$190.....	1140
		3609234

$$\lg.229574,386 = 5,3609234$$

424. **Problema.** *Procurar nas taboas o numero correspondente a um logarithmo dado.*

Na resolução d'este problema suppor-se-ha, que a mantissa é positiva, porque, se o não fôr, será preciso tornal-a positiva, juntando e tirando ao logarithmo, de que ella faz parte, algum numero inteiro maior que o mesmo logarithmo.

Suppondo, por exemplo, que se pede o numero, cujo logarithmo é $-1,5159850$, tem-se

$$-1,5159850 = 2 - 1,5159850 - 2 = 0,4840150 - 2 = \bar{2},4840150$$

Para achar o numero, cujo logarithmo tem a mantissa positiva 4840150, entra-se na columna 0 das taboas com os 3 primeiros algarismos 484 da mantissa, e, depois de achado este numero entre os numeros isolados da mesma columna, procuram-se os 4 algarismos immediatos 0150 descendo na mesma columna, até se encontrarem esses mesmos algarismos, ou os de um numero immediatamente inferior ao que se escreve com os referidos algarismos.

No exemplo em questão acham-se effectivamente os algarismos 0150 na columna 0, e por isso, percorrendo a linha horisontal em que elles se acham, encontra-se na columna *N* o numero 3048, que só differe do numero pedido na posição da virgula. Para collocar esta na posição, que lhe convém, a fim de que a caracteristica seja -2, contam-se a partir do primeiro algarismo significativo inclusivè para a esquerda, visto ser negativa a caracteristica, 2 casas, isto é, tantas quantas são as unidades da caracteristica, e o algarismo, que occupar a casa immediata para a esquerda, será o das unidades.

---

numero, cujo logarithmo se procura. Quando o numero envolve algum erro, e se sabe que tem m algarismos exactos, o seu logarithmo apenas contém $m-1$ algarismos exactos (Vieille, *Théorie générale des approximations numériques*). Para obter o valor de $\lg.\sqrt{2}$ com 7 algarismos exactos é preciso portanto obter $\sqrt{2}$ com 8 algarismos exactos. Extrahindo a raiz tem-se

$$\lg.\sqrt{2} = \lg.1,4142135 = 0,1505149$$

Dividindo lg.2 por 2 acha-se tambem $\lg.\sqrt{2}$.

Seguindo esta regra (§ 420) acha-se

$$\bar{2},4840150 = \lg.0,03048$$

Não estando o numero escripto com os 4 ultimos algarismos na columna 0, percorre-se a linha horisontal, onde está o numero immediatamente inferior áquelle, até se encontrar exactamente este numero. Querendo achar o numero correspondente ao logarithmo 3,6754667 procura-se 675 entre os numeros isolados da columna 0, desce-se depois n'esta columna, até se encontrar o numero 4117, depois do qual vem 5034, que é maior que 4667, e caminha-se sobre a horisontal, que passa por 4117, até se chegar ao numero 4667 existente na columna 6 da taboa. Procura-se então o numero da columna *N*, que está com 4667 na mesma linha horisontal e escreve-se-lhe á direita o algarismo 6. O numero dado pela taboa é, n'este exemplo, 47366. Para se collocar a virgula, segundo a regra do § 420, de modo que a caracteristica seja 3, contam-se do primeiro algarismo significativo inclusivè para a direita, visto ser positiva a caracteristica, 3 casas, e o algarismo, que occupar a casa seguinte, será o das unidades. Applicando isto ao exemplo de que se trata obtem-se

$$3,6754667 = \lg.4736,6$$

Applicando um processo analogo para procurar o numero correspondente ao logarithmo 3,5625687 nota-se, que o numero 5687 composto dos 4 ultimos algarismos da mantissa não existe nas taboas, porque seguindo a horisontal, que passa por o numero 5308 da columna 0, chega-se ao numero 5664 situado na columna 3, e vê-se logo em seguida o numero 5783 maior que 5687.

É, pois, evidente que o numero pedido, prescindindo da caracteristica, está entre 36523 e 36524, e por consequencia que o seu valor, com um erro inferior a 1, é 36523 ou 36524. Para achar o numero com maior approximação emprega-se a proporção

$$\lg.B - \lg.A : \lg.X - \lg.A :: B - A :: X - A$$

ou $\quad 4,5625783 - 4,5625664 : 4,5625687 - 4,5625664 :: 1 : X - 36523$

na qual o primeiro termo é a differença 119 das taboas.

Effectuando, pois, as operações indicadas acha-se

$$119 : 23 :: 1 : X - 36523$$

e por consequencia

$$X = 36523 + \frac{23}{119} \quad \text{ou} \quad X = 36523,2$$

Collocando agora a virgula no logar competente obtem-se afinal

$$3,5625687 = \lg.3652,32$$

Na pratica só no fim se attende á caracteristica, e dispõe-se a operação como indica o seguinte

Typo do calculo

$$\begin{array}{r|l} 5625687 & \\ 5664 & \ldots\ldots 36523 \\ \hline 230 & 119 \\ 111 & 1 \qquad\qquad 2 \end{array}$$

$$X = 3652{,}32$$

Póde evitar-se a divisão (230 : 119), recorrendo á pequena taboa das partes proporcionaes. Entra-se para esse fim com o dividendo 23 na segunda das duas pequenas columnas situadas por baixo da differença 119, e vê-se qual é o numero da primeira columna, que lhe corresponde.

A inspecção da pequena taboa mostra, que a differença 23, não existe lá, mas está entre 12 e 24, e portanto que o sexto algarismo do numero procurado tem um valor comprehendido entre 1 e 2, e muito mais proximo do ultimo algarismo que do primeiro. O numero achado por meio da regra das partes proporcionaes não póde deixar de envolver erro, porque (§ 423) não é exacta nem a referida regra, nem a differença dos logarithmos dada pelas taboas. Póde, porém, dar-se como demonstrado que, para valores de A inferiores a 21809 ou superiores a 100000, o numero procurado terá todos os algarismos exactos, se o quociente $\frac{\lg.X - \lg.A}{\lg.B - \lg.A}$ não fôr calculado com mais de dois algarismos decimaes; e para valores de A comprehendidos entre 21809 e 100000 o referido quociente deve ser calculado apenas com 1 casa de dizima[1].

---

[1] Suppondo conhecido o verdadeiro valor de $\lg.B - \lg.A$ ou Δ, a proporção ou regra das partes proporcionaes, dá para X o valor

$$A + \frac{\lg.X - \lg.A}{\Delta}$$

que não póde deixar de envolver erro, visto não ser exacta a proporção d'onde elle deriva. Vieille *(Approximations numériques)* demonstrou que a differença entre aquelle valor approximado de X e o verdadeiro X é menor que $\frac{1}{A}$. Como, porém, não se conhecem senão com erros menores que $\frac{1}{2}$ os dois termos do quociente indicado $\frac{\lg.X - \lg.A}{\Delta}$, segue-se que n'esta divisão se commette um novo erro, que é inferior a $\frac{1}{\Delta}$. No caso mais desfavoravel o erro proveniente da accumulação dos dois erros deve, portanto, ser menor que $\frac{1}{A} + \frac{1}{\Delta}$.

Nas taboas de Callet a menor differença de logarithmos para os numeros comprehendidos entre 1020 e 21809 é 200, logo para numeros inferiores a 21809 o erro resultante da applicação da regra das partes proporcionaes não chega a ser $\frac{1}{1000} + \frac{1}{200}$ ou 0,006. De 100000 a 108000 a menor differença é 403, e por consequencia o erro proveniente d'aquella mesma origem é inferior a $\frac{1}{100000} + \frac{1}{403}$ ou

Achar o numero correspondente ao logarithmo $\bar{1},3146154$

Typo do calculo

$$\begin{array}{r|l}
3146154 & \\
6045 & \ldots\ldots 20635 \\
\hline
10900 & 211 \\
350 & 51 \\
139 & \qquad 52
\end{array}$$

$$\bar{1},3146154 = \lg.0,2063552$$

Querendo usar n'este exemplo da pequena taboa das partes proporcionaes, para dividir 109 por 211, procura-se na segunda columna o numero immediatamente inferior a 109, e, como esse numero é 106 e o que lhe fica á esquerda é 5, concluir-se-ha

$$\frac{109}{211} = \frac{106}{211} + \frac{3}{211} = 0,5 + \frac{30}{211} \times 0,1$$

Procura-se depois na mesma segunda columna o numero immediatamente menor que 30, e, como este numero é 21 e o seu correspondente á esquerda é 1, ter-se-ha

$$\frac{30}{211} = \frac{21}{211} + \frac{9}{211} = 0,1 + \frac{90}{211} \times 0,1$$

ou

$$\frac{109}{211} = 0,5 + (0,1 + \frac{90}{211} \times 0,1) \times 0,1 = 0,5 + 0,01 + \frac{90}{211} \times 0,01$$

e assim se poderá continuar a divisão até onde se quizer. A operação dispõe-se, n'este caso, como abaixo se vê

Typo do calculo

$$\begin{array}{rl}
3146154 & \\
6045 \ldots\ldots\ldots & 20635 \\
\hline
109 & \\
106 \ldots\ldots\ldots & \qquad 5 \\
3 \times 10 \ldots\ldots & \qquad 1 \\
9 \times 10 \ldots\ldots & \qquad 4 \\
\hline
\bar{1},3146154 = 0,2063551 & 2063551
\end{array}$$

425. **Problema.** *Calcular o producto de dois ou mais numeros inteiros ou decimaes empregando os logarithmos.*

0,00501. Tanto n'este como no outro caso, não devem pois calcular-se mais de dois algarismos na divisão de $\lg.X - \lg.A$ por Δ. Quando o numero está comprehendido entre 21809 e 100000 a menor differença é 40, e o erro é, por conseguinte, menor que $\frac{1}{20000} + \frac{1}{40}$ ou 0,02505.

N'este caso não é, portanto, prudente contar com mais de um algarismo n'aquella divisão.

O calculo reduz-se a procurar nas taboas (§ 423) o logarithmo de cada um dos factores, a sommar todos estes logarithmos e a procurar nas taboas (§ 424) o numero correspondente á somma achada, isto é, (§ 411) ao logarithmo do producto.

Seja o producto desconhecido

$$x = 4236{,}8 \times 0{,}000726 \times 0{,}08279 \times 0{,}0032754$$

Typo do calculo

$$\begin{array}{rl}
\lg.4236{,}8 & = 3{,}6270380 \\
\lg.0{,}000726 & = \bar{4}{,}8609366 \\
\lg.0{,}08279 & = \bar{2}{,}9179779 \\
\lg.0{,}0032754 & = \bar{3}{,}5152643 \\
\hline
\lg.x & = \bar{4}{,}9212168
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
2129 \ldots\ldots\ldots\ldots & 83409 \\
\hline
390 & 52 \\
260 & 75 \qquad\qquad 75 \\
0 & \qquad\qquad 8340975
\end{array}$$

$$x = 0{,}0008340975$$

Na addição dos logarithmos é necessario attender a que as mantissas são todas positivas e as caracteristicas podem ser positivas ou negativas. Na somma precedente vão 2 unidades da columna das decimas para a das caracteristicas e por isso o logarithmo do producto tem (§ 404) por caracteristica

$$2 + 3 - 4 - 2 - 3 = -4$$

Na pratica podem tornar-se positivas as caracteristicas dos logagarithmos de todos os factores, se porventura se julgar preferivel sommar numeros precedidos do mesmo signal a sommar numeros precedidos de signaes diversos. Basta para isso considerar cada caracteristica negativa como um subtractivo e effectuar a subtracção por complementos (§ 42), isto é, substituir cada caracteristica negativa pelo seu *complemento arithmetico*, sommar os logarithmos de caracteristicas positivas e subtrahir da somma todos os complementos, que se tiverem juntado ás parcellas. Deve, comtudo, advertir-se que no calculo por logarithmos se entende por *complemento arithmetico d'uma caracteristica* o que lhe falta para 10, ou para algum multiplo de 10, e não o que lhe falta para uma unidade da ordem immediatamente superior á do primeiro algarismo da esquerda. Conforme se toma o complemento arithmetico da caracteristica para 10, 20, 30, etc., assim se diz que a caracteristica tem 1, 2, 3, etc., complementos. Indica-se o numero de complementos que tem uma caracteristica collocando á direita e um pouco acima d'ella um numero igual de pequenos traços. Adoptada esta notação é

$$\bar{3}{,}8154449 = 7{,}8154449 - 10 = 7'{,}8154449 = 17''{,}8154449 = 27'''{,}8154449, \text{ etc.}$$

Calcular por meio dos complementos arithmeticos das caracteristicas o producto

$$x = 43568{,}9 \times 0{,}006254 \times 0{,}00028$$

Typo do calculo

$$\begin{array}{rcl}
\lg.43568{,}9 = 4\,,6391766 & \text{ou} & 4{,}6391766 \\
\lg.0{,}006254 = 7'\,,7961579 & & 7{,}7961579 - 10 \\
\lg.0{,}00028 = 6'\,,4471580 & & 6{,}4471580 - 10 \\
\hline
\lg.x = 18'',8824925 & & 18{,}8824925 - 20 \\
\lg.x = 8'\,,8824925 & \text{ou} & 8{,}8824925 - 10 = \bar{2}{,}8824925
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l}
76294 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4904 & \\
37 & 210 & 57 \\
\hline
7629437 & 390 & 36 \\
 & 48 &
\end{array}$$

$$x = 0{,}07629437$$

426. Logarithmo preparado *ou* **complemento do logarithmo** *d'um numero é o logarithmo do reciproco d'esse numero tomado com a mantissa positiva.*

Diz-se que dois numeros são reciprocos um do outro, quando o seu producto é 1. Os numeros 3 e $\frac{1}{3}$ são reciprocos entre si e o mesmo succede a $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$.

O logarithmo preparado de N, ou o complemento do seu logarithmo, designa-se abreviadamente por $\overline{\lg.}\,N$. D'esta convenção, e do que fica demonstrado (§ 415), resulta

$$\overline{\lg.}\,N = \lg.\frac{1}{N} = -\lg.N$$

Representando, em geral, por n e δ a caracteristica e a mantissa de $\lg.N$, é

$$\overline{\lg.}\,N = -(n+\delta) = -(n+1) + (1-\delta)$$

e, como $1-\delta$ é positivo, será $1-\delta$ a mantissa e $-(n+1)$ a caracteristica de $\overline{\lg.}\,N$.

A caracteristica do **logarithmo preparado,** *ou do* **complemento do logarithmo** *d'um numero obtem-se, pois, juntando* 1 *á caracteristica do logarithmo do numero e trocando o signal á somma. A mantissa do* **logarithmo preparado** *acha-se diminuindo de* 9 *cada um dos seus algarismos a partir da esquerda até ao ultimo algarismo significativo da direita, que se subtrahe de* 10.

Sendo

$$\lg.N = \bar{2}{,}8086025$$

será

$$\overline{\text{lg.}}\,N = -\overline{2},8086025 = -(-2+0,8086025) =$$
$$= -(-2+1)+(1-0,8086025) = 1,1913975$$

427. *Chama-se* **complemento arithmetico de um logarithmo** *ao numero que falta a esse logarithmo para completar* 1, 2, *ou mais dezenas.*

As expressões $10-\text{lg.}\,b$, $20-\text{lg.}\,b$, $30-\text{lg.}\,b$, etc., representam complementos arithmeticos de $\text{lg.}\,b$. Designam-se abreviadamente estes complementos arithmeticos pelos symbolos $c\,\text{lg.}\,b$, $c_2\,\text{lg.}\,b$, $c_3\,\text{lg.}\,b$, etc., que se lêem *complemento arithmetico do logarithmo de* b *para* 1, 2, 3, *etc., dezenas.*

Sendo

$$\text{lg.}\,b = 4,6830526$$

será

$$c\,\text{lg.}\,b = 10-4,6830526 = (9-4)+(1-0,6830526) = 5,3169474$$

$$c_2\,\text{lg.}\,b = 20-4,6830526 = (19-4)+(1-0,6830526) = 15,3169474$$

$$c_3\,\text{lg.}\,b = 30-4,6830526 = (29-4)+(1-0,6830526) = 25,3169474$$

e assim successivamente.

Suppondo $\text{lg.}\,b = \overline{2},6830526$

será

$$c\,\text{lg.}\,b = 10-\overline{2},6830526 = (9-(-2))+(1-0,6830526) = 11,3169474$$

$$c_2\,\text{lg.}\,b = 20-\overline{2},6830526 = (19-(-2))+(1-0,6830526) = 21,3169474$$

$$c_3\,\text{lg.}\,b = 30-\overline{2},6830526 = (29-(-2))+(1-0,6830526) = 31,3169474, \text{ etc.}$$

O complemento arithmetico d'um logarithmo de caracteristica positiva obtem-se subrahindo a caracteristica de $10-1$, $20-1$, $30-1$, etc., *conforme o complemento é de* 1, 2, 3, etc., *dezenas, e substituindo cada algarismo da mantissa a contar da esquerda pelo que lhe falta para* 9 *até ao ultimo significativo da direita, que se substitue pelo que lhe falta para* 10.

O complemento arithmetico d'um logarithmo de caracteristica negativa obtem-se juntando ao valor absoluto da caracteristica $10-1$, $20-1$, $30-1$, etc., *conforme o complemento é de* 1, 2, 3, etc., *dezenas, e procedendo com a mantissa exactamente como no caso de ser positiva a caracteristica.*

428. O logarithmo d'um quociente póde calcular-se por tres meios differentes: 1.º subtrahindo o logarithmo do divisor do logarithmo do dividendo e tornando positiva a parte decimal da differença, quando aquelle logarithmo seja maior que o do dividendo; 2.º sommando o logarithmo do dividendo com o logarithmo preparado ou complemento do logarithmo do divisor; 3.º sommando o logarithmo do dividendo com o complemento arithmetico do logarithmo do divisor e subtrahindo da somma tantas dezenas, quantas forem as contidas n'este complemento arithmetico. Quando se

applica este processo tornam-se geralmente positivas todas as caracteristicas.

O primeiro processo funda-se na propriedade (§ 414) dos logarithmos

$$\lg.\left(\frac{a}{b}\right) = \lg.a - \lg.b$$

e, como nas taboas dos logarithmos sómente se encontram as mantissas positivas, segue-se que o valor de $\frac{a}{b}$ não póde tirar-se d'ellas, senão fôr positiva a parte decimal da differença $\lg.a - \lg.b$. Quando, porém, seja negativa, isto é, quando seja $a < b$, é facil (§ 424) tornal-a positiva.

Da mesma propriedade dos logarithmos deduz-se (§§ 404 e 426) a igualdade

$$\lg.\left(\frac{a}{b}\right) = \lg.a + (-\lg.b) = \lg.a + \overline{\lg.}\,b$$

em que se funda o segundo processo.

Póde tambem chegar-se ao mesmo resultado considerando o quociente $\frac{a}{b}$ como um producto $a \times \frac{1}{b}$, porque então é (§§ 411 e 426)

$$\lg.\left(\frac{a}{b}\right) = \lg.a + \lg.\frac{1}{b} = \lg.a + \overline{\lg.}\,b$$

O terceiro processo funda-se na igualdade

$$\lg.\left(\frac{a}{b}\right) = \lg.a + (10m - \lg.b) - 10m \quad \text{ou} \quad = \lg.a + c_m \lg.b - 10m$$

A differença $10m - \lg.b$ é (§ 426) o complemento arithmetico de $\lg.b$ e por consequencia sommando o logarithmo do dividendo, $\lg.a$, com o complemento arithmetico, $10m - \lg.b$, do logarithmo do divisor obtem-se um resultado, $\lg.a + (10m - \lg.b)$, do qual devem subtrahir-se os complementos, $10m$, para se ter afinal o logarithmo do quociente $a:b$.

Sendo positiva a differença $10 - \lg.b$, é sufficiente fazer $m = 1$ e por consequencia

$$\lg.\left(\frac{a}{b}\right) = \lg.a + c\lg.b - 10$$

Em geral, da igualdade evidente

$$\lg.a - \lg.b = \lg.a + [10m - (10m + \lg.b)]$$

resulta $$\lg.\left(\frac{a}{b}\right) = \lg.a + c_m(10m + \lg.b)$$

e, como $10m + \lg.b$ é o valor que toma $\lg.b$, quando a caracteristica é substituida pelo seu complemento arithmetico para $10m$, a fim de a tornar positiva (§ 425), segue-se que o *logarithmo d'um quociente é igual á somma do logarithmo do dividendo com o com-*

plemento arithmetico do logarithmo do divisor, quando o numero de dezenas d'este complemento é igual ao numero de dezenas addicionadas á caracteristica do logarithmo do divisor para a tornar positiva. Não sendo iguaes estes dois numeros, o logarithmo do quociente differe da somma do logarithmo do dividendo com o complemento arithmetico do logarithmo do divisor em um multiplo de 10. Com effeito, da igualdade

$$\lg. a - \lg. b = \lg. a + [10m - (10n + \lg. b)] - 10m + 10n$$

deduz-se $$\lg.\left(\frac{a}{b}\right) = \lg. a + c_m(10n + \lg. b) - 10m + 10n$$

Quando é $m > n$, tem-se

$$\lg.\left(\frac{a}{b}\right) = [\lg. a + c_m(10n + \lg. b)] - 10(m - n)$$

quando é $m < n$

$$\lg.\left(\frac{a}{b}\right) = [\lg\ a + c_m(10n + \lg. b)] + 10(n - m)$$

e finalmente, quando é $m = n$,

$$\lg.\left(\frac{a}{b}\right) = \lg. a + c_m(10m + \lg. b)$$

429. **Problema.** *Calcular por logarithmos o valor d'um quociente.*

Exemplo I. $$x = \frac{0{,}006285}{427}$$

Typo do calculo pelo primeiro processo

$$\begin{array}{rl}
\lg. 0{,}006285 = & \bar{3}{,}7983053 \\
\lg. 427 = & 2{,}6304279 \\
\hline
\lg. x = & -4{,}8321226 = \bar{5}{,}1678774 \\
14718 \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots 8488 \\
97 & 28600 \mid 295 \\
\hline
1471897 & 2050 \quad 96 \\
 & 280
\end{array}$$

$$x = 0{,}00001471897$$

Typo do calculo pelo segundo processso

$$\begin{array}{rl}
\lg. 0{,}006285 = & \bar{3}{,}7983053 \\
\overline{\lg.} 427 = & \bar{3}{,}3695721 \\
\hline
\lg. x = & \bar{5}{,}1678774
\end{array}$$

etc.

Typo do calculo pelo terceiro processo

$$\begin{array}{rlcr}
\lg. 0{,}006285 = & 7',7983053 & \text{ou} & 7{,}7983053 - 10 \\
c\lg. 427 - 10 = & 7',3695721 & \text{ou} & 7{,}3695721 - 10 \\
\hline
\lg. x = & 15'',1678774 & \text{ou} & 15{,}1678774 - 20 \\
\lg. x = & \bar{5}\ ,1678774 & & \\
\text{etc.} & & &
\end{array}$$

Exemplo II. $x = \frac{5078}{0,043}$

Typo do calculo pelo primeiro processo

$$\begin{array}{r} \lg.5078 = 3,7056927 \\ \lg.0,043 = \overline{2},6334685 \\ \hline \lg.x = 5,0722242 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2131 \ldots\ldots\ldots\ldots & 11809 \\ \hline 11100 & 368 \quad\quad 30 \\ 060 & 30 \quad\quad 1180930 \end{array}$$

$$x = 118093$$

Typo do calculo pelo segundo processo

$$\begin{array}{r} \lg.5078 = 3,7056927 \\ \overline{\lg.0,043} = 1,3665315 \\ \hline \lg.x = 5,0722242 \end{array}$$

etc.

Typo do calculo pelo terceiro processo

$$\begin{array}{rl} \lg.0,043 = & 8',6334685 \quad \text{ou} \quad 8,6334685 - 10 \\ \overline{c(10 + \lg.0,043)} = & 1\ ,3665315 \\ \lg.5078 = & 3\ ,7056927 \\ \hline \lg.x = & 5\ ,0722242 \end{array}$$

etc.

No exemplo I foi necessario subtrahir da somma, $\lg.a + c\lg.b$, um certo multiplo de 10, n'este exemplo II tornou-se desnecessaria essa subtracção, porque, se tomou o complemento arithmetico a $10 + \lg.b$, em vez de se tomar a $\lg.b$ (§ 428).

430. Problema. *Calcular por logarithmos uma potencia de qualquer numero inteiro ou decimal.*

Este problema resolve-se por meio da propriedade (§ 413) do logarithmo de potencia. Convêm comtudo observar que, se o logarithmo da base estiver augmentado de um certo numero de dezenas, m por exemplo, o logarithmo da potencia terá a mais um numero de dezenas igual ao producto de m pelo expoente da potencia.

Sendo b^p a potencia que se quer calcular, será $p\log.b$ o seu logarithmo. Suppondo, porém, que se tomou $10m + \lg.b$, em vez de $\lg.b$, como é uso fazer-se, quando se quer tornar (§ 425) positiva a caracteristica de $\lg.b$, chegar-se-ha ao resultado $p(10m + \lg.b)$ ou $10mp + p\lg.b$, do qual devem subtrahir-se mp dezenas para se obter o valor de $p\lg.b$ ou $\lg.b^p$.

Exemplo I. $x = (32,65)^6$

Typo do calculo

$$\lg. 32{,}65 = 1{,}5138832$$
$$6$$
$$\lg. x = 9{,}0832992$$
$$2876 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 12114$$
$$11600 \mid 358 \qquad 32$$
$$860 \quad 32 \qquad 1211432$$
$$144$$
$$x = 1211432000$$

Exemplo II.

$$x = (0{,}06285)^9$$

Typo do calculo pelo primeiro processo

$$\lg. 0{,}06285 = \bar{2}{,}7983053 \quad \text{ou} \quad -2 + 0{,}7983053$$
$$9 \qquad\qquad\qquad 9$$
$$\lg. x = \bar{11}{,}1847477 \qquad -18 + 7{,}1847477$$
$$15301 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7198$$
$$98 \qquad 27900 \mid 284$$
$$1530198 \qquad 2340 \quad 98$$
$$68$$
$$x = 0{,}00000000001530198$$

Typo do calculo pelo segundo processo

$$\lg. 0{,}06285 = 8',7983053 \quad \text{ou} \quad 8{,}7983053 - 10$$
$$9 \qquad\qquad\qquad 9$$
$$\lg. x = 79^{\text{IX}},1847477 \qquad 79{,}1847477 - 90$$
$$\lg. x = \bar{11},1847477$$
etc.

431. **Problema.** *Calcular por logarithmos uma potencia de qualquer quebrado, ou quociente.*

Calcula-se o logarithmo do quebrado, ou quociente e depois multiplica-se pelo expoente da potencia.

Exemplo I.

$$x = \left(\frac{27}{53}\right)^4$$

Typo do calculo pelo primeiro processo

$$\lg. 27 = 1{,}4313638$$
$$\lg. 53 = 1{,}7242759$$
$$\lg.\left(\frac{27}{53}\right) = -0{,}2929121 = \bar{1}{,}7070879$$
$$4$$
$$\lg. x = \bar{2}{,}8283516$$
$$67352 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3505$$
$$2 \qquad 110 \mid 65$$
$$673522 \qquad 45 \quad 1$$
$$x = 0{,}0673522$$

Typo do calculo pelo segundo processo

$$\begin{array}{r} \lg.27 = 1{,}4313638 \\ \overline{\lg.53} = \overline{2}{,}2757241 \\ \hline \lg.\left(\frac{27}{53}\right) = \overline{1}{,}7070879 \end{array}$$

etc.

Typo do calculo pelo terceiro processo

$$\begin{array}{rl} \lg.27 = & 1{,}4313638 \\ c\lg.53 - 10 = & 8'{,}2757241 \\ \hline \lg.\left(\frac{27}{53}\right) = & 9'{,}7070879 \\ & 4 \\ \hline \lg.x = & 38^{\text{iv}}{,}8283516 \\ \lg.x = & \overline{2}{,}8283516 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r} 1{,}4313638 \\ 8{,}2757241 - 10 \\ \hline 9{,}7070879 - 10 \\ 4 \\ \hline 38{,}8283516 - 40 \end{array}$$

etc.

Exemplo II. $x = \left(\frac{0{,}0578}{0{,}3624}\right)^3$

Typo do calculo pelo primeiro processo

$$\begin{array}{rl} \lg.0{,}0578 = & \overline{2}{,}7619278 \\ \lg.0{,}3624 = & \overline{1}{,}5591882 \\ \hline \lg.\left(\frac{0{,}0578}{0{,}3624}\right) = & -0{,}7972604 = \overline{1}{,}2027396 \\ & 3 \\ \hline \lg.x = & \overline{3}{,}6082188 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 40571 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2157 \\ \hline 3 & 310 \mid 107 \\ \hline 405713 & 96 \quad 2 \end{array}$$

$$x = 0{,}00405713$$

Typo do calculo pelo segundo processo

$$\begin{array}{r} \lg.0{,}0578 = \overline{2}{,}7619278 \\ \overline{\lg.0{,}3624} = 0{,}4408118 \\ \hline \lg.\left(\frac{0{,}0578}{0{,}3624}\right) = \overline{1}{,}2027396 \end{array}$$

etc.

Typo do calculo pelo terceiro processo

$$\begin{array}{rl} \lg.0{,}0578 = & 8'\ {,}7619278 \\ c(10 + \lg.0{,}3624) = & 0\ {,}4408118 \\ \hline \lg.\left(\frac{0{,}0578}{0{,}3624}\right) = & 9'\ {,}2027396 \\ & 3 \\ \hline \lg.x = & 27'''{,}6082188 \\ \lg.x = & \overline{3}\ {,}6082188 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r} 8{,}7619278 - 10 \\ 10 - 9{,}5591882 \\ \hline 9{,}2027396 - 10 \\ 3 \\ \hline 27{,}6082188 - 30 \end{array}$$

etc.

432. Problema. *Calcular por logarithmos o valor de um quociente, no caso do divisor ser uma potencia indicada.*

Exemplo I. $x = \frac{25}{3^8}$

Typo do calculo pelo primeiro processo

$$\begin{array}{rl}
\lg.3 = & 0{,}4771213 \\
 & \underline{\qquad\qquad 8} \\
\lg.3^8 = & 3{,}8169704 \\
\lg.25 = & \underline{1{,}3979400} \\
\lg.x = & -2{,}4190304 = \bar{3}{,}5809696 \\
38103 \ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{\ldots\ldots 9592} \\
\underline{9} & \qquad\qquad 1040 \mid \underline{114} \\
381039 & \qquad\qquad\quad 14 \quad 9
\end{array}$$

$$x = 0{,}00381039$$

Typo do calculo pelo segundo processo

$$\begin{array}{rl}
\lg.3 = & 0{,}4771213 \\
 & \underline{\qquad\qquad 8} \\
\lg.3^8 = & \underline{3{,}8169704} \\
\lg.3^8 = & \bar{4}{,}1830296 \\
\lg.25 = & \underline{1{,}3979400} \\
\lg.x = & \bar{3}{,}5809696 \\
 & \text{etc.}
\end{array}$$

Typo do calculo pelo terceiro processo

$$\begin{array}{rl}
\lg.3 = & 0{,}4771213 \\
 & \underline{\qquad\qquad 8} \\
\lg.3^8 = & \underline{3{,}8169704} \\
c\lg.3^8 - 10 = & 6'{,}1830296 \\
\lg.25 = & \underline{1{,}3979400} \\
\lg.x = & 7'{,}5809696 \\
\lg.x = & 3{,}5809696 \\
 & \text{etc.}
\end{array}
\quad \text{ou} \quad
\begin{array}{r}
6{,}1830296 - 10 \\
\underline{1{,}3979400} \\
7{,}5809696 - 10
\end{array}$$

Exemplo II. $x = \frac{47}{(0{,}096)^3}$

Typo do calculo pelo primeiro processo

$$\begin{array}{rl}
\lg.0{,}096 = & \bar{2}{,}9822712 \\
 & \underline{\qquad\qquad 3} \\
\lg.(0{,}096)^3 = & \bar{4}{,}9468136 \\
\lg.47 = & \underline{1{,}6720979} \\
\lg.x = & 4{,}7252843 \\
 & \underline{2826} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 53123 \\
 & \qquad 170 \mid \underline{82} \qquad\qquad\quad \underline{2} \\
 & \qquad\quad 6 \quad 2 \qquad\qquad 531232
\end{array}$$

$$x = 53123{,}2$$

Typo do calculo pelo segundo processo

$$\begin{array}{r} \lg.0{,}096 = \bar{2}{,}9822712 \\ 3 \\ \hline \lg.(0{,}096)^3 = \bar{4}{,}9468136 \\ \hline \overline{\lg.(0{,}096)^3} = 3{,}0531864 \\ \lg.47 = 1{,}6720979 \\ \hline \lg.x = 4{,}7252843 \end{array}$$

etc.

Typo do calculo pelo terceiro processo

$$\begin{array}{r} \lg.0{,}096 = 8'\ ,9822712 \\ 3 \\ \hline \lg.(0{,}096)^3 = 26'''{,}9468136 = 6'{,}9468136 \\ \hline c(10 + \lg.0{,}096^3) = 3\ ,0531864 \\ \lg.47 = 1\ ,6720979 \\ \hline \lg.x = 4\ ,7252843 \end{array}$$

etc.

433. **Problema.** *Calcular por logarithmos qualquer raiz d'um numero dado.*

Effectua-se o calculo dividindo o logarithmo do numero pelo indice da raiz (§ 416), e procurando nas taboas dos logarithmos o numero correspondente a este quociente. Quando a caracterisca do logarithmo é negativa e multipla do divisor, a divisão faz-se, immediatamente. A parte inteira do quociente obtem-se dividindo a caracteristica do logarithmo pelo indice da raiz e a parte decimal dividindo a mantissa pelo mesmo indice. Quando a caracteristica é negativa, mas não é multipla do indice da raiz, convém, antes de effectuar a divisão, tornar a caracteristica multipla do indice ajuntando-lhe unidades negativas e, para annular o erro que d'ahi provém, juntar igual numero de unidades positivas á mantissa. Sendo -2 a caracteristica e δ a mantissa, e suppondo que o divisor é 5, ter-se-ha evidentemente

$$\frac{-2+\delta}{5} = \frac{-5+3+\delta}{5} = -1 + \frac{3+\delta}{5}$$

e a fracção $\frac{3+\delta}{5}$ reduzida a dizima será a mantissa do logarithmo da raiz.

Quando o logarithmo do numero, ao qual se pretende extrahir a raiz, tem a caracteristica augmentada de algumas dezenas, é conveniente, antes de proceder á divisão, juntar á caracteristica assim augmentada tantas dezenas, quantas sejam sufficientes para tornar multiplo do indice da raiz o numero total das dezenas a mais na caracteristica.

Suppondo, por exemplo, que, em vez de se dividir $\lg.a$ por n,

se divide $\lg. a + 10m$ por n, commette-se um erro $\frac{10m}{n}$, que, em geral, não é multiplo de 10. Augmentando, porém, sufficientemente o numero m, a ponto de o tornar multiplo de n, aquelle quociente reduz-se a um multiplo de 10 e basta subtrahir este multiplo de $\frac{\lg. a + 10m}{n}$, para se obter o valor de $\frac{\lg. a}{m}$, que é o que effectivamente se procura.

Exemplo I. $x = \sqrt[3]{45683794}$

Typo do calculo

$$\begin{array}{l}
\lg. 45683 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6597546 \\
794 \times 95 \qquad\qquad\qquad\qquad 75430 \\
\hline
3 \lg. x = \lg. 45683794 = 7{,}6597621 \\
\qquad\qquad \lg. x = 2{,}5532540 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2517 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 35748 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 230 \;|\; 122 \qquad\qquad\qquad 2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 108 \;\;\; 1 \qquad\qquad\qquad 357482
\end{array}$$

$$x = 357{,}482$$

Exemplo II. $x = \sqrt[4]{0{,}0062785}$

Typo do calculo pelo primeiro processo

$$\begin{array}{l}
4 \lg. x = \lg. 0{,}0062785 = \bar{3}{,}7978559 = -4 + 1{,}7978559 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \lg. x = \bar{1}{,}4494639 \\
28149 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4630 \\
\quad 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 90 \;|\; 154 \\
281491 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$x = 0{,}281491$$

Typo do calculo pelo segundo processo

$$\begin{array}{rll}
\lg. 0{,}0062785 = & 7',7978559 & \text{ou} \quad 7{,}7978559 - 10 \\
4 \lg. x = & 37^{\text{IV}},7978559 & \quad\;\; 37{,}7978559 - 40 \\
\lg. x = & 9',4494639 & \quad\;\; 9{,}4494639 - 10 \\
\lg. x = & \bar{1}\,,4494639 & \\
\text{etc.} & &
\end{array}$$

Exemplo III. $x = \sqrt[12]{\frac{0{,}82}{0{,}064}}$

Typo do calculo pelo primeiro processo

$$\begin{array}{l}
\lg. 0{,}82 = \bar{1}{,}9138139 \\
\lg. 0{,}064 = \bar{2}{,}8061800 \\
\hline
12 \lg. x = \lg. \frac{0{,}82}{0{,}064} = 1{,}1076339 \\
\qquad\qquad \lg. x = 0{,}0923028 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2995 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 12368 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3300 \;|\; 351 \qquad\qquad\qquad 9 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 141 \;\;\; 9 \qquad\qquad\qquad 123689
\end{array}$$

$$x = 1{,}23689$$

Typo do calculo pelo segundo processo

$$\begin{array}{r} \lg.0{,}064 = \bar{2}{,}8061800 \\ \hline \overline{\lg.}\,0{,}064 = 1{,}1938200 \\ \lg.0{,}82 = \bar{1}{,}9138139 \\ \hline 12\lg.x = 1{,}1076339 \end{array}$$

etc.

Typo do calculo pelo terceiro processo

$$\begin{array}{rl} \lg.0{,}064 = & 8',8061800 \\ \hline c(10+\lg.0{,}064) = & 1\ ,1938200 \\ \lg.0{,}82 = & 9',9138139 \\ \hline 12\lg.x = & 11',1076339 \\ 12\lg.x = & 1\ ,1076339 \end{array}$$

etc.

ou

$$\begin{array}{r} 8{,}8061800 - 10 \\ \hline 10 - 8{,}8061800 \\ 9{,}9138139 - 10 \\ \hline 11{,}1076339 - 10 \end{array}$$

434. **Problema.** *Calcular por logarithmos o numero de termos de uma progressão geometrica, suppondo conhecido o primeiro termo, o ultimo e a rasão.*

A formula do termo geral é (§ 378)

$$u = a\,r^{n-1}$$

Applicando os logarithmos a esta formula tem-se (§§ 411 e 413)

$$\lg.u = \lg.a + (n-1)\lg.r$$

e por consequencia $\lg.u - \lg.a = (n-1)\lg.r$

e $n - 1 = \frac{\lg.u - \lg.a}{\lg.r}$ ou $n = \frac{\lg.u - \lg.a}{\lg.r} + 1$

Exemplo. $a = 0{,}62 \qquad r = 3{,}2 \qquad u = 7319673$

$$\begin{array}{rl} \lg.u = & 16',8644917 \\ \lg.a = & 9',7923917 \\ \lg.u - \lg.a = & 7\ ,0721000 \\ \lg.r = & 0\ ,5051500 \end{array}$$

$$n = \frac{7{,}07210}{0{,}50515} + 1 = 14 + 1$$

N'este exemplo ajuntou-se 1 dezena ao additivo, porque, ficando este com tantas dezenas a mais como o subtractivo, podem supprimir-se estas dezenas (§ 36) tanto ao additivo como ao subtractivo.

Em geral reduzem-se os dois termos de uma subtracção a conter igual numero de dezenas a mais, acrescentando algumas ao que tiver menos, ou supprimindo-as ao que tiver mais. Este meio é preferivel ao primeiro.

EXERCICIOS

I. Qual é a base do systema de logarithmos em que é $\lg. 729 = 6$?

II. Demonstrar que a differença entre os logarithmos de dois numeros inteiros consecutivos diminue, quando esses numeros augmentam de valor.

III. Calcular o logarithmo vulgar de 24, suppondo conhecidos os logarithmos de 3 e de 5.

IV. Calcular por logarithmos a decima potencia de $\frac{3}{0,8}$.

V. Calcular o valor de $\sqrt[6]{\left(\frac{13}{7}\right)^5}$

VI. Calcular o valor de $\frac{5 \times 0,726 \times 293,6548}{0,063}$.

VII. Calcular o valor de $\frac{\sqrt{0,435} \times (0,063)^3}{\sqrt[4]{72} \times \sqrt[5]{0,064}}$.

VIII. Calcular o valor de $135 \times \frac{18}{25} \times \sqrt{\frac{227}{1840} \times \frac{934}{0,745}}$.

IX. Calcular o valor de $\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[8]{8}}$.

X. Calcular o valor de $(52648 \times \frac{2}{13657} \times 0,06234)^2$.

XI. Calcular o valor de $\left(\sqrt[4]{\frac{2,617}{0,51879}}\right)^3$.

XII. Calcular o valor de $\frac{1}{2 \times 0,208 \times 0,0049} \sqrt{\frac{9,8088 \times 12,65}{3,1416 \times 8,8}}$.

XIII. Demonstrar que a relação entre os logarithmos de dois numeros dados é a mesma, seja qual fôr o systema, em que se tomem esses logarithmos.

XIV. Alséphadi conta, commentando um poema de *Tograi*, que Sessa, inventor do jogo do xadrez, instado pelo rei dos indios, a quem tinha dedicado o seu jogo, para dizer que recompensa desejava receber por tão notavel invenção, se limitára a pedir 1 grão de trigo pela primeira casa do xadrez, 2 pela segunda, 4 pela terceira, 8 pela quarta, e assim successivamente a dobrar até á ultima das 64 casas.

O rei ficou indignado com um pedido tão mesquinho e tão improprio da sua magnificencia; porém, como Sessa insistisse n'elle, mandou-o satisfazer. Feito o calculo reconheceu-se que era, ao contrario, tão exagerado o pedido, que o rei teve de confessar a sua insolvencia, declarando a Sessa que admirava ainda mais a subtileza do pedido, que a invenção do jogo.

Quantos grãos de trigo pediu Sessa?

PARTE II

NUMEROS CONCRETOS

LIVRO I

MEDIDAS E MOEDAS LEGAES—OPERAÇÕES SOBRE NUMEROS CONCRETOS

CAPITULO I

Medidas e moedas legaes
Reducção de umas unidades a outras

435. Conhecida a noção de igualdade entre grandezas do mesmo genero é facil comparar umas grandezas com outras. A noção de igualdade obtem-se promptamente, quando as grandezas se reduzem a collecções de objectos similhantes, ou mesmo identicos debaixo de algum ponto de vista especial. A unidade adoptada para medir taes collecções só póde ser um dos objectos de que ellas se compõem, ou um grupo d'elles. Quando, porém, as grandezas não se reduzem a collecções de objectos, quando são susceptiveis de variar continuamente, a unidade póde ser qualquer, comtanto que seja homogenea com a grandeza com que se quer comparar.

As unidades conhecidas pelo seu nome devem, pelo menos, ser tantas, quantos são os generos de grandezas, e convem mesmo que sejam em numero ainda maior, para que as grandezas do mesmo genero possam comparar-se, segundo as circumstancias, com unidades maiores ou menores.

Na primeira parte da arithmetica estudaram-se as operações sobre os numeros e as suas principaes propriedades, considerando os numeros abstractamente, isto é, sem attenção á grandeza maior ou menor a que elles se referem, quando representam quantidades. N'esta segunda parte, tratar-se-ha das operações executadas sobre os numeros concretos, e portanto attender-se-ha á especie de unidade, que tiver sido adoptada.

436. Os principaes generos de quantidades são: a *extensão*, o *peso*, o *tempo* e o *dinheiro*. O genero extensão abrange tres especies de quantidades, que são as *lineares*, as *superficiaes* e as de *volume*. As unidades correspondentes ao genero extensão comprehendem, pois, as *unidades lineares*, as *unidades superficiaes* e as *unidades de volume*.

A lei de cada paiz estabelece, quaes são as unidades de extensão e de peso, que podem ser empregadas nas transacções publicas. Em Portugal o systema legal de medidas e pesos é o *systema metrico* decimal decretado em 12 de dezembro de 1852.

As unidades de tempo regulam-se geralmente pelos movimentos

dos corpos celestes, e por isso são proximamente as mesmas em todos os paizes.

As unidades de dinheiro, ou *moedas*, são tambem reguladas por leis especiaes, que variam de paiz para paiz.

Em Portugal as leis, que regulam as moedas, são a de 29 de julho de 1854 e a de 31 de maio de 1882.

437. A unidade fundamental do systema metrico decimal é o **metro** (μετρον, medida).

Metro[1] *é a decima millionessima parte do quarto do meridiano terrestre supposto medido sobre a superficie do mar em quietação.*

Os multiplos e submultiplos do metro formam com esta unidade uma serie de unidades lineares, cada uma das quaes é 10 vezes maior que a immediatamente inferior.

Os nomes dos multiplos do metro formam-se antepondo ao nome d'esta unidade principal as palavras gregas, *deca*, *hecto*, *kilo* e *myria*, que significam 10, 100, 1000 e 10000, e os dos submultiplos da mesma unidade formam-se antepondo ao mesmo nome as palavras latinas *deci*, *centi* e *milli*, que tambem correspondem a 10, 100 e 1000.

Os nomes e valores das unidades lineares são portanto:

Myriametro	(1^{Mm})	vale	10000	metros	ou	10^{Km}
Kilometro	(1^{Km})	»	1000	»	»	10^{Hm}
Hectometro	(1^{Hm})	»	100	»	»	10^{Dm}
Decametro	(1^{Dm})	»	10	»	»	10^{m}
Metro	(1^{m})	»	1	metro	»	10^{dm}
Decimetro	(1^{dm})	»	0,1	»	»	10^{cm}
Centimetro	(1^{cm})	»	0,01	»	»	10^{mm}
Millimetro	(1^{mm})	»	0,001	»		

O myriametro emprega-se na medição de grandes distancias itine-

---

[1] Tem-se chamado especialmente *systema metrico* ao complexo de unidades de extensão, peso, tempo e dinheiro, decretadas pelo governo francez em 2 de novembro de 1801 e tornadas obrigatorias desde o 1.º de janeiro de 1840 por lei de 4 de julho de 1837.

A commissão franceza dos pesos e medidas, adoptando para unidade linear a mesma toeza, que anteriormente (de 1737 a 1741) havia sido empregada no Peru, na medição d'um arco, e tomando $\frac{1}{334}$ para valor do achatamento da terra, achou o quarto do meridiano terrestre, que passa por Paris, igual a 5130740,74074 toezas do Peru e por consequencia a sua decima millionessima parte igual a 0,513074074074 toezas do Peru, ou 443,296 linhas. Foi esta effectivamente a grandeza, que deu ao metro, a lei franceza de 1801.

Depois das ultimas operações geodesicas, e principalmente depois das que foram executadas na Allemanha, Russia e India, reconheceu-se que o quarto do meridiano é maior do que se havia supposto, e que o seu comprimento expresso em toezas do Peru é 5131777,50. D'este valor conclue-se que o metro deveria ser igual a 0,51317775 toezas ou 443,386 linhas. Este ultimo valor do quarto do meridiano ainda não é reputado pela sciencia isento de erros.

Distingue um metro do outro chamando ao primeiro, o unico que tem sido adoptado, *metro legal* e ao segundo *metro definitivo*.

rarias; o meio myriametro, ou *legua metrica*, que tem 5000 metros, e o kilometro empregam-se nos trabalhos de estradas e na medida de pequenas distancias itinerarias; o hectometro e o decametro têem a sua principal applicação nas questões de agricultura e nos levantamentos de plantas topographicas; o metro e o decimetro empregam-se no commercio; e finalmente o centimetro e o millimetro são unidades apenas usadas nas questões de sciencia, que exigem maior exactidão.

438. Além d'estas medidas lineares ha as que servem para representar a extensão de um arco de circulo.

A circumferencia inteira de um circulo, seja qual fôr o seu raio, divide-se em 360 *graus*, o grau em 60 *minutos* e o minuto em 60 *segundos*. Esta divisão da circumferencia em graus, minutos e segundos chama-se *divisão sexagesimal*.

Outro modo de graduar a circumferencia, chamado *divisão centesimal*, consiste em a dividir em 4 *quadrantes*, o quadrante em 100 *grados* ou *graus centesimaes*, o grado em 100 *minutos centesimaes* e o minuto em 100 *segundos centesimaes*.

439. A unidade principal das unidades de superficie é o **metro quadrado**.

Metro quadrado, *é a extensão superficial igual á de um* **quadrado,** *que tem de lado um metro.*

Os multiplos e submultiplos do metro quadrado formam com esta unidade uma serie de unidades de superficie, cada uma das quaes é 100 vezes maior que a immediatamente inferior.

Os nomes dos multiplos e submultiplos do metro quadrado formam-se, como os dos multiplos e submultiplos do metro, não obstante não ser decupla, mas centupla a rasão da sua progressão.

Eis aqui os nomes e valores das unidades de superficie ou de área:

Myriametro quadrado	(1^{Mm2})	vale	100000000	metros quadrados	ou 100^{Km2}
Kilometro quadrado	(1^{Km2})	»	1000000	»	» 100^{Hm2}
Hectometro quadrado	(1^{Hm2})	»	10000	»	» 100^{Dm2}
Decametro quadrado	(1^{Dm2})	»	100	»	» 100^{m2}
Metro quadrado	(1^{m2})	»	1	metro quadrado	» 100^{dm2}
Decimetro quadrado	(1^{dm2})	»	0,01	»	» 100^{cm2}
Centimetro quadrado	(1^{cm2})	»	0,0001	»	» 100^{mm2}
Millimetro quadrado	(1^{mm2})	»	0,00001	»	

O decimetro quadrado, por exemplo, é a superficie equivalente á de um quadrado, que tem de lado um decimetro linear.

Construindo um quadrado com um decimetro linear de lado, dividindo cada um dos quatro lados em 10 partes iguaes, ou centimetros, e tirando rectas dos pontos de divisão de cada lado para os pontos correspondentes do lado opposto, formam-se 100 pequenos quadrados, ou 10 fiadas de 10 quadradinhos cada uma. Qualquer d'estes pequenos quadrados é um centimetro quadrado, e por

consequencia o decimetro quadrado é effectivamente igual a 100 centimetros quadrados. Do mesmo modo se reconhece, que o metro quadrado tem 100 decimetros quadrados, o decametro quadrado 100 metros quadrados e assim successivamente.

Não deve, pois, confundir-se 1, 2, ou mais decimetros quadrados ($0^{m^2},01$; $0^{m^2},02$, etc.) com 1, 2, ou mais decimos de metro quadrado ($0^{m^2},1$; $0^{m^2},2$, etc.), nem 1, 2, ou mais centimetros quadrados com 1, 2, ou mais centesimos do metro quadrado, etc. O motivo por que podem confundir-se umas d'estas grandezas com outras, é terem-se applicado a unidades, que variam em rasão centupla, nomes, que parecem indicar que ellas seguem a rasão decupla.

440. Nas questões de agrimensura empregam-se geralmente só tres d'estas unidades de superficie, o *hectometro quadrado*, o *decametro quadrado* e o *metro quadrado*, que então recebem nomes especiaes.

A principal d'estas unidades tem a denominação de **are** e equivale ao *decametro quadrado*. O **are** tem só um multiplo, que se chama **hectare**, e um submultiplo, que é o **centiare**. O hectare corresponde ao hectometro quadrado e o centiare ao metro quadrado.

Os nomes e valores d'estas diversas unidades são, pois,

Hectare	(1^{Ha})	vale	100 ares	ou	1^{Hm2}
Are	(1^{a})	»	1 are	»	1^{Dm2}
Centiare	(1^{ca})	»	0,01 »	»	1^{m2}

441. A unidade principal entre as unidades de volume é o **metro cubico**.

Metro cubico *é o volume igual ao de um cubo, que tem de lado um metro.*

Os multiplos e submultiplos do metro cubico formam com esta unidade uma serie de unidades de volume, cada uma das quaes é 1000 vezes maior, que a immediatamente inferior. Os nomes d'estas unidades formam-se, como os das unidades lineares, não obstante não ser decupla a rasão entre ellas.

Os nomes e valores das unidades de volume vem, pois, a ser:

Myriametro cubico	(1^{Mm3})	vale	1000000000000^{m3}	ou	1000^{Km3}
Kilometro cubico	(1^{Km3})	»	1000000000^{m3}	»	1000^{Hm3}
Hectometro cubico	(1^{Hm3})	»	1000000^{m3}	»	1000^{Dm3}
Decametro cubico	(1^{Dm3})	»	1000^{m3}	»	1000^{m3}
Metro cubico	(1^{m3})	»	1^{m3}	»	1000^{dm3}
Decimetro cubico	(1^{dm3})	»	$0^{m3},001$	»	1000^{cm3}
Centimetro cubico	(1^{cm3})	»	$0^{m3},000001$	»	1000^{mm3}
Millimetro cubico	(1^{mm3})	»	$0^{m3},000000001$		

Decompondo um decimetro quadrado em 100 centimetros quadrados (§ 439), e imaginando assente sobre cada um d'estes centimetros quadrados um cubo, fórma-se uma camada de 100 centimetros cubicos, cuja base tem um decimetro quadrado de super-

ficie e a altura um centimetro linear. Assentando sobre esta camada outra inteiramente igual á primeira, e sobre a segunda uma terceira e assim successivamente, forma-se uma serie de volumes, com um decimetro quadrado de base, tendo por altura tantos centimetros lineares, quantas as camadas, que se sobrepozerem. Logo que o numero de camadas seja 10, o volume equivalerá ao de um decimetro cubico, e como elle comprehende 10 camadas de 100 centimetros cubicos cada uma, segue-se que o numero total de centimetros cubicos contidos em 1 decimetro cubico é 1000. Do mesmo modo se reconhece que qualquer das outras unidades de volume contém 1000 unidades de ordem inferior.

Não se deve, pois, confundir 1, 2, 3, etc. decimetros cubicos ($0^{m^3},001$; $0^{m^3},002$; $0^{m^3},003$; etc.), por exemplo, com 1, 2, 3, etc. decimos do metro cubico ($0^{m.3},1$; $0^{m.3},2$; $0^{m^3},3$; etc.).

Geralmente não se empregam na pratica os multiplos do metro cubico.

442. Na medida das madeiras de construcção, das lenhas, etc., empregam-se frequentemente tres unidades chamadas **decastere, stere** e **decistere**. O **stere** equivale a 1 metro cubico, ou a 10 **decisteres**, o **decastere** vale 10 **steres**. Além d'estas unidades usa-se tambem do **meio decastere** e do **duplo stere**.

O **stere** propriamente dito é um instrumento composto de um estrado, sobre que assentam dois prumos de mais de um metro de altura distantes um do outro um metro. Sobre estes prumos, que estão graduados do estrado para cima em decimetros, centimetros e millimetros, escorrega um travessão, que póde fixar-se em qualquer altura por meio de um parafuso. O **meio decastere** e o **duplo decastere** construem-se como o **stere** com a differença dos dois prumos distarem entre si 3 metros no primeiro e 2 metros no segundo.

O stere só se póde empregar, quando todos os paus, cujo volume se procura, têem o mesmo comprimento. Para se saber por meio d'este instrumento, quantos paus de certo comprimento dão 1 metro cubico de volume, começa-se por calcular a altura, em que deve fixar-se o travessão. Collocado o travessão na conveniente altura, assentam-se successivamente os paus uns sobre os outros, entre os prumos e sobre o estrado, até chegarem ao travessão, e tem-se assim um metro cubico de madeira.

Para se determinar a altura do travessão divide-se 1 por o comprimento commum dos paus. Suppondo que cada pau tem $1^m,65$ de comprimento, a altura do travessão deverá ser $\frac{1}{1,65}$ ou $0^m,606$.

O **stere** serve tambem para avaliar o volume total de diversos paus, vigas por exemplo, quando elles têem iguaes comprimentos. N'este caso collocam-se os paus uns sobre os outros em cima

do estrado, como ha pouco, com a differença de se collocar o travessão depois dos paus e de se tomar nota da altura em que elle ficou.

Se os paus tiverem de comprimento $3^m,62$ e o travessão ficar a $1^m,14$ de altura do estrado, será o volume total d'elles[1]

$$3^m,62 \times 1^m,14 \times 1^m \quad \text{ou} \quad 4^{m3},1268$$

Antes de effectuar esta multiplicação é necessario reduzir todos os factores á mesma unidade linear.

443. No commercio empregam-se para medir cereaes, legumes, azeite, vinho, etc. vasilhas, ou caixas, cuja *capacidade*, ou volume interior é conhecido.

A lei determina as dimensões e fórmas, que devem ter as *medidas de capacidade*.

A unidade principal das medidas de capacidade[2] é o **litro** (λιτρα, medida empregada pelos gregos).

Litro *é um vaso capaz de conter uma porção de qualquer substancia, cujo volume seja um decimetro cubico.*

Os nomes e valores das medidas de capacidade são:

Myrialitro	(1^{Ml})	vale	10000	litros	ou	10^{Kl}
Kilolitro	(1^{Kl})	»	1000	»	»	10^{Hl}
Hectolitro	(1^{Hl})	»	100	»	»	10^{Dl}
Decalitro	(1^{Dl})	»	10	»	»	10^{l}
Litro	(1^{l})	»	1	litro	»	10^{dl}
Decilitro	(1^{dl})	»	0,1	»	»	10^{cl}
Centilitro	(1^{cl})	»	0,01	»	»	10^{ml}
Millilitro	(1^{ml})	»	0,001	»		

O kilolitro corresponde ao metro cubico, e o millilitro ao centimetro cubico.

Além d'estas medidas a lei permitte tambem o uso das suas duplas e sub-duplas.

As unidades empregadas na medição de seccos (legumes, ce-

---

[1] Para se comprehender isto é necessario saber, que os paus formam todos um parallelipipedo rectangulo, cujas arestas são iguaes a $3^m,62$, $1^m,14$ e 1^m, e que o volume do parallelipipedo rectangulo está para o do *metro cubico*, como o producto dos tres numeros, que dão os comprimentos das arestas referidos ao *metro linear*, está para 1.

Se os tres numeros estivessem referidos ao decimetro linear, o producto d'elles daria o mesmo volume, porém referido ao decimetro cubico.

[2] A unidade principal para medir agua corrente é a *manilha*, cujos submultiplos são o *annel* e a *penna*. A *manilha* é igual a 16 *anneis*, ou a 128 *pennas* e o *annel* é igual a 8 *pennas*. A *penna* divide-se por metades successivas em *meia penna, quarto de penna*, etc.

A *manilha* é a quantidade de agua corrente, que produz n'um segundo o volume de 5 litros, ou em 24 horas 432 metros cubicos. O *annel* equivale a 27 metros cubicos em cada 24 horas e a *penna* a 3,375 metros cubicos no mesmo tempo. No antigo systema de medidas a *penna* reputava-se equivalente a 8 pipas em 24 horas.

reaes, etc.) reduzem-se ao *hectolitro, meio hectolitro, duplo decalitro, decalitro, meio decalitro, duplo litro,... decilitro* e *meio decilitro;* e as de que, em geral, se faz uso, para medir os liquidos, são o *duplo litro,* o *litro,* o *meio litro,* o *duplo decilitro,* o *decilitro,* o *meio decilitro,* o *duplo centilitro* e o *centilitro.*

444. A unidade principal das medidas de peso é o **gramma.**

Gramma *é o peso de um centimetro cubico de agua distillada na temperatura* (4° centigrados) *da sua maxima densidade.*

Os nomes e valores das differentes unidades são os seguintes:

Tonelada metrica	(1^{T})	vale	1000000	grammas	ou	10^{Q}
Quintal metrico	(1^{Q})	»	100000	»	»	10^{Mg}
Myriagramma	(1^{Mg})	»	10000	»	»	10^{Kg}
Kilogramma	(1^{Kg})	»	1000	»	»	10^{Hg}
Hectogramma	(1^{Hg})	»	100	»	»	10^{Dg}
Decagramma	(1^{Dg})	»	10	»	»	10^{g}
Gramma	(1^{g})	»	1	gramma	»	10^{dg}
Decigramma	(1^{dg})	»	0,1	»	»	10^{cg}
Centigramma	(1^{cg})	»	0,01	»	»	10^{mg}
Milligramma	(1^{mg})	»	0,001	»		

O gramma é um peso muito pequenô, para poder ser empregado na maior parte das transacções commerciaes.

O kilogramma é a unidade de que se faz maior uso, e corresponde ao peso de um decimetro cubico, ou litro de agua distillada na temperatura da sua maxima densidade.

A tonelada metrica equivale a 1000 kilogrammas, ou ao peso de um metro cubico de agua nas mesmas condições em que ella se suppoz estar, quando se definiu o gramma. O quintal metrico vale 100 kilogrammas. A lei concede tambem o uso de pesos duplos e sub-duplos d'estes.

O peso maior, que se fabrica, é o de 50 kilogrammas, ou meio quintal metrico

Os ourives continuam a empregar um antigo peso chamado *quilate,* para pesarem diamantes, perolas e outras pedras preciosas. O quilate divide-se em 4 *grãos,* e é igual a 205,75 milligrammas.

Em Macau ainda se usa dos seguintes pesos chinezes: **Pico** (tam), 100 *cates,* ou 60,1168 kilogrammas; **cate** (can), 16 *taeis* ou 601,168 grammas; **tael** (leong), 10 *mazes* ou 37,573 grammas; **maz** (tchin), 10 *condorins* ou 3,757 grammas; **condorim** (fan), 10 *caixas* ou 0,367 grammas; **caixa** (ly) ou 0,037 grammas.

Além do pico de 100 cates, a que os portuguezes chamam *pico-balança* ou *commum,* ha em Macau o pico de 111,15 cates, chamado *pico-seda* e o de 150 cates, ou *pico-chapa.*

O primeiro serve para pesar as fazendas chamadas finas e de mais valor, como seda em rama, algodão, chá, camphora, etc.; o segundo para as fazendas grossas, como pimenta, canella, assucar, etc. e o terceiro emprega-se unicamente para pesar arroz.

Para facilitar a reducção[1] dos pesos inglezes aos chinezes e vice-versa concordaram os negociantes britannicos estabelecidos na China em chamar cate a $\frac{4}{3}$ do peso inglez denominado *libra avoirdupois* ou *pound avoirdupois*. Partindo d'esta convenção, hoje adoptada, tem-se: *pico*=60,479 kilogrammas; *cate*=604,790 grammas; *tael*=37,799 grammas; *maz*=3,78 grammas; *condorim*=0,378 grammas; *caixa*=0,038 grammas. A estes pesos chama-se *pesos commerciaes* ou *pesos aduaneiros*.

445. As unidades de tempo geralmente adoptadas em todos os paizes são o **seculo**, o **anno**, o **mez**, o **dia**, a **hora**, o **minuto** e o **segundo**. Além d'estas unidades ha o **lustro**, ou periodo de 5 annos, de que principalmente fazem uso os poetas, e a **semana** ou periodo de 7 dias.

O seculo tem 100 annos e o anno 12 mezes. Os mezes têem alternadamente 31 e 30 dias, excepto o mez de fevereiro, que tem 28 dias nos annos communs e 29 nos bissextos, e os mezes de julho e agosto, que têem ambos 31 dias.

O anno commum tem 365 e o bissexto 366 dias. De 4 em 4 annos ha um anno bissexto, e como o primeiro anno da era vulgar se seguiu a um anno bissexto, é evidente que dividindo por 4 o numero de ordem de um anno qualquer, se obtem um resto 0, 1, 2 ou 3, que indica se o referido anno é bissexto, ou se é o primeiro, segundo ou terceiro depois de algum anno bissexto.

Ha comtudo annos, que não são bissextos[2], apesar de serem di-

---

[1] A verdadeira relação entre os pesos chinezes e os inglezes é: 375 *cates*=604 *libras troy*.

Os inglezes têem dois pesos differentes a que chamam *libra*: d'estes um tem 7000 grãos, é a *libra avoirdupois;* outro tem 5760 grãos, é a *libra troy*. A libra avoirdupois tem 16 onças, cada onça tem 16 drachmas e cada drachma $27\frac{11}{32}$ grãos. Os multiplos d'esta libra são: a *tonellada*, que tem 20 quintaes, o *quintal* quatro quartas e a quarta 28 libras.

A *libra troy* é destinada especialmente para a pesagem de oiro, prata, pedras preciosas, etc. e tem 12 onças troy; cada *onça troy* tem 20 dinheiros ou penny-weights e cada *dinheiro* 24 grãos.

Segundo as esperiencias de M. Miller o padrão do kilogramma depositado nos archivos de Paris tem 15432,34874 grãos. Logo *uma libra avoirdupois* tem 453,59265255 grammas e *uma libra troy* 373,2419541 grammas.

[2] Esta alteração na ordem dos annos bissextos foi decretada em 1582 pelo papa Gregorio XIII, que igualmente determinou que se supprimissem 10 dias (de 5 a 14 de outubro inclusivè) no anno de 1582, passando-se por isso de 4 de outubro, dia de S. Francisco d'Assis, a 15 do mesmo mez, dia de Santa Thereza de Jesus. Estas mudanças no antigo modo de contar o tempo constituem o que se chama *correcção gregorianna*. O calendario gregorianno foi adoptado em Portugal por lei de 20 de setembro de 1582. Os russos, os gregos e os christãos do Oriente seguem ainda o antigo calendario, *o calendario julianno*, e por isso as suas datas estão sempre atrazadas em relação ás das nações, que seguem o *calendario gregorianno*. Actualmente o atrazo é de 12 dias, 10 que se supprimiram em 1582, um que se supprimiu em fevereiro de 1700 e outro supprimido em 1800. No dia 1 de março

visiveis por 4 os seus numeros de ordem. São os annos que, sendo divisiveis por 100, não admittem comtudo o divisor 400.

O anno de 1600 foi bissexto, porque o seu numero de ordem é divisivel por 400, os annos 1700, 1800 e 1900 não são bissextos, porque nenhum d'estes tres numeros é divisivel por 400, e todos elles admittem o divisor 100.

O dia tem 24 horas, ou antes dois periodos de 12 horas, um dos quaes é o dia propriamente dito e o outro a noite.

A hora tem 60 minutos e o minuto 60 segundos.

446. A pureza do oiro, ou da prata, avalia-se pelo numero de *millesimos* de oiro ou de prata pura, que tem a liga que se considera. Diz-se que uma barra de prata, por exemplo, tem 900 millesimos de toque ou titulo, quando o peso da prata pura contida na barra é 0,900 do peso total da barra. Se a barra fosse toda de oiro, ou de prata, isto é, sem liga alguma, o seu *toque* seria de 1000 millesimos.

Em geral *toque de um objecto de prata, ou de oiro é a relação que ha entre o peso da prata fina, ou do oiro puro contido no objecto e o peso total do mesmo objecto.*

A lei de 29 de julho de 1854 fixou em $916\frac{2}{3}$ millesimos o *toque* ou *titulo*, tanto das moedas de oiro, como das de prata e em 2 millesimos, para mais ou para menos, a *tolerancia* do *toque*, de sorte que só deixa de ser legal o *toque* de qualquer moeda, quando o numero de millesimos é inferior a $914\frac{2}{3}$ ou superior a $918\frac{2}{3}$. A *tolerancia* no peso, segundo a mesma lei, é de 0,002 do peso legal para as moedas de oiro, e de 0,003 do peso legal para as de prata.

A lei de 31 de maio de 1882 auctorisou o governo portuguez a crear até 2000 contos de réis de moeda de bronze para substituir as moedas de cobre e bronze em circulação no continente e no districto do Funchal. A liga das novas moedas de bronze é composta de 96 centesimas partes em peso de cobre, 2 de estanho e 2 de zinco. A tolerancia é de 3 por cento do peso. Por decreto de 30 de abril de 1885 deixaram de ter curso legal as moedas de cobre e bronze do antigo cunho desde 1 de janeiro de 1886.

A tabella seguinte contem os nomes, valores, diametros e pesos

---

de 1900 começará o atrazo a ser de 13 dias. Nas suas relações com o resto da Europa os russos, e, em geral, todos os povos que usam do calendario julianno, escrevem as datas nos dois estylos, pondo por cima de uma linha a sua data (segundo o velho estylo) e por baixo a data gregorianna. Assim $\frac{\text{25 de fevereiro}}{\text{9 de março}}$ de 1886 e $\frac{9}{21}$ de março de 1886 representam os dias 9 e 21 de março de 1886 conforme a chronologia seguida em Portugal e em quasi toda a Europa, ou os dias 25 de fevereiro e 9 de março de 1886 segundo o modo de contar dos russos, gregos e christãos do Oriente.

das moedas portuguezas de oiro, prata e bronze creadas por as duas citadas leis.

Nomes		Valores em réis	Diametros em millimetros	Pesos em grammas		
				Maximos	Legaes	Minimos
Oiro...	Corôa.....	10$000	30	17,770470	17,735	17,699530
	Meia corôa.....	5$000	23	8,885736	8,868	8,850264
	Quinto de corôa.	2$000	18,5	3,554094	3,547	3,359906
	Decimo de corôa	1$000	14	1,777548	1,774	1,770452
Prata..	Cinco tostões...	500	30	12,537500	12,500	12,462500
	Dois tostões....	200	23	5,015000	5,000	4,985000
	Um tostão.....	100	18,5	2,507500	2,500	2,492500
	Meio tostão.....	50	14	1,253750	1,250	1,246250
Bronze.	Vintem.....	20	30	12,36	12	11,64
	Dez réis.....	10	25	6,18	6	5,82
	Cinco réis.....	5	20	3,09	3	2,91

Da tabella precedente resulta que o valor de 1 kilogramma de moedas de oiro é 563$856 réis e o de 1 kilogramma de moedas de prata 40$000 réis e por consequecia que a relação entre os valores de pesos iguaes de moedas de oiro e de prata é 563856 para 40000 ou 14,0964 para 1.

A lei de 29 de julho de 1854 determina que sejam tambem recebidas, como moeda legal, as antigas moedas de oiro portuguezas denominadas *peças* e *meias peças*, e as moedas inglezas de oiro chamadas *libras* ou *soberanos* e *meias libras* ou *meios soberanos*.

O toque d'estas moedas é tambem $916\frac{2}{3}$ millesimos, e os seus valores, diametros e pesos são os seguintes:

Nomes	Valores em réis	Diametros em millimetros	Pesos em grammas
Peça.....	8$000	31	14,188
Meia peça.....	4$000	25	7,094
Libra ou soberano[1].....	4$500	22	7,981
Meia libra ou meio soberano.....	2$250	19	3,990

Todas as obras de oiro fabricadas em Portugal e nas ilhas ad-

[1] Damos n'este logar uma noticia das moedas legaes das principaes nações extrahida do *Annuaire du Bureau des longitudes* (1886) com o valor ao par em dinheiro portuguez (§ 409) d'algumas.

Inglaterra. *Moedas de oiro. Soberano* ou *libra esterlina* (25fr.,15): *meio soberano* ou *meia libra esterlina*. O peso d'estas moedas foi elevado a 7,988 e 3,994

jacentes e destinadas ao commercio interno terão de toque 916,66 ou 800 millesimos com uma tolerancia de 2 ou de 5 por 1000 conforme o toque fôr determinado por ensaio real ou por ensaio visual. A esta tolerancia acrescerá a de 10 por 1000 para as soldas. As obras destinadas á exportação podem ter qualquer toque não inferior a 333 millesimos.

Todas as obras de prata fabricadas em Portugal e nas ilhas adjacentes e destinadas ao commercio interno terão de toque 916,66 ou 833 millesimos com uma tolerancia de 2 ou de 10 por 1000, conforme o toque fôr determinado por ensaio real ou por ensaio visual. Para as soldas acrescerá a tolerancia de 5 por 1000. As

---

por lei de 4 de abril de 1870. *Moedas de prata.* Têem de toque 925 millesimos e são: *coróa* tem 5 shillings, 28ᵍ,276; *meia coróa* 14ᵍ,138; *florim* tem 2 shillings, 11ᵍ,310; *shilling* (1ᶠʳ.,15) tem 12 pence, 5ᵍ,655 vale 228 réis; 6 *pence* 2ᵍ,828; 4 *pence* 1ᵍ,885; 3 *pence* 1ᵍ,414; 2 *pence* 0ᵍ,942; 1 *penny* 0ᵍ,471. *Moedas de conta. Libra* (25ᶠʳ.,2213) e a antiga moeda de 21 shillings (26ᶠʳ.,48) chamada *guinéo* que tinha 917 millesimos de toque e 8ᵍ,3802 de peso.

França, Belgica, Italia, Suissa, Hespanha, Grecia, Roumania e Servia. Em todos estes paizes está adoptado o mesmo systema de moedas. **França, Belgica e Suissa.** *Moedas de oiro.* Têem 900 millesimos de toque e são: 100 *francos,* 32ᵍ,258; 50 *francos,* 16ᵍ,129; 20 *francos,* 6ᵍ,452; 10 *francos,* 3ᵍ,226; 5 *francos,* 1ᵍ,613 e vale 893 réis. *Moedas de prata.* Ha uma de 900 millesimos de toque, que é a moeda de 5 *francos* com 25ᵍ de peso e 982 réis de valor; todas as outras têem 835 de toque e são: 2 *francos* 10ᵍ; 1 *franco* 5ᵍ e 182 réis de valor; 50 *centimos* 2ᵍ,5; 20 *centimos* 1ᵍ. **Italia.** O mesmo que em França com a differença de se chamar *lira* ao franco. **Grecia.** Como em França chamando *drachma* ao franco e *lepta* aos centimos. **Roumania.** Chama-se *ley* ao franco e *banis* aos centimos. **Servia.** Chama-se *dinar* ao franco e *paras* aos centimos. **Hespanha.** Dá-se ao franco o nome de *peseta.* A peseta tem 4 reales de vellon. Continuam a ter curso n'este paiz as seguintes moedas creadas por a lei de 26 de junho de 1864. *Moedas de oiro.* Têem 900 millesimos de toque e são: *dobrão* (25ᶠʳ.,88) tem 10 escudos, 8ᵍ,387 e vale 4$643 réis; 4 *escudos* 3ᵍ,355; 2 *escudos* 1ᵍ,667. *Moedas de prata.* Umas são de 900 millesimos, outras de 810. De 900 millesimos são: *duro* (5ᶠʳ.,15) tem 2 escudos, 25ᵍ,960 e 1$020 réis de valor; *escudo* tem 10 réales, 12ᵍ,980. De 810 são: *peseta* (0ᶠʳ.,92) 5ᵍ,192 de peso e 184 réis de valor; 1/2 *peseta* 2ᵍ,596; *réal* 1ᵍ,298.

Imperio allemão. *Moedas de oiro.* Têem 900 millesimos de toque e são: 20 *marcos* ou *dupla coróa* 7ᵍ,965: 10 *marcos* ou *coróa* (12ᶠʳ.,31), 3ᵍ,982 de peso e 2$204 réis de valor; 5 *marcos* 1ᵍ,991. *Moedas de prata.* Têem 900 millesimos de toque e são: 5 *marcos* 27ᵍ,777; 2 *marcos* 11ᵍ,111; 1 *marco* (1ᶠʳ.,10) tem 100 pfennig, 5ᵍ,555 e 218 réis de valor; 1/2 *marco* tem 50 pfennig, 2ᵍ,777; 1/5 *marco* tem 20 pfennig, 1ᵍ,111. *Moeda de conta.* É o *marco imperial* (*Reichs-mark*) de 100 pfennig (1ᶠʳ.,2345).

Austria-Hungria. *Moedas de oiro.* Umas são de 986 millesimos, outras de 900. De 986 millesimos são: *quadruplo ducado,* 13ᵍ,960; *ducado* (11ᶠʳ.,80), 3ᵍ,490 de peso e 2$117 réis de valor. De 900 millesimos são: 8 *florins* tem 20 francos, 6ᵍ,452; 4 *florins* (9ᶠʳ.,97) tem 10 francos, 3ᵍ,226 e vale 1$786 réis. *Moedas de prata.* Umas são de 900, outras de 520 millesimos. De 900 são: 2 *florins* 24ᵍ,691; 1 *florim* (2ᶠʳ.,45) tem 100 kreutzers, 12ᵍ,345 e vale 485 réis. De 520 é: 1/4 *florim,* 5ᵍ,341. *Moeda de conta. Florim* (2ᶠʳ.,4691) de 100 kreutzers.

Paizes-Baixos. *Moedas de oiro.* Têem umas 983 e outras 900 de toque. De 983 são: *duplo ducado* 6ᵍ,988; *ducado* (11ᶠʳ.,77), 3ᵍ,494 e vale 2$113 réis. De 900 é: 10 *florins* (20ᶠʳ.,76), 6ᵍ,720 e vale 372 réis. *Moedas de prata.* Umas são de 945, outras de 640 millesimos. De 945 são: *rixdaler* (5ᶠʳ.,21) tem 2 1/2 florins, 25ᵍ e vale 1$031 réis; 1 *florim* (2ᶠʳ.,08) tem 100 centimos, 10ᵍ; 1/2 *florim,* 5ᵍ. De 640

obras de prata destinadas á exportação podem ter qualquer toque não inferior a 800 millesimos.

447. Nos Açores a moeda legal é a mesma do continente com um augmento, porém, de 25 por cento no seu valor, de sorte que 100 réis do continente ou 100 réis *fortes*, valem 125 réis *fracos* e 100 réis *fracos* valem 80 réis *fortes*. Correm tambem ali, e são recebidas nos cofres publicos entre as moedas de oiro, os *soberanos* ou *libras* esterlinas por 5$600 réis e os *meios soberanos* ou *meias libras* por 2$800 réis, e entre as de prata as *patacas* brasileiras ou hespanholas por 1$200 réis, as *meias patacas* por 600 réis, as *ser-*

---

são: 25 *centimos* 3g,575; 10 *centimos* 1g,4; 5 *centimos* 0g,685. *Moeda de conta. Florim* (2fr.,10) de 100 centimos.

Russia. *Moedas de oiro.* Têem 916,66 de toque e são: 1/2 *imperial* (20fr.,58) tem 5 rublos, 6g,545 e vale 3$690 réis; 3 *rublos*, 3g,927. *Moedas de prata.* Umas são de 868, outras de 500. De 868 são: *rublo* (3fr.,97) tem 100 kopecks, 20g,735 e 785 réis de valor; *poltinnik* tem 50 kopecks, 10g,367; *tchetvertak* tem 25 kopecks, 5g,183. De 500 millesimos são: *abassis* tem 20 kopecks, 4g,079; *florim polaco* tem 15 kopecks, 3g,059; *grivenik* tem 10 kopecks, 2g,039; *pietak* tem 5 kopecks, 1g,019. *Moeda de conta. Rublo* de 100 kopecks (4fr.).

Dinamarca, Suecia e Noruega. N'estes paizes estão adoptadas as mesmas moedas. *Moedas de oiro.* Têem 900 de toque e são: 20 *kronen*, 8g,960; 10 *kronen* 4g,480. *Moedas de prata.* São de 800, 600 e 400 millesimos. De 800 são: 2 *kronen*; 1 *krone* tem 100 ore, 7g,5. De 600 millesimos são: 50 *ore*, 5g; 40 *ore*, 4g; 25 *ore*, 2g,420. De 400 millesimos: 10 *ore*, 1g,450. *Moeda de conta. Krona* (1fr.,3888) de 100 ore.

Imperio Ottomano. *Moeda de conta. Piastra* (0fr.,2278).

Egypto. *Moeda de conta. Piastra* (0fr.,2575) de 40 *paras*.

Estados Unidos. *Moedas de oiro.* Têem de toque 900 millesimos e são: *dupla aguia* tem 20 dollars, 33g,436; *aguia* (51fr.,65) tem 10 dollars, 16g,718 e vale réis 9$255; *meia aguia* tem 5 dollars, 8g,359; 3 *dollars* 5g,015; 1/4 *aguia* tem 2 1/2 dollars, 4g,179; 1 *dollar* (5fr.,16), 1g,672. *Moedas de prata.* Têem 900 de toque e são: *trade dollar* (5fr.,40), 27g,215 e 1$069 réis de valor; *dollar* (5fr.,31) tem 100 cents, 26g,729 e 1$050 réis de valor; 1/2 *dollar* tem 50 cents, 12g,5; 1/4 *dollar* tem 25 cents, 6g,25; 20 *cents*, 5g; *dime* tem 10 cents, 2g,5. *Moeda de conta. Dollar* (5fr.,1825) de 100 cents.

Mexico. *Moedas de oiro.* Têem de toque 875 millesimos e são: 20 *pesos*; 10 *pesos*; 5 *pesos*; 2 1/2 *pesos*; 1 *peso* (5fr.,09) com 1g,692 de peso e 911 réis de valor. *Moedas de prata.* Têem de toque 902,7 e são: *peso* (5fr.,37), 27g,073 de peso e 1$066 réis de valor; 50 *centavos* (meio peso); 25 *centavos*; 10 *centavos*; 5 *centavos*. *Moeda de conta. Peso* de 100 centavos (5fr.,4308).

Brasil. *Moedas de oiro.* Têem de toque 917 millesimos e são: 20$000 *réis*, 17g,9296875 (ou 5 oitavas); 10$000 *réis*, 8g,9648438 e 5$060 réis *fortes* de valor; 5$000 *réis* (14fr.,08) 4g,4824219. A tolerancia nas primeiras é de 1 grão (0g,0498046875), nas segundas de 0,5 de grão e nas terceiras de 0,25 de grão. *Moedas de prata.* Tambem têem 917 de toque e são: 2$000 *réis*, 25g,5 (7 oitavas e 8 grãos); 1$000 *réis*, 12g,75 e 510 réis *fortes* de valor; 500 *réis* (1fr.,28), 6g,375. Todas as reducções foram feitas suppondo o arratel igual a 459 grammas.

Na reducção a dinheiro portuguez das moedas estrangeiras empregou-se o processo seguido no § 501, suppondo que todas ellas têem effectivamente os toques e pesos legaes. Os valores em francos das mesmas moedas são copiados do *Annuaire du Bureau des longitudes* (1886) e podem calcular-se pelo processo seguido no § 500, tomando para toques e pesos os que se acham inscriptos n'aquelle *Annuaire* e que exprimem o resultado dos ensaios directos feitos na *casa da moeda* de Paris sobre as proprias moedas.

rilhas (antigas *pesetas* hespanholas) por 240 réis e as *meias serrilhas* por 120 réis. Não são recebidas nos cofres publicos, mas correm entre os particulares por 200 réis umas *pesetas* hespanholas cunhadas durante o reinado da rainha D. Izabel e conhecidas pelo nome de *izabellinhas*.

Nas provincias ultramarinas têem geralmente curso legal e por igual valor as moedas do reino. Em Cabo Verde têem tambem curso legal (decreto de 19 de outubro de 1853) as seguintes moedas estrangeiras. *Onças* de oiro (hespanholas, peruvianas, chilenses, bolivianas, mexicanas, colombianas, de Buenos-Ayres, do Equador e do Centro da America e de Nova Granada) de 7 oitavas e 36 grãos de peso (26^{g},877) por 14$600 réis; *meias onças* e *quartos de onça* de oiro dos mesmos paizes com pesos e valores proporcionaes; as *aguias* de oiro de 10 patacas dos Estados Unidos com 4 oitavas e 48 grãos de peso (16^{g},723) por 9$200 réis e as *meias aguias* dos mesmos Estados; as *peças* de oiro brazileiras de 4 oitavas (14^{g},334) por 8$000 réis e as *meias peças* do mesmo imperio; as moedas de oiro brazileiras de 4$000 réis de 2 oitavas e 18 grãos (8^{g},063) por 4$500 réis: as moedas de prata denominadas *patacas* ou *duros* (hespanholas columnarias ou sevilhanas, chilenses, bolivianas, peruvianas, dos Estados Unidos, mexicanas, brazileiras, de Buenos-Ayres e colombianas) com 7 oitavas e 36 grãos de peso por 920 réis e a moeda franceza de prata de 5 francos com 7 oitavas de peso (25^{g},085) por 860 réis.

Segundo a convenção monetaria celebrada entre os governos inglez e portuguez, em virtude do artigo 5.º do tratado luso-britannico de 26 de dezembro de 1878, as moedas de prata que têem curso legal na India portugueza são: a *rupia*, cujo peso é 180 grãos troy (ou 11,6638 grammas), a *meia rupia*, o *quarto de rupia* e o *oitavo de rupia*. O toque d'estas moedas é de 11 dinheiros $\left(\text{ou } 916 \text{ millesimos e } \frac{2}{3}\right)$, a tolerancia no toque é de 0,002 para a *rupia* e de 0,003 para as outras moedas, e a tolerancia no peso é de 0,005 para a *rupia* e *meia rupia*, de 0,007 para o *quarto de rupia* e de 0,010 para o *oitavo de rupia*. O valor legal da *rupia* em moeda portugueza do continente é 400 réis; o peso da prata pura contida n'ella é comtudo o mesmo que por lei deve existir em 466 ou 467 réis da moeda continental.

Segundo a mesma convenção as moedas de cobre que podem correr na India portugueza são: a *meia tanga* com o peso de 200 grãos troy (ou 12,9598 grammas), que corresponde ao *meio anná* ou *duplo paisá* da India britannica, o *quarto de tanga* ou *paisá* (pice) da India britannica, o *oitavo de tanga* ou *meio paisá* e o *real* ou *um doze ávos da tanga* (pie). A tolerancia no peso d'estas moedas é $\frac{1}{40}$.

Em geral, suppondo que $\frac{4}{5}$ representa um numero referido a certa unidade, e que esta unidade é igual a $\frac{2}{3}$ de outra unidade, ter-se-ha em relação á primeira unidade

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$$

e em relação á segunda

$$\frac{\frac{2}{3}}{5}+\frac{\frac{2}{3}}{5}+\frac{\frac{2}{3}}{5}+\frac{\frac{2}{3}}{5}=\frac{\frac{2}{3}\times 4}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$$

logo

$$\frac{4}{5}\text{ de uma unidade}=\left(\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right)\text{ de outra unidade, da qual a primeira é }\frac{2}{3}$$

Querendo reduzir 18,6 semanas a mezes, suppondo que o mez tem 30 dias, é necessario multiplicar 18,6 por $\frac{7}{30}$, que é o numero que representa a semana, quando se toma para unidade de tempo 1 periodo de 30 dias. Ter-se-ha portanto

$$18^{s},6=18,6\times\frac{7^{m}}{30}=4^{m},34$$

450. *Reduz-se qualquer numero complexo á infima especie, reduzindo a parte do numero, que se refere á unidade maior, á unidade immediatamente inferior, juntando ao numero resultante a parte correspondente a esta unidade, reduzindo depois o numero achado á unidade que se segue, e juntando-lhe a parte, que se refere a esta unidade, e continuando assim, até se haver juntado a parte do numero, que se refere á unidade da infima especie.*

Reduzir á infima especie o numero $26^{d}\ 18^{h}\ 25'\ 48'',6$

Typo da operação

$$\begin{array}{r}
26^{d}\ \ 18^{h}\ \ 25'\ 48'',6 \\
24\phantom{\ \ 18^{h}\ \ 25'\ 48'',6} \\
\hline
104\phantom{\ \ 18^{h}\ \ 25'\ 48'',6} \\
52\phantom{\ \ 18^{h}\ \ 25'\ 48'',6} \\
\hline
624^{h} \\
+\ 18 \\
\hline
642^{h} \\
60 \\
\hline
38520' \\
+\ 25 \\
\hline
38545' \\
60 \\
\hline
2312700'' \\
+\ 48,6 \\
\hline
2312748'',6=26^{d}\ \ 18^{h}\ \ 25'\ 48'',6
\end{array}$$

Reduziram-se primeiro 26 dias a horas e ao resultado 624 horas juntaram-se as 18 horas do numero dado. Converteram-se depois as 642 horas em minutos, e ao numero 38520 minutos addicionaram-se 25 minutos. Reduziu-se finalmente a segundos o numero 38545, e sommou-se o numero obtido 2312700 segundos com 48,6 segundos. O resultado de tudo isto é evidentemente o numero pedido.

451. Ha ainda outro modo de *reduzir um numero complexo á infima especie, que consiste em reduzir cada uma das partes d'elle á unidade da infima especie, e em sommar todos os numeros achados por este modo com a parte do numero, que se refere á unidade da infima especie.*

Reduzir á infima especie o numero $4^{s}\ 5^{d}\ 9^{h}\ 16'\ 26'',03$

Typo da operação

4^{s}	5^{d}	9^{h}	$16'$	$26'',03$
7	24	60	60	
28^{d}	120^{h}	$540'$	$960''$	
24	60	60		
112	$7200'$	$32400''$		
56	60			
672^{h}	$432000''$			
60		$2419200''$		
$40320'$		432000		
60		32400		
$2419200''$		960		
		26 ,03		
		$2884586'',03 = 4^{s}\ 5^{d}\ 9^{h}\ 16'\ 26'',03$		

452. *Reduz-se um numero complexo a incomplexo referido a certa unidade, reduzindo-o primeiro á infima especie, e passando depois d'esta unidade para a unidade nova.*

Exemplo I. Reduzir 46 *libras*, 18 *shillings* e 7 *pence* ou dinheiros esterlinos a libras.

Reduzindo o numero dado á infima especie acha-se (§ 450 ou § 451)

$$46^{lb}\ 18^{sh}\ 7^{dst} = 11263^{dst}$$

convertendo este numero de dinheiros esterlinos em libras (§ 449), obtem-se

$$46^{lb}\ 18^{sh}\ 7^{dst} = \frac{11263^{lb}}{240} \quad \text{ou} \quad 46^{lb}\ 18^{sh}\ 7^{dst} = 47^{lb},929\ldots$$

Querendo reduzir o numero complexo a fracção decimal da libra é melhor converter immediatamente $18^{sh}\ 7^{dst}$ em fracção decimal da libra, e juntar ao resultado as 46 libras. Acha-se effectuando as operações

As moedas de conta são as *rupias*, as *tangas* e os *réis*. A *rupia* vale 16 *tangas*, ou 192 réis da convenção, ou 720 réis fracos ou provinciaes, isto é, dos que corriam antes da convenção. A *tanga* vale 12 réis da convenção, ou 45 réis provinciaes ou fracos, ou 1 *anná* inglez. O *real* vale 3,75 réis fracos ou provinciaes, ou 1 *pie* da India britannica.

Em Macau não ha moeda propriamente dita. Todas as transacções se realisam dando em troca da mercadoria comprada uma quantidade maior ou menor de prata. A prata empregada, como meio circulante, nas transacções commerciaes é fornecida pelos *dollars* das republicas americanas e pelos *pesos* hespanhoes, sob a denominação commum e generica de *patacas*. O comprador, que ajustou uma mercadoria por 50 *taeis* de prata, por exemplo, obrigou-se a dar por ella uma porção de prata, geralmente em patacas, que pese (§ 444) 50 taeis, isto é, $50 \times 37^{g},573$ ou 1878,65 grammas. As patacas novas são recebidas, sem serem pesadas, pelo seu peso, que deve[1] ser de 7 mazes e 2 condorins, as velhas somente o são pelo que dér o peso. Nas repartições publicas a pataca vale 850 réis. Os chinas costumam gravar nas patacas os seus sêllos e de tal modo o fazem que successivamente as vão deteriorando, reduzindo-as passado algum tempo a fragmentos, que continuam do mesmo modo a ser recebidos pelo seu peso nos pagamentos.

Nas pequenas transacções emprega-se a *sapeca*, que é a unica moeda cunhada da China. As sapecas são moedas circulares, delgadas e com uma abertura quadrangular ao centro pela qual estão enfiadas, tendo geralmente 1000 cada enfiada. O peso de cada uma é um *maz*. Ao principio eram de bronze, agora são de uma liga composta de cobre, zinco, nickel, ferro, etc. A relação entre um dado peso de prata, um tael por exemplo, e a sapeca varia com as circumstancias economicas. Actualmente cada tael de prata vale 1650 a 1700 sapecas. A pataca troca-se geralmente no mercado por 1080 a 1200 sapecas.

Apparecem tambem na China, como moeda circulante, umas barras de prata quasi pura de fórmas e dimensões variadas e pesando de 1 a 50 taeis. A estas barras chama-se *saicy* (wan yin). Commummente os *saicys* pesão 10 taeis e affectam a fórma de uma barra lisa e plana por uma das faces, e aspera e arredondada pela outra. Obtida a necessaria licença, póde qualquer banqueiro mandar fazer saicys na repartição competente do Estado, devendo em cada um d'elles gravar-se o nome do banqueiro, o do manufactor, bem como o anno, districto, etc. Ha tambem *saicys de oiro*.

Em Macau circulam tambem: 1.º as moedas de prata inglezas

[1] A antiga pataca mexicana (de 1823), a que mais circula em Macau, tem 896 millesimos de toque e 27,0602 grammas de peso. O peso e toque da moderna pataca ou peso mexicano encontra-se na pagina 254, nota.

de Hong-Kong de 800 millesimos de toque; 20 *cents* (20 ávos) de 5,431 grammas, 10 *cents* de 2,715 grammas e 5 *cents* de 1,358 grammas; 2.° as libras esterlinas; 3.° as notas de differentes bancos d'aquella colonia ingleza.

448. Os numeros concretos podem ser *incomplexos* ou *complexos*. **Numero incomplexo** *é o que se refere a uma só unidade.* **Numero complexo** *é o que consta de partes referidas a unidades de differente grandeza, porém da mesma especie.* O numero 6 horas e 25 minutos é complexo, porque envolve duas partes, 6 e 25, que se referem a unidades, hora e minuto, de differente grandeza, mas da mesma especie. Representa-se abreviadamente este numero assim $6^h\ 25'$.

Geralmente escrevem-se os numeros complexos de sorte que nenhuma das suas partes chegue a formar 1 unidade de ordem superior á da unidade a que ella se refere.

Em vez pois de $78^h\ 25'$ escrever-se-ha $3^d\ 6^h\ 25'$, isto é, 3 dias, 6 horas e 25 minutos.

Chama-se *unidade da infima especie* de um numero complexo á menor das unidades a que estão referidas as suas differentes partes.

Nas operações sobre numeros concretos é frequentes vezes preciso *reduzir* um numero referido a certa unidade, ao que lhe corresponde, quando aquella unidade se substitue por outra. Esta *reducção* sómente se póde fazer, quando se conhece o valor numerico da quantidade que primeiramente se tomou como unidade, expresso na unidade nova.

449. *Reduz-se um numero incomplexo referido a certa unidade, ao numero que representa a mesma quantidade referida a outra unidade, multiplicando o numero dado pelo valor numerico da antiga unidade expresso na unidade nova.*

Para reduzir 18 dias a semanas é preciso, pois, saber qual é o valor numerico da quantidade dia referida á unidade semana, e multiplicar depois 18 por esse valor numerico.

Ora a semana tem 7 dias, logo, imaginando a unidade semana decomposta em 7 partes iguaes, será $\frac{1}{7}$ da unidade semana igual á unidade dia. Sendo 1 dia equivalente a $\frac{1}{7}$ da semana é claro que

$$18 \text{ dias ou } 1 \text{ dia} + 1 \text{ dia} + 1 \text{ dia} \ldots + 1 \text{ dia}$$

valerão tanto como

$$\tfrac{1}{7} \text{ da semana} + \tfrac{1}{7} \text{ da semana} + \tfrac{1}{7} \text{ da semana} + \ldots + \tfrac{1}{7} \text{ da semana}$$

e como são tantos os setimos da semana, quantos os dias, segue-se que

$$18 \text{ dias} = 18 \times \left(\tfrac{1}{7} \text{ da semana}\right)$$

ou

$$18 \text{ dias} = \left(18 \times \tfrac{1}{7}\right) \text{ da semana} = 2 \text{ semanas} + 4 \text{ dias}$$

$$18^{sh}\ 7^{dst} = \frac{223^{lb}}{240} \quad \text{ou} \quad 18^{sh}\ 7^{dst} = 0^{lb},929\ldots$$

e por consequencia $46^{lb}\ 18^{sh}\ 7^{dst} = 46^{lb},929$

Exemplo II. Reduzir $18^d\ 14^h\ 27'\ 18'',46$ a fracção decimal da hora.

Typo da operação

$18^d\ 14^h\ 27'\ 18'',46$		1^h
24	60	60
72	1620	$60'$
36	18 ,46	60
432^h	$1638'',46$	$3600''$
14		
446^h		

Logo $$18^d\ 14^h\ 27'\ 18'',46 = 446^h + \frac{1638^h,46}{3600}$$

ou, effectuando a divisão,

$$18^d\ 14^h\ 27'\ 18'',46 = 446^h,4551$$

Se se tivesse empregado o methodo ordinario, ter-se-ía reduzido $18^d\ 14^h\ 27'\ 18'',46$ a segundos e em seguida a horas

$$18^d\ 14^h\ 27'\ 18'',46 = \frac{1607238^h,46}{3600}$$

e, effectuando depois a divisão, chegar-se-ía ao mesmo resultado.

453. *Para reduzir um numero incomplexo a numero complexo, separa-se no numero dado a parte inteira da fraccionaria propriamente dita, extrahem-se da parte inteira as unidades de ordem immediatamente superior, do numero que comprehende estas unidades extrahem-se tambem as unidades de ordem mais elevada, e assim se continúa, emquanto for possivel, e a parte fraccionaria reduz-se ás unidades immediatamente menores, e depois com a fracção resultante procede-se do mesmo modo.*

Exemplo I. Reduzir 2655816 segundos de tempo a numero complexo.

Typo da operação

$2655816''$	60			
255	$44263'$	60		
158	226	737^h	24	
381	463	17^h	30^d	7
216	$43'$		2^d	4^s
$36''$				

Extrahindo os minutos a 2655816″ acham-se 44263′, extrahindo as horas a 44263′ obtêem-se 737ʰ, e continuando a operar assim acha-se que

$$2655816'' = 4^s\ 2^d\ 17^h\ 43'\ 36''$$

Exemplo II. Reduzir 0,328 da semana a numero complexo.

Typo da operação

$$\begin{array}{r} 0^s,328 \\ 7 \\ \hline 2^d,296 \\ 24 \\ \hline 1184 \\ 592 \\ \hline 7^h,104 \\ 60 \\ \hline 6',240 \\ 60 \\ \hline 14'',4 \end{array}$$

Na primeira operação parcial acha-se

$$0^s,328 = 2^d,296$$

na segunda obtem-se $0^d,296 = 7^h,104$

na terceira $0^h,104 = 6',24$

e na quarta $0',24 = 14'',4$

logo é $0^s,328 = 2^d\ 7^h\ 6'\ 14'',4$

Exemplo III. Reduzir a numero complexo 629ʰ,8326.

A parte inteira 629ʰ d'este numero reduz-se, como se viu no exemplo I, a $3^s\ 5^d\ 5^h$, a parte fraccionaria reduz-se (exemplo II) a 49′ 57″,36, logo

$$629^h,8326 = 3^s\ 5^d\ 5^h\ 49'\ 57'',36$$

A operação póde dispor-se como se vê no typo seguinte

$$\begin{array}{r|l} 629^h & 24 \\ \cline{2-2} 149 & 26^d \\ 5^h & 5^d \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & 7 \\ \cline{2-2} & 3^s \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0^h,8326 \\ 60 \\ \hline 49',9560 \\ 60 \\ \hline 57'',36 \end{array}$$

Exemplo IV. Reduzir $\frac{5}{7}$ de uma circumferencia a numero complexo.

Typo da operação

$$
\begin{array}{r|l}
5 & \\
360 & \\
\hline
1800^{\circ} & 7 \\
40 & \overline{257^{\circ}\ 8'\ 34''} \\
50 & \\
1^{\circ} & \\
60 & \\
\hline
60' & \\
4' & \\
60 & \\
\hline
240'' & \\
30 & \\
2 &
\end{array}
$$

$\frac{5}{7}$ de uma circumferencia $= 257^{\circ}\ 8'\ 34''\frac{2''}{7}$

Exemplo V. Reduzir $\frac{896}{45}$ da libra esterlina a numero complexo.

Typo da operação

$$
\begin{array}{r|l}
896 & 45 \\
\hline
446 & 19^{lb}\ 18^{sh}\ 2^{dst} \\
41^{lb} & \\
20 & \\
\hline
820^{sh} & \\
370 & \\
10^{sh} & \\
12 & \\
\hline
120^{dst} & \\
30 &
\end{array}
$$

$\frac{896^{lb}}{45} = 19^{lb}\ 18^{sh}\ 2^{dst}\frac{30^{dst}}{45}$ ou $\frac{2^{dst}}{3}$

Exemplo VI. Reduzir $\frac{427362}{55}$ minutos a complexo.

O quebrado proposto é igual a $7770' + \frac{12'}{55}$, e, portanto, querendo extrahir as horas, dias, etc., á parte inteira $7770'$ e achar os segundos contidos em $\frac{12'}{55}$, é necessario fazer duas operações separadas, como se verifica no typo seguinte

$$
\begin{array}{r|l}
427362' & 55 \\
\hline
423 & 7770'\ 13'' \\
386 & \\
12' & \\
60 & \\
\hline
720'' & \\
170 & \\
5'' &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
7770' & 60 \\
\hline
17 & 129^{h} \\
57 & 9 \\
30' &
\end{array}
\begin{array}{|l}
24 \\
\hline
5^{d}
\end{array}
$$

$\frac{427362'}{55} = 5^{d}\ 9^{h}\ 30'\ 13''\frac{5''}{55}$ ou $\frac{1''}{11}$

454. Os numeros complexos referidos a unidades do systema metrico decimal, reduzem-se facilmente a incomplexos, sem recorrer aos processos anteriormente expostos, porque as suas unidades variam na rasão decupla, como variam as unidades das diversas ordens no systema de numeração. É d'esta uniformidade de rasões entre as unidades do systema metrico e as unidades adoptadas no systema de numeração, que provém a mais importante de todas as vantagens do actual systema de medidas.

É evidente, com effeito, que

$$8^{Mg}\ 7^{Hg}\ 5^{Dg}\ 4^{g}\ 6^{dg}\ 9^{cg}\ 2^{mg} = 80754692^{mg}$$

como facilmente se verifica empregando o methodo geral (§ 450 ou 451).

Com igual facilidade se reduz um numero complexo a incomplexo, quando as unidades, a que elle se refere, pertencem ao systema metrico. É por isso que facilmente se reconhece (§ 452) que

$$80754692^{mg} = 8075469^{cg},2 = 807546^{dg},92 = 80754^{g},692 = \text{etc.}$$

e

$$8^{Ha}\ 5^{a}\ 9^{da} = 859^{da} = 85^{a},9 = 8^{da},59$$

Quando, porém, as unidades, a que se refere o numero, são unidades de superficie, é necessario, para fazer a reducção, não esquecer, que a rasão entre duas unidades successivas é 100, e, portanto, que cada uma das partes deve escrever-se com dois algarismos. Assim por exemplo

$$9^{Km2}\ 8^{Hm2}\ 6^{Dm2}\ 2^{m2}\ 6^{dm2}\ 7^{cm2} = 90806020607^{cm2} = 908060206^{dm2},07$$

e

$$16^{Hm2}\ 12^{Dm2}\ 6^{m2}\ 68^{cm2} = 1612060068^{cm2} = 161206^{m2},0068$$

Quando as unidades, a que se refere o numero variam de 1000 em 1000, como acontece com as unidades de volume, que representam cubos, cujas arestas variam de 10 em 10, é preciso escrever á esquerda de cada uma das suas partes os zeros necessarios para todas ellas ficarem com tres algarismos, como se vê nos exemplos seguintes.

$$8^{m3}\ 9^{dm3}\ 6^{cm3} = 8009006^{cm3} = 8009^{dm3},006 = 8^{m3},009006$$

$$93^{Dm3}\ 86^{m3}\ 194^{dm3}\ 27^{mm3} = 93086194000027^{mm3} = 93086194^{dm3},000027$$

455. Resulta do que fica exposto, que para se decomporem nas suas diversas unidades os numeros incomplexos, cujas unidades representam superficies de quadrados, ou volumes de cubos, que têem por lados unidades do systema metrico, é necessario decompor os numeros em classes de 2 ou 3 algarismos de modo que o algarismo das unidades de primeira ordem occupe o primeira logar da direita de uma das classes.

Reconhece-se por este processo que o numero $896045^{m2},127$ tem $89^{Hm2}\ 60^{Dm2}\ 45^{m2}\ 12^{dm2}\ 70^{cm2}$ e o numero $7015625^{m3},0624$ tem $7^{Hm3}\ 15^{Dm3}\ 625^{m3}\ 62^{dm3}\ 400^{cm3}$.

EXERCICIOS

I. Converter $25^{lb}\ 12^{sh}\ 9^{d}$ em libras.

II. Reduzir a complexos os numeros 725,80394; 0,90543; 4025; $\frac{27938}{25}$, $\frac{207}{4365}$, que se referem á unidade dia.

III. Qual é a fracção da circumferencia de um circulo, que contém $25^{\circ}\ 42'\ 35'',06$?

IV. Reduzir a hectolitros os numeros $62857^{l},0628$; $63205^{Kl},20125$; $6038129^{dl},279$.

V. Reduzir a quintaes metricos os numeros 8235062^{g} e $6230^{Dg},6529$.

VI. Reduzir $82^{Ha}\ 52^{a}\ 5^{da}$ a metros quadrados e $32625^{m2},2189$ a hectares.

VII. Decompor $9708532^{m2},46594$ nas unidades superficiaes de diversas ordens e $6089175^{Dm3},203587$ nas unidades de volume de diversas ordens.

VIII. Reduzir $5^{Km2}\ 72^{Dm2}\ 35^{m2}\ 7^{dm2}\ 8^{cm2}\ 29^{mm2}$ a decametros quadrados e $82^{Hm3}\ 27^{Dm3}\ 359^{dm3}\ 5^{cm3}$ e $425^{Kl}\ 9^{Dl}\ 2^{dl}\ 7^{ml}$ a metros cubicos.

IX. Reduzir a metros cubicos o numero $42^{Dst}\ 8^{dst}$.

X. Querendo saber quantos paus com $3^{m},25$ de comprimento são necessarios para perfazerem $10^{m3},143$ de volume, a que altura se ha de collocar o travessão em qualquer dos instrumentos denominados *meio decastere, duplo stere* e *stere*, que para esse effeito se empregam?

CAPITULO II

Operações sobre numeros concretos

456. A addição de numeros concretos effectua-se exactamente como a dos numeros abstractos, quando são incomplexos e estão todos referidos á mesma unidade. Se são incomplexos e estão referidos a unidades diversas, porém do mesmo genero, é necessario, antes de effectuar a addição, reduzir todas as parcellas á mesma unidade (§ 449). Querendo, por exemplo, sommar 24 kilogrammas com 675 decagrammas é evidente que não se devem sommar os numeros inteiros 24 e 675, porque o numero resultante da operação não representará nem kilogrammas, nem decagrammas. Reduzindo, porém, o segundo numero a kilogrammas, ou o primeiro a decagrammas, achar-se-ha

$$24^{Kg} + 675^{Dg} = 24^{Kg} + 6^{Kg},75 = 30^{Kg},75$$

ou

$$2400^{Dg} + 675^{Dg} = 3075^{Dg}$$

Quando as parcellas são numeros complexos, podem reduzir-se todas ellas a numeros incomplexos referidos á mesma unidade, sommar estes numeros, e depois passar, querendo, do numero incomplexo resultante para a fórma complexa.

Póde, porém, effectuar-se a somma dos numeros complexos, sem os reduzir a incomplexos, empregando a seguinte regra, cuja demonstração é manifesta.

Para sommar numeros complexos escrevem-se estes numeros uns por baixo dos outros, de modo que as partes d'elles referidas á mesma unidade, fiquem em uma só columna vertical; sommam-se as partes, que se referem á unidade de infima especie, da somma achada

extrahem-se as unidades de especie maior, que ahi existam, juntam-se estas unidades á columna respectiva, e assim se continúa, até se ter effectuado a somma da ultima columna da esquerda.

Exemplo I.

$$\begin{array}{rrrrr} 4^s & 5^d & 18^h & 12' & \\ & 9 & 23 & 55 & 17'' \\ 2 & 4 & 15 & 00 & 56 \\ \hline 8^s & 6^d & 9^h & 08' & 13'' \end{array}$$

A unidade da infima especie é o segundo, a somma da columna dos segundos é $73''$ ou $1' + 13''$. Juntando $1'$, que vem da columna dos segundos, á columna dos minutos, e sommando acham-se $68'$ ou $1^h\ 8'$, juntando esta hora á columna das horas tem-se 57^h ou $2^d\ 9^h$, passando 2^d para a columna dos dias obtem-se 20^d ou $2^s\ 6^d$, e finalmente juntando estas 2^s á columna das semanas acham-se 8^s.

Exemplo II

$$\begin{array}{rrr} 27^\circ & 43' & 57'' \\ & 16 & 48 \\ 19 & 25 & 50 \\ 48 & 00 & 29 \\ \hline 95^\circ & 27' & 04'' \end{array}$$

Exemplo III

$$\begin{array}{rrrr} 43^{lb} & 14^{sh} & 8^{dst}, & 4 \\ 52 & 16 & 6 & ,8 \\ 48 & 07 & 10 & ,5 \\ \hline 144^{lb} & 19^{sh} & 1^{dst}, & 7 \end{array}$$

457. A subtracção ou diminuição de numeros concretos faz-se tambem como a dos numeros abstractos, quando aquelles numeros são incomplexos e estão referidos á mesma unidade. Se os dois numeros dados forem incomplexos, e estiverem referidos a unidades differentes e do mesmo genero, é necessario, antes de proceder á subtracção, reduzil-os á mesma unidade.

Querendo diminuir $72^{Dm^2},5$ de $8^{Ha},67$ é preciso reduzir ambos os numeros incomplexos á mesma unidade, a decametros quadrados ou a hectares por exemplo. Ter-se-ha então, reflectindo que (§ 440) um hectare contém 100 decametros quadrados,

$$8^{Ha},67 - 72^{Dm^2},5 = 867^{Dm^2} - 72^{Dm^2},5 = 794^{Dm^2},5$$

ou

$$8^{Ha},67 - 72^{Dm^2},5 = 8^{Ha},67 - 0^{Ha},725 = 7^{Ha},945$$

Quando os dois termos da subtracção são complexos, ou quando um é complexo e outro incomplexo, póde effectuar-se a subtracção tornando ambos os termos incomplexos referidos á mesma unidade, e reduzindo depois a numero complexo o resto obtido na subtracção. Póde tambem effectuar-se a subtracção de numeros complexos, sem reduzir estes numeros a incomplexos, empregando a seguinte regra.

Para subtrahir numeros complexos prepara-se o additivo de modo que cada uma das suas partes exceda a do subtractivo, que se refere á mesma unidade, addicionando, para esse fim, áquellas, que forem inferiores ás do subtractivo, uma das unidades de ordem immediatamente superior, que se contiver no additivo. Escreve-se o subtra-

ctivo por baixo do additivo, como quando se trata da addição, e effectua-se em cada columna vertical a subtracção dos numeros, de que ella se compõe.

Exemplo I	Exemplo II	Exemplo III
$9^h\ 48'\ 14'' - 3^h\ 16'\ 29''$	$24^o - 16^o\ 25'\ 48''$	$12^{lb}\ 16^{sh} - 18^{sh}\ 7^{dst}$
$9^h\ 47'\ 74''$	$23^o\ 59'\ 60''$	$11^{lb}\ 35^{sh}\ 12^{dst}$
$3\ \ 16\ \ 29$	$16\ \ 25\ \ 48$	$18\ \ \ 7$
$6^h\ 31'\ 45''$	$7^o\ 34'\ 12''$	$11^{lb}\ 17^{sh}\ \ 5^{dst}$

No exemplo I o additivo contém uma parte $14''$, da qual não se podem subtrahir $29''$, e por isso juntou-se-lhe 1 dos $48'$, reduzindo assim o additivo a $9^h\ 47'\ 74''$.

No exemplo II o additivo não tem minutos, nem segundos para d'elles se subtrahirem $25'\ 48''$, e portanto decompoz-se um dos 24° em $59'\ 60''$, que, como se sabe, equivalem a $60'$.

No exemplo III falta uma parte referida a dinheiros no additivo e a que se refere a shillings é inferior a 18^{sh} que lhe correspondem no subtractivo. Estes inconvenientes desappareceram juntando aos 16^{sh} uma das 12^{lb}, e convertendo em dinheiros um dos 36^{sh} que resultaram da somma $1^{lb} + 16^{sh}$. O additivo ficou por consequencia reduzido a $11^{lb}\ 35^{sh}\ 12^{dst}$.

458. Póde evitar-se na pratica a decomposição do additivo para se effectuar uma subtracção, juntando mentalmente uma unidade de certa ordem, tanto ao additivo como ao subtractivo.

Para subtrahir $5^h\ 43'\ 56''$ de 12^h escrever-se-ha

$$\begin{array}{r} 12^h \\ 5\ \ 43'\ 56'' \\ \hline 6^h\ 16'\ \ 4'' \end{array}$$

e raciocinar-se-ha assim. De nada não se pódem subtrahir $56''$, porém, juntando $1'$ tanto ao additivo como ao subtractivo, podem subtrahir-se $56''$ de $60''$, comtanto que no subtractivo se supponha que estão $44'$ em vez de $43'$. Aquelles $44'$ tambem não se podem subtrahir de zero de minutos, mas juntanto 1^h, ou $60'$ a este zero de minutos e juntando tambem 1^h ao subtractivo, o resto não muda, e por consequencia subtrahindo $44'$ de $60'$ obtem se $16'$. Finalmente diminuindo de 12^h o subtractivo $5^h + 1^h$ acham-se 6^h.

Este modo de effectuar a subtracção de complexos é inteiramente analogo, ao que se costuma usar (§ 40) na subtracção de inteiros.

Exemplo I	Exemplo II	Exemplo III
$49^o\ 12'\ 43''$	$14^{lb}\ \ 5^{sh}\ 10^{dst}$	$3^d\ 16^h\ 25'\ 43'',67$
$22\ \ 25\ \ 58$	$7\ \ 18\ \ 11$	$1\ \ 19\ \ 38\ \ 52\ ,104$
$26^o\ 46'\ 45''$	$6^{lb}\ \ 6^{sh}\ 11^{dst}$	$1^d\ 20^h\ 46'\ 51'',566$

459. O producto de dois numeros abstractos é sempre o mesmo (§ 209), seja qual fôr o numero que se toma para multiplicador, ou para multiplicando. Não acontece exactamente o mesmo,

quando os factores são numeros concretos. Com effeito, se o multiplicando fôr 65 réis e o multiplicador 8 metros, ou antes 8, o producto ha de formar-se de 65 réis como o multiplicador 8 se fórma de 1 e será então

$$65^{rs} \times 8^{m} = 65^{rs} + 65^{rs} + \cdots + 65^{rs} = 520^{rs}$$

se o multiplicando fôr 8^{m} e o multiplicador 65 réis, ter-se-ha

$$8^{m} \times 65^{rs} = 8^{m} + 8^{m} + 8^{m} + 8^{m} + 8^{m} + \cdots + 8^{m} = 520^{m}$$

O valor numerico do producto é o mesmo, tanto n'um como no outro caso, a unidade, porém, a que elle se refere, é diversa, porque deve ser a mesma que a unidade a que está referido o multiplicando. A unidade a que se refere o producto, assim como o valor numerico d'este, é completamente independente da unidade principal do multiplicador, porque este serve apenas para indicar o modo por que o producto deve formar-se do multiplicando.

460. Para se poder effectuar uma multiplicação de numeros concretos é preciso conhecer: 1.º, *qual dos factores é multiplicando;* 2.º, *qual é a unidade principal do multiplicador*, isto é, a unidade da qual se ha de formar o multiplicador, como do multiplicando deve ser formado o producto. Este conhecimento só póde ser dado pelo enunciado do problema, que conduz á multiplicação.

Querendo saber, por exemplo, em quanto importam 8 metros de fazenda, na hypothese de cada metro custar 65 réis, póde imaginar-se, que, á proporção que se forem medindo os metros de fazenda, se vão tambem pondo de parte os 65 réis de cada metro, e então é evidente que a importancia da fazenda constará de tantas vezes 65 réis, quantos os metros medidos. N'este exemplo é pois 65 réis o multiplicando, 8 metros o multiplicador, e o metro a unidade principal do multiplicador.

Pretendendo-se calcular, quantos metros de fazenda podem comprar-se com 65 réis, na hypothese de 8 metros valerem 1 real, é necessario raciocinar de outro modo. Imaginando, por exemplo, que se medem 8 metros de fazenda, e que em seguida se põe de parte 1 real, que depois se medem outros 8 metros e se põe de parte outro real, e que assim se vae proseguindo, até estarem de parte 65 réis, é claro que no fim a fazenda medida comprehenderá tantas vezes 8 metros, quantas vezes 65 réis contiver 1 real, logo 8 metros é agora o multiplicando, 65 o multiplicador, e 1 real a sua unidade principal.

Suppondo, finalmente, que se pergunta, qual é o custo de 12 litros de vinho, que foi comprado a 3$265 réis o decalitro, é evidente que se precisa fazer uma multiplicação na qual 3$265 réis é o multiplicando e 12 litros o multiplicador; porém, n'este, caso, a unidade principal do multiplicador não é o litro, é o decalitro, por ser este que custa 3$265 réis. Reduzindo (§ 459) o multipli-

cador á unidade principal, a questão converte-se na seguinte: quanto custam 1.2 decalitros de vinho, que foi comprado a 3$265 réis o decalitro?

A resposta é $3265^{rs} \times 1{,}2 = 3918^{rs}$

Se se tivesse multiplicado 3$265 réis por 12, achar-se-ia um producto 39$180 réis, que representaria o custo de 12 decalitros, e, dividindo por 10 $\left(\text{ou multiplicando por } \frac{1}{10}\right)$ o referido producto, ter-se-ia tambem o valor de 12 litros.

461. *O producto de dois numeros complexos acha-se geralmente reduzindo o multiplicador á unidade principal, multiplicando o numero incomplexo resultante por cada uma das partes do multiplicando, e extrahindo de cada um d'estes productos parciaes as unidades de ordem immediatamente superior.*

Exemplo. Tendo-se ajustado pagar $3^{lb}\ 18^{sh}\ 7^{dst}$ por cada hora de trabalho, quanto se ha de pagar por $8^{s}\ 5^{d}\ 12^{h}$?

Para se resolver esta questão é necessario effectuar uma multiplicação na qual $3^{lb}\ 18^{sh}\ 7^{dst}$ é o multiplicando, $8^{s}\ 5^{d}\ 12^{h}$ o multiplicador e 1 hora a unidade principal d'este ultimo factor. Eis aqui como se effectuam as operações

$8^{s}\ 5^{d}\ 12^{h}$	3^{lb}	18^{sh}	7^{dst}	
7			1476	
56	4428	11808	10332^{dst}	| 12
5	1371	1476	73	861
61^{d}	5799^{lb}	861	12	
24		27429^{sh} | 20	0^{dst}	
244		74 1371		
122		142		
1464		29		
12		9^{sh}		
1476^{d}				

Logo o trabalho de $8^{s}\ 5^{d}\ 12^{h}$ importa em $5799^{lb}\ 9^{sh}$.

462. Simplifica-se o trabalho de reduzir dinheiros a shillings e estes a libras no fim da multiplicação, empregando o *methodo das partes aliquotas*. O fim principal d'elle é substituir as divisões, que pelo methodo ordinario têem de fazer-se para extrahir de cada producto parcial as unidades de especie maior, por outras mais faceis, nas quaes os divisores sejam numeros digitos.

Na multiplicação por partes aliquotas chama-se especialmente parte aliquota de um numero ao numero, que o divide exactamente de modo que o quociente seja digito.

A multiplicação por partes aliquotas effectua-se sempre começando pelas unidades de maior grandeza.

Para applicar este methodo ao exemplo do § precedente começa-se por multiplicar 1476 por 3^{lb} e depois decompõe-se 18^{sh} em

$10^{sh} + 5^{sh} + 2^{sh} + 1^{sh}$ e multiplica-se 1476 por cada uma das quatro parcellas d'esta somma, como porém 10^{sh} é metade de 1 libra, isto é, como 10^{sh} é parte aliquota da libra, o producto $10^{sh} \times 1476$ é igual a $\frac{1^{lb}}{2} \times 1476$, e por consequencia o seu valor obtem-se dividindo 1476 por 2. Depois de conhecido o valor de $10^{sh} \times 1476$ é evidente que basta dividir esse valor por 2 para se ter o de $5^{sh} \times 1476$, e por 5 para se ter o valor do producto de 2^{sh} por 1476. Dividindo por 2 este ultimo producto acha-se o valor de $1^{sh} \times 1476$. Obtêem-se por este modo quatro productos parciaes, que, se fossem sommados, dariam o valor de $18^{sh} \times 1476$.

Resta agora multiplicar 1476 por 7^{dst}. Para esse fim, como 7^{dst} não é parte aliquota do shilling, que tem 12 dinheiros, decompõe-se 7^{dst} em $6+1$, e depois divide-se por 2 o producto correspondente a $1^{sh} \times 1476$ para ter o valor de $6^{dst} \times 1476$, e toma-se a sexta parte a este ultimo producto para se alcançar o valor de $1^{dst} \times 1476$.

Sommando todos estes productos parciaes, e extrahindo da somma de cada uma das columnas as unidades, que devem passar para a immediata, obtem-se o producto pedido. Esta reducção de unidades é ordinariamente tão simples, que se faz mentalmente.

A operação dispõe-se, como em seguida se vê

$3^{lb}\ 10^{sh} + 5^{sh} + 2^{sh} + 1^{sh}\ 6^{dst} + 1^{dst}$

	1476	
$3^{lb} \times 1476$.....	4428^{lb}	
$10^{sh} \times 1476$.....	738	
$5^{sh} \times 1476$.....	369	
$2^{sh} \times 1476$.....	147	12^{sh}
$1^{sh} \times 1476$.....	73	16
$6^{dst} \times 1476$.....	36	18
$1^{dst} \times 1476$.....	6	3
	5799^{lb}	9^{sh}

463. Quando a unidade principal do multiplicador é maior que a da infima especie, a multiplicação de complexos pelo methodo ordinario fica reduzida a multiplicar um numero complexo por um quebrado, e por consequencia a multiplicar o complexo pelo numerador do quebrado e a dividir o producto pelo denominador.

N'este caso póde tambem empregar-se o methodo das partes aliquotas com vantagem, decompondo em partes aliquotas as partes do multiplicador, que se referirem a unidades menores do que a unidade principal.

Os exemplos seguintes mostram, como se opera na pratica.

Exemplo I. Gastando-se 25 libras por dia com uma obra, qual será a despeza feita com a mesma obra em 2 mezes, 14 dias, 17 horas e 25 minutos?

O multiplicando é 25 libras, a unidade principal do multiplicador é o dia. Reduzindo 2 mezes e 14 dias a dias, e decompondo em partes aliquotas a parte restante $17^{h}\ 25'$ do multiplicador ficará

este convertido em $74^d\ 12^h + 4^h + 1^h\ 20' + 5'$. Effectuando agora a multiplicação acha-se

	25^{lb}					
	74^d	$12^h + 4^h + 1^h$	$20' + 5'$			
$25^{lb} \times 74$	100^{lb}					
	175					
$25^{lb} \times 12^h$	12	10^{sh}				
$25^{lb} \times 4^h$	4	3	4^{dst}			
$25^{lb} \times 1^h$	1	0	10			
$25^{lb} \times 20'$	0	6	11	$\frac{1}{3}$		2
$25^{lb} \times 5'$	0	1	8	$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$		5
	1868^{lb}	2^{sh}	10^{dst}	$\frac{1}{6}$		

N'este exemplo, depois de se formar o producto parcial de 25 por 74, passou-se a multiplicar 25 por 12. Para se obter o valor d'este producto reflectiu-se que, pagando-se 25^{lb} por 1^d, ou 24^h de trabalho, deve pagar-se metade de 25^{lb} por 12^h de trabalho e concluiu-se, portanto, que $\frac{25^{lb}}{2}$ ou $12^{lb}\ 10^{sh}$ é n'este exemplo, o valor de $25^{lb} \times 12^h$. Os outros productos parciaes acham-se facilmente.

A somma dos diversos productos acha-se, como nos casos ordinarios, reduzindo ao mesmo denominador as fracções de dinheiro, sommando estas fracções, extrahindo os inteiros da fracção resultante, etc.

Exemplo II. Um relogio atraza-se regularmente $2'\ 18''$ por dia quanto se atrazará em $9^d\ 10^h\ 17'\ 56''$?

N'este exemplo são homogeneos ambos os factores, e comtudo conhece-se facilmente pelo enunciado que $2'\ 18''$ é o multiplicando e 1 dia a unidade principal do multiplicador.

$M = 2'\ 18''$	$2'\ 12'' + 6''$						
	$9^d\ 6^h + 3^h + 1^h\ 10' + 5' + 2'\ 30'' + 20'' + 6''$						
$2' \times 9^d$	$18'$						
$1' \times 9^d$	$9'$						
$12'' \times 9^d$	1	$48''$					
$6'' \times 9^d$	0	54					
$M \times 6^h$	0	34	$\frac{1}{2}$		.....	3600	
$M \times 3^h$	0	17		$\frac{1}{4}$	.....	1800	
$M \times 1^h$	0	5	$\frac{3}{4}$		.....	5400	
$M \times 10'$	0	0		$\frac{23}{24}$	.....	6900	
$M \times 5'$	0	0	$\frac{23}{48}$		.....	3450	
$M \times 2'$	0	0		$\frac{23}{420}$	.....	1380	
$M \times 30''$	0	0	$\frac{23}{480}$		.....	345	
$M \times 20''$	0	0		$\frac{23}{720}$	.....	230	
$M \times 6''$	0	0	$\frac{23}{2400}$		.....	69	
	$21'$	$41''$	$\frac{1574''}{7200}$ ou	$\frac{787''}{3600}$		23174	7200
						1574	3

O producto $1' \times 9^d$ não entrou na somma, porque apenas se formou para se derivar d'elle o producto correspondente a $12' \times 9^d$, que não podia deduzir-se facilmente do producto correspondente a $2' \times 9^d$, visto não ser $12''$ parte aliquota de $2'$. Chamam-se *productos subsidiarios* aos productos, como $1' \times 9^d$, que servem unicamente para se calcular o valor de um producto util. Para evitar enganos na somma é conveniente passar um traço por cima de cada producto subsidiario.

Exemplo III. Importando 1 metro de certa obra em 13 libras, 15 shillings e 8 dinheiros esterlinos (pence), em quanto importarão 6,254 metros?

$$M = 13^{lb}\ 15^{sh}\ 8^{dst} \quad 6{,}254 = 6 + 0{,}2 + 0{,}05 + 0{,}002 + 0{,}002$$

$$13^{lb}\ 10^{sh} + 5^{sh}\ 6^{dst} + 2^{dst}$$

$$6 + 0{,}2 + 0{,}05 + 0{,}002 + 0{,}002$$

$13^{lb} \times 6^{m}$.....	78^{lb}					
$10^{sh} \times 6^{m}$.....	3					
$5^{sh} \times 6^{m}$.....	1	10^{sh}				
$1^{sh} \times 6^{m}$.....	Ø	6				
$6^{dst} \times 6^{m}$.....	0	3				
$2^{dst} \times 6^{m}$.....	0	1				
$M \times 2^{dm}$.....	2	15	1^{dst}	$\frac{3}{5}$		75
$M \times 5^{cm}$.....	0	13	9		$\frac{2}{5}$	50
$M \times 1^{cm}$.....	Ø	2	9	$\frac{2}{25}$		
$M \times 2^{mm}$.....	0	0	6		$\frac{77}{125}$	77
$M \times 2^{mm}$.....	0	0	6	$\frac{77}{125}$		77
	86^{lb}	4^{sh}	0^{dst}	$\frac{29}{125}$		279 | 125
						29 | 2

464. Sabendo multiplicar dois numeros concretos, não é difficil calcular o producto de tres ou mais numeros concretos, comtanto que em cada uma das multiplicações successivas se saiba distinguir o multiplicando do multiplicador, e determinar a unidade principal d'este.

Póde, porém, acontecer que na primeira d'essas multiplicações seja unidade o multiplicando, e, portanto, que o pruducto dependa apparentemente de dois ou mais factores, nenhum dos quaes seja homogeneo com elle. Este caso dá-se frequentemente nas applicações da arithmetica á geometria, quando se trata das avaliações de areas e de volumes.

Em geral, para se avaliar uma area, é preciso conhecer os comprimentos de duas linhas determinadas e multiplicar os numeros, que exprimem esses comprimentos referidos á mesma unidade linear. O valor numerico do producto dá a expressão da area comparada com a de um quadrado, cujo lado é igual á unidade linear, que se empregou na medida dos dois comprimentos[1]. Suppondo

[1] Ha casos especiaes em que o producto de dois numeros referidos á mesma

que um dos comprimentos é igual a 3 metros e o outro igual a 4 metros, a area será igual a 12 metros quadrados. Para se comprehender a rasão por que o producto de dois numeros, 3 e 4, referidos ambos ao metro linear, é um numero, que representa metros quadrados, é necessario advertir que a verdadeira expressão da area é o producto de tres factores, dos quaes um, o multiplicando, é igual á unidade metro quadrado, e os dois factores restantes, referidos ambos á mesma unidade linear, são multiplicadores.

Os volumes avaliam-se proximamente, como as areas, com a differença de serem o producto de tres numeros referidos á mesma unidade linear, ou antes o producto d'estes mesmos numeros considerados abstractamente por um quarto numero, igual á unidade de volume, isto é, igual ao volume do cubo, que tem de lado a unidade linear. Este quarto factor, que é o que representa o multiplicando, não apparece explicitamente n'estas multiplicações, porque o seu valor é sempre 1.

465. Para se dividir um numero concreto por outro é necessario distinguir dois casos, a saber: ou o divisor é multiplicando e o quociente multiplicador, ou o divisor é multiplicador e o quociente multiplicando.

Quando o divisor é multiplicando, reduz-se tanto o dividendo como o divisor á mesma unidade, para o quociente se poder considerar numero abstracto; quando o divisor é multiplicador, não se começa a divisão, sem previamente se reduzir o divisor á sua unidade principal, a fim de que a unidade, ou unidades, a que ha de referir-se o quociente, sejam as mesmas a que está referido o dividendo.

466. **Problema.** *Dividir um numero concreto por outro, suppondo que o divisor é multiplicando.*

Exemplo I. Com um kilogramma de prata de $916\frac{2}{3}$ millesimos, quantas moedas de 5 tostões se podem fabricar?

Como o toque das moedas portuguezas é (§ 446) $916\frac{2}{3}$ millesimos, a questão reduz-se a examinar, quantas vezes se contém n'um kilogramma o peso ($12^g,5$) de uma moeda de 5 tostões. É necessario, pois, dividir 1 kilogramma por 12,5 grammas, considerando este ultimo numero como multiplicando, e para isso devem reduzir-se á mesma unidade, tanto o dividendo como o divisor.

---

unidade linear, ao metro, por exemplo, representa uma linha em vez de uma area. É isto o que acontece, quando um dos dois numeros representa o multiplicando.

Similhantemente o producto de tres factores referidos á mesma unidade linear póde em certos casos deixar de representar um volume, e representar uma linha, ou uma area, conforme o multiplicando for um dos tres factores lineares ou a unidade de area.

Dividindo 1000 grammas por 12,5 grammas, ou 1000 por 12,5 acha-se 80, logo com 1 kilogramma de prata de $916\frac{2}{3}$ millesimos fabricam-se 80 moedas de 5 tostões.

Exemplo II. Quantos metros de fazenda se compraram com 34^{lb} 18^{sh} 9^{dst} na hypothese de cada metro ter custado 16^{sh} 7^{dst}?

O numero de metros deve ser tal que multiplicado por 16^{sh} 7^{dst} dê 34^{lb} 18^{sh} 9^{dst}, logo este ultimo numero é o dividendo e o outro é o divisor, que, n'este exemplo, faz de multiplicando.

Reduzindo a dinheiros (pence) os dois numeros dados (§ 450 ou 451) acha-se para dividendo 8385 dinheiros, e para divisor 199 dinheiros, e dividindo 8385 por 199 obtem-se o quociente 42,14...

Logo compraram-se $42^{m},14$ de fazenda.

Exemplo III. A abertura de uma valla importou em 146^{lb} 5^{sh} 7^{dst}. Pergunta-se, que tempo se gastou n'essa abertura, suppondo que a despeza feita com ella regulou por 8^{lb} 14^{sh} cada semana?

É evidente que o numero de semanas deve ser igual ao maximo numero de vezes que a quantia 8^{lb} 14^{sh} se contém na despeza total 146^{lb} 5^{sh} 7^{dst}, e por consequencia que deve dividir-se este numero por aquelle considerado como multiplicando.

Reduzindo ambos os numeros á mesma unidade, a dinheiros para evitar fracções, acha-se 35107 dinheiros para dividendo e 2088 dinheiros para divisor, e, portanto, o numero de semanas, que durou a abertura da valla, é igual a $\frac{35107}{2088}$.

Reduzindo (§ 453) o numero incomplexo $\frac{35107}{2088}$ semanas a complexo, acha-se finalmente

$$16^{s}\ 5^{d}\ 16^{h}\ \frac{61^{h}}{87}$$

467. **Problema.** *Dividir um numero concreto por outro, suppondo que o divisor é multiplicador.*

Exemplo I. Tendo-se comprado 48 metros de fazenda por 129^{lb} 18^{sh} 6^{dst}, quanto custou cada metro de fazenda?

Se fosse dado o preço do metro, seria facil verifical-o, porque o producto d'elle por 48 seria igual a 129^{lb} 18^{sh} 6^{dst}. Dividindo pois 129^{lb} 18^{sh} 6^{dst} por 48 metros considerado como multiplicador, ou como numero abstracto, deve achar-se o quociente referido ás mesmas unidades a que o dividendo está referido.

Advertindo, porém, que o dividendo póde considerar-se igual á somma $129^{lb}+18^{sh}+6^{dst}$ ter-se-ha (§ 91) o quociente pedido igual a $\frac{129^{lb}}{48}+\frac{18^{sh}}{48}+\frac{6^{dst}}{48}$, e effectuando successivamente estas divisões, achar-se-ha $2^{lb}+\frac{33^{lb}}{48}+\frac{18^{sh}}{48}+\frac{6^{dst}}{48}$ ou (§ 449) $2^{lb}+\frac{33.20^{sh}+18^{sh}}{48}+\frac{6^{dst}}{48}$ que é igual a $2^{lb}+14^{sh}+\frac{6^{sh}}{48}+\frac{6^{dst}}{48}$ ou $2^{lb}+14^{sh}+\frac{6.12^{dst}+6^{dst}}{48}$, e, portanto, igual a $2^{lb}+14^{sh}+1^{dst},625$.

Vê-se, pois, que importou em 2^{lb} 14^{sh} 1^{dst},625 cada metro de fazenda.

Na pratica dispõe-se a operação, como indica o seguinte typo

$$
\begin{array}{l|l}
129^{lb}\ 18^{sh}\ 6^{dst} & 48 \\ \cline{2-2}
33^{lb} & 2^{lb}\ 14^{sh}\ 1^{dst},625 \\
20 & \\ \cline{1-1}
660 & \\
18 & \\ \cline{1-1}
678^{sh} & \\
198 & \\
6^{sh} & \\
12 & \\ \cline{1-1}
72 & \\
6 & \\ \cline{1-1}
78^{dst} & \\
300 & \\
120 & \\
240 & \\
0 &
\end{array}
$$

Exemplo II. Sendo 12^{lb} 10^{sh} a despeza feita cada semana com certa obra, qual será a despeza feita com a mesma obra no fim de 3 mezes, 2 semanas e 6 dias?

Para se resolver esta questão é necessario achar um numero, que se forme de 12^{lb} 10^{sh}, do mesmo modo que 3 mezes, 2 semanas e 6 dias se fórma da unidade semana. Reduzindo o multiplicador á unidade semana, que é a principal, acha-se (suppondo cada mez com 30 dias) $\frac{110}{7}$ da semana. Logo deve multiplicar-se 12^{lb} 10^{sh} por o numero abstracto $\frac{110}{7}$, se não se quizer empregar o methodo das partes aliquotas (§ 463), para se obter a solução do problema.

Ora o producto de 12^{lb} 10^{sh} por 110 dá 1375^{lb} e o quociente resultante da divisão d'este numero por 7, é 196^{lb} 8^{sh} 6^{dst} $\frac{6}{7}$, logo a despeza feita em 3 mezes, 2 semanas e 6 dias importa em 196 libras, 8 shillings, 6 dinheiros e $\frac{6}{7}$ do dinheiro.

Exemplo III. Adiantando-se um relogio $2'$ $16''$ em cada periodo de 18^h $48'$ $56''$, quanto tempo será necessario para o relogio se adiantar 1^h?

N'este exemplo o dividendo e o divisor são da mesma especie, e comtudo não é difficil descobrir que o divisor $2'$ $16''$ representa o multiplicador, porque, dos dois numeros dados, um representa adiantamento do relogio e outro o tempo durante o qual esse adiantamento se effectuou, e o numero pedido representa tambem o tempo durante o qual o relogio se adiantou 1 hora.

Para se effectuar a divisão é necessario, portanto, reduzir o divisor á unidade principal, que evidentemente é a hora.

	$18^h\ 30' + 15' + 3'\ 45'' + 9'' + 1'' + 1''$		
	450		
$18^h \times 450$.....	900h		
	72		
$30' \times 450$.....	225		
$15' \times 450$.....	112	30'	
$3' \times 450$.....	22	30	
$45'' \times 450$.....	5	37	30''
$9'' \times 450$.....	1	7	30
$1'' \times 450$.....	0	7	30
$1'' \times 450$.....	0	7	30
	8467h	00'	00'' | 17
	166		498h 3' 31''
	137		
	1h	498h | 24	
	60	18h 20d | 7	
	60'	6d 2s	
	9		
	60		
	540''		
	30		
	13''		

Reduzindo 2′ 16″ a horas achou-se $\frac{136^h}{3600}$ ou $\frac{17^h}{450}$.

Restava, portanto, dividir $18^h\ 48'\ 56''$ pelo numero abstracto $\frac{17}{450}$, ou multiplicar $18^h\ 48'\ 56''$ por o denominador 450 e dividir o producto por 17.

Praticando as operações, como acima se fez, acha-se que são precisas $2^s\ 6^d\ 18^h\ 3'\ 31''\ \frac{13''}{17}$ para o relogio ter 1 hora de adiantamento.

468. Quando o dividendo se refere a metros quadrados e o divisor a metros lineares, ou o quociente é multiplicando, e representa por consequencia metros quadrados, e n'esse caso o divisor deve reputar-se abstracto, ou o quociente é multiplicador, e, portanto, abstracto, e conseguintemente o divisor referir-se-ha a metros quadrados. N'esta ultima hypothese deve rigorosamente suppor-se, que se pede o quociente resultante da divisão de um numero de metros quadrados por o producto de dois numeros, dos quaes um é igual a 1 metro quadrado, e o outro, que tem de ser considerado como abstracto, é igual ao numero dado de metros lineares. Os exemplos seguintes indicam o modo de proceder em cada uma das duas hypotheses.

Exemplo I. Um campo com 15240 decametros quadrados de superficie e 635 decametros lineares de comprimento foi dividido em talhões da largura do mesmo campo e de um decametro de comprimento. Qual é a extensão superficial, ou area de cada talhão?

O dividendo é n'este caso 15240 decametros quadrados, o divisor é 635 decametros lineares, e o quociente deve ser da mesma especie que o dividendo. Basta isto para se concluir que o divisor tem de ser considerado como abstracto depois de referido á unidade principal, que n'este exemplo, é o decametro linear.

Dividindo 15240^{Dm^2} por 635, acha-se 24^{Dm^2}, que é por consequencia o numero, que representa a area de cada talhão.

Exemplo II. Calcular o comprimento de uma rua, que tem de largura $8^m,45$ em toda a extensão e cuja area, ou extensão superficial, é $1898^{m^2},039$.

N'este exemplo o dividendo é $1898^{m^2},039$, o divisor deve suppor-se igual ao producto de 1^{m^2} por o numero abstracto 8,45, e o quociente é, portanto, um numero abstracto.

Comprehende-se perfeitamente isto imaginando sobre uma recta de $8^m,45$ de comprimento construido um rectangulo com 1^m de altura, e tendo por consequencia $8^{m^2},45$ de area, sobre este rectangulo outro igual e assim successivamente até que a somma das areas de todos dê $1898^{m^2},039$. É claro que a altura do grande rectangulo, que resulta da juncção de todos os que se construiram, tem tantos metros, quantos são os rectangulos, e que o numero d'estes é igual ao numero de vezes que 8,45 se contém no numero 1898,039.

Dividindo este numero por aquelle acha-se 224,6, que vem, portanto, a representar o numero de metros, que tem o comprimento da rua.

469. Quando o dividendo representa metros cubicos, e o divisor metros lineares, ou metros quadrados, podem dar-se tambem dois casos conforme o quociente tem de representar metros cubicos ou não[1]. No primeiro caso o quociente é multiplicando e o divisor é o multiplicador, que deve reputar-se abstracto, depois de referido á unidade principal; no segundo caso o divisor deve tomar-se como multiplicando, e, portanto, suppor-se referido a metros cubicos, embora no enunciado do problema esteja referido a metros lineares, ou a metros quadrados.

---

[1] Estas considerações percebem-se melhor depois de se haver estudado geometria. Os quatro seguintes problemas indicam, porém, os diversos casos, que podem apparecer na pratica.

Calcular a area da base de um prisma, sabendo que o volume d'elle é 69,345 metros cubicos e a altura 6,7 metros.

Calcular a altura de um prisma, sabendo que o volume d'elle é 69,345 metros cubicos e a base 10,35 metros quadrados.

Tendo-se decomposto um prisma, cujo volume tem 69,345 metros cubicos, em outros prismas menores por planos parallelos ás bases e com 1 metro de intervallo, qual é o volume de cada um dos prismas menores, na hypothese de ser 6,7 metros a altura do prisma dado?

Sendo 69,345 metros cubicos o volume de um prisma e 10,35 metros quadrados a area da base, calcular o volume de um novo prisma de altura igual á altura do prisma dado e de base igual a 1 metro quadrado.

EXERCICIOS

I. Comprou-se uma porção de certa mercadoria, cujo peso era 7,235 kilogrammas, a 8 libras, 15 shillings e 9 dinheiros cada hectogramma. A como saiu cada litro da mesma mercadoria, suppondo que aquelle peso correspondem 25,5 litros.

II. Tendo 40000 kilometros de comprimento a circumferencia de um circulo maximo terrestre, quanto tempo será necessario para dar uma volta á roda do globo um homem, que ande 6 horas por dia, dando 100 passos de 64 centimetros por minuto?

III. Quanto dinheiro possue um sujeito, que affirma que possuiria 24 libras, se acaso tivesse 9 vezes mais shillings do que tem, e se alguem lhe desse 1 libra e 19 shillings?

IV. Que extensão superficial tem uma propriedade, que custou 25 contos de réis a rasão de 260$000 réis por hectare?

V. Gastando um movel 8^h 25′ 52″ em percorrer uma circumferencia, que tempo precisará elle para descrever um arco de 26° 18′ 43″,50 da mesma circumferencia?

VI. Sendo 18^{lb} 5^{sh} 8^{dst} a despeza feita com um decametro de certa obra, em quanto importam 625 metros da mesma obra?

VII. Suppondo que um relogio em 32 dias, 20 horas e 25 minutos se adiantou 2 minutos e 18,6 segundos, qual foi o adiantamento do mesmo relogio por dia?

VIII. Sendo 1 dia, 6 horas, 58 minutos e 40,8 segundos a somma de 9 termos de uma progressão arithmetica, e 2 horas, 35 minutos e 42 segundos o primeiro dos ditos termos, calcular a rasão da progressão.

IX. Uma nascente correndo para um reservatorio, que tem 9931 metros cubicos de capacidade, enche-o em 3 dias; qual é o volume da nascente em anneis e pennas?

X. Uma nascente, cujo producto (em 24 horas) fosse 59 anneis e 5 pennas, em quanto tempo encheria um reservatorio, que tivesse 9931 metros cubicos de capacidade?

LIVRO II

APPLICAÇÕES DA ARITHMETICA

CAPITULO I

Quantidades proporcionaes — Regras de tres

470. *Duas quantidade são* directamente proporcionaes, *quando dependem uma da outra, de modo que, fazendo variar a grandeza de uma, resulta para a outra um valor tal, que a rasão entre dois valores quaesquer de uma seja igual á rasão entre os valores correspondentes da outra.*

Conhece-se que duas quantidades são directamente proporcionaes, quando duplicando, triplicando, quadruplicando, etc., uma d'ellas, a outra toma necessariamente um valor duplo, triplo, quadruplo, etc., do que primitivamente tinha.

Sendo Q e a valores correspondentes de duas quantidades directamente proporcionaes, Q' e a' outros dois valores correspondentes das mesmas quantidades, ter-se-ha por definição

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{a}{a'} \quad \text{ou} \quad Q : Q' :: a : a'$$

471. O peso de qualquer mercadoria e o seu valor são, em geral, quantidades directamente proporcionaes, porque a um peso duplo, triplo, etc., da referida mercadoria corresponde um valor duplo, triplo, etc.

Ha comtudo mercadorias, cujo valor não se suppõe crescer na rasão directa do peso. Os diamantes, esmeraldas, rubins, etc., estão n'este caso[1].

O aluguer, que se paga, para usofruir um certo objecto, e o tempo a que se refere esse usofruto, são quantidades directamente proporcionaes.

O juro pago pelo emprestimo de um certo capital, e o tempo a que esse juro corresponde, são tambem quantidades directamente proporcionaes; e o mesmo acontece ao juro vencido em certo tempo comparado com o capital correspondente a esse juro.

Um quebrado, cujo numerador varia, é directamente proporcional ao numerador, porque, conservando-se invariavel o denominador, é evidente que não póde duplicar, triplicar, etc., o numerador, sem tambem duplicar, triplicar, etc. o quebrado (§ 214).

472. **Theorema.** *Uma quantidade é directamente proporcional ao producto de duas, ou mais quantidades de que depende, quando estas quantidades são independentes entre si, e cada uma é directamente proporcional áquella.*

Seja Q uma quantidade dependente das quantidades a, b e c, de modo tal que estas tres quantidades sejam independentes umas das outras e qualqer d'ellas seja directamente proporcional a Q. Suppondo que a', b' e c' são valores, que simultaneamente tomam as quantidades a, b e c, e designando por Q' o valor de Q correspondente áquelles valores de a, b e c, será

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{abc}{a'b'c'} \quad \text{ou} \quad Q : Q' :: abc : a'b'c'$$

Sendo a, b e c quantidades independentes umas das outras, é claro que póde uma, a por exemplo, mudar de valor, sem nenhuma das outras variar. Suppondo, portanto, que varia unicamente a, e que d'essa variação resulta para Q um valor Q_1, suppondo, depois de a ter variado, que varia sómente b, e designando por Q_2 est'outro valor de Q, e finalmente imaginando que variou tam-

[1] No commercio os diamantes brutos de peso não inferior a 1 quilate têem valores directamente proporcionaes aos quadrados dos pesos. Suppondo que 9$400 réis é o valor de um diamante bruto de 1 quilate de peso, será $2^2 \times 9\$400$ ou 37$600 réis o valor de um diamante bruto de 2 quilates de peso. O valor de um diamante lapidado reputa-se geralmente igual ao de um diamante bruto de duplicado peso. Um diamante lapidado, que pese 3 quilates valerá tanto como um diamante bruto, que pese 6 quilates. Esta regra dada por Tavernier em 1692, soffre algumas modificações, quando se trata de diamantes de mais de vinte quilates. As perolas finas e as pedras preciosas, exceptuando os topasios, avaliam-se pela regra de Tavernier.

bem c, podem representar-se pelas quatro linhas seguintes os valores correspondentes das quatro quantidades, em cada um dos estados de grandeza por que successivamente vão passando

$$\begin{array}{ll} Q \ldots\ldots\ldots & a,\ b,\ c \\ Q_1 \ldots\ldots\ldots & a',\ b,\ c \\ Q_2 \ldots\ldots\ldots & a',\ b',\ c \\ Q' \ldots\ldots\ldots & a',\ b',\ c' \end{array}$$

Comparando as duas primeiras d'estas quatro linhas reconhece-se, que a mudança de valor de Q resultou apenas da mudança de valor de a, e como, por hypothese, esta quantidade é directamente proporcional a Q, segue-se (§ 470) que será

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{a}{a'} \quad \text{ou} \quad Q : Q_1 :: a : a'$$

Comparando a segunda e terceira linhas, e fazendo a mesma observação que se fez para as duas primeiras, acha-se

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{b}{b'} \quad \text{ou} \quad Q_1 : Q_2 :: b : b'$$

Finalmente, comparando as ultimas duas linhas, tem-se

$$\frac{Q_2}{Q'} = \frac{c}{c'} \quad \text{ou} \quad Q_2 : Q' :: c : c'$$

Multiplicando ordenadamente (§ 369) as tres proporções, vem

$$\frac{Q\,Q_1\,Q_2}{Q_1\,Q_2\,Q'} = \frac{a\,b\,c}{a'b'c'} \quad \text{ou} \quad Q\,Q_1\,Q_2 : Q_1\,Q_2\,Q' :: a\,b\,c : a'b'c'$$

e, dividindo os termos da primeira razão por $Q_1\,Q_2$, obtem-se a proporção, que se queria demonstrar.

473. O valor de uma barra de oiro, ou de prata, depende evidentemente do peso da barra e da qualidade do oiro, ou da prata, isto é, do toque ou titulo (§ 446) do metal precioso. Estas duas quantidades, peso da barra e toque do metal, são independentes entre si e cada uma d'ellas, se a outra não varia, é directamente proporcional ao valor da barra. Logo *o valor de uma barra de oiro, ou de prata, é directamente proporcional ao producto do peso da barra pelo toque.*

Os juros são directamente proporcionaes aos tempos, quando os capitaes não variam (§ 471), e são directamente proporcionaes aos capitaes, quando os tempos não variam, os tempos e os capitaes são quantidades independentes entre si, logo *o juro é directamente proporcional ao producto do capital pelo tempo.*

Em geral o lucro, ou perda, que compete a qualquer socio de uma empreza mercantil, reputa-se tambem directamente proporcional ao producto da entrada do socio, ou do capital com que elle contribuiu, pelo tempo, que durou o desembolso d'essa entrada.

A quantidade de obra executada por um certo numero de ope-

rarios em tantos dias, trabalhando um certo numero de horas por dia, é, em igualdade de circumstancias, directamente proporcional ao producto do numero de operarios, pelo numero de dias de trabalho e pelo numero de horas de trabalho diario.

474. *Duas quantidades são* **inversamente proporcionaes,** *quando dependem uma da outra, de modo que, fazendo variar a grandeza de uma, resulta para a outra um valor tal, que a rasão entre dois valores quaesquer de uma seja igual á rasão invertida dos valores correspondentes da outra.*

Conhece-se, que duas quantidades são inversamente proporcionaes, quando duplicando, triplicando, quadruplicando, etc., uma d'ellas, a outra toma necessariamente um valor igual a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc. do que primitivamente tinha.

Sendo Q e a valores correspondentes de duas quantidades inversamente proporcionaes, Q' e a' outros dois valores correspondentes das mesmas quantidades, ter-se-ha por definição

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{a'}{a} \qquad \text{ou} \qquad Q : Q' :: a' : a$$

Da proporção precedente deduz-se

$$Qa = Q'a'$$

logo *o producto dos valores correspondentes de duas quantidades inversamente proporcionaes é constante*, isto é, o mesmo, sejam quaes forem esses valores correspondentes.

475. O numero de operarios empregados em certa obra, e o tempo gasto por elles em a executar, são, em geral, quantidades inversamente proporcionaes, porque, suppondo todas as outras circumstancias iguaes, se se duplicar, triplicar, etc., o numero de operarios, a obra deverá ficar prompta em $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, etc. do tempo, de que necessitam os primeiros operarios para a concluir.

Um quebrado, cujo denominador varia, é inversamente proporcional ao seu denominador, porque, conservando-se invariavel o numerador, não póde duplicar-se, triplicar-se, etc., o denominador, sem o quebrado ficar reduzido a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, etc., do seu valor primitivo (§ 226).

476. **Theorema.** *Uma quantidade é inversamente proporcional ao producto de duas, ou mais quantidades de que depende, quando estas quantidades são independentes entre si e cada uma d'ellas é inversamente proporcional áquella.*

Seja Q uma quantidade dependente de a, b e c, que são quantidades independentes entre si e inversamente proporcionaes a Q, sejam a', b', c', outros valores de a, b e c, e represente Q' o va-

lor de Q correspondente a esses novos valores. Ter-se-ha

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{a'b'c'}{abc} \quad \text{ou} \quad Q:Q'::a'b'c':abc$$

Suppondo, como no § 472, que varia a, depois b e depois c, será

$$\begin{array}{l} Q \ldots\ldots\ldots a, b, c \\ Q_1 \ldots\ldots\ldots a', b, c \\ Q_2 \ldots\ldots\ldots a', b', c \\ Q' \ldots\ldots\ldots a', b', c' \end{array}$$

comparando as duas primeiras linhas, e advertindo que, por hypothese, Q e a são quantidades inversamente proporcionaes, ter-se-ha (§ 474)

$$\frac{Q}{Q_1}=\frac{a'}{a} \quad \text{ou} \quad Q:Q_1::a':a$$

comparando a segunda e terceira linhas e depois as duas ultimas, vem

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{b'}{b} \quad \text{ou} \quad Q_1:Q_2::b':b$$

$$\frac{Q_2}{Q'}=\frac{c'}{c} \quad \text{ou} \quad Q_2:Q'::c':c$$

Multiplicando ordenadamente as tres proporções (§ 369), e dividindo por $Q_1 Q_2$ os termos da primeira rasão, acha-se finalmente

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{a'b'c'}{abc} \quad \text{ou} \quad Q:Q'::a'b'c':abc$$

477. O numero de operarios, que executam certa obra, é inversamente proporcional ao producto do numero de dias em que fizerem essa obra, pelo numero de horas de trabalho diario, porque estes dois numeros são independentes entre si, e cada um d'elles é inversamente proporcional ao numero de operarios.

478. **Theorema.** *Uma quantidade* Q, *dependente das quantidades* a, b, c,...p, q, r,... *é directamente proporcional ao quociente indicado* $\frac{abc\ldots}{pqr\ldots}$, *quando aquellas quantidades são independentes entre si, cada uma das que está no numerador é directamente proporcional a* Q *e cada um dos factores do denominador é inversamente proporcional a* Q.

Sendo a', b', c',...p', q', r',... valores que tomam a, b, c,... p, q, r,... e Q' o valor de Q, que lhes corresponde, será

$$Q:Q'::\frac{abc\ldots}{pqr\ldots}:\frac{a'b'c'\ldots}{p'q'r'\ldots}$$

Suppondo primeiro que variam unicamente as quantidades a, b, c,... e depois que variam só p, q, r,... ter-se-ha designando

por Q_1 o valor de Q correspondente á primeira variação de valores.

$$\begin{array}{l} Q \ldots\ldots\ldots a,\ b,\ c, \ldots\ldots\ldots p,\ q,\ r, \ldots \\ Q_1 \ldots\ldots\ldots a',\ b',\ c', \ldots\ldots\ldots p,\ q,\ r, \ldots \\ Q' \ldots\ldots\ldots a',\ b',\ c', \ldots\ldots\ldots p',\ q',\ r' \ldots \end{array}$$

Comparando as duas primeiras linhas tem-se (§ 472).

$$Q : Q_1 :: a\,b\,c \ldots : a'\,b'\,c' \ldots$$

comparando as duas ultimas obtem-se (§ 476).

$$Q_1 : Q' :: p'\,q'\,r' \ldots : p\,q\,r \ldots$$

Multiplicando ordenadamente as duas proporções (§ 369)

$$Q\,Q_1 : Q_1\,Q' :: a\,b\,c \ldots \times p'\,q'\,r' \ldots : a'\,b'\,c' \ldots \times p\,q\,r \ldots$$

e dividindo os termos da primeira rasão por Q_1 e os da segunda por $p'\,q'\,r' \ldots \times p\,q\,r \ldots$, acha-se finalmente

$$Q : Q' :: \frac{a\,b\,c \ldots}{p\,q\,r \ldots} : \frac{a'\,b'\,c' \ldots}{p'\,q'\,r' \ldots}$$

479. Duas quantidades proporcionaes, directa ou inversamente, distinguem-se entre si, chamando a uma *principal* e á outra *relativa*.

O juro correspondente a certo capital e a certo tempo, e o producto d'este capital pelo tempo, são duas quantidades directamente proporcionaes, das quaes o juro póde tomar-se como *quantidade principal*, e, n'esse caso, o producto do capital pelo tempo será a sua *relativa*, ou, inversamente, se este producto for tomado como *quantidade principal*, será o juro a *quantidade relativa*.

Admittindo, porém, que se tenha estabelecido em uma certa questão, qual das quantidades proporcionaes ha de ser denominada *quantidade principal*, é forçoso conservar essa denominação para todos os valores, que successivamente for tomando a mesma quantidade.

Duas quantidades principaes com as suas relativas, ou antes dois valores de uma quantidade principal com os correspondentes valores da sua quantidade relativa, formam sempre proporção. Esta proporção denomina-se directa, ou inversa, conforme as quantidades que n'ella entram, são proporcionaes directa, ou inversamente.

Na proporção directa uma principal está para a outra, assim como a relativa da primeira está para a relativa da segunda.

N'esta proporção, quando uma principal occupa um dos extremos, a sua relativa ha de estar em algum dos meios, devendo, comtudo, as duas *principaes* estar escriptas na proporção pela mesma ordem por que estiverem as suas *relativas*.

Na proporção inversa uma principal está para a outra, assim como a relativa da segunda está para a relativa da primeira.

N'esta proporção cada *principal* com a sua *relativa* occupam ambos os meios ou ambos os extremos.

Sendo Q e a valores correspondentes de quantidades proporcionaes, Q' e a' outros valores correspondentes das mesmas quantidades, será

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{a}{a'} \quad \text{ou} \quad Q : Q' :: a : a'$$

quando as quantidades Q e a forem directamente proporcionaes, e

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{a'}{a} \quad \text{ou} \quad Q : Q' :: a' : a$$

quando as mesmas quantidades forem inversamente proporcionaes.

No primeiro caso tem-se uma *proporção directa*, no segundo uma *proporção inversa*[1].

480. Dá-se o nome de **regra de tres** *á regra, que ensina a achar uma de quatro quantidades proporcionaes, duas principaes com as suas relativas, quando se dão as outras tres.*

Chama-se **regra de tres composta** *á regra de tres na qual uma, ou mais das quatro quantidades é producto, ou quociente indicado de outras quantidades.*

A *regra de tres simples*, isto é, a que não é composta, *póde ser directa*, ou *inversa*. É directa, quando as quantidades que se consideram n'ella, são directamente proporcionaes, é inversa, quando as mesmas quantidades são inversamente proporcionaes.

481. **Problema.** *Suppondo que um volume de* $10^{m3},648$ *de alvenaria contém* $33^{hl},12$ *de cal, que porção de cal será necessaria para construir* 100^{m3} *de alvenaria.*

O volume de alvenaria e o de cal, que lhe corresponde, são duas quantidades que se suppõem ser directamente proporcionaes, e, portanto, considerando a primeira como *principal* e a segunda como *relativa*, ter-se-ha (§ 479).

---

[1] Consideram alguns auctores *quantidades proporcionaes duas quantidades dependentes uma da outra, de modo tal que se possa formar proporção com dois systemas de valores correspondentes das mesmas quantidades.* Sendo Q e Q' dois valores diversos de uma certa quantidade, a e a' os valores correspondentes da quantidade de que elles dependem, ha só tres proporções verdadeiramente distinctas, cujos termos sejam Q, Q', a e a'. Com effeito, pondo sempre Q, por exemplo, em primeiro logar, é evidente que o quarto termo da proporção ha de ser a', a ou Q', e, portanto, que as proporções distinctas se reduzirão a

$$Q : Q' :: a : a' \qquad Q : Q' :: a' : a \qquad Q : a :: a' : Q'$$

A primeira proporção corresponde ao caso em que Q e a são *directamente proporcionaes* (§ 470), a segunda ao caso em que Q e a são *inversamente proporcionaes* (§ 474), e a terceira e ultima ao caso em que Q e a são *reciprocamente proporcionaes.*

Em qualquer das tres proporções as quantidades Q e Q' devem ser homogeneas entre si, assim como a e a'; as quantidades Q e Q' podem, porém, não ser homogeneas com a e a' na primeira e segunda proporções, mas hão de necessariamente sêl-o na terceira proporção.

$$\frac{10^{m3},648}{100^{m3}}=\frac{33^{Hl},12}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{10,648}{100}=\frac{33^{Hl},12}{x}$$

designando x o numero de hectolitros de cal, que são precisos para construir 100 metros cubicos de alvenaria.

Resolvendo a proporção acha-se

$$x=\frac{3312^{Hl}}{10,648} \quad \text{ou} \quad x=311^{Hl},044\ldots$$

482. As questões dependentes da *regra de tres* podem tambem resolver-se pelo **methodo de reducção a unidade.**

Consiste o **methodo de reducção a unidade** *em calcular primeiro o valor* (ou coisa similhante) *de uma das unidades da quantidade correspondente á incognita, para depois deduzir d'elle o valor da mesma quantidade.*

No exemplo precedente a quantidade correspondente á incognita é 100 metros cubicos de alvenaria, logo, para se empregar o referido methodo, é necessario calcular: 1.º, o volume de cal correspondente a 1 metro cubico de alvenaria; 2.º, o volume de cal correspondente a 100 metros cubicos.

Para resolver a primeira parte da questão é conveniente advertir, que *multiplicando ou dividindo pelo mesmo numero abstracto os valores correspondentes de duas quantidades directamente proporcionaes, se obtem outro systema de valores correspondentes das mesmas quantidades,* e por consequencia que, se a $10^{m3},648$ de alvenaria correspondem $33^{Hl},12$ de cal, a $\frac{10^{m3},648}{10,648}$ ou 1^{m3} de alvenaria hão de corresponder $\frac{33^{Hl},12}{10,648}$ de cal.

Sabendo agora qual é o volume de cal, de que precisa 1^{m3} de alvenaria, é facil, recorrendo ao principio acima enunciado, achar o numero de hectolitros de cal correspondentes a 100 metros cubicos de alvenaria.

483. **Problema.** *Uma locomotiva gastou* $2\frac{1}{2}$ *horas em percorrer* $63^{Km},6$, *que distancia percorrerá em* $10^h\ 24'\ 42''$?

A resolução d'este problema depende de uma *regra de tres directa e simples,* na qual, tomando a quantidade tempo como principal, e a quantidade distancia como relativa, é

$$\frac{2^h\,30'}{10^h\,24'\,42''}=\frac{63^{Km},6}{x}$$

e, reduzindo a segundos os termos da primeira rasão,

$$\frac{9000}{37482}=\frac{63^{Km},6}{x} \quad \text{ou} \quad 9000:37482::63^{Km},6:x$$

Dividindo por 9 o primeiro termo e por 3 cada um dos meios

$$\frac{1000}{12494}=\frac{21^{Km},2}{x} \quad \text{e} \quad x=12,494\times 21^{Km},2=264^{Km},8728$$

Querendo resolver o problema pelo *methodo de reducção a unidade* dividir-se-hão os numeros $2^h\frac{1}{2}$ e $63^{Km},6$ por $2\frac{1}{2}$ e concluir-se-ha, portanto que em 1 hora a locomotiva andará $\frac{63^{Km},6}{2\frac{1}{2}}$ ou $25^{Km},44$, e consequentemente que em $10^h\ 24'\ 42''$ terá andado $25^{Km},44$ multiplicado por $10^h\ 24'\ 42''$.

484. **Problema.** *Uma obra, que póde ser feita por 16 operarios em 25 dias, em quanto tempo será feita por 35 operarios.*

As quantidades de tempo e de operarios são inversamente proporcionaes, e, por isso, considerando como *principal* a quantidade de operarios, será (§ 479)

$$\frac{35^{op}}{16^{op}}=\frac{25^d}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{35}{16}=\frac{25^d}{x}$$

Dividindo por 5 os antecedentes, e tirando depois o valor de x, acha-se

$$x=\frac{5^d\times 16}{7} \quad \text{ou} \quad x=11^d\ 10^h\frac{2^h}{7}$$

485. *O methodo de reducção a unidade* applica-se tambem á resolução dos problemas, que dependem da *regra de tres inversa*, do mesmo modo que se applica á dos que dependem da *regra de tres directa e simples*, comtanto, porém, que se faça uso do seguinte principio. *Multiplicando por qualquer numero abstracto um dos valores correspondentes de duas quantidades inversamente proporcionaes, e dividindo pelo mesmo numero o outro valor, obtem-se um segundo systema de valores correspondentes das referidas quantidades.*

Usando d'este principio dir-se-ha, se 16 operarios fazem certa obra em 25 dias, $\frac{16}{16}$ operarios, ou 1 operario, ha de fazer a mesma obra em $25^d\times 16$, ou 400^d. Conhecido assim o tempo correspondente a 1 operario, calcular-se-ha o tempo correspondente a 35 operarios, advertindo que, se se multiplicar a quantidade 1 operario por 35, ha de dividir-se o tempo correspondente 400 dias por o mesmo numero 35, e, portanto, que é

$$x=\frac{400^d}{35}=\frac{80^d}{7}$$

486. **Problema.** *Tendo a tripulação de um navio mantimentos para 15 dias, e faltando-lhe ainda 20 dias para concluir a viagem, em que proporção têem de ser reduzidas as rações?*

Este problema póde resolver-se pela *regra de tres inversa*, porque é evidente que, se cada ração diaria for reduzida a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc., a tripulação terá rações para 2, 3, 4 etc., vezes 15 dias de viagem.

Designando por 1^r a ração ordinaria, isto é, a que se abonaria, se se presumisse que a viagem durava 15 dias, e por x a que deve ser abonada para os mantimentos poderem chegar para os 20 dias provaveis de viagem, será

$$\frac{20^d}{15^d}=\frac{1^r}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{20}{15}=\frac{1^r}{x}$$

Simplificando a primeira rasão e tirando o valor de x obtem-se

$$x=\frac{3^r}{4}$$

Se se empregasse o *methodo de reducção a unidade*, bastaria, reflectir, que, se a ração 1 corresponde a 15 dias de viagem, a ração 1×15, ou 15, corresponderá a 1 dia de viagem, e a ração $\frac{15}{20}$ será a que pertence a uma viagem de 1×20 ou 20 dias.

487. **Problema.** *Um negociante pagou* 11$760 *réis pelo transporte de* 18 *toneladas metricas a* 30 *leguas de distancia; quanto deverá pagar, nas mesmas condições, pelo transporte de* 9 *toneladas a* 20 *leguas de distancia?*

O custo do transporte costuma geralmente estipular-se, suppondo-o *directamente proporcional* ao peso da carga transportada e á distancia percorrida, ou (§ 472) ao producto do peso pela distancia, visto serem independentes estas quantidades, peso e distancia. Vê-se, pois, que a resolução d'este problema depende de uma *regra de tres composta* (§ 480).

Considerando como *principaes* os productos dos pesos pelas distancias, ter-se-ha pois (§ 479)

$$18^T\times30^{lg} : 9^T\times20^{lg} :: 11760^{rs} : x$$

e simplificando a primeira rasão

$$3 : 1 :: 11760^{rs} : x \quad \text{ou} \quad x=3\$920 \text{ réis}$$

Este problema, bem como todos os que dependem da *regra de tres composta*, póde resolver-se por uma serie de *regras de tres simples*.

Designando por x_1 a despeza feita com o transporte de 9 toneladas a 30 leguas de distancia, e raciocinando, como se raciocinou no § 472, ter-se-ha

18	toneladas,	30	leguas,	11$760	réis
9	»	30	»	x_1	»
9	»	20	»	x	»

ou $$18 : 9 :: 11760^{rs} : x_1$$
$$30 : 20 :: x_1 : x$$

e $$18 \times 30 : 9 \times 20 :: 11760^{rs} : x$$

488. O *methodo de reducção a unidade* póde tambem applicar-se á resolução dos problemas, que dependem da regra de tres composta.

Para se applicar este methodo á resolução do problema precedente é necessario calcular primeiro a despeza, que se faria, se o peso da carga fosse 1 e a distancia percorrida tambem 1, e depois passar successivamente da despeza calculada n'essas hypotheses para a despeza que se deseja conhecer, empregando em ambos os casos o principio enunciado no § 482.

Achar-se-ha por este modo que, se com

18 toneladas transportadas a		30 leguas, se despendem	11$760	réis, com
1	»	30 leguas, se despenderão	$\frac{11\$760}{18}$	»
1	»	1	$\frac{11\$760}{18 \times 30}$	»
9	»	1	$\frac{11\$760 \times 9}{18 \times 30}$	»
9	»	20	$\frac{11\$760 \times 9 \times 20}{18 \times 30}$	»

Logo 1 tonelada de carga transportada a uma legua de distancia importa em $\frac{11760}{18 \times 30}$, e 9 toneladas transportadas a 20 leguas importam em $x = \frac{11\$760 \times 9 \times 20}{18 \times 30}$ réis

489. **Problema.** *Tendo-se despendido* 1:200$000 *réis com a construcção de duas muralhas, das quaes uma tem* 30 *metros de comprimento,* 20 *metros de altura e* 3 *metros de grossura, e a outra* 60 *metros de comprimento,* 10 *de altura e* 2 *de grossura, em quanto importou a construcção de cada uma das muralhas?*

Basta conhecer o custo de uma das muralhas para se obter por uma simples subtracção o da outra. Designando x o custo da primeira muralha, será portanto 1:200$000—$x$ o da segunda, e, como estas duas quantias devem, em igualdade de circumstancias, suppor-se directamente proporcionaes ás dimensões das muralhas será

$$30 \times 20 \times 3 : 60 \times 10 \times 2 :: x : 1200000 - x$$

ou simplificando $$3 : 2 :: x : 1200000 - x$$

Sommando os dois primeiros termos e os dois ultimos (§ 365), para reduzir a proporção a outra, que envolva a incognita só n'um termo,

$$5 : 1200000 :: 3 : x \quad \text{ou} \quad 1 : 240000 :: 3 : x$$

e finalmente

$$x = 720\$000 \text{ réis} \quad \text{e} \quad 1:200\$000 - x = 480\$000 \text{ réis}$$

N'este problema ha verdadeiramente uma *divisão proporcional* (§ 374), porque evidentemente o seu fim principal é decompor 1:200$000 réis em partes proporcionaes aos dois productos $30\times\times20\times3$ e $60\times10\times2$.

Querendo resolver a questão por uma serie de *regra de tres simples* proceder-se-ha, como indica o seguinte quadro

$$\begin{array}{llll} 30^{m}, & 20^{m}, & 3^{m}, & x^{rs} \\ 60 & 20 & 3 & x_1 \\ 60 & 10 & 3 & x_2 \\ 60 & 10 & 2 & 1200000-x \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 30:60::x:x_1 \\ 20:10::x_1:x_2 \\ 3:\ 2::x_2:1200000-x \end{array} \right.$$

do qual se deduz, multiplicando ordenamente as tres proporções,

$$30\times20\times3:60\times10\times2::x:1200000-x$$

Resolvendo o mesmo problema pelo *methodo de reducção a unidade*, tem-se

30 metros,	20 metros,	3 metros,	x	réis
1 »	20 »	3 »	$\frac{x}{30}$	»
1 »	1 »	3 »	$\frac{x}{30\times20}$	»
1 »	1 »	1 »	$\frac{x}{30\times20\times3}$	»
60 »	1 »	1 »	$\frac{60x}{30\times20\times3}$	»
60 »	10 »	1 »	$\frac{10\times60x}{30\times20\times3}$	»
60 »	10 »	2 »	$\frac{2\times10\times60x}{30\times20\times3}$	»

e por consequencia

$$\frac{2\times10\times60x}{30\times20\times3}=1200000-x$$

ou

$$\frac{2}{3}=\frac{1200000-x}{x}$$

e

$$\frac{5}{3}=\frac{1200000}{x} \quad \text{ou} \quad x=720\$000$$

490. **Problema.** *Suppondo que* 108 *operarios fizeram uma obra em* 12 *dias, trabalhando* 10 *horas por dia; quantos operarios deveriam ter sido empregados para a mesma obra ficar prompta em* 60 *dias, trabalhando* 9 *horas por dia?*

Este problema depende tambem de uma regra de tres composta; porém, como a quantidade de operarios é inversamente proporcional ao numero de dias de trabalho e ao numero de horas de trabalho diario, será (§ 476)

$$9\times60:10\times12::108^{op}:x$$

e simplificando

$$1:2::12^{op}:x \quad \text{ou} \quad x=24 \text{ operarios}$$

Querendo resolver este problema por uma serie de *regras de*

tres simples proceder-se-ha como abaixo vae indicado, tendo em vista o principio enunciado no § 476.

12 dias	a	10 horas	por dia	gastaram	108	operarios,	logo
60 »		10 »		gastarão	x_1	»	e
60 »		9 »		»	x	»	

$$\left.\begin{array}{l} 60 : 12 :: 108 : x_1 \\ 9 : 10 :: x_1 \ : x \end{array}\right\} 9 \times 60 : 10 \times 12 :: 108 :: x$$

Empregando o *methodo de reducção a unidade* tem-se (§ 485)

12 dias,		10 horas,		108	operarios
1 »		10 »		108×12	»
1 »		1 »		$108 \times 12 \times 10$	»
60 »		1 »		$\frac{108 \times 12 \times 10}{60}$	»
60 »		9 »		$\frac{108 \times 12 \times 10}{60 \times 9}$	»

e $$x = \frac{108 \times 12 \times 10}{60 \times 9}$$

Na pratica não é necessario escrever as operações com o desenvolvimento indicado nos quadros precedentes, quando se emprega a *reducção a unidade*. Quasi todas podem fazer-se mentalmente.

491. **Problema.** *400 homens, trabalhando 14 horas por dia, gastaram 41 dias a abrir uma valla, que tinha 600 metros de comprimento, 3 metros de largura e 9 decimetros de profundidade. Quantos dias serão precisos para 350 homens, trabalhando 12 horas por dia, abrirem outra valla, que tenha 900 metros de comprimento, 2 metros de largura e 1,6 metros de profundidade em terreno tres vezes mais resistente que o da primeira valla.*

A incognita n'este problema depende de quantidades, das quaes umas lhe são directamente proporcionaes e outras inversamente proporcionaes, e por isso o theorema, a que é necessario recorrer para obter o seu valor, é o do § 478.

A applicação d'este theorema torna-se muito facil dispondo os elementos do problema em duas linhas, correspondendo-se uns aos outros, e escrevendo a lettra *D* por cima dos que forem directamente proporcionaes á quantidade desconhecida, e a lettra *I* por cima dos que forem inversamente proporcionaes á mesma quantidade.

Escrevendo assim os elementos do problema, que se quer resolver, tem-se

I	*I*	*D*	*D*	*D*	*D*
400 homens,	14 horas,	41 dias,	600 metros,	3 metros,	0,9 metros,	1 resistencia
350 »	12 »	x »	900 »	2 »	1,6 »	3 »

multiplicando em cada linha os numeros que têem por cima a lettra *D*, e depois os que têem a letra *I*, e formando a proporção, tem-se

$$\frac{600 \times 3 \times 0{,}9 \times 1}{400 \times 14} : \frac{900 \times 2 \times 1{,}6 \times 3}{350 \times 12} :: 41^d : x$$

Simplificando os quebrados vem

$$\frac{3.3.0,9}{2.14} : \frac{9.8}{35} :: 41^d : x$$

dividindo os termos da primeira rasão por 0,9

$$\frac{9}{28} : \frac{80}{35} :: 41^d : x \quad \text{ou} \quad \frac{9}{28} : \frac{16}{7} :: 41^d : x$$

ou

$$\frac{9}{4} : 16 :: 41^d : x$$

e finalmente $x = 41$ semanas, 4 dias, 13 horas e 20 minutos.

Para se resolver este problema por uma serie de *regras de tres simples* dispor-se-hão os dados e as incognitas assim:

400	homens,	14	horas,	41	dias,	600	metros,	3	metros,	0,9	metros,	1 resistencia
350	»	14	»	x_1	»	600	»	3	»	0,9	»	1 »
350	»	12	»	x_2	»	600	»	3	»	0,9	»	1 »
350	»	12	»	x_3	»	900	»	3	»	0,9	»	1 »
350	»	12	»	x_4	»	900	»	2	»	0,9	»	1 »
350	»	12	»	x_5	»	900	»	2	»	1,6	»	1 »
350	»	12	»	x	»	900	»	2	»	1,6	»	3 »

e formar-se-hão as proporções

$$\begin{aligned} 350 : 400 &:: 41 : x_1 \\ 12 : 14 &:: x_1 : x_2 \\ 600 : 900 &:: x_2 : x_3 \\ 3 : 2 &:: x_3 : x_4 \\ 0,9 : 1,6 &:: x_4 : x_5 \\ 1 : 3 &:: x_5 : x \end{aligned}$$

Multiplicando ordenadamente estas proporções e dividindo os termos da segunda rasão por o producto $x_1 . x_2 . x_3 . x_4 . x_5$ obtem-se finalmente $350.12.600.3.0,9.1 : 400.14.900.2.1,6.3 :: 41 : x$.

Recorrendo ao *methodo de reducção a unidade*, para resolver o problema em questão, acha-se

400	homens,	14	horas,	41	dias,	600^m,	3^m,	$0^m,9$,	1	resistencia		
1	»	14	»	41.400	»	600	3	0,9	1	»		
1	»	1	»	$41.400.14$	»	600	3	0,9	1	»		
1	»	1	»	$\frac{41.400.14}{600}$	»	1	3	0,9	1	»		
1	»	1	»	$\frac{41.400.14}{600.3}$	»	1	1	0,9	1	»		
1	»	1	»	$\frac{41.400.14}{600.3.0,9}$	»	1	1	1	1	»		
350	»	1	»	$\frac{41.400.14}{600.3.0,9.350}$	»	1	1	1	1	»		
350	»	12	»	$\frac{41.400.14}{600.3.0,9.350.12}$	»	1	1	1	1	»		
350	»	12	»	$\frac{41.400.14.900}{600.3.0,9.350.12}$	»	900	1	1	1	»		
350	»	12	»	$\frac{41.400.14.900.2}{600.3.0,9.350.12}$	»	900	2	1	1	»		
350	»	12	»	$\frac{41.400.14.900.2.1,6}{600.3.0,9.350.12}$	»	900	2	1,6	1	»		
350	»	12	»	$\frac{41.400.14.900.2.1,6.3}{600.3.0,9.350.12}$	»	900	2	1,6	3	»		

e finalmente $x = \frac{41.400.14.900.2.1,6.3}{600.3.0,9.350.12}$

EXERCICIOS

I. Gastando o sol 24 horas em dar uma volta completa em torno da terra, no seu movimento diurno apparente, que tempo gastará elle em percorrer um arco de 38° 59′ 45″ do circulo diurno apparente?

II. Suppondo que 1 mulher transporta em 15 minutos 10,33 canastras cheias de terra a uma distancia de 30 metros, quantas mulheres serão precisas para transportarem 95 metros cubicos em 8 dias, trabalhando 10 horas por dia, a uma distancia de 125 metros?

N. B. Cada canastra contém, termo medio, 11,9 decimetros cubicos.

III. Quanto rende uma terra, que tem 2,5 hectares de extensão, suppondo que cada decametro quadrado produz 1,83 litros de certo cereal, e que cada decalitro d'este se vende por 7$250 réis?

IV. Suppondo que uma familia composta de 4 pessoas consome 560 litros de agua por semana, qual será a quantidade de agua consumida em 25 dias pela população do bairro oriental de Lisboa, que, segundo o recenseamento de 1864, foi avaliada em 57:215 almas?

V. Sabe-se que 16 operarios trabalhando 10 horas por dia gastaram 31 dias a tecer 2400 metros de fazenda, cuja largura era 1,2 metros. Pergunta-se em quantos dias poderão 24 operarios, que trabalhem 9 horas por dia, tecer 3600 metros de fazenda, que tenha de largura 1,5 metros?

VI. Em uma bibliotheca estão empregados 74 copistas, que trabalham por turmas; os de uma turma, que são 24, trabalham de dia e os outros de noite.

Os primeiros copiaram em 90 dias, trabalhando 8 horas por dia, 8 exemplares de uma obra em 6 volumes de 480 paginas cada um, tendo 64 linhas por pagina e cada linha 56 letras. Os segundos, que trabalhavam 6 horas por noite, copiaram 9 exemplares de uma obra em 4 volumes, tendo porém cada volume 800 paginas, cada pagina 84 linhas e cada linha 80 letras. Pergunta-se, em quantas noites concluiram estes segundos copistas o seu trabalho.

VII. Em 15 dias 18 operarios fizeram uma obra com 120 metros de comprimento e 1,6 metros de largura Em 29 dias, quantos operarios farão uma obra similhante com 260 metros de comprimento e 0,8 metros de largura?

VIII. Em 41 dias 400 operarios, trabalhando 10 horas por dia, abriram uma valla com 1320 metros de comprimento, 6,6 metros de largura e 1,1 metros de profundidade; em quantos dias 350 operarios, trabalhando 8 horas por dia, abrirão outra valla em terreno 2 vezes mais resistente, suppondo que as dimensões d'esta segunda valla são 1890 metros, 4,6 metros e 0,78 metros?

IX. Um editor publicou duas obras, uma em 25 volumes, tendo cada volume 14 folhas de impressão, cada folha 16 paginas, cada pagina 33 linhas e cada linha 48 letras, a outra em 8.° com 18 folhas por volume, 42 linhas por pagina e 50 letras por linha. A primeira obra foi composta por 5 artistas, em 18 dias, trabalhando 11 horas por dia, a segunda foi composta por 9 artistas em 15 dias, a 13 horas de trabalho por dia. Quantos volumes tem a segunda obra?

CAPITULO II

Regra de reducção de medidas e moedas—Regra conjuncta

492. A regra de reducção de medidas e moedas *serve para exprimir as medidas ou moedas de um certo padrão, ou typo em medidas ou moedas de outro padrão, ou typo.*

Para resolver as questões de reducção de medidas e moedas é necessario conhecer a relação entre duas unidades da mesma especie dos typos que se comparam.

Táboa das antigas medidas de Portugal comparadas com as actuaes

Medidas de comprimento	Grau (60 milhas)	111111,11	metros
	Legua de 18 ao grau	6172,84	»
	Legua de 20 ao grau ou maritima (3 milhas)	5555,56	»
	Milha	1851,85	»
	Toeza (6 pés)	1,9782	»
	Pé (12 pollegadas)	0,3297	»
	Pollegada (12 linhas)	0,0275	»
	Linha (12 pontos)	0,0023	»
	Braça (2 varas)[1]	2,1980	»
	Vara (5 palmos craveiros)	1,0990	»
	Palmo craveiro (8 pollegadas)	0,2198	»
	Covado (3 terças ou 3 palmos avantajados)	0,66	»
	Terça (6 sesmas ou 8 oitavas)	0,22	»
Medidas de superficie	Braça quadrada (4 varas quadradas)	4,831204	metros quadrados
	Vara quadrada (25 palmos quadrados)	1,207801	»
	Palmo quadrado (64 pollegadas quadr.as)	0,048312	»
	Pollegada quadrada	0,000755	»
Medidas de capacidade para seccos	Moio (15 fangas)	828	litros
	Fanga (4 alqueires)	55,2	»
	Alqueire (4 quartas)	13,8	»
	Quarta (2 oitavas)	3,45	»
	Oitava (2 maquias)	1,725	»
	Maquia (2 selamins)	0,863	»
	Selamim	0,431	»
Medidas de capacidade. para liquidos	Tonel (2 pipas)	840	»
	Pipa (25 almudes)	420	»
	Almude (2 potes ou 2 cantaros)	16,8	»
	Pote ou cantaro (6 canadas)	8,4	»
	Canada (4 quartilhos)	1,4	»
	Quartilho	0,35	»
Medidas de peso	Tonelada (13 $\frac{1}{2}$ quintaes)	792,634	kilogrammas
	Quintal (4 arrobas)	58,714	»
	Arroba (32 arrateis)	14,678	»
	Arratel (2 marcos)[2]	458,7	grammas
	Libra de pharmacia (12 onças)	344,025	»
	Marco (8 onças)	229,35	»
	Onça (8 oitavas ou 8 drachmas)	28,6687	»
	Oitava ou drachma (3 escropulos)	3,5836	»
	Escropulo (24 grãos)	1,1945	»
	Grão	0,0498	»
Medidas para pesar pedras preciosas	Onça[3] (8 oitavas ou 144 quilates)	29,628	»
	Oitava (3 escropulos)	3,7035	»
	Escropulo (6 quilates)	1,2345	»
	Quilate (4 grãos)	0,20575	»
	Grão	0,05144	»

[1] Esta braça é chamada a «braça geodesica» ou «braça do dr. Ciera».

[2] O padrão do arratel depositado na camara municipal de Lisboa pesava 458,7 grammas; o padrão de arratel de que se serviam os aferidores de Lisboa pesava 458,759 grammas.

[3] Os nossos contrastes continuam a servir-se dos pesos inglezes para pesarem s pedras preciosas. Para pesarem diamantes e outras pedras preciosas dividem os

Toques	do oiro..	Quilate (4 grãos).....	41,667	millesimos
		Grão do quilate (8 oitavas).....	10,417	»
		Oitava.....	1,302	»
	da prata.	Dinheiro (24 grãos).....	83,333	»
		Grão do dinheiro (4 quartas).....	3,472	»
		Quarta.....	0,868	»

Em geral, quando se trata de passar das antigas medidas portuguezas para as actuaes, ou d'estas para aquellas, basta empregar as seguintes relações, que facilmente se conservam de cór.

1 vara = 11 decimetros. 1 alqueire = 13,8 litros. 1 almude = 16,8 litros.
1 arratel = 459 grammas

É comtudo mais facil effectuar o calculo, quando se tem á vista a tábua precedente.

493. **Problema.** *Sabendo-se que 1 braça é igual a 2,198 metros calcular o valor em metros de 5 varas, 4 palmos, 6 pollegadas e 10 linhas.*

Este problema póde resolver-se por uma *regra de tres*, ou antes por uma simples multiplicação, na qual $5^v\ 4^p\ 6^p\ 10^l$ seja o multiplicador e 1 braça a sua unidade principal.

Reduzindo o multiplicador á unidade principal obtem-se $\frac{2866}{960}$ ou $\frac{1433}{480}$ braças, considerando este numero como abstracto, e multiplicando-o por $2^m,198$, acha-se

$$5^v\ 4^p\ 6^p\ 10^l = 2^m,198 \times \frac{1433}{480} = 1^m,099 \times \frac{1433}{240}$$

e finalmente $$5^v\ 4^p\ 6^p\ 10^l = 6^m,5619$$

Tendo á vista a *Tábua das antigas medidas de Portugal comparadas com as actuaes* é facil reduzir $5^v\ 4^p\ 6^p\ 10^l$ a metros pelo methodo abaixo indicado.

$$\begin{array}{rl} 5^v = & 5 \times 1^m,0990 = 5^m,4950 \\ 4^p = & 4 \times 0^m,2198 = 0^m,8792 \\ 6^p = & 6 \times 0^m,0275 = 0^m,1650 \\ 10^l = & 10 \times 0^m,0023 = 0^m,0230 \\ \hline & 5^v\ 4^p\ 6^p\ 10^l = 6^m,5622 \end{array}$$

494. **Problema.** *Reduzir 82,635 hectares a braças, varas, etc. quadradas, suppondo que a braça quadrada é igual a 4,831204 metros quadrados.*

Reduzindo 82,635 hectares a metros quadrados (§ 449) obtem-

---

inglezes a onça troy (§ 444 nota) em $151\frac{1}{2}$ quilates e o quilate em 4 *grãos diamantes*. Para pesarem as perolas dividem cada dinheiro ou pennyweight em 30 *grãos-perolas*. A *onça troy* tem portanto 606 *grãos-diamantes* ou 600 *grãos-perolas*.

A onça troy tem 31,1035 grammas, o quilate tem 205,304 milligrammas.

se 826350 e formando a proporção

$$4^{m2},831204 : 826350^{m2} :: 1^{B2} : x$$

reconhece-se que dividindo 826350 por 4,8311204 se obtem o numero de braças quadradas. que se pede. Effectuando-se a divisão, e exprimindo-se o quociente em numero complexo, acha-se

$$82^{Ha},635 = 171044^{B2}\ 1^{v2}\ 6^{P2}\ 60^{p2} \text{ prox.}$$

495. **Problema.** *Reduzir* 24,685 *hectolitros, a toneis, pipas, almudes, etc., suppondo que o almude tem* 16,8 *litros.*

Reduzindo a litros o numero $24^{Hl},685$, e formando a proporção tem-se

$$16^{l},8 : 2468^{l},5 :: 1^{alm} : x \quad \text{ou} \quad x = \frac{24685}{168} \text{ almudes}$$

e portanto $$24^{Hl},685 = 2^{T}\ 1^{p}\ 21^{alm}\ 1^{pt}\ 5^{cn} \text{ prox.}$$

496. **Problema.** *Reduzir a grammas o numero* 2 *libras,* 10 *onças,* 6 *drachmas,* 2 *escropulos e* 21 *grãos, suppondo que* 1 *arratel, ou* 16 *onças, pesa* 458,7 *grammas.*

Reduzindo a grãos os dois numeros referidos ás unidades antigas de peso, tem-se

$$9216^{gr} : 20085^{gr} :: 458^{g},7 :: x \quad \text{ou} \quad x = \frac{20085}{9216} \times 458^{g},7 = 999^{g},673$$

Empregando a tábua de comparação das medidas antigas com as actuaes, acha-se

$$\begin{array}{rcrcr}
2^{lib} & = & 2 \times 344^{g},025 & = & 688^{g},050 \\
10^{onç} & = & 10 \times 28^{g},6687 & = & 286^{g},687 \\
6^{dch} & = & 6 \times 3^{g},5836 & = & 21^{g},502 \\
2^{esc} & = & 2 \times 1^{g},1945 & = & 2^{g},389 \\
21^{gr} & = & 21 \times 0^{g},0498 & = & 1^{g},046 \\
\hline
2^{lib}\ 10^{onç}\ 6^{dch}\ 2^{esc}\ 21^{gr} & & & = & 999^{g},674
\end{array}$$

497. **Problema.** *Sendo* 20 *quilates,* 3 *grãos e* 5 *oitavas o toque ou titulo de uma barra de oiro, exprimir o valor do mesmo toque em millesimos.*

A pureza do oiro avaliava-se antigamente por *quilates, grãos* e *oitavas.* O *quilate* era uma quantidade de oiro puro, que pesava $\frac{1}{24}$ do peso da barra ou peça metalica a que se referia. O *quilate* tinha 4 *grãos* e o *grão* 8 *oitavas.*

Uma barra, cujo toque era de 20 quilates, 3 grãos e 5 oitavas, tinha, pois, em 24 partes em peso, 20 partes (ou quilates) de oiro puro, mais $\frac{3}{4}$ (3 grãos) de uma d'essas partes e mais $\frac{5}{8}$ de grão ou $\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4}$ de quilate. Logo o peso de oiro puro contido na referida barra era $20 + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4}$ representando por 24 o peso bruto da barra.

O calculo dá $\frac{20+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{4}}{24}$ igual a $\frac{669}{768}$ e, reduzindo este quebrado a dizima, acha-se que o toque da barra é igual a 0,871, isto é, que

$$20^{ql}\ 3^{gr}\ 5^{oit} = 871 \text{ millesimos}$$

O quebrado $\frac{669}{768}$ póde tambem obter-se, reduzindo a oitavas, (§ 450 ou 451) tanto o numero complexo $20^{ql}\ 3^{gr}\ 5^{oit}$, como o numero 24 quilates. Adiante vae effectuado o calculo por este modo

$$\begin{array}{r} 20^{ql}\ 3^{gr}\ 5^{oit} \\ 4 \\ \hline 80 \\ 3 \\ \hline 83^{gr} \\ 8 \\ \hline 664 \\ 5 \\ \hline 669^{oit} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24^{ql} \\ 4 \\ \hline 96^{gr} \\ 8 \\ \hline 768^{oit} \end{array}$$

Póde tambem effectuar-se esta reducção por meio da táboa de comparação das medidas. Eis aqui o typo do calculo:

$$\begin{array}{rcl} 20^{ql} = 20 \times 41{,}67^{mil} & = & 833{,}40^{mil} \\ 3^{gr} = 3 \times 10{,}42 & = & 31{,}26 \\ 5^{oit} = 5 \times 1{,}30 & = & 6{,}50 \\ \hline 20^{ql}\ 3^{gr}\ 5^{oit} & = & 871{,}16^{mil} \end{array}$$

498. **Problema.** *Sendo 835 millesimos o toque de uma barra de prata, exprimir o valor do mesmo toque em dinheiros, grãos e quartas.*

A pureza da prata avaliava-se por *dinheiros*, *grãos* e *quartas*. O *dinheiro* era uma quantidade de prata pura, que pesava $\frac{1}{12}$ do peso da barra ou peça metallica a que se referia. O *dinheiro* tinha 24 *grãos* e o *grão* 4 *quartas*.

Reduzir 835 millesimos, isto é, 0.835 do peso de uma barra, a dinheiros, é, pois, resolver a proporção

$$\frac{835}{1000} = \frac{x}{12}$$

que dá $x = 10{,}020$ dinheiros

E como o dinheiro tem 24 grãos, segue-se que 0,020 do dinheiro equivale a $0{,}020 \times 24$, ou 0,48 grãos. O grão tem 4 quartas, logo 0,48 grãos é igual a $0{,}48 \times 4$ ou 1,92 quartas.

Vê-se, pois, que 835 millesimos de toque correspondem a 10 dinheiros e quasi 2 quartas.

Estas operações dispõem-se assim:

```
  0,835
     12
  1 670
  8 35
 10,020
     24
  0,48
     4
  1,92
```

499. Para comparar os valores de duas moedas, ou de duas barras do mesmo metal é necessario conhecer os pesos e os toques das moedas ou barras. Geralmente a prata e o oiro, tanto das moedas como das barras, está ligado com outro metal, que ordinariamente é o cobre, cujo valor se reputa nullo em relação ao da prata ou do oiro. Admittindo, pois, que o cobre não tem valor algum, é evidente, que os valores de duas moedas, ou barras do mesmo metal serão directamente proporcionaes aos pesos de oiro fino, ou de prata pura, que se contêem nas referidas moedas, ou barras e por consequencia que *os valores de duas moedas, ou barras do mesmo metal são directamente proporcionaes:* 1.º, *aos pesos das moedas, ou barras,* quando os toques forem iguaes: 2.º, *aos toques,* quando os pesos forem iguaes: 3.º finalmente, *aos productos dos pesos pelos toques* (§ 473), quando não forem iguaes nem os pesos, nem os toques. Ao valor das moedas dado por estas proporções chama-se *valor ao par.*

Conhecidos os pesos e toques de duas moedas ou barras do mesmo metal, e o valor de uma d'ellas expresso em dinheiro de um certo paiz, é facil calcular o valor ao par da outra moeda ou barra expresso na mesma especie de dinheiro. O valor dado por lei a qualquer porção de prata ou de oiro amoedado, *o valor nominal,* é sempre superior ao valor dado pelo commercio a igual peso de prata ou oiro não amoedado. As moedas, que não têem curso legal n'um paiz, sómente pódem correr n'elle pelo valor que teriam se estivessem reduzidas a barras, isto é, pelo valor dado no commercio á prata e oiro não amoedado.

As leis de cada paiz fixam geralmente os preços, que os particulares devem pagar para poderem converter em moedas d'esses paizes qualquer porção de prata ou de oiro em barra ou em moeda estrangeira. A lei de 29 de julho de 1854 fixa em 1$000 réis o preço por que na *casa da moeda* se ha de converter em moeda portugueza 1 kilogramma de oiro de toque não inferior a $916\frac{2}{3}$ millesimos. Valendo por a mesma lei 563$856 réis cada kilogramma de moedas de oiro portuguezas, a *casa da moeda* deverá dar 562$856 réis em moedas, que tenham curso legal, a quem lhe en-

tregar 1 kilogramma de oiro de $916\frac{2}{3}$ millesimos. A lei de 29 de julho de 1854 não estabelece preço algum para a conversão em moeda nacional da prata em barra ou em moeda estrangeira.

500. **Problema.** *Reduzir*[1] *a réis a moeda de oiro chamada ducado em circulação na Austria-Hungria.*

Estes ducados podem ser trocados por dinheiro portuguez na *casa da moeda*, pagando-se a competente despeza (§ 499), porque o seu toque, 986, não é inferior ao das moedas portuguezas.

Sabendo-se, pois, que 562$856 réis é a quantia que se recebe da *casa da moeda* em troca de 1000 grammas de moedas portuguezas de oiro, e que o peso do ducado é 3,490 grammas, tem-se

$$1000^{g} \times 916{,}66 : 3^{g}{,}490 \times 986 :: 563\$856 - 1\$000 : x$$

e portanto

$$x = 2\$113 \text{ réis aprox.}$$

501. **Problema.** *Reduzir a réis a moeda de oiro hespanhola denominada dobrão.*

Não tendo esta moeda curso legal em Portugal, nem podendo ser trocada na *casa da moeda*, por o seu toque ser inferior ao das moedas portuguezas, somente poderá ser recebida, como se não estivesse cunhada, isto é, como barra. Sabendo-se, pois, que o *dobrão* pesa 8,387 grammas e tem 900 millesimos de toque, formar-se-ha a proporção

$$1000 \times 916\tfrac{2}{3} : 8{,}387 \times 900 :: 563\$856 : x$$

da qual se tira para valor ao par do dobrão

$$x = 4\$643 \text{ réis}$$

---

[1] Em França o decreto de 31 de outubro de 1879 estabeleceu o preço de $6^{fr.},70$ para a conversão em moeda nacional de cada kilogramma de oiro de toque não inferior a 900 millesimos e o de $1^{fr.},50$ para a conversão de igual peso de moedas de prata do mesmo toque. Cada kilogramma de moedas de oiro francezas tem de valor nominal 3100 francos, cada kilogramma de moedas de prata de 5 francos vale 200 francos e cada kilogramma das outras moedas de prata (de 835 de toque) vale $185^{fr.},56$ em moedas de 5 francos. Com estes dados é facil calcular por quantos francos será recebida na *casa da moeda* de Paris *(Hotel des monnaies)* qualquer moeda estrangeira de toque não inferior a 900 millesimos. As moedas de toque inferior a 900 tambem podem ser trocadas n'aquella casa acrescendo, comtudo, á despeza acima indicada, a despeza de *afinação*.

Sendo x o valor em francos, por que deve ser trocada em Paris a moeda portugueza de oiro denominada *meia coróa*, cujo peso é 8,868 grammas, será

$$1000 \times 900 : 8{,}868 \times 916{,}66 :: 3100^{fr.} - 6^{fr.},70 : x$$

e

$$x = 27^{fr.},94$$

Representando por y o equivalente, em moedas de prata de $5^{fr.}$, a *cinco tostões*, será similhantemente

$$1000 \times 900 : 12{,}5 \times 916{,}66 :: 200^{fr.} - 1^{fr.},50 : y$$

$$y = 2^{fr.},527 \quad \text{ou} \quad 2^{fr.},53$$

Em todos estes problemas tem-se supposto que as moedas estrangeiras têem effectivamente os toques e pesos, que por lei devem ter.

Nas *casas da moeda*, porém, não fazem geralmente estes calculos de reducção de moedas, sem verificarem directamente os toques e pesos das moedas, que hão de receber; ou sem determinarem somente os pesos, suppondo então que o *toque* das moedas é o menor, que podem ter em virtude da *tolerancia* legal admittida no paiz a que pertencem.

502. Diz-se que duas quantidades são *equivalentes*, quando, consideradas de certo modo, podem reputar-se de igual valor, embora, em geral, o não sejam.

Suppondo que 600 réis é o custo de 15 kilogrammas de certa mercadoria, dir-se-ha que 600 réis é uma quantidade de dinheiro equivalente a 15 kilogrammas da tal mercadoria, porque, por hypothese, ambas as quantidades têem no mercado igual valor.

Similhantemente se diz que 5 decalitros de agua distillada na temperatura da sua maxima densidade equivalem ao peso de 50 kilogrammas, porque, sendo 1 kilogramma o peso de 1 litro de agua n'aquellas condições (§ 444), é evidente que 5 decalitros de agua, ou 50 litros, hão de pesar 50 vezes 1 kilogramma.

A equivalencia é um caso particular da igualdade e por isso deve ser indicada por um signal differente. O signal $\diamond$ posto entre duas quantidades indicará, que ellas se consideram equivalentes.

503. Chama-se **regra conjuncta** *a regra pela qual se acha uma de duas quantidades equivalentes, quando se dão as equivalencias d'essas quantidades, ou de outras do mesmo genero, com outras duas quantidades, as d'estas, ou de outras do mesmo genero, com outras duas, e assim successivamente, até se chegar a duas quantidades equivalentes entre si.*

Suppondo, por exemplo, que se quer achar, qual é o numero de toezas de Paris que equivale a 1 toeza de Portugal, na hypothese de 0,5130740 toezas de Paris equivalerem a 1 metro, 1 toeza de Portugal equivaler a 72 pollegadas, e 80 pollegadas (ou 1 braça) equivaler a 2,198 metros, ter-se-ha a resolver uma regra conjuncta.

Designando por x o numero de toezas de Paris, que corresponde a 1 toeza de Portugal, a questão reduz-se a achar a quantidade x da equivalencia

$$x \text{ toezas de Paris} \diamond 1 \text{ toeza de Portugal},$$

quando se sabe *primò* que

$$0{,}5130740 \text{ toezas de Paris} \diamond 1 \text{ metro}$$

secundò que

$$1 \text{ toeza de Portugal} \diamond 72 \text{ pollegadas}$$
$$2{,}198 \text{ metros} \diamond 80 \text{ pollegadas}$$

Para mais facilmente se resolverem as questões dependentes da regra conjuncta, escrevem-se as equivalencias por modo tal, que a

incognita occupe o primeiro membro da primeira equivalencia, e que o segundo membro de cada uma d'ellas esteja referido á mesma unidade a que está o primeiro da equivalencia immediata. Dispondo assim as equivalencias, e suppondo que ha todas as necessarias para se resolver a questão, o segundo membro da ultima equivalencia deve ser homogeneo com o primeiro membro da primeira equivalencia

Querendo pois, resolver o problema, acima enunciado, escrever-se-ha

$$x \text{ toezas de Paris} \diamond 1 \text{ toeza de Portugal}$$
$$1 \text{ toeza de Portugal} \diamond 72 \text{ pollegadas}$$
$$80 \text{ pollegadas} \diamond 2{,}198 \text{ metros}$$
$$1 \text{ metro} \diamond 0{,}5130740 \text{ toezas de Paris}$$

Estas quatro equivalencias reduzem-se facilmente ás tres seguintes

$$x \text{ toezas de Paris} \diamond 72 \text{ pollegadas}$$
$$80 \text{ pollegadas} \diamond 2{,}198 \text{ metros}$$
$$1 \text{ metro} \diamond 0{,}5130740 \text{ toezas de Paris}$$

as quaes tambem se reduzem a duas, notando que *uma equivalencia entre duas quantidades concretas continúa a subsistir, quando ambos os membros se multiplicam ou dividem por o mesmo numero abstracto.*

Com effeito, multiplicando os dois membros da primeira d'estas equivalencias por o numero abstracto 80, e os dois membros da segunda por o numero abstracto 72, ter-se-ha, em virtude do principio enunciado,

$$(80 \times x) \text{ toezas de Paris} \diamond (80 \times 72) \text{ pollegadas}$$
$$(72 \times 80) \text{ pollegadas} \diamond (72 \times 2{,}198) \text{ metros}$$
$$1 \text{ metro} \diamond 0{,}5130740 \text{ toezas de Paris}$$

e portanto

$$(80 \times x) \text{ toezas de Paris} \diamond (72 \times 2{,}198) \text{ metros}$$
$$1 \text{ metro} \diamond 0{,}5130740 \text{ toezas de Paris}$$

Multiplicando os dois membros da ultima equivalencia por o numero abstracto $72 \times 2{,}198$ tem-se,

$$(80 \times x) \text{ toezas de Paris} \diamond (72 \times 2{,}198) \text{ metros}$$
$$(72 \times 2{,}198 \times 1) \text{ metros} \diamond (72 \times 2{,}198 \times 0{,}5130740) \text{ toezas de Paris}$$

e finalmente

$$(80 \times x) \text{ toezas de Paris} \diamond (72 \times 2{,}198 \times 0{,}5130740) \text{ toezas de Paris}$$

Reconhece-se facilmente, analysando a marcha seguida n'este exemplo, que, seja qual fôr a regra conjuncta, é sempre possivel ir reduzindo successivamente o numero das suas equivalencias até haver uma só. Esta ultima equivalencia é uma verdadeira igualdade.

Para ter o valor da incognita, depois de reduzidas todas as equi-

valencias a uma unica, basta dividir ambos os membros d'esta equivalencia pelo numero abstracto, que está multiplicando a incognita. Dividindo por o numero abstracto 80 ambos os membros da ultima equivalencia acha-se

$$x \text{ toezas de Paris} \diamond \frac{72 \times 2{,}198 \times 0{,}5130740}{80} \text{ toezas de Paris}$$

e effectuando as operações

$$x = 1{,}0149629868$$

ou $$1 \text{ toeza de Portugal} \diamond 1{,}0149629868 \text{ toezas de Paris}$$

504. Em geral, qualquer questão de *regra conjuncta* póde ser resolvida por tantas *regras de tres simples*, quantas são as equivalencias menos uma. Para esse fim os dois membros de cada equivalencia, exceptuando a primeira, formarão a primeira rasão de uma proporção, o segundo membro da primeira equivalencia passará a terceiro termo da primeira proporção, o quarto termo da primeira proporção será desconhecido e igual ao terceiro termo da proporção seguinte, o quarto termo d'esta proporção será tambem desconhecido e igual ao terceiro termo da proporção immediata, e assim successivamente até á ultima proporção, cujo quarto termo será a quantidade pedida.

Applicando isto ao exemplo do § anterior, onde propriamente ha só tres equivalencias, tem-se

$$80 \text{ pollegadas} : 2{,}198 \text{ metros} :: 72 \text{ pollegadas} : x_1 \text{ metros}$$
$$1 \text{ metro} : 0{,}513074 \text{ toezas} :: x_1 \text{ metros} : x \text{ toezas}$$

Multiplicando ordenadamente as proporções e supprimindo na segunda rasão o divisor commum x_1 obtem-se o valor de x.

505. **Problema.** *Reduzir* 1 **jarda** (medida ingleza) *a metros, sabendo-se que a* jarda tem 3 pés inglezes, que 6189 *pés inglezes equivalem a* 6770 *pés hespanhoes, e que* 1 *pé hespanhol tem* 0,278635 *metros.*

Esta questão póde resolver-se pela seguinte *regra conjuncta*,

$$x \text{ metros} \diamond 3 \text{ pés inglezes}$$
$$6189 \text{ pés inglezes} \diamond 6770 \text{ pés hespanhoes}$$
$$1 \text{ pé hespanhol} \diamond 0{,}278635 \text{ metros}$$

ou pela combinação das duas proporções

$$6189 \text{ pés inglezes} : 6770 \text{ pés hespanhoes} :: 3 \text{ pés inglezes} : x_1 \text{ pés hespanhoes}$$
$$1 \text{ pé hespanhol} : 0{,}278635 \text{ metros} :: x_1 \text{ pés hespanhoes} : x \text{ metros}$$

Empregando a regra conjuncta (§ 503) é sempre possivel ir reduzindo successivamente as duas primeiras equivalencias a uma só, convertendo a final todas em uma, da qual se deduz o valor de x. Ter-se-ha, pois,

$$(x \times 6189) \text{ metros} \diamond (3 \times 6189) \text{ pés inglezes}$$
$$(6189 \times 3) \text{ pés inglezes} \diamond (3 \times 6770) \text{ pés hespanhoes}$$
$$1 \text{ pé hespanhol} \diamond 0{,}278635 \text{ metros}$$

ou

$$(x \times 6189) \text{ metros} \diamond (3 \times 6770) \text{ pés hespanhoes}$$
$$1 \text{ pé hespanhol} \diamond 0{,}278635 \text{ metros}$$

e

$$(x \times 6189) \text{ metros} \diamond (3 \times 6770 \times 0{,}278635) \text{ metros}$$

ou

$$x = \frac{3 \times 6770 \times 0{,}278635}{6189} = 0{,}91438$$

Logo[1]

$$1 \text{ jarda} \diamond 0{,}91438 \text{ metros}$$

506. Do que fica exposto deduz-se a seguinte regra pratica, para se resolver qualquer **regra conjuncta**. *Escrevem-se as equivalencias umas por baixo das outras, de modo que o primeiro membro da primeira equivalencia seja a incognita e o segundo membro de cada uma d'ellas esteja referido á mesma unidade que o primeiro membro da immediata. O segundo membro da ultima equivalencia deve estar referido á mesma unidade que o primeiro membro da primeira equivalencia. Multiplicam-se os segundos membros de todas as equivalencias, e divide-se este producto pelo producto de todos os primeiros membros, excepto o da primeira equivalencia. O quociente resultante dá o valor da incognita.*

507. **Problema.** *Reduzir a réis a moeda de prata da Russia denominada* **rublo**, *suppondo que* 22 **rublos** *equivalem a* 71 **marcos** *d'Allemanha,* 2 **marcos** *equivalem a* 1 **florim** *d'Austria,* 36 **florins** *equivalem a* 3 **libras esterlinas** *e* 17 **shillings**, 1 **libra** *equivale a* 25 **francos** *e finalmente* 3 **francos** *equivalem a* 540 **réis**.

Convertendo as *libras* em *shillings* têem-se as equivalencias

$$x \text{ réis} \diamond 1 \text{ rublo}$$
$$22 \text{ rublos} \diamond 71 \text{ marcos d'Allemanha}$$
$$2 \text{ marcos} \diamond 1 \text{ florim d'Austria}$$
$$36 \text{ florins} \diamond 77 \text{ shillings}$$
$$20 \text{ shillings} \diamond 25 \text{ francos}$$
$$3 \text{ francos} \diamond 540 \text{ réis}$$

e por consequencia (§ 506)

$$x = \frac{71 \times 1 \times 77 \times 25 \times 540}{22 \times 2 \times 36 \times 20 \times 3}$$

Effectuando as operações acha-se que 1 *rublo* equivale a 777 *réis* approximadamente.

Resolve-se a mesma questão por meio das proporções (§ 504)

---

[1] O valor da *jarda*, segundo *The modern cambist* de William Tate, é 0,9143787 metros.

$$\begin{array}{rl} 22: & 71 :: 1 : x_1 \\ 2: & 1 :: x_1 : x_2 \\ 36: & 77 :: x_2 : x_3 \\ 20: & 25 :: x_3 : x_4 \\ 3: & 540 :: x_4 : x \end{array}$$

das quaes se tira o valor de x multiplicando-as ordenadamente (§ 369) e supprimindo na segunda rasão o divisor commum $x_1 x_2 x_3 x_4$.

EXERCICIOS

I. Reduzir a réis a moeda de prata do imperio d'Allemanha denominada *marco* (100 pfennig), sabendo-se que o seu peso é 5,555 grammas e o toque 900 millesimos.

II. Reduzir a réis o *florim* (100 kreutzers), moeda de prata d'Austria, suppondo que o seu peso é 12,345 grammas e o toque 900 millesimos.

III. Reduzir a arrateis o peso inglez denominado *libra avoirdupois (pound)*, sabendo-se que 100 d'estes pesos correspondem a 45,359265255 kilogrammas, e que o arratel tem 458,7 grammas.

IV. Reduzir a libras de pharmacia o peso inglez denominado *libra troy*, suppondo que a *libra troy* tem 12 *onças troy*, 100 *onças troy* pesam 3,1103496 kilogrammas, e 1 libra de pharmacia é igual a 344,025 grammas.

V. Reduzir a canadas a medida ingleza de capacidade *Imperial Gallon*[1], sabendo-se que ella contém 277,273844 pollegadas cubicas inglezas, que a jarda (ou vara ingleza) tem 3 pés de 12 pollegadas cada um, ou 0,9143787 metros, e que a canada tem 14 decilitros.

VI. Reduzir a réis a moeda de oiro denominada *dollar* (Estados Unidos), sabendo-se que o seu peso é 1,672 grammas e o toque 900 millesimos.

VII. Reduzir 29 graus sexagesimaes, 13 minutos e 43,06 segundos a gradus, ou graus centesimaes.

VIII. Reduzir 224,608 gradus, ou graus centesimaes, a graus, minutos e segundos sexagesimaes.

IX. Reduzir 3 pipas, 10 almudes e 5 canadas a litros.

X. Reduzir 239,5608 hectolitros a moios, fangas, alqueires, etc.

XI. Reduzir a millesimos o *toque* ou *titulo* de uma barra de oiro, que tem 18 quilates, 3 grãos e 5 oitavas.

XII. Reduzir a dinheiros, grãos e quartas o toque de uma barra de prata, que tem 100 de liga e 900 de prata fina.

CAPITULO III

Juros e descontos—Juros compostos

508. **Juro** *é o lucro ou interesse que recebe a pessoa, que empresta, ou adianta a outra algum dinheiro.*

Em geral, quem cede a outro o direito de gosar alguma cousa que lhe pertence, recebe uma compensação, um premio, que, segundo os casos, se denomina *aluguer*, *renda*, *fôro*, etc. O premio ou compensação correspondente ao caso em que a cousa cedida é dinheiro chama-se especialmente *juro*.

---

[1] Segundo o capitão Kater um *Imperial Gallon* contém 4,543458 litros.

A quantia de dinheiro emprestada, ou *posta a render* chama-se **principal, ou capital.**

Taxa, rasão *ou* **preço do juro** *é a quantia que se convenciona pagar pelo capital* 100 *durante cada unidade de tempo.* **Taxa reduzida, rasão reduzida** *ou* **preço reduzido do juro** *é a quantia que se convenciona pagar pelo capital* 1 *durante cada unidade de tempo.* Dividindo por 100 a primeira *taxa* tem-se a segunda.

A unidade de tempo geralmente adoptada n'estas questões é o anno, que se suppõe ter 360 dias. A este anno chama-se *anno commercial.*

As expressões $5^0/_0$, $6\frac{1}{2}^0/_0$, etc., que se lêem *cinco por cento, seis e meio por cento*, etc., indicam abreviadamente que a *taxa*, ou *preço* do juro, é 5, $6\frac{1}{2}$, etc. As *taxas reduzidas* correspondentes são 0,05, 0,065, etc.

Juro ao dinheiro *é o capital que vence o juro* 1 *na unidade de tempo.* Quando o *juro ao dinheiro* é 20, o capital 20 vence o juro 1 n'um anno, e por consequencia o capital 20×5 ou 100 vence o juro 5 n'uma unidade de tempo.

O *juro* póde ser *simples* ou *composto.* O *juro* é *composto*, quando no fim de cada unidade de tempo, em vez de se pagar o juro á pessoa, que emprestou o dinheiro, se addiciona o mesmo juro ao capital em divida, formando assim um capital maior, ao qual, na seguinte unidade de tempo, corresponde um juro tambem maior. N'este caso o juro vencido n'uma unidade de tempo vence tambem juro na unidade de tempo immediata, e, portanto, não só ha *juros* de *capital*, como *juros de juros.* O *juro* é simples, quando o mutuante ou capitalista, isto é, a pessoa que empresta o capital, recebe effectivamente do mutuario o juro no fim de cada unidade de tempo. No caso do juro simples o capital conserva constantemente o seu valor primitivo, até *o crédor ser embolsado d'elle.*

509. *A* **regra de juros simples** *serve para achar uma das quatro quantidades*, **juro, capital** *ou* **principal, tempo e taxa, rasão** *ou* **preço do juro;** *ou* **somma do capital e juro, tempo, taxa** *e* **capital** *ou* **juro,** *quando se dão as tres quantidades restantes.*

A *regra de juros simples* funda-se nos dois seguintes principios, geralmente admittidos nas transacções commerciaes: 1.º, *os juros são directamente proporcionaes aos capitaes*, quando os tempos correspondentes a esses capitaes e juros são iguaes; 2.º *os juros são directamente proporcionaes aos tempos*, quando os capitaes correspondentes a esses tempos e juros são iguaes.

Da admissão d'esses dois principios convencionaes e de serem independentes os capitaes e os tempos, resulta (§ 472) a seguinte proporção, que é o fundamento da theoria dos juros. *Os juros são directamente proporcionaes aos productos dos capitaes pelos tempos.*

Designando por R a *rasão* dos juros, ou a *taxa*, por t o numero de unidades de tempo, durante cada uma das quaes o capital 100 vence o juro R, por a o capital emprestado e por J o juro, tem-se o *capital* 100 vencendo no *tempo* 1 o *juro* R, e o *capital* a vencendo no *tempo* t o *juro* J, e portanto

$$100 \times 1 : a \times t :: R : J$$

e

$$J = \frac{aRt}{100} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Logo, *o juro é igual á centesima parte do producto dos tres factores, capital, taxa e tempo*, comtanto que o tempo t tenha por unidade o tempo durante o qual o capital 100 vence o juro R.

Designando por r a *taxa reduzida* $\frac{R}{100}$ ter-se-ha

$$J = art \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

e por consequencia *o juro é igual ao producto dos tres factores, capital, taxa reduzida e tempo.*

510. A formula (1), que dá a regra dos juros, assim como a proporção de que ella se derivou, póde demonstrar-se directamente empregando o *methodo de reducção a unidade.*

Com effeito, se o capital 100 vence no tempo 1 o juro R, o capital 1 ha de vencer no mesmo tempo 1 o juro $\frac{R}{100}$, e o capital a vencerá no tempo 1 o juro $\frac{aR}{100}$.

Vencendo a no tempo 1 o juro $\frac{aR}{100}$ é claro que o mesmo capital a vencerá no tempo t o juro $\frac{aRt}{100}$.

Chega-se ao mesmo resultado analysando o quadro seguinte

$$\begin{array}{ccc} 100 & 1 & R \\ a & 1 & x_1 \\ a & t & J \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 100 : a :: R : x_1 \\ 1 : t :: x_1 : J \end{array} \right.$$

$$100 \times 1 : at :: R x_1 : x_1 J$$

e

$$100 : at :: R : J$$

511. **Problema.** *Calcular o juro vencido pelo capital* 648$000 *réis n'um anno, a rasão de* $6\frac{1}{2}$% *ao anno.*

N'este problema é $a = 648\$000$, $R = 6\frac{1}{2}$ ou 6,5 e $t = 1$ e por consequencia

$$J = \frac{648000 \times 6{,}5 \times 1}{100} = 6480 \times 6{,}5 \quad \text{e} \quad J = 42\$120 \text{ réis}$$

512. **Problema.** *Calcular o juro vencido pelo capital* 569$000 *réis em* $3\,^1/_2$ *annos, a rasão de* $6\frac{3}{4}$ %.

Tem-se n'este caso $a=569000$, $R=6\frac{3}{4}$ ou 6,75 e $t=3\frac{1}{2}$ ou 3,5. Substituindo estes valores na formula (1), vem

$$J=\frac{569000\times6,75\times3,5}{100} \quad \text{ou} \quad J=5690\times6,75\times3,5$$

e, effectuando as operações,

$$J=134\$426 \text{ réis approximadamente}$$

513. **Problema.** *Calcular o juro, que vencem* 28$640 *réis em* $3\,^1/_2$ *mezes, a* $7\,^5/_8$ *por cento.*

Reduzindo a annos o tempo $3\frac{1}{2}$ mezes, visto ser no tempo 1 anno que o capital 100 vence $7\frac{5}{8}$ de juro, tem-se (§ 449) $\frac{3\frac{1}{2}}{12}$ ou $\frac{7}{24}$, e portanto no problema de que se trata, é $a=28640$, $R=$ $=7\frac{5}{8}$, $t=\frac{7}{24}$

$$J=\frac{28640\times(7+\frac{5}{8})\frac{7}{24}}{100}=\frac{358\times61\times\frac{7}{24}}{10}=17,9\times61\times\frac{7}{12}$$

ou $$J=637 \text{ réis approximadamente}$$

Póde tambem resolver-se este problema por meio da proporção

$$100\times12:28640\left(3+\frac{1}{2}\right)::7+\frac{5}{8}:J$$

que simplificada produz

$$10\times3:716\times\frac{7}{2}::\frac{61}{8}:J$$
$$10\times3:358\times7::\frac{61}{8}:J$$
$$10\times3:179\times7::\frac{61}{4}:J$$

e finalmente $$J=\frac{17,9\times7\times61}{12}$$

514. **Problema.** *Calcular o juro que vence o capital* 460$000 *réis em* 220 *dias, a rasão de* $5\,^7/_8$ %.

A formula dá

$$J=\frac{460000(5+\frac{7}{8})\frac{220}{360}}{100}$$

e simplificando

$$J=4600\times\frac{47}{8}\times\frac{11}{18}=575\times47\times\frac{11}{18}$$

ou $$J=16\$515 \text{ réis proximamente}$$

515. Das formulas (1) e (2) deduzem-se as seguintes:

$$a=\frac{100J}{Rt} \qquad R=\frac{100J}{at} \qquad t=\frac{100J}{aR}$$

ou

$$a=\frac{J}{rt} \qquad r=\frac{J}{at} \qquad t=\frac{J}{ar}$$

pelas quaes se determinam os valores do *capital*, da *taxa* e do *tempo*.

As primeiras tres formulas conservam-se facilmente na memoria, porque todas têem por numerador o producto $100 \times J$, e por denominador o producto das duas outras quantidades, que se suppõem conhecidas. As ultimas tres formulas são ainda mais faceis de conservar na memoria.

516. **Problema.** *Calcular o capital que tem de juro* 105$000 *réis em* 1 *mez e* 18 *dias, a rasão de* 6 % *ao anno.*

Reduzindo o tempo, 1 mez e 18 dias, a annos e empregando a formula que dá o *capital*, acha-se

$$a=\frac{100\times 105000}{6\times\frac{48}{360}}=\frac{10500000}{\frac{48}{60}}=\frac{10500000}{\frac{4}{5}}=5\times 2625000$$

ou

$$a=13:125\$000$$

517. **Problema.** *Calcular a taxa, ou rasão de juro necessaria para o capital* 128$000 *réis produzir* 25$600 *réis de juro em* 2 *annos e* 8 *mezes.*

A formula da *rasão* ou *taxa* dá (§ 515)

$$R=\frac{100\times 25600}{128000\left(2+\frac{8}{12}\right)} \qquad \text{ou} \qquad R=\frac{2560}{128\left(2+\frac{2}{3}\right)}$$

e

$$R=\frac{640\times 3}{32\times 8}=\frac{80\times 3}{32}=\frac{40\times 3}{4}=\frac{15}{2}=7{,}5$$

Logo a *taxa* é $7\frac{1}{2}$ por cento ao anno.

518. **Problema.** *Calcular o tempo necessario para o capital* 2:645$000 *réis vencer* 230$000 *réis de juro a rasão de* $5\frac{3}{8}$ *por cento ao anno.*

Sabe-se que n'este caso é (§ 515)

$$t=\frac{100\times 230000}{2645000\left(5+\frac{3}{8}\right)}=\frac{23000\times 8}{2645\times 43}=\frac{4600\times 8}{529\times 43}=\frac{36800}{22747}$$

e por consequencia $\quad t=1+\frac{14053}{22747}$ annos

ou o *tempo* igual a 1 anno, 7 mezes e 12 dias proximamente.

519. A formula (1) póde tambem servir para calcular o juro J ou o capital a, quando se dá a somma $a+J$ do capital e juro, a taxa e o tempo.

Com effeito, sendo $\quad J=\frac{aRt}{100}$

será $\frac{J}{a}=\frac{Rt}{100}$

e (§ 365) $\frac{J}{J+a}=\frac{Rt}{100+Rt}$ ou $\frac{a+J}{a}=\frac{100+Rt}{100}$

Da primeira d'estas duas formulas deduz-se

$$J=\frac{(a+J)Rt}{100+Rt} \quad \text{ou} \quad 100+Rt:a+J::Rt:J \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

e da segunda

$$a=\frac{100(a+J)}{100+Rt} \quad \text{ou} \quad 100+Rt:a+J::100:a \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Estas proporções enunciam-se assim: *cem mais a rasão multiplicada por o tempo está para a somma do capital e juro, assim como cem está para o capital, ou assim como a rasão multiplicada pelo tempo está para o juro.*

Quando o tempo é igual a 1, as formulas (3) e (4) reduzem-se a

$$J=\frac{(a+J)R}{100+R} \qquad a=\frac{100(a+J)}{100+R} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Da formula (2) deduzem-se similhantemente as seguintes formulas, que tambem podem obter-se fazendo $R=100r$ nas formulas (3) e (4)

$$J=\frac{(a+J)rt}{1+rt} \qquad a=\frac{a+J}{1+rt} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Quando é $t=1$ estas formulas convertem-se em

$$J=\frac{(a+J)r}{1+r} \qquad a=\frac{a+J}{1+r}$$

520. **Problema.** *Sendo* 127$800 *réis a somma de um capital com o juro de* 1 *anno a rasão de* 6 1/2 *por cento, calcular o juro e o capital.*

Substituindo nas ultimas formulas (5) os numeros dados tem-se

$$J=\frac{127800(6+\frac{1}{2})}{100+(6+\frac{1}{2})} \qquad a=\frac{100\times127800}{100+(6+\frac{1}{2})}$$

$$J=\frac{127800\times13}{200+13} \qquad a=\frac{200\times127800}{200+13}$$

e por consequencia

$$J=7\$800 \text{ réis} \qquad a=120\$000 \text{ réis}$$

Depois de calculada uma das duas quantidades, J ou a, é facil calcular a outra sem recorrer á formula, porque sendo

$$a+J=127\$800 \qquad J=7\$800$$

será

$$a=127\$800-7\$800=120\$000$$

521. **Problema.** *Sendo* 3:750$000 *réis a somma de um capital com o seu juro correspondente a* 2 *mezes e* 16 *dias, calcular o juro e o capital, suppondo que a taxa é* 6 *por cento ao anno.*

Reduzindo o tempo a annos acha-se $t=\frac{76}{360}$

e por consequencia

$$J=\frac{3750000\times 6\times\frac{76}{360}}{100+6\times\frac{76}{360}} \quad \text{ou} \quad J=\frac{3750000\times\frac{76}{60}}{100+\frac{76}{60}}$$

e

$$J=\frac{3750000\times 76}{6000+76}=\frac{3750000\times 38}{3038}=\frac{3750000\times 19}{1519}$$

ou

$$J=46\$905\frac{1305}{1519}\text{ réis}$$

O capital é portanto

$$a=3750000-\left(46905+\frac{1305}{1519}\right)=3703094+\frac{214}{1519}$$

como se póde verificar pela formula

$$a=\frac{100\times 3750000}{100+6\times\frac{76}{360}}$$

522. Um capital, que deve ser recebido n'uma época futura, não tem actualmente o mesmo valor, que teria se devesse ser recebido já. A differença entre estes dois valores, *nominal* e *actual*, do mesmo capital chama-se *desconto* e depende principalmente do maior ou menor intervallo de tempo, que falta para o seu vencimento, da maior ou menor confiança, que ha em quem devé realisar o pagamento, da abundancia ou escacez de numerario e do logar em que deve effectuar-se a cobrança.

O *desconto* é uma especie de *juro* adiantado. *Descontar* uma quantia, que deve ser paga mais tarde, é pagar immediatamente essa quantia diminuida do *desconto* ajustado.

Os negociantes, que effectuam compras, sem ser a dinheiro de contado, dão ao vendedor, em troca dos generos comprados, um escripto pelo qual se obrigam a pagar no fim de um certo praso de tempo a quantia, que ficaram devendo. Este escripto chama-se **letra.**

Em Portugal ha duas especies de *letras*, que se denominam **letra de cambio** e **letra da terra.**

Letra de cambio *é uma carta com certas formalidades prescriptas por lei, pela qual uma pessoa manda, ou pede a outra de logar diverso do seu, que pague a terceira pessoa, ou á ordem d'esta, uma somma de dinheiro em troca de outra somma, que confessa ter recebido, ou esperar receber.*

Letra da terra *é uma letra de cambio, na qual tanto a pessoa que a assigna, ou que manda pagar, como a que ha de cumprir a ordem, residem na mesma terra.*

A pessoa que assigna a *letra* chama-se **saccador**, a que tem de cumprir a ordem de pagamento chama-se **saccado.** A pessoa, que recebe do *saccador* a letra, em troca da quantia designada n'ella, ou da promessa de a pagar, chama-se *tomador*. O *tomador*

póde ceder a outro a letra, que tomou, assignando nas costas d'ella uma declaração, que se chama *endosso*. O *tomador*, logo que assigna o *endosso*, torna-se *endossante*, ou *endossador*. A pessoa, a quem se faz o *endosso*, chama-se *endossatario*. O *tomador*, ou o ultimo *endossatario*, apresenta a letra ao *saccador* no seu domicilio, ou manda-lhe uma *segunda via*, emquanto a primeira gira em *endossos*. Se o *saccado* acceita a obrigação de pagar a *letra*, toma o nome de *acceitante*, e então o *portador*, ou o ultimo *endossatario*, se a letra não deve ser paga *á vista*, espera pela época do *vencimento* da *letra*, que, conforme as condições exaradas n'ella, póde ser contada da data da letra, ou da do *acceite*, para receber a importancia nominal da mesma letra, passando no verso d'esta o competente recibo.

523. **A regra de desconto** *serve para achar a quantia, que deve abater-se no valor nominal de uma letra, quando o possuidor d'esta, ou o actual endossatario, não quer esperar pela época do vencimento para a cobrar.*

Ha dois modos de calcular o *desconto* de uma letra, que se chamam *desconto por fóra* ou *desconto commercial* e *desconto por dentro* ou *racional*. *Desconto por fóra* é o juro, que vence o valor nominal da letra por todo o tempo, que lhe falta para o vencimento. *Desconto por dentro* é o juro correspondente ao tempo, que falta para o vencimento da letra, e ao capital, que junto com o mesmo juro, dá uma somma igual ao valor nominal da letra.

O valor nominal da letra é considerado, pois, como *capital* no *desconto por fóra*, e como *somma de capital e juro* no *desconto por dentro*. No *desconto por fóra* o possuidor da letra paga, portanto, juro de uma quantia, que effectivamente recebe, e de outra que não recebe; no *desconto por dentro* o mesmo possuidor paga juro sómente pelo dinheiro, que recebe.

Chamando L a quantia designada na letra, ou o seu valor nominal, D o *desconto por fóra* e d o *desconto por dentro* serão (§§ 509 e 519)

$$D=\frac{LRt}{100} \quad \text{e} \quad d=\frac{LRt}{100+Rt}$$

ou

$$D=Lrt \quad \text{e} \quad d=\frac{Lrt}{1+rt}$$

as formulas, que dão um e outro *desconto*.

Das formulas precedentes deduzem-se com facilidade outras que dão os *valores actuaes*, $L-D$ e $L-d$, das letras, isto é, os valores que effectivamente se recebem, quer por o primeiro, quer por o segundo modo de *desconto*. Com effeito, as ditas formulas ou proporções reduzem-se evidentemente a

$$\frac{L}{D}=\frac{100}{Rt} \qquad \frac{L}{d}=\frac{100+Rt}{Rt}$$

e, portanto, (§ 365) a

$$\frac{L-D}{L}=\frac{100-Rt}{100} \qquad \frac{L-d}{L}=\frac{100}{100+Rt}$$

das quaes se derivam as seguintes

$$L-D=\frac{L(100-Rt)}{100} \qquad L-d=\frac{100L}{100+Rt} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

ou

$$L-D=L(1-rt) \qquad L-d=\frac{L}{1+rt} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

524. **Problema.** *Calcular o desconto de uma letra de* 300$000 *réis, pagavel em* 39 *dias, sendo* $7\frac{1}{2}$% *a taxa do desconto.*

O *desconto por fóra* é

$$D=\frac{300000\times 7{,}5\times\frac{39}{360}}{100}$$

e effectuando as operações acha-se

$$D=2\$437{,}5 \text{ réis}$$

O *desconto por dentro* é

$$d=\frac{300000\times 7{,}5\times\frac{39}{360}}{100+7{,}5\times\frac{39}{360}} \qquad \text{ou} \qquad d=2\$418 \text{ réis proximamente}$$

525. **Problema.** *Calcular o valor actual de uma letra de* 640$000 *réis, a que faltam* 2 *mezes para o vencimento, suppondo o desconto a* 6%.

O valor actual da *letra* é o que effectivamente se recebe agora, se ella fôr descontada, isto é $L-D$, ou $L-d$, conforme se calcular o *desconto por fóra* ou *por dentro*.

Por meio das formulas (7) resolve-se directamente este problema. Querendo, porém, usar da proporção dos juros (§ 509), é tambem facil resolver a questão. A proporção (1) dá, fazendo $J=D$,

$$100 : 640000\times\frac{2}{12} :: 6 : D$$

Preparando a proporção para se poder tirar d'ella o valor de 640$000 — D vem

$$100 : 640000 :: \frac{2}{12}\times 6 : D \qquad \text{ou} \qquad 100 : 640000 :: 1 : D$$

e (§ 363) $\quad 100-1 : 640000-D :: 100 : 640000$

d'onde se tira

$$640000-D=\frac{640000\times 99}{100}=633\$600 \text{ réis}$$

Quando o *desconto* se faz *por dentro*, a proporção, que se deve empregar, é a (4) do § 519, que n'este caso se reduz a

$$100+6\times\frac{2}{12} : 640000 :: 100 : a$$

e da qual se deduz o valor actual $L-d$ da letra ou

$$a = 633\$663 \text{ réis proximamente}$$

526. Problema. *Uma letra de 720$000 réis, pagavel a 23 de maio de 1881, foi descontada a 8 de fevereiro do mesmo anno a rasão de 6 por cento. Que desconto soffreu a letra?*

Para se resolver este problema, é necessario contar os dias, que decorreram desde o dia em que se effectuou o desconto exclusivamente, até ao dia em que se venceu a letra inclusivamente.

Ora, desde 8 de fevereiro, exclusivè, até 28 do mesmo mez, inclusivè, ha $28-8$, ou 20 dias, desde 1 de maio inclusivè, até 23 inclusivè, ha 23 dias. Logo o numero total dos dias, contando por mezes, é $20+31+30+23$ ou 104.

Calculando agora o desconto, achar-se-ha

$$D=\frac{720000\times6\times\frac{104}{360}}{100} \qquad D=12\$480$$

ou

$$d=\frac{720000\times6\times\frac{104}{360}}{100+6\times\frac{104}{360}} \qquad d=12\$267 \text{ réis proximamente}$$

conforme se usar do *desconto por fóra* ou do *desconto por dentro.*

527. Quando os juros vencidos nos differentes prasos, ou unidades de tempo, não são pagos, o capital primitivamente adiantado vae successivamente augmentando, em consequencia de se lhe irem accumulando os mesmos juros, que, segundo os usos do commercio, passam tambem a vencer juros. A esta operação, pela qual os juros vencidos se vão convertendo em capital, para o effeito de vencerem novos juros, chama-se *capitalisação* dos juros. *Juros compostos*, ou *juros de juros*, são os juros, que correspondem a outros juros vencidos em época anterior.

Chama-se *capital primitivo* ao capital emprestado, ou adiantado, e *capital accumulado* ao valor, que vae tomando o capital primitivo, quando se lhe vão addicionando os juros vencidos e capitalisados.

A regra de juros compostos *serve para se calcular uma das quatro quantidades* **capital accumulado, capital primitivo, taxa** *ou* **rasão dos juros** *e* **tempo,** *quando se dão as outras tres.*

Conhecendo-se a *regra de juros simples* (§ 509) não é difficil calcular o *capital accumulado*, quando se dá o capital primitivo, a taxa e o tempo. Um exemplo vae mostrar, como póde proceder-se. Supponha-se que se quer calcular o capital accumulado em $4\frac{1}{2}$ annos, na hypothese de ser 6:000$000 réis o capital primitivo e 5 a taxa. O quadro seguinte mostra com bastante clareza, como se faz o calculo, empregando a regra de juros simples:

Capital primitivo	6:000$000
Juro vencido durante o primeiro anno	300$000
Capital accumulado no fim do primeiro anno	6:300$000
Juro vencido durante o segundo anno	315$000
Capital accumulado no fim do segundo anno	6:615$000
Juro vencido durante o terceiro anno	330$750
Capital accumulado no fim do terceiro anno	6:945$750
Juro vencido durante o quarto anno	347$287,5
Capital accumulado no fim do quarto anno	7:293$037,5
Juro vencido durante $^1/_2$ anno	182$325,9375
Capital accumulado no fim de $4\,^1/_2$ annos	7:475$363,4375

528. Quando a duração do emprestimo não é muito pequena, ou a taxa não é um numero bastante simples, o processo empregado no § antecedente torna-se tão moroso e sujeito a erros, que é quasi impossivel seguil-o na pratica.

É possivel, porém, seguindo exactamente o mesmo systema, sem comtudo effectuar as operações indicadas, obter-se uma formula geral, que possa calcular-se mais facilmente empregando os logarithmos.

Designando por a o capital primitivo e por R a taxa, será o juro vencido durante 1 anno igual (§ 509) a $\frac{aR}{100}$ ou igual a ar, se se designar, como é costume, por r a taxa reduzida $\frac{R}{100}$. A igualdade $r=\frac{R}{100}$ mostra que r representa o juro de 1 real em 1 anno.

Representando por A_1, A_2, A_3, .. A_t o capital accumulado no fim de 1, 2, 3, ... t annos ter-se-ha, pois, imitando o que acabou (§ 527) de se fazer:

Capital primitivo	a
Juro vencido durante o primeiro anno	ar
Capital accumulado	$A_1=a+ar=a(1+r)$
Juro vencido durante o segundo anno	A_1r
Capital accumulado	$A_2=A_1+A_1r=A_1(1+r)=a(1+r)(1+r)=a(1+r)^2$
Juro vencido durante o terceiro anno	A_2r
Capital accumulado	$A_3=A_2+A_2r=A_2(1+r)=a(1+r)^2(1+r)=a(1+r)^3$
Juro vencido durante o quarto anno	A_3r
Capital accumulado	$A_4=A_3+A_3r=A_3(1+r)=a(1+r)^3(1+r)=a(1+r)^4$
...	...
Capital accumulado no fim de t annos exactos	$A_t=a(1+r)^t$

Analysando os valores a, $a(1+r)$, $a(1+r)^2$, $a(1+r)^3$, $a(1+r)^4$, ... $a(1+r)^t$, que successivamente vae tomando o capital, reconhece-se que elles formam uma progressão geometrica (§ 377), na qual o primeiro termo é o capital primitivo e a rasão é $1+r$, isto é, a taxa reduzida augmentada de 1. O capital accumulado no fim de t annos vem, pois, a ser o termo (§ 378) de ordem $t+1$ da progressão, isto é

$$A_t=a(1+r)^t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

É a esta igualdade, que se chama *formula*[1] *dos juros compostos.*

529. Quando o tempo, durante o qual se suppõem capitalisados os juros, não é inteiro, póde-se, para ter o valor do capital accumulado, juntar ao valor dado pela formula (9) para o maior inteiro contido no dito tempo, o juro simples correspondente á fracção complementar. Suppondo que o tempo é $t+\frac{n}{m}$, sendo t um numero inteiro e $\frac{n}{m}$ um quebrado proprio, o valor $A_{t+\frac{n}{m}}$ do capital accumulado é igual á somma de $a(1+r)^t$ com o juro de $a(1+r)^t$ durante a fracção $\frac{n}{m}$ do anno.

A formula que dá o juro simples de um capital A_t durante $\frac{n}{m}$ annos sendo (§ 509) $A_t r\frac{n}{m}$, será

$$A_{t+\frac{n}{m}}=A_t+A_t r\frac{n}{m}=A_t\left(1+\frac{rn}{m}\right)$$

e finalmente[2] $$A_{t+\frac{n}{m}}=a(1+r)^t\left(1+\frac{rn}{m}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

530. **Problema.** *Calcular o capital accumulado em* 15 *annos por o capital primitivo* 824$000 *réis, suppondo que a taxa é* 6 % *ao anno.*

N'este problema é $a=824000$, $R=6$, $r=\frac{R}{100}=0{,}06$, $t=15$, e, portanto, (§ 528) $A_{15}=824000\times 1{,}06^{15}$

---

[1] Decompondo a unidade a que se refere t em m intervallos iguaes, e suppondo que o juro se capitalisa em cada um d'estes intervallos de tempo, o capital accumulado no fim de mt intervallos parciaes ou de t unidades de tempo, será (9)

$$A_t=a\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}=a\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{rt}$$

Quando cresce indefinidamente o numero m de partes iguaes, em que se decompoz a unidade de tempo, a expressão $\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}$ muda successivamente de valor, tendendo para um limite representado por e (§ 409 nota) e tem-se então $A_t=ae^{rt}$. Tal é a expressão, que representa o limite para que tenderia o capital accumulado no fim de t annos, se a capitalisação se effectuasse em intervallos de tempo cada vez mais curtos, por assim dizer de instante a instante.

[2] Admittindo a existencia de expoentes fraccionarios póde usar-se da formula (9) mesmo no caso do expoente ser o numero fraccionario $t+\frac{n}{m}$. Comparando as duas formulas

$$A_{t+\frac{n}{m}}=a(1+r)^{t+\frac{n}{m}} \qquad A_{t+\frac{n}{m}}=a(1+r)^t\left(1+\frac{rn}{m}\right)$$

diz Hippolyte Charlon *(Théorie mathematique des opérations financières)* que ellas dão resultados tão pouco differentes na pratica, que sómente as pessoas completamente extranhas aos negocios deixarão de usar da primeira d'aquellas formulas, incontestavelmente mais simples do que a segunda.

Applicando os logarithmos a esta formula (§§ 411 e 413), vem

$$\lg. A_{15} = \lg. 824000 + 15 \lg. 1{,}06$$

e effectuando as operações acha-se

Typo do calculo

$$\begin{array}{rl}
\lg. 1{,}6 = & 0{,}0253059 \\
 & 15 \\
\hline
 & 1265295 \\
 & 253059 \\
\hline
15 \cdot \lg. 1{,}06 = & 0{,}3795885 \\
\lg. 824000 = & 5{,}9159272 \\
\hline
\lg. A_{15} = & 6{,}2955157 \\
19747 \ldots\ldots\ldots & 5011 \\
\hline
66 & 1460(0 \mid 22(0 \\
\hline
1974766 & 140 \quad 66 \\
 & 8
\end{array}$$

$$A_{15} = 1{:}974\$766 \text{ réis}$$

531. **Problema.** *Qual é o capital primitivo, ou o valor actual do capital* 2:340$000 *réis accumulado durante* 12 *annos, a rasão de* $6\,^3/_4\,\%$? A formula (§ 528)

$$A_t = a(1+r)^t$$

dá para valor do capital primitivo

$$a = \frac{A_t}{(1+r)^t}$$

Substituindo n'esta formula $A_t = 2340000$, $r = \frac{6\frac{3}{4}}{100} = 0{,}0675$ e $t = 12$, tem-se

$$a = \frac{2340000}{1{,}0675^{12}}$$

e applicando os logarithmos

$$\lg. a = \lg. 2340000 + \overline{\lg.}\, 1{,}0675^{12}$$

Effectuando as operações indicadas obtem-se

Typo do calculo

$$\begin{array}{rl}
\lg. 1{,}0675 = & 0{,}0283679 \\
 & 12 \\
\hline
 & 567358 \\
 & 283679 \\
\hline
\lg. 1{,}0675^{12} = & 0{,}3404148 \\
\hline
\overline{\lg.}\, 1{,}0675^{12} = & \overline{1}{,}6595852 \\
\lg. 2340000 = & 6{,}3692159 \\
\hline
\lg. a = & 6{,}0288011 \\
10685 \ldots\ldots\ldots & 7745 \\
\hline
65 & 26600 \mid 407 \\
\hline
1068565 & 2180 \quad 65 \\
 & 145
\end{array}$$

$$a = 1{:}068\$565 \text{ réis}$$

Outro typo de calculo

$$\begin{array}{rl} \lg. 1{,}0675^{12} = & 0{,}3404148 \\ \hline c\lg. 1{,}065^{12} - 10 = & 9',6595852 \\ \lg. 2340000 = & 6{,}3692159 \\ \hline \lg. a = & 16',0288011 = 6{,}0288011 \end{array}$$

etc.

532. **Problema.** *Calcular a taxa*[1] *necessaria para* 628$000 *réis se converterem em* 745$000 *réis, no fim de* 7 *annos.*

Applicando os logarithmos á formula

$$A_t = a(1+r)^t$$

para depois se tirar o valor de $\lg.(1+r)$ tem-se

$$\lg. A_t = \lg. a + t\lg.(1+r)$$
$$\lg. A_t - \lg. a = t\lg.(1+r)$$

e $\lg.(1+r) = \frac{\lg. A_t - \lg. a}{t}$ ou $\lg.(1+r) = \frac{\lg. A_t + c\lg. a - 10}{t}$

Substituindo na formula precedente as letras pelos seus valores numericos,

$$\lg.(1+r) = \frac{\lg. 745000 - \lg. 628000}{7}$$

Effectuando as operações vem

$$1+r = 1{,}024707 \qquad r = 0{,}024707 \qquad R = 2{,}4707$$

533. **Problema.** *Calcular o tempo que é necessario para o capital* 400$000 *réis se converter em* 620$000 *réis a rasão de* 6,5 %.

Da formula

$$A_t = a(1+r)^t \quad \text{ou} \quad \lg. A_t = \lg. a + t\lg.(1+r)$$

tira-se

$$t = \frac{\lg. A_t - \lg. a}{\lg.(1+r)} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\lg. A_t + c\lg. a - 10}{\lg.(1+r)}$$

---

[1] Hyppolyte Charlon chama *taxas equivalentes* ás que, correspondendo a unidades diversas de tempo, fazem adquirir, durante o mesmo tempo, valores identicos ao mesmo capital posto a juros compostos.

Sejam r e r' as taxas relativas a duas unidades de tempo taes que, representando a primeira por 1, a segunda seja representada por $\frac{1}{n}$. O tempo representádo por t das primeiras unidades será representado por nt das outras unidades e as taxas r e r' serão equivalentes, se fôr, para qualquer valor de a,

$$a(1+r)^t = a(1+r')^{nt}$$

ou

$$1+r = (1+r')^n$$

Sendo $r = 0{,}05$ a taxa correspondente a 1 anno, a taxa equivalente relativa a 1 semestre, ou $\frac{1}{2}$ do anno, será dada pela formula

$$1{,}05 = (1+r')^2$$

ou

$$r' = 0{,}0247$$

e substituindo os valores

$$t = \frac{\lg. 620000 - \lg. 400000}{\lg. 1,065}$$

Effectuando as operações acha-se

$$t = 6 \text{ annos proximamente}$$

Querendo calcular o valor de t com maior approximação é necessario calcular o capital accumulado correspondente ao capital primitivo 400$000 réis, á taxa de 6,5 % e ao tempo 6; subtrahir depois o capital achado de 620$000 réis, e procurar o tempo necessario para o capital accumulado, que se calculou, produzir um juro igual á differença obtida. Effectuando os calculos, tem-se

$$A_6 = 400000 \times 1,065^6 = 583\$657$$

$$620000 - A_6 \quad \text{ou} \quad 620000 - 583657 = 36343$$

e determinando agora o tempo $\frac{n}{m}$, durante o qual 583$657 réis produzem o juro 36$343 réis a 6,5 % acha-se (§ 515)

$$\frac{n}{m} = \frac{100\,J}{a\,R} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{m} = \frac{J}{ar}$$

e por consequencia

$$\frac{n}{m} = \frac{36343}{583657 \times 0,065} = \frac{36343000}{37937705} \text{ annos}$$

e $\frac{n}{m} = \frac{36343000 \times 360}{37937705}$ dias ou $\frac{n}{m} = 344$ dias proximamente

Logo, reunindo os resultados d'estes calculos, tem-se

$$t = 6 \text{ annos e } 344 \text{ dias} \quad \text{ou} \quad t = 6 \text{ annos, } 11 \text{ mezes e } 14 \text{ dias}$$

EXERCICIOS

I. A quanto monta o capital 560$000 réis no fim de 6 annos e 2 mezes, suppondo que em todo este tempo vence juro simples na rasão de $6\frac{3}{8}$ por cento?

II. Que desconto soffre uma letra de 640$000 réis, á qual faltam 25 dias para o vencimento, suppondo que a taxa do desconto é $6\frac{1}{2}$ por cento?

III. Qual foi a taxa segundo a qual se fez o desconto de uma letra de 472$000 réis, suppondo que 150 dias era o tempo que lhe faltava para o vencimento e réis 459$730 a quantia dada por ella?

IV. Quanto tem a receber uma pessoa, a quem se devem $4\frac{1}{2}$ annos de uma pensão annual de 150 libras e 10 shillings, suppondo que as pensões em divida vencem juro simples na rasão de 6 por cento?

V. Quanto tempo é necessario para se elevar ao dobro do seu valor primitivo um capital, que vence juro composto na rasão de 6 por cento?

VI. Qual é o capital, que no fim de 8 annos está elevado a 3 contos de réis, suppondo que os juros tenham sido capitalisados a rasão de 6,5 por cento?

VII. Quantos dias faltam para o vencimento de uma letra de 620$000 réis, cujo desconto importou em 2$500 réis a rasão de 6,5 por cento?

VIII. Qual é a importancia a que se eleva o capital 3:600$000 réis durante 8,5 annos vencendo juro composto aos semestres na rasão de $5\frac{3}{4}$ por cento ao anno?

IX. Que taxa ou rasão de juros é necessaria para 12 contos de réis se elevarem a 15 contos de réis vencendo juro composto durante 5 annos?

CAPITULO IV

Regra de compra e venda de fundos publicos, acções e obrigações de bancos e companhias

534. As nações, do mesmo modo que os individuos, precisam por vezes de recorrer ao *credito* para levantarem dinheiro emprestado. Estes emprestimos são geralmente contrahidos ou com a condição de jámais o credor poder exigir o seu pagamento ao devedor, o qual em compensação se obriga a pagar-lhe *perpetuamente* uma renda ou juro certo e determinado, ou com a condição de serem satisfeitos ou *distratados* n'um dia fixo e previamente estipulado, além do qual não vencem juro algum.

A *divida publica* contrahida pelo primeiro modo tem uma duração illimitada e denomina-se *divida fundada* ou *consolidada*. A *divida publica* contrahida pelo segundo modo tem uma duração previamente limitada pelas condições do contracto e denomina-se *divida fluctuante*.

A *divida fluctuante* vence um juro, que é descontado no acto do emprestimo, e ao qual corresponde uma taxa fixa e convencional. A *divida fundada* ou *consolidada* vence tambem um juro certo e fixado por lei, mas a taxa que lhe corresponde é variavel, porque depende não só do juro, que é constante, como do valor maior ou menor por que no mercado se póde comprar esta especie de divida, ou da quantia mais ou menos elevada, que a nação recebe emprestada, em troca da obrigação de abonar o juro, que a lei estabelece para taes emprestimos.

A *divida fluctuante* é representada por letras do thesouro a praso, que ordinariamente é de tres mezes.

Ha duas especies de *divida fundada* ou *consolidada*, *interna* e *externa*. A *divida interna* é representada por titulos, que se denominam *inscripções*, e a *externa* por *bonds*.

As *inscripções* podem ser de *coupons*, ou de *assentamento*. As *inscripções de coupons* são titulos *ao portador*, e por isso a *junta do credito publico* paga o juro de cada semestre a qualquer pessoa, que lhe apresente o *coupon do semestre*, isto é, uma determinada tira de papel, que para esse fim, se corta do proprio titulo.

Ha *inscripções de coupons* de 100$000 réis, de 500$000 réis e de 1:000$000 réis nominaes.

As *inscripções de assentamento* são titulos *nominativos*, e por isso

a *junta do credito publico* sómente paga os seus juros ás pessoas a quem, segundo os registos da junta, ellas pertencem.

Ha *inscripções de assentamento* de 100$000 réis, de 500$000 réis, e de 1, 5, 10, 15 e 20 contos nominaes.

A *junta* póde tambem passar *certificados* em troca de qualquer quantia em *inscripções de assentamento*, ou *certificados de* 50$000 réis nominaes, para dar em troca de *cautellas de minimos*, quando a importancia total d'estas perfaça 50$000 réis nominaes.

Os *bonds*, ou titulos de divida externa, são todos *ao portador*. Ha *bonds* de 20, de 50, de 100, de 200 e de 500 libras esterlinas.

Em Portugal todos os titulos de divida publica, interna ou externa, vencem annualmente um juro de 3 por cento do valor nominal com uma dedução de 3 por cento a titulo de *imposto de rendimento*. Exceptuam-se, porém, os juros[1] pagos em territorio estrangeiro, os quaes não estão sujeitos a deducção alguma. Os juros são pagos aos semestres.

O preço das *inscripções* e dos *bonds* exprime-se dizendo quanto custam 100 réis, ou 100 dinheiros esterlinos, nominaes. Os *corretores de cambios e fundos publicos* têem obrigação de publicar em certos periodos os preços por que n'esses periodos se venderam na *bolsa*, ou mercado de fundos, os titulos. Estas publicações, que se denominam *boletins dos preços correntes dos fundos publicos*, abrangem ordinariamente tres columnas[2] *papel, dinheiro, effectuado*. A primeira contém os preços, por que os vendedores offereceram os titulos, a segunda os preços que offereceram as pessoas, que desejavam compral-os, e a ultima os preços por que se realisaram as transacções.

535. **Problema.** *Estando as inscripções a* 50,75 *que capital se póde comprar com* 4:200$000 *réis em metal?*

Sabendo-se que com 50,75 em dinheiro se compram 100 réis nominaes em *inscripções*, é facil saber com 4:200$000 réis em dinheiro que porção de inscripções se póde obter. É uma questão de *regra de tres*, como em seguida se vê.

$$50{,}75 : 100 :: 4200000 : x \qquad \text{ou} \qquad \frac{50{,}75}{100} = \frac{4200000}{x}$$

Effectuando as operações acha-se

$$x = 8:275\$862 \text{ réis}$$

Logo com 4:200$000 réis em dinheiro podem comprar-se, por

---

[1] Pagam-se os juros no continente e ilhas adjacentes em todos os concelhos, que são cabeças de comarca; no ultramar em Loanda e em Sotavento de Cabo Verde. Pagam-se tambem os juros da divida externa e os *coupons* da interna em Londres e em Paris.

[2] Na *bolsa* do Porto usa-se dos termos *pedido* e *offerta* em vez de *papel* e *dinheiro*.

este preço, 8 inscripções de conto (ou 1 de 5 contos e 3 de conto), 2 de 100$000 réis e 1 certificado de 50$000 réis. Os restantes 25$862 réis nominaes podem ser representados em *cautelas de minimos*, porém essas *cautelas* só vencerão juro, quando se lhe juntarem outras, que com ellas perfaçam 50$000 réis, e n'este caso poderão ser trocadas por *certificados* de 50$000 réis nominaes (§ 534).

Quando, porém, não se deseje comprar *minimos*, nenhuma difficuldade póde haver em calcular a quantia em dinheiro, que resta depois de comprados os 8:250$000 réis nominaes.

O problema seguinte ensina a achar o custo de 8:250$000 réis em inscripções e por consequencia a parte dos 4:200$000 réis em metal, que sobeja.

536. **Problema.** *Estando as inscripções a* 50,75 *em quanto importam* 8:250$000 *em inscripções de assentamento?*

A proporção, que resolve este problema, é

$$100 : 50{,}75 :: 8250000 : x \quad \text{ou} \quad \frac{100}{50{,}75} = \frac{8250000}{x}$$

Effectuando o calculo vem $x = 4{:}186\$875$ réis.

Reconhece-se agora que, estando a 50,75 as inscripções, com 4:200$000 réis em metal se compram 8:250$000 réis em inscripções e ainda sobejam 13$125 réis em dinheiro.

537. **Problema.** *Que juro recebe por semestre um individuo, que possue* 10:600$000 *réis em coupons?*

O juro annual de 100 réis nominaes em *inscripções* é 3 réis, ou 3 réis menos 0,03 de 3 réis, isto é, 2,91 réis, conforme o pagamento é feito em territorio estrangeiro ou em territorio nacional. O juro de 100 réis nominaes em cada semestre será, pois, segundo as circumstancias, 1,5 ou 1,455 réis. Sendo x o juro do semestre pago em territorio estrangeiro e y o juro do semestre pago em territorio portuguez, será

$$\begin{array}{ll} 100 : 1{,}5 :: 10600000 : x & \text{ou} \quad x = 159\$000 \\ 100 : 1{,}455 :: 10600000 : y & \quad\;\; y = 154\$230 \end{array}$$

Abatendo do valor achado para x o imposto de 3 por cento, que n'este exemplo é 4$770 réis, acha-se tambem o valor de y.

538. **Problema.** *Por que preço devem estar as inscripções para que o seu juro effectivo se eleve a* 5,73 *por cento ao anno?*

Como 100 réis nominaes vencem por anno 3 réis em dinheiro, que ficam reduzidos a 2,91 réis, depois de descontados 0,09 de real do imposto do rendimento, é evidente que, se fôr x o numero de réis em dinheiro em que importam os 100 réis nominaes, isto é, o preço das inscripções, será 2,91 réis em dinheiro o juro de x réis tambem em dinheiro. Mas por condição do problema deve 5,73 réis em dinheiro ser o juro de 100 réis em dinheiro, logo

ter-se-ha

$$5{,}73 : 100 :: 2{,}91 : x$$

e effectuando o calculo

$$x = 50{,}785$$

Se o pagamento fôr feito em paiz estrangeiro, empregar-se-ha a proporção

$$5{,}73 : 100 :: 3 : y$$

da qual se tira $y = 52{,}356$

539. **Problema.** *Estando as inscripções a* $50\,^3/_4$, *que renda adquire um sujeito que emprega* 6:090$000 *réis n'aquelles titulos?*

Se o sujeito empregasse apenas $50\,^3/_4$, réis obteria uma renda annual de 2,91 réis, depois de deduzido o imposto de rendimento, logo, sendo x a renda obtida, quando a quantia empregada fôr 6:090$000 rèis, será

$$50{,}75 : 2{,}91 :: 6090\$000 : x \quad \text{e} \quad x = 349\$200 \text{ réis}$$

Se o juro y fôr cobrado em paiz estrangeiro, será

$$50{,}75 : 3 :: 6090\$000 : y$$

e

$$y = 360\$000 \text{ réis}$$

540. Os *bancos*, as *companhias* e, em geral, todas as empresas que demandam grandes capitaes, organisam-se com o concurso dos fundos de diversos individuos, que para esse effeito se associam. Cada um dos associados tem direito a gosar uma parte dos bens, que possuir a empresa a que se associou, e é responsavel pelos prejuizos, que ella causar.

O titulo, que lhe confere aquelle direito e ao mesmo tempo lhe impõe a responsabilidade correlativa, chama-se *acção*. A responsabilidade, porém, do *accionista*, que é possuidor da *acção* ou *acções*, póde ter por limite o valor nominal dos titulos que possuir, ou não ter limite algum. D'aqui resulta a distincção entre sociedades de *responsabilidade limitada* e sociedades de *responsabilidade illimitada*. A *acção* representa portanto o direito a uma parte do capital social.

Dividendo é a parte dos lucros da sociedade, que se distribue annual, ou semestralmente pelos accionistas ou associados em remuneração do dinheiro, que desembolsaram. Os *dividendos* estão sujeitos a uma dedução de 2 por cento, que é cobrada pelo estado sob a epigraphe de *imposto de rendimento*.

As *acções* são papeis de credito negociaveis. Diz-se que ellas estão *ao par*, quando o seu valor effectivo é igual ao nominal, ou igual á parte d'este que effectivamente tem sido desembolsada pelos accionistas, se ainda lhes não foi exigido todo o capital da sua subscripção. As *acções* estão *acima* ou *abaixo do par*, quando o seu

valor effectivo excede ou é inferior ao valor nominal, ou á parte d'elle já desembolsada, se o desembolso não está completo.

Nas *acções* acima do par chama-se *premio* ao excesso do seu valor effectivo sobre o nominal.

541. As sociedades, que precisam levantar dinheiro emprestado, contrahem ás vezes os seus emprestimos dando aos credores uns titulos privilegiados chamados *obrigações*, que vencem um juro fixo e determinado até ao dia designado pela sorte para serem amortisados os creditos representados por elles.

As *obrigações* têem por garantia todos os fundos ou bens da sociedade emissora e não dão aos seus possuidores direito algum nem á propriedade, nem aos lucros da empresa.

As *obrigações* são, como as *acções*, titulos negociaveis e podem portanto estar *ao par*, *acima do par* ou *abaixo do par*. Seja, porém, qual fôr o preço das *obrigações*, a sociedade, que as emittiu, não reembolsa os possuidores d'ellas senão do seu valor nominal.

Não são só as sociedades particulares, que contrahem emprestimos emittindo *obrigações*. As nações, os municipios, etc. recorrem tambem á emissão de *obrigações* para o mesmo fim. D'esta especie são as *obrigações* do caminho de ferro do Minho e Douro, as obrigações do emprestimo á cidade de Lisboa, etc., etc.

Os juros das *obrigações* estão sujeitos ao *imposto de rendimento*, cuja importancia é 2 por cento.

542. A *companhia geral de credito predial portuguez* está auctorisada pelos seus *estatutos:* 1.º a fazer emprestimos sobre hypotheca de bens immoveis, a longo praso com amortisação por annuidades, ou a curto praso com reembolso por um ou mais pagamentos, e a crear e negociar titulos de obrigações prediaes, ou letras hypothecarias, representativos d'estes emprestimos: 2.º a fazer emprestimos municipaes e districtaes de longo praso ás municipalidades e juntas geraes de districto, reembolsaveis por annuidades ou sem ellas, sobre consignação legalmente auctorisada de um rendimento certo e seguro, e a crear e negociar titulos de obrigações municipaes ou districtaes representativos d'estes emprestimos; 3.º a receber dinheiro em deposito em conta corrente, ou a praso, com juro ou sem elle, podendo empregar temporariamente estes capitaes, bem como uma parte dos fundos disponiveis ou fluctuantes, em adiantamentos a curto praso sobre as suas obrigações, ou em titulos de divida publica, ou outros que se reputem devidamente garantidos e de facil e prompta realisação.

Os emprestimos realisados pela *companhia* sobre hypotheca predial são feitos em obrigações prediaes ao par e de juro igual áquelle a que fôr contractado o emprestimo, ou, se o mutuario o preferir, em dinheiro metallico ao juro, que se convencionar, nunca superior ao da lei. Nos emprestimos feitos em obrigações a companhia póde facilitar aos mutuarios a negociação dos titulos, fazer sobre elles

adiantamentos a curto praso e pelo juro do mercado ou negocial-os ella mesma.

As obrigações ultimamente emittidas vencem um juro annual de 5 %, ha porém, no mercado ainda muitas de data anterior com o juro annual de 6 %.

Os emprestimos prediaes a longo praso não podem ser feitos por menos de 10 annos, nem por mais de 60.

As *obrigações prediaes* podem ser nominativas, ou ao portador, e têem de valor nominal 90$000 réis (500 francos ou 20 libras). Ha comtudo titulos de 5 e de 10 *obrigações* e *fracções de obrigação*, ou *quintos de obrigação*, de 18$000 réis (100 francos ou 4 libras) nominaes. As *obrigações prediaes* vencem juro, cuja taxa, tempo e modo de pagamento constam dos respectivos titulos, e são fixados pelo conselho de administração.

543. **Problema.** *Sendo 6,5 por cento o dividendo pago em certo anno pelo banco de Portugal, que rendimento teve n'esse anno um accionista do mesmo banco, que possuia 3:500$000 réis nominaes, ou 7 titulos de cinco acções cada um?*

A proporção

$$100 : 6{,}5 :: 3500\$000 : x \quad \text{ou} \quad \frac{100}{6{,}5} = \frac{3500\$000}{x}$$

mostra que o rendimento foi $x = 227\$500$ réis.

544. **Problema.** *Custando um titulo de cinco acções* (500$000 réis nominaes) *do banco de Portugal* 586$000 *réis, quantas acções se podem comprar com* 4:585$450 *réis?*

A proporção

$$586\$000 : 500\$000 :: 4585\$450 : x$$

dá

$$x = 3{:}912\$500 \text{ réis}$$

Logo com 4:585$450 réis em dinheiro podem comprar-se 7 *titulos de cinco acções e quatro acções*, ou 3:900$000 réis nominaes.

Querendo agora saber, qual é a quantia em dinheiro que sobeja, é necessario calcular o custo de 3:900$000 réis nominaes, para o que serve a proporção

$$500\$000 : 586\$000 :: 3900\$000 : y$$

da qual se tira $y = 4{:}570\$800$ réis, e subtrahir depois a quantia achada de 4:585$450 réis.

Reconhece-se por este modo, que a demasia é 14$650 réis.

545. **Problema.** *Tendo-se comprado por* 24$300 *réis uma acção*[1] *da companhia geral de credito predial portuguez, qual é a taxa effectiva do juro do dinheiro empregado, suppondo que o dividendo é* 2$160 *réis por acção.*

---

[1] As *acções* d'esta companhia têem de valor nominal 90$000 réis, porém, os accionistas não desembolsaram ainda senão 22$500 réis por *acção*.

A proporção

$$24\$300 : 2\$160 :: 100 : x$$

mostra que $x = 8\frac{8}{9}$ é a taxa do rendimento correspondente ao capital empregado.

546. **Problema.** *Estando as obrigações prediaes de 6 por cento a 92$500 réis, que dinheiro pode realisar um sujeito, que recebeu 25 obrigações e 2 fracções de obrigação pela hypotheca de certa propriedade na companhia geral de credito predial portuguez.*

Cada *obrigação* tem de valor nominal 90$000 réis, e cada *fracção de obrigação* tem 18$000 réis (§ 542), logo as 25 *obrigações e 2 fracções* sommam 2:286$000 réis de valor nominal. Sabendo-se pois, que, cada *obrigação* se vende por 92$500 réis é claro que, designando por x o producto da venda das *obrigações e fracções de obrigação*, será

$$90\$000 : 92\$500 :: 2286\$000 : x$$

e, portanto,

$$x = 2:349\$500$$

547. **Problema.** *Com 3:000$000 réis, quantas obrigações se podem comprar, suppondo que ellas têem 2 1/2 por cento de premio?*

Sendo 2 1/2 o premio, cada 100 réis nominaes de obrigações importam em 102,5 réis em dinheiro, logo da proporção

$$102{,}5 : 100 :: 3000\$000 : x$$

tira-se

$$x = 2:926\$829 \text{ réis nominaes}$$

Dividindo 2:926$829 réis por 90$000 réis, acha-se o numero 32 de *obrigações prediaes* que se podem comprar, e dividindo o resto por 18$000 réis, acham-se os *quintos* ou *fracções de obrigação*, que a mais se podem obter.

Conclue-se d'isto que com 3:000$000 réis em dinheiro podem comprar-se 6 *titulos de cinco obrigações*, 2 *obrigações* e 2 *fracções de obrigação*, ou 3 *titulos de* 10 *obrigações*, 2 *obrigações* e 2 *fracções*, ficando ainda um saldo em dinheiro de 11$100 réis.

EXERCICIOS

I. Suppondo que uma associação possue 270:800$000 réis nominaes em *inscripções*, que comprou por 128:921$765 réis em dinheiro, qual será: 1.º, o preço por que foram adquiridas as inscripções; 2.º, a taxa do juro que ellas vencem annualmente?

II. Tendo um sujeito emprestado 10:000$000 réis ao governo portuguez a 6 1/2 % ao anno, qual é: 1.º, o juro que tem a receber, ou antes, a descontar, segundo é costume, no acto do emprestimo; 2.º, qual é a verdadeira taxa do dinheiro empregado, considerando como capital unicamente a quantia, que o governo effectivamente recebe?

III. Suppondo que uma companhia comprou 17 titulos de cinco acções do banco de Portugal por 9:005$000 réis, e que recebeu em um certo anno 510$000 réis de dividendo por as mesmas acções, pergunta-se: 1.º, qual foi a taxa effectiva do dinheiro empregado; 2.º, qual foi o preço por que foram compradas as acções?

IV. Suppondo que as obrigações prediaes de 6 % têem 2 1/2 por cento de premio, qual é o preço por que devem comprar-se as obrigações prediaes de 5 % para que as taxas dos rendimentos, tanto de umas como de outras, sejam as mesmas?

V. Tendo-se comprado por 77:052$900 réis 830 obrigações prediaes e 82 fracções (quintos) de obrigação, qual foi o preço por que sairam as obrigações?

VI. Suppondo que 15 acções (500$000 réis nominaes cada uma) da companhia das lezirias, custaram 6:119$500 réis, pergunta-se, que dividendo devem ter essas acções, para que o seu rendimento seja igual ao que se obtem, comprando inscripções a 50,75 por cento?

VII. Um sujeito, que possue 4 acções (1:000$000 réis nominal cada uma) da *companhia de seguros fidelidade*, e 80 (50$000 réis nominaes cada uma) da *companhia lisbonense de illuminação a gaz*, deseja saber, qual é a companhia, cujas acções lhe rendem mais suppondo: 1.º, que as acções da companhia fidelidade foram compradas a 80 %, e as da companhia do gaz ao par; 2.º, que o dividendo que elle recebeu em um anno da companhia fidelidade foi 160$000 réis, e o que no mesmo anno recebeu da companhia do gaz importou em 240$000 réis?

VIII. Suppondo que um menor herdou 25:000$000 réis em inscripções, por morte de seus paes, e que o tutor foi todos os semestres empregando os juros d'essas inscripções na compra de outras, qual será o capital nominal, possuido pelo menor no fim de 5 annos, na hypothese de todas as inscripções terem sido compradas a 49,25?

IX. A como devem ser compradas as inscripções, para o seu juro effectivo corresponder a 6,65 por cento?

X. Por que preço estarão as obrigações prediaes de 5 %, quando o seu juro effectivo fôr 5,85 por cento?

XI. Estando os fundos portuguezes em Londres a $51\frac{1}{8}$ em quanto importam 3:895 libras esterlinas de *bonds*?

XII. Que capital é preciso possuir em *bonds*, para se receberem 71 libras, 12 shillings e 6 dinheiros de juro cada semestre?

CAPITULO V

Regra de cambio

548. A palavra *cambio*, tomada em sentido proprio, quer dizer troca de uma cousa por outra; tomada em sentido estricto, significa a permutação, ou troca de dinheiro por dinheiro.

Cambio commum, ou *miudo*, é o que se pratica, quando se troca uma moeda por outra mais rara, mediante um premio chamado *agio*.

Cambio de banco é a troca de dinheiro, ou de valores pecuniarios de uma cidade, ou reino, por valores pecuniarios, ou dinheiro de outra cidade, ou reino, mediante certo premio, que se dá aos banqueiros. O *cambio de banco* faz-se por intermedio de *letras de cambio* ou de *letras da terra* (§ 522).

O *cambio* póde ser *interior*, ou *exterior*: é *interior*, quando os valores trocados são moedas da mesma cidade, ou reino; é *exterior*, quando os referidos valores representam moedas de paizes differentes.

549. O preço do *cambio interior* costuma regular-se a *tantos por cento*, a favor ou contra uma das duas praças, ou *ao par*.

Quando se diz, que em Lisboa o cambio sobre o Porto está a 2 % contra Lisboa, entende-se que uma *letra* de 100 réis sobre o Porto, custa em Lisboa 102 réis. Se o cambio sobre o Porto estiver a 2 % a favor de Lisboa, a letra de 100 réis sobre o Porto custará em Lisboa 98 réis.

O mais conveniente para o negociante de Lisboa, que precisa *remetter* alguma *letra* para o Porto, é que em Lisboa o cambio sobre o Porto esteja o mais favoravel possivel a Lisboa, porque evidentemente elle comprará por esse modo o mesmo valor nominal pelo preço mais baixo possivel.

Pelo contrario, o que convem mais ao negociante de Lisboa, que *saca* sobre o Porto, é que o cambio esteja o mais desfavoravel possivel para Lisboa, porque, sendo elle verdadeiramente o vendedor da *letra*, quanto maior fôr o preço, que lhe derem por ella, mais ganhará.

Logo, *no cambio interior, quando o cambio entre duas praças é desfavoravel a uma d'ellas, perde o negociante, que* **remette** *da praça, onde o cambio é desfavoravel, e ganha o negociante, que* **saca**. *Inversamente ganha o negociante, que* **remette**, *e perde o que* **saca**, *quando ambos os negociantes pertencem á praça a que o cambio é favoravel*

O negociante de uma praça que precisa mandar dinheiro para outra praça, póde, em vez de mandar dinheiro, comprar na propria praça uma *letra* sobre a outra e remettel-a depois ao seu credor, ou auctorisar este a *sacar* sobre elle a quantia em divida.

550. **Problema.** *Devendo um negociante de Lisboa 250$000 réis a outro do Porto, qual será melhor, para pagar a sua divida,* **remetter** *para o Porto, ou auctorisar o seu credor a* **sacar** *sobre Lisboa, suppondo que em Lisboa o cambio sobre o Porto está 2 % contra Lisboa e no Porto o cambio sobre Lisboa está 1 ½ % a favor do Porto.*

N'este caso ambos os cambios estão desfavoraveis a Lisboa, porém, como o do Porto é menos desfavoravel, o melhor é dar ordem ao credor do Porto para *sacar* sobre Lisboa. O calculo confirma isto mesmo.

Se o negociante compra a letra em Lisboa, para a remetter para o Porto, tem de dar 102 réis em dinheiro por cada 100 réis nominaes, logo, designando por x o custo de 250$000 réis nominaes, será

$$100 : 102 :: 250\$000 : x \quad \text{e} \quad x = 255\$000$$

Se o negociante do Porto, com auctorisação do de Lisboa, *saca* sobre Lisboa, o valor da letra deve ser tal, que a sua venda no Porto produza 250$000 réis em dinheiro, e como por cada 100 réis da letra elle obtem 100 — 1,5 réis em dinheiro, segue-se que, se fôr y o valor nominal da letra, será

$$100 - 1{,}5 : 100 :: 250\$000 : y \quad \text{e} \quad y = 253\$807 \text{ réis}$$

Logo, na primeira hypothese, o negociante de Lisboa compra a *letra que remette* por 255$000 réis, e na segunda, tem de dar por a *letra*, que lhe é apresentada, 253$807 réis.

É, pois, mais economico para o devedor, n'este exemplo, auctorisar o crédor a *sacar* do que fazer elle a *remessa*.

551. O preço do *cambio exterior* costuma regular-se, suppondo que uma das praças dá sempre a mesma porção de moeda, *dá o certo*, e a outra dá uma porção variavel de moeda, *dá o incerto*. As moedas[1], a que se referem os dois termos d'esta especie de equivalencia, de que resulta o preço do *cambio exterior*, são sempre as mesmas para cada paiz. Por este modo o preço do cambio entre duas praças póde enunciar-se, mencionando só o termo variavel, ou *incerto*, da equivalencia, visto suppor-se conhecido o outro, ou o certo.

Quando se diz, por exemplo, que em Lisboa o cambio sobre Londres está a 53, entende-se, que em Lisboa uma letra de 53 dinheiros esterlinos *(pence)* sobre Londres custa 1$000 réis, porque suppõe-se sabido, que a praça de Lisboa dá sempre 1$000 réis á de Londres e que esta praça dá o incerto á de Lisboa, sendo a sua *moeda de cambio* o dinheiro esterlino.

Chama-se **curso dos cambios** de uma praça a uma tabella, que contém os preços dos cambios d'essa praça com as praças que têem com ella relações commerciaes.

Lisboa dá *o certo* a Londres, a Amsterdam e ás praças do Brasil, e *o incerto* a Paris, Bruxellas, Hamburgo, Genova, Vienna, Trieste, Napoles, Madrid e Cadiz.

Lisbóa dá 1$000 réis a Londres, 40 cruzados, ou 16$000 réis a Amsterdam e 100 réis ás praças do Brasil. A moeda de cambio em Londres é o dinheiro esterlino *(penny)*, a de Hamburgo é o *marco imperial (reich-mark)*, a de Amsterdam o *florim* e a do Brasil o real. Quando no Brasil se diz que o cambio sobre Portugal está a 250, por exemplo, deve entender-se que 100 réis portuguezes (100 réis *fortes*) valem 250 réis do Brasil (250 réis *fracos*). Portugal recebe de Genova e de Napoles 3 *liras novas* (ou francos), de Hamburgo 1 *marco*, de Paris e de Bruxellas 3 *francos*, de Vienna e Trieste 1 *florim*, e de Madrid e Cadiz 1 *peso forte* ou 5 *pesetas*. Londres dá sempre 1 *libra esterlina* a Paris e a Genova e recebe sempre 1 *peso forte*, ou 5 *pesetas*, de Madrid e 1$000 réis do Brasil[2].

---

[1] Chamam-se *moedas de cambio* ás moedas a que se referem os preços dos cambios. A *moeda de cambio* póde ser *real* ou *ficticia*. Em Portugal a *moeda de cambio* é o *real* para a maioria das praças e é o *cruzado* para outras. Ambas estas moedas são actualmente *ficticias*. Em França a moeda de cambio é o franco, que é uma moeda real.

[2] Nos *cursos dos cambios* publicados em Portugal e no Brasil não costumam apparecer cotados os cambios entre as praças d'um e outro paiz, naturalmente porque quasi todas as transferencias de fundos entre os dois paizes se effectuam por intermedio da praça de Londres. Costumam, porém, os negociantes tomar para

Paris[1] recebe sempre 1 *peso* de Madrid, e 100 *liras novas* de Genova.

O *curso dos cambios* de qualquer praça contém os preços dos cambios *á vista*, a 30 d. v. (30 dias de vista), 90 d. d. (90 dias de data), 3 m. d. (3 mezes de data), etc. Estas abreviaturas significam que o vencimento das letras se verifica, logo que ellas sejam apresentadas ao *sacado*, 30 dias depois da apresentação, ou do *acceite*, 90 dias depois da data da letra, 3 mezes depois da mesma data, etc.

552. **Problema.** *Um negociante de Lisboa deve a outro de Londres 1600 libras e 15 shillings, estando em Lisboa o cambio sobre Londres a* $53\frac{1}{2}$, *e em Londres o cambio sobre Lisboa a* $53\frac{5}{8}$. *Qual será mais vantajoso ao devedor remetter uma letra para Londres, ou auctorisar o seu credor n'esta cidade a sacar sobre Lisboa?*

No caso da *remessa* da letra o negociante tem de despender uma quantidade x de réis tal, que, por cada $53\frac{1}{2}$ dinheiros esterlinos, dê 1$000 réis, logo é

$$53\tfrac{1}{2}^{\text{ds}} : 1600^{\text{lb}}\ 15^{\text{sh}} :: 1000 : x$$

Reduzindo a dinheiros os termos da primeira rasão, e effectuando os calculos, vem

$$x = 7:180\$934 \text{ réis}$$

No caso do correspondente de Londres *sacar* sobre Lisboa, a despeza feita pelo negociante d'esta cidade deve ser tal, que, por cada $53\frac{5}{8}$ dinheiros em divida, pague 1$000 réis, logo, sendo y o

---

preço do cambio entre as praças de Portugal e as do Brasil o que resulta da comparação entre o valor da libra esterlina fixado por lei em Portugal e o seu valor variavel resultante do preço do cambio sobre Londres nas praças do Brasil. Suppondo que no Rio de Janeiro o cambio sobre Londres está a $21\frac{1}{3}$ faz-se a comparação, empregando as seguintes proporções:

$$21\tfrac{1}{3} : 240 :: 1000 : x$$

$$4500 : 100 :: x : y$$

das quaes a primeira dá o valor da libra em moeda *fraca* ou brasileira e a segunda o equivalente a 100 réis fortes em moeda *fraca* ou brasileira. Multiplicando as proporções acha-se $y = 250$. Logo o cambio sobre Lisboa no Rio de Janeiro póde reputar-se a 250, quando n'esta ultima praça o cambio sobre Londres está a $21\frac{1}{3}$. Na mesma hypothese a libra esterlina vale 11$250 réis fracos ou em moeda brasileira.

[1] Paris está dando o *incerto* a todas, ou quasi todas as praças commerciaes. No *curso dos cambios* da praça de Paris figura já a praça de Lisboa dando o certo, 1$000 réis, a Paris.

numero de réis, que o negociante ha de pagar, será

$$53\frac{5}{8}^{dst} : 1600^{lb}\ 15^{sh} :: 1\$000 : y$$

Effectuando as operações, como na primeira hypothese, acha-se

$$y = 7:164\$195 \text{ réis}$$

Vê-se, pois, que é mais favoravel ao devedor o *saque* que a *remessa*. Nem mesmo era difficil antever este resultado, sem fazer calculos, porque, pagando-se com 1$000 réis, ora $53\frac{1}{2}$ dinheiros esterlinos, ora $53\frac{5}{8}$ dinheiros esterlinos, não póde restar duvida de que é mais vantajoso o segundo caso, isto é, aquelle em que, com o mesmo dinheiro, se paga maior divida.

553. Em geral, para quem *remette*, dando o *certo*, é mais favoravel o cambio mais alto, porque com o mesmo dinheiro compra maior valor nominal, e dando o *incerto*, é melhor o cambio mais baixo, porque com menos dinheiro compra o mesmo valor nominal.

Pelo contrario ao *sacador* é mais desfavoravel o preço mais baixo, quando dá o *certo*, e o preço mais alto, quando dá o *incerto*.

Os interesses do *sacador* são sempre oppostos aos da pessoa, que remette a letra, porque aquelle vende o que esta compra.

554. **Problema.** *Um negociante de Lisboa deseja mandar para o seu correspondente em Paris* 825,40 *francos, estando em Lisboa o cambio sobre Paris a* 540 *e em Paris o cambio sobre Lisboa a* 545. *Qual será mais conveniente ao negociante,* remetter, *ou auctorisar o* saque?

Não é difficil conhecer, sem effectuar o calculo, que o segundo meio é peior que o primeiro, porque é mais vantajoso pagar 3 francos com 540 réis do que com 545 réis.

Desejando-se comtudo effectuar as operações, para se conhecer a differença entre as duas quantias despendidas, ter-se-ha, para o caso da *remessa*,

$$3^{fr.} : 540^{rs} :: 825^{fr.},40 : x \quad \text{ou} \quad x = 148\$572$$

e para o caso do *saque*

$$3^{fr.} : 545^{rs} :: 825^{fr.},40 : y \quad \text{ou} \quad y = 149\$947\frac{2}{3}$$

555. **Problema.** *Um portuguez, tendo de partir para Madrid, precisa trocar* 3:600$000 *réis por dinheiro hespanhol. Que porção de dinheiro deve receber, suppondo que em Lisboa o cambio sobre Madrid está a* 900?

A praça de Madrid dá o certo, 1 peso ou 5 pesetas, á de Lisboa, logo

$$900 : 5 :: 3600\$000 : x \quad \text{ou} \quad x = 20000 \text{ pesetas}$$

556. **Problema.** *Quanto tem de despender um negociante de Madrid, que precisa remetter para Lisboa uma letra de* 825$000 *réis, suppondo:* 1.°, *que em Madrid o cambio sobre Lisboa está a* 895 *a* 2 *mezes de vista;* 2.°, *que em Lisboa o desconto está a* 6 %?

Como a *letra* remettida para Lisboa só se vence 2 mezes depois do *sacado* assignar o *acceite*, é evidente que, para o negociante de Lisboa não esperar pelos 825$000 réis, deve ser tal o valor de letra que, sendo descontada em seguida ao *acceite*, produza immediatamente 825$000 réis.

Estando em Lisboa o desconto a 6 % ao anno, ou $\frac{1}{2}$ % ao mez, é claro que 100 réis em 2 mezes soffrem o desconto de 1 real, e, portanto,

99 á vista : 100 a 2 mezes :: 825$000 á vista : x' a 2 mezes

Logo a *letra remettida* para Lisboa deve ter de valor nominal x' réis, e como ella ha de ser comprada a rasão de 5 pesetas por cada 895 réis, segue-se que, sendo x o custo da letra, será

895 réis a 2 mezes : 5 pesetas á vista :: x' réis a 2 mezes : x pesetas á vista
$x = 4655{,}48$ pesetas pagas á vista

Na pratica emprega-se geralmente a *regra conjuncta* (§ 503) na resolução d'estas questões de cambio. No caso presente a *regra conjuncta* é a seguinte

x pesetas á vista	825$000 réis á vista
99 réis á vista	100 réis a 2 mezes
895 réis a 2 mezes	5 pesetas á vista

e, por isso, tem-se

$$x \times 99 \times 895 = 825\$000 \times 100 \times 5$$

e $$x = \frac{825\$000 \times 100 \times 5}{99 \times 895} \quad \text{ou} \quad x = 4655{,}48 \text{ pesetas}$$

O nominal da letra é $x' = 833\$333\,{}^{1}/_{3}$ réis.

557. Diz-se que o *cambio* é *directo*, quando a reducção de moedas de uma praça a moedas de outra se faz sómente segundo os preços dos cambios entre as duas praças; e diz-se que o *cambio* é *indirecto*, quando a mesma reducção se faz proporcionalmente aos preços dos cambios de uma ou mais praças intermedias.

O negociante de Lisboa, que tem de mandar para Londres certa quantia de dinheiro, em vez de *remetter* directamente para Londres, ou de auctorisar o seu correspondente de Londres a *sacar* directamente sobre Lisboa, póde recorrer a uma terceira praça, ou a mais de uma, para realisar por intermedio d'ella, ou d'ellas a sua remessa.

Preferindo o negociante de Lisboa este ultimo modo de remet-

ter dinheiro, póde comprar em Lisboa uma letra sobre a praça intermedia e remettel-a depois para Londres, a fim do seu correspondente n'esta cidade a negociar.

Este modo de remetter dinheiro de Lisboa para Londres offerece um exemplo muito simples de *cambio indirecto*.

558. **Problema.** *Estando o cambio sobre Paris a* 560 *em Lisboa, e a* 25 *em Londres, quanto tem de gastar o negociante de Lisboa que quer* **remetter** 1600 *libras e* 15 *shillings para Londres por intermedio da praça de Paris*[1].

A *letra remettida* de Lisboa deve representar francos, e como ella ha de ser negociada em Londres, onde o cambio sobre Paris está a 25, segue-se que por cada 25 francos nominaes, que a letra representar, se cobrará 1 libra em Londres. Logo representando x' o numero de francos designado na letra, será

$$1 \text{ libra} : 25 \text{ francos} :: 1600 \text{ libras e } 15 \text{ shillings} : x' \text{ francos}$$

O custo x da letra de x' francos em Lisboa é dado pela proporção

$$3 \text{ francos} : 560 \text{ réis} :: x' \text{ francos} : x \text{ réis}$$

Multiplicando ordenadamente estas proporções depois de reduzidas a shillings as libras, vem

$$20 \times 3 : 25 \times 560 :: 32015 \times x' : x' \times x$$

ou $\quad 20 \times 3 : 25 \times 560 :: 32015 : x \quad$ e $\quad x = 7:470\$166\frac{2}{3}$ réis

Resolvendo o mesmo problema pela *regra conjuncta*, como é mais proprio e mais usado, tem-se

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ réis} \diamond 1600 \text{ libras e } 15 \text{ shillings} \\ 1 \text{ libra} \diamond 25 \text{ francos} \\ 3 \text{ francos} \diamond 560 \text{ réis} \end{array}\right\} \text{ou} \begin{array}{l} x \text{ réis} \diamond 32015 \text{ shillings} \\ 20 \text{ shillings} \diamond 25 \text{ francos} \\ 3 \text{ francos} \diamond 560 \text{ réis} \end{array}$$

e $$x = \frac{32015 \times 25 \times 560}{20 \times 3} = 7:470\$166\frac{2}{3} \text{ réis}$$

Comparando este resultado com o que se obteve no § 552, reconhece-se, que é muito mais favoravel ao negociante de Lisboa effectuar a remessa do dinheiro para Londres pelo *cambio directo*, quer seja *remettendo*, quer auctorisando o *saque*, quando o cambio está em Lisboa a $53\frac{1}{2}$ e em Londres a $53\frac{5}{8}$, que mandar o dinheiro por o *cambio indirecto*, tomando para intermedia a praça de

---

[1] A seguinte regra conjuncta

$$\begin{array}{l} x \text{ dinheiros} \diamond 1000 \text{ réis} \\ 560 \text{ réis} \diamond 3 \text{ francos} \\ 25 \text{ francos} \diamond 240 \text{ dinheiros} \end{array}$$

ensina a achar o preço $x = 51\frac{3}{7}$ do cambio directo entre Lisboa e Londres equivalente ao cambio indirecto entre as mesmas praças por intermedio da de Paris. Dá-se por isso áquelle valor de x o nome de *paridade* nas questões em que se trata de cambio indirecto.

Paris, no caso de estar o cambio sobre Paris a 560 em Lisboa e a 25 em Londres.

Para a comparação ser mais exacta é necessario, comtudo, attender ás despezas feitas com commissões, corretagens, etc., que, em geral, influem mais no *cambio indirecto*, que no *directo*.

559. **Problema.** *Um negociante de Lisboa quer pagar a outro de Paris 4065,30 francos, remettendo para esta cidade uma letra sobre Madrid. Qual será o custo da letra, estando o cambio sobre Madrid em Lisboa a 892 a 3 mezes de vista, em Paris a 4,9 francos, e suppondo que em Paris o desconto está a 6 % ao anno?*

O numero de pesetas designado na *letra* deve ser tal, que, depois de feito o desconto correspondente a 3 mezes, produza em Paris 4065,30 francos.

A *regra conjuncta*, pela qual se resolve este problema, é a seguinte

x réis á vista ◇ 4065,30 francos á vista

$100 - 6 \times \frac{3}{12}$ ou $98\frac{1}{2}$ francos á vista ◇ 100 francos a 3 mezes

4,9 francos a 3 mezes ◇ 5 pesetas a 3 mezes

5 pesetas a 3 mezes ◇ 892 réis á vista

da qual se tira $x = 751\$320$ réis

EXERCICIOS

I. Quanto deve receber em Lisboa um sujeito, a quem o seu correspondente do Rio de Janeiro remette 2 contos de réis fracos, suppondo que no Rio o cambio está a 252 a $30^d/_v$ (30 dias de vista) e que em Lisboa a taxa do desconto é 6 %?

II. Reduzir 1000 libras a réis ao cambio de $53\,^5/_{16}$.

III. Reduzir 245 libras, 6 shillings e 3 dinheiros a réis, ao cambio de $54\frac{1}{2}$.

IV. Reduzir 10 contos de réis a dinheiro esterlino, ao cambio de $53\frac{1}{2}$.

V. Reduzir 13:572$866 réis a dinheiro esterlino, ao cambio de 53.

VI. Que valor deve ter uma letra sobre o Porto comprada em Lisboa por 102$000 réis, quando o cambio em Lisboa está a 2 % a beneficio da letra?

VII. Reduzir 473,35 *florins* de Amsterdam a réis, ao cambio de $43\frac{1}{2}$ *florins* por 16$000 réis ($43\frac{1}{2}$ *grotes* ou dinheiros *grossos* por um cruzado).

VIII. Reduzir 723$415 réis a *marcos banco* de Hamburgo, ao cambio de $222\frac{1}{2}$ por *marco* (1 *marco banco* tem 16 shillings).

IX. Reduzir 4484 *florins* ou *guldens* e 20 *kreutzers* de Vienna a réis, ao cambio de 452 réis por 1 *florim* (cada *florim* ou *gulden* tem 60 *kreutzers*).

X. Calcular o cambio indirecto de Paris com Amsterdam por Londres e Hamburgo, estando o cambio de Paris com Londres a 25,30 francos por libra, o de Londres com Hamburgo a 12 *marcos banco* e 10 *shillings* por libra esterlina e o de Hamburgo com Amsterdam a 35 *florins* por 40 *marcos banco*.

XI. Um negociante de Lisboa deve a outro de Londres 1206 libras esterlinas. Em Lisboa o cambio sobre Londres está a $52\,^{13}/_{16}$ e o cambio sobre Hamburgo está a 223 réis por *marco*, e em Hamburgo o cambio sobre Londres está a 13 *marcos banco* e 8 *shillings* por libra esterlina. Qual é melhor *remetter* directamente para Londres, ou *remetter* para Hamburgo, dando ordem ao correspondente n'esta cidade para *remetter* para Londres?

XII. O cambio de Paris sobre Berlim está a 576 francos por 100 *thalers* ou *dollars* prussianos, o de Berlim sobre Hamburgo está a 152 *thalers* e 2 *silver groschen* (ou silbergros) por 300 *marcos banco*, e o de Hamburgo sobre Londres a 13 *marcos banco* e $10\frac{1}{4}$ *shillings* por libra esterlina. Quantos francos precisa gastar o negociante de Paris, que quizer remetter para Londres 1000 libras esterlinas, por via indirecta de Paris sobre Berlim, de Berlim sobre Hamburgo e de Hamburgo sobre Londres? (Cada *thaler* ou rixdale tem 30 *silver groschen* ou silbergros).

CAPITULO VI

Regra de companhia—Regra de mistura ou de liga Regra de falsa posição

560. *A* **regra de companhia** *ensina a dividir os lucros, ou perdas de uma sociedade, ou companhia, pelos seus associados.*

A divisão dos lucros ou perdas faz-se tomando por base os dois seguintes principios, geralmente admittidos na pratica do commercio: 1.° *Os lucros, ou perdas, são directamente proporcionaes ás entradas, isto é, aos capitaes com que os socios contribuiram, quando os tempos são iguaes;* 2.° *Os lucros, ou perdas, são directamente proporcionaes aos tempos, quando as entradas são iguaes.*

D'estes dois principios, inteiramente analogos aos que serviram de base á regra de juros (§ 509), se deduz (§ 472) o seguinte preceito para resolver qualquer questão de *regra de companhia*: *Os lucros, ou perdas, que competem aos socios de uma companhia, ou sociedade, são directamente proporcionaes aos productos das entradas dos socios pelos tempos correspondentes a essas entradas.*

561. A *regra de companhia* póde ser *simples*, ou *composta:* é *simples*, quando são iguaes as entradas de todos os socios, ou iguaes os tempos por que elles contribuiram; é *composta*, quando não são iguaes, nem as entradas, nem os tempos.

Na *regra de companhia simples* o lucro, ou perda, total de uma sociedade divide-se, ou *rateia-se* pelos socios proporcionalmente aos tempos, se as entradas são iguaes, e proporcionalmente ás entradas, se os tempos são iguaes; na *regra de companhia composta* o lucro, ou perda total da sociedade divide-se, ou *rateia-se*, pelos socios proporcionalmente aos productos das entradas pelos tempos.

A *regra de companhia*, ou seja simples ou composta, é pois uma applicação da regra das *divisões proporcionaes.*

Applicando esta regra (§ 374) ás questões *de regra de companhia*, acha-se que na regra de *companhia simples* é: *a somma das entradas dos socios, para o lucro ou perda da sociedade, assim como a entrada de qualquer d'elles, para o lucro, ou perda, que lhe corresponde*, quando os tempos são iguaes; e é *a somma dos tempos, para o lucro ou perda da sociedade, assim como o tempo de qualquer socio, para o lucro ou perda, que lhe corresponde*, se as entradas são iguaes. Applicando a mesma regra das *divisões propor-*

cionaes á regra de *companhia composta* tem-se: *a somma dos productos das entradas dos socios pelos tempos, está para o lucro ou perda da sociedade, assim como o producto da entrada de qualquer socio pelo seu tempo, está para o lucro, ou perda, do mesmo socio.*

As questões de regra de companhia, assim como todas as que dependem da regra de tres, podem tambem resolver-se pelo *methodo de reducção a unidade.*

562. **Problema.** *Tres sujeitos associaram-se para fundar uma fabrica, entrando um com 36 contos, outro com 45 e o terceiro com 27 contos. Aconteceu, porém, que, passados 4 annos, a fabrica teve de fechar, porque dava já 18 contos de prejuizo. Pergunta-se qual foi a perda, que teve de soffrer cada um dos socios.*

N'este exemplo os tempos são iguaes, porque os tres sujeitos entraram na mesma época com os seus capitaes e todos tres saíram na mesma occasião, quando as circumstancias obrigaram a fechar a fabrica. Trata-se, pois, de resolver uma questão de *regra de companhia simples*, no caso de serem iguaes os tempos.

A proporção que deve ser empregada é, portanto, a primeira das duas (§ 561) acima enunciadas.

Designando por x, y e z as perdas dos tres socios tem-se

$$\begin{aligned} 36+45+27 : 18 &:: 36 : x \\ &:: 45 : y \\ &:: 27 : z \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 6 : 1 &:: 36 : x \\ &:: 45 : y \\ &:: 27 : z \end{aligned}$$

Resolvendo cada uma das tres proporções, e advertindo que a unidade adoptada é 1:000$000 réis, vem

$x = 6{:}000\$000$ réis, $y = 7{:}500\$000$ réis e $z = 4{:}500\$000$ réis

Querendo empregar o *methodo de reducção a unidade*, na resolução d'este problema, é necessario calcular primeiro a perda, que soffreria um socio, que entrasse só com 1 conto de réis. Suppondo que, em vez de 3 socios entrando um com 36 contos, outro com 45 contos e outro com 27 contos, havia $36+45+27$ socios, concorrendo cada um com 1 conto de réis, é evidente que, sendo então iguaes os tempos e iguaes os capitaes, todos os socios deviam soffrer perdas iguaes e por consequencia que, se a perda da sociedade foi 18 contos, a perda de cada socio seria $\frac{18}{36+45+27}$ contos de réis. Multiplicando este quociente por 2, 3, 4, etc., tem-se a somma das perdas de 2, 3, 4, etc., socios, na hypothese de todos contribuirem com um conto, ou a perda de um unico socio, que tivesse contribuido com 2, 3, 4, etc. contos de réis.

Resulta do exposto que

$$x=\frac{18}{36+45+27}\times 36,\ y=\frac{18}{36+45+27}\times 45,\ z=\frac{18}{36+45+27}\times 27$$

563. **Problema.** *Seis mezes depois de dois sujeitos haverem encetado certa negociação, entrando cada um com* 6:500$000 *réis, foi admittido um terceiro socio, que tambem contribuiu com* 6:500$000 *réis, e* 8 *mezes depois da entrada d'este socio ainda foi admittido outro, com a condição de contribuir tembem com* 6:500$000 *réis. Dois annos depois de começar a empreza, quando pela primeira vez se encerraram as contas, resolveu-se repartir pelos quatro socios um* dividendo *de* 3:900$000 *réis, reservando-se o restante dos lucros para a continuação do negocio. Qual foi o lucro que tocou a cada um dos* 4 *socios?*

N'este exemplo as entradas são iguaes e os tempos são differentes, e por isso ainda se trata de uma *regra de companhia simples;* mas, a proporção, de que se deve fazer uso, é a segunda das que (§ 561) se enunciaram. Os dois primeiros socios têem comtudo lucros iguaes, porque entraram com iguaes capitaes por iguaes tempos. Designando por x o lucro de cada um dos dois primeiros socios, por y o lucro do terceiro e por z o do quarto, e advertindo que cada um dos dois primeiros socios teve o seu capital empregado na negociação por 2 annos, ou 24 mezes, que o terceiro só o teve por 24 — 6 ou 18 mezes e o quarto por 24 — 6 — 8 ou 10 mezes, ter-se-ha

$$\begin{aligned} 24+24+18+10 : 3900\$000 &:: 24 : x \\ &:: 18 : y \\ &:: 10 : z \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 19 : 975\$000 &:: 24 : x \\ &:: 18 : y \\ &:: 10 : z \end{aligned}$$

e effectuando as operações

$$x=1:231\$578\tfrac{18}{19},\ y=923\$684\tfrac{4}{19},\ z=513\$157\tfrac{17}{19}$$

Querendo empregar o *methodo de reducção a unidade* é necessario raciocinar, como se todos os socios entrassem com 6:500$000 réis por um só mez. É evidente que n'esse caso o lucro total de 24 socios, cada um dos quaes entrasse por 1 mez, seria igual ao lucro, que competiria ao socio unico, que contribuisse por 24 mezes com uma quantia igual á somma das contribuições dos 24 socios. Discorrendo do mesmo modo, para os outros socios, conclue-se que, se em vez de 4 socios, entrando 2 por 24 mezes cada um e os outros por 18 e por 10 mezes, se tivessem 24+24+18+10 entrando todos por 1 mez, e com iguaes capitaes, o lucro de cada um d'elles seria $\frac{3900\$000}{24+24+18+10}$. E, como a somma dos lucros de

24 d'estes socios é igual ao lucro de um só, que entrasse por 24 mezes com um capital igual á somma das entradas de todos aquelles, segue-se que

$$x=\frac{3900\$000}{24+24+18+10}\times 24,\ y=\frac{3900\$000}{24+24+18+10}\times 18,\ z=\frac{3900\$000}{24+24+18+10}\times 10$$

564. **Problema.** *Um negociante começou uma empreza com réis* 216$000, 8 *mezes depois associou-se-lhe outro, que entrou com réis* 3:348$000 *e* 14 *mezes depois da entrada d'este foi admittido um novo socio, que contribuiu com* 5:400$000 *réis. A empreza durou* 6 *annos, deixando por fim* 8:640$000 *réis de lucro para repartir pelos socios. Qual é a parte que pertence a cada socio?*

Trata-se agora de uma *regra de companhia composta*, porque não são iguaes, nem as entradas, nem os tempos.

O primeiro socio teve o capital empatado por 6 annos, ou 72 mezes, o segundo por 72 — 8, ou 64 mezes, e o terceiro por 72 — 8 — 14, ou 50 mezes.

Applicando a este caso a correspondente proporção (§ 561) tem-se

$$\begin{aligned} 216000\cdot 72+3348000\cdot 64+5400000\cdot 50 : 8640000 &:: 216000\cdot 72 : x \\ &:: 3348000\cdot 64 : y \\ &:: 5400000\cdot 50 : z \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 1157 : 20 :: 15552\$000 : x \qquad & x = 268\$833\tfrac{219}{1157} \\ :: 214272\$000 : y \qquad & y = 3:703\$923\tfrac{1089}{1157} \\ :: 270000\$000 : z \qquad & z = 4:667\$242\tfrac{1006}{1157} \end{aligned}$$

Para se applicar a este problema o *methodo de reducção a unidade* é necessario começar pela determinação do lucro, que competiria a um socio, que contribuisse com 1 real por 1 mez. Um socio que contribue com 216$000 réis por 72 mezes deve ter tanto de lucro, como 216:000 socios, que contribuem com 1 real por 72 mezes, ou como 216000×72 socios. cada um dos quaes tenha entrado com 1 real por 1 mez. Substituindo, pois, ao socio, que contribuiu com 216$000 réis por 72 mezes, 216000×72 socios contribuindo com 1 real por 1 mez, ao que contribue com réis 3:348$000 por 64 mezes, 3348000×64 socios contribuindo com 1 real por 1 mez e ao que entrou com 5:400$000 réis por 50 mezes, 5400000×50 socios contribuindo com 1 real por 1 mez, tem-se uma sociedade de 216000×72+3348000×64+5400000×50 socios, cada um dos quaes entrou com 1 real por 1 mez. Dividindo o lucro total da sociedade, 8:640$000 réis, por o numero total d'estes socios, tem-se o lucro do socio, que entrou com 1 real por 1 mez, isto é,

$$\frac{8640\$000}{216000\times 72+3348000\times 64+5400000\times 50}$$

Este quociente multiplicado por 216$000 réis dá o lucro do socio que pagou 216$000 rèis por um mez, e o producto resultante, sendo multiplicado por 72, dá o lucro do socio, que contribuiu com 216$000 réis por 72 mezes ou 6 annos. Raciocinando do mesmo modo sobre as entradas e tempos dos outros socios tem-se afinal

$$x = \frac{8640\$000 \times 216000 \times 72}{216000 \times 72 + 3348000 \times 64 + 5400000 \times 50}$$

$$y = \frac{8640\$000 \times 3348000 \times 64}{216000 \times 72 + 3348000 \times 64 + 5400000 \times 50}$$

$$z = \frac{8640\$000 \times 5400000 \times 50}{216000 \times 72 + 3348000 \times 64 + 5400000 \times 50}$$

565. *Chama-se em geral* **regra de liga** *ou* **de mistura** *á regra que ensina a resolver um dos dois seguintes problemas:* 1.º, *dadas as quantidades dos simples, ou as relações entre ellas, e os preços dos mesmos simples achar o preço do mixto;* 2.º, *dados os preços dos simples e o do mixto, achar as relações entre as quantidades dos simples, ou as mesmas quantidades.*

A *regra de liga* ou *de mistura* póde ser *directa* ou *inversa*. É *directa*, quando ensina a achar o preço do mixto, sendo dados os preços e as quantidades dos simples, ou os preços e as relações entre estas quantidades; é *inversa*, quando ensina a achar as relações entre as quantidades dos simples, ou estas mesmas quantidades, suppondo conhecidos os preços dos simples e o do mixto, ou os preços d'aquelles e d'este e a quantidade do mixto.

Distingue-se a *regra de liga* propriamente dita da *regra de mistura*, em que a primeira trata especialmente das *ligas*, isto é, das combinações chimicas de metaes, e a segunda trata de quaesquer misturas. A *regra de liga directa* propriamente dita ensina especialmente a achar o *toque*, ou *titulo* de uma porção de prata ou de oiro, que resultou da combinação de duas ou mais qualidades de prata ou de oiro, quando se conhecem os *toques*, ou *titulos* dos metaes combinados, e os pesos d'esses metaes, ou quando se conhecem os *toques* e as relações entre os pesos. A *regra de liga inversa* propriamente dita ensina especialmente a achar as relações entre os pesos de duas ou mais quantidades de prata ou de oiro, que se pretendem combinar, ou os proprios pesos, quando se dão os *toques* d'estes metaes e o da combinação, ou os *toques* dos simples e o do mixto e o peso d'este.

Nas questões de *regra de liga* chama-se, em geral, prata ou oiro á combinação chimica, ou *liga* da prata ou do oiro com outro metal, que ordinariamente é o cobre, cujo valor se reputa nullo em relação ao da prata ou do oiro.

A *regra de liga* propriamente dita não differe comtudo da *regra de mistura*, da qual póde reputar-se um caso particular, senão em se considerarem como preços os *toques* ou *titulos* dos metaes e como *valores* as quantidades de prata, ou de oiro puro contidas nas *ligas*.

566. A *regra de mistura* ou *de liga* funda-se nos seguintes principios: 1.º, *o valor da mistura é igual á somma dos valores dos simples, de que ella se compõe;* 2.º, *a quantidade* (em peso ou em volume) *da mistura é igual á somma das quantidades dos simples.* A *regra de mistura* não póde, portanto, applicar-se senão aos casos em que estas duas condições se realisarem.

567. Representando q a quantidade de um simples, isto é, o numero inteiro ou fraccionario de unidades de volume ou de peso, que entram n'elle, e p o preço do mesmo simples, ou o valor de cada unidade, será qp o valor das q unidades, ou partes da unidade.

Se a quantidade q designa o peso do simples, e se p é o *toque*, suppondo que o simples é uma liga de prata ou de oiro, o producto qp designará a quantidade de prata ou de oiro puro, que se contém no simples, ou o seu *valor*, visto que por hypothese o metal, com que está ligado o oiro ou a prata, não tem valor algum.

Designando q', q'', q''', etc., as quantidades de outros simples, p', p'', p''', etc., os seus preços, e P e Q o preço e a quantidade da mistura, será QP o valor da mistura, e $qp+q'p'+q''p''+$ etc., a somma dos valores dos simples. Suppondo que para estes simples se verificam os dois principios acima enunciados (§ 566), tem-se

$$QP = qp + q'p' + q''p'' + q'''p''' + \text{etc.}$$
$$Q = q + q' + q'' + q''' + \text{etc.}$$

Dividindo a primeira igualdade pela segunda, acha-se

$$P = \frac{qp + q'p' + q''p'' + q'''p''' + \text{etc.}}{q + q' + q'' + q''' + \text{etc.}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Por esta formula é facil calcular o preço P da mistura, quando forem conhecidas as quantidades q, q', q'', etc., dos simples e os seus preços p, p', p'', etc.

A traducção em linguagem vulgar da formula (1) dá a *regra de liga directa*, cujo enunciado é o seguinte: *O preço do mixto obtem-se multiplicando as quantidades dos simples referidas á mesma unidade pelos seus preços, e dividindo a somma d'estes productos pela somma das quantidades dos simples.*

568. Conhecendo, em vez das quantidades q, q', q'', etc., dos simples, outras quantidades a, a', a'', etc., que estejam com ellas n'uma relação constante, tambem se póde calcular o preço do mixto, se forem dados os preços dos simples. Designando r a relação constante, que por hypothese existe entre as quantidades q, q', q'', etc., e a, a', a'', etc., será

$$\frac{q}{a} = \frac{q'}{a'} = \frac{q''}{a''} = \text{etc.} = r \qquad \text{ou} \qquad q = ar,\ q' = a'r,\ q'' = a''r, \text{etc.}$$

e substituindo estes valores de q, q', q'', etc., na formula (1) acha-se

$$P=\frac{arp+a'rp'+a''rp''+\text{etc.}}{ar+a'r+a''r+\text{etc.}}=\frac{(ap+a'p'+a''p''+\text{etc.})r}{(a+a'+a''+\text{etc.})r}$$

e portanto
$$P=\frac{ap+a'p'+a''p''+\text{etc.}}{a+a'+a''+\text{etc.}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Fica assim demonstrado que o preço P do mixto não varia, quando ás quantidades dos simples se substituem outras, que estejam com ellas n'uma rasão constante.

569. **Problema.** *Tendo-se misturado* 84 *litros de vinho de* 90 *réis o litro, com* 108 *litros de* 125 *réis o litro e* 64 *litros de vinho de* 115 *réis o litro, a como ha de vender-se o litro da mistura, para que da venda não resulte vantagem nem prejuizo ao vendedor.*

N'este exemplo é

$$q=84^{l}\ q'=108^{l}\ q''=64^{l}\ p=90^{rs}\ p'=125^{rs}\ p''=115^{rs}$$

e portanto
$$\begin{array}{rl} qp= 84\times 90^{rs}= & 7\$560 \text{ réis} \\ q'p'=108\times 125^{rs}= & 13\$500 \ » \\ q''p''= 64\times 115^{rs}= & 7\$360 \ » \\ \hline qp+q'p'+q''p'' = & 28\$420 \text{ réis} \end{array}$$

$$q+q'+q''=256 \text{ litros}$$

e
$$P=\frac{28\$420 \text{ réis}}{256}=111\frac{4}{256} \text{ réis}$$

Logo o preço do mixto é $111\frac{1}{64}$ réis.

Achar-se-ia o mesmo preço do mixto, se, em vez de se misturarem 84 litros do primeiro vinho, 108 do segundo e 64 do terceiro, se misturassem, por exemplo, 42 litros do primeiro vinho, 54 do segundo e 32 do terceiro, visto que (§ 568) os tres ultimos numeros estão com os tres primeiros n'uma rasão constante.

570. **Problema.** *Tendo-se misturado* 4 *qualidades de café na rasão de* 2 *partes em peso da primeira, para* 3, 4 *e* 5 *partes em peso das outras tres qualidades, a como ha de vender-se o kilogramma da mistura, suppondo que os preços das quatro qualidades de café são respectivamente* 380 *réis o kilogramma,* 400 *réis,* 460 *e* 500 *réis?*

N'este exemplo não se dão os pesos das quantidades de café, que se misturam, mas sabe-se que é $a=2$, $a'=3$, $a''=4$, $a'''=5$ e $p=380^{rs}$, $p'=400^{rs}$, $p''=460^{rs}$, $p'''=500^{rs}$. Fazendo uso da formula (2) tem-se

$$\begin{array}{rl} ap=2\times 380^{rs}= & 760 \text{ réis} \\ a'p'=3\times 400^{rs}= & 1\$200 \ » \\ a''p''=4\times 460^{rs}= & 1\$840 \ » \\ a'''p'''=5\times 500^{rs}= & 2\$500 \ » \\ \hline ap+a'p'+a''p''+a'''p'''= & 6\$300 \text{ réis} \end{array}$$

$$a+a'+a''+a'''=14$$

$$P=\frac{6\$300 \text{ réis}}{14}=450 \text{ réis}$$

O preço da mistura das quatro qualidades de café é, pois, 450 réis o kilogramma.

571. **Problema.** *Suppondo que se fundiram juntamente* 11 *hectogrammas de oiro puro,* 18,3 *hectogrammas de oiro de* 875 *millesimos e* 14 *hectogrammas de oiro de* 708 *millesimos, qual será o* **toque** *ou* **titulo,** *com que fica a* **liga** *resultante?*

O peso de oiro puro contido na *liga*, que se pretende formar, comprehende as seguintes parcellas: 11 hectogrammas do primeiro simples, $18{,}3 \times 0{,}875$ hectogrammas do segundo simples e $14 \times 0{,}708$ hectogrammas do terceiro simples.

Dividindo a somma d'estas tres parcellas, isto é, o peso de oiro puro contido na liga, pelo peso total ($11 + 18{,}3 + 14$ hectogrammas) da mesma liga, tem-se o *toque*. O calculo póde dispor-se do seguinte modo:

$$\begin{array}{rl} qp = 11^{Hg} \times 1000 = 11000 & \text{hectogrammas} \\ q'p' = 18^{Hg},3 \times 875 = 16012{,}5 & \text{»} \\ q''p'' = 14^{Hg} \times 708 = 9912 & \text{»} \\ \hline qp + q'p' + q''p'' = 36924{,}5 & \text{hectogrammas} \\ q + q' + q'' = 43{,}3 & \text{hectogrammas} \end{array}$$

$$P = \frac{36924{,}5}{43{,}3} = 853$$

Logo o toque da *liga* é 853 millesimos.

N'este calculo fizeram-se 1000 vezes maiores os productos qp, $q'p'$, $q''p''$, e por isso P veiu 1000 vezes maior do que o seu verdadeiro valor, que é 0,853.

572. **Preço medio** *de duas ou mais mercadorias é o preço unico, que póde substituir-se a cada um dos preços d'essas mercadorias, de sorte que a somma dos seus valores se conserve a mesma.*

A somma $pq + p'q' + p''q'' +$ etc. dos valores das mercadorias, não devendo mudar de valor, quando cada um dos preços p, p', p'', etc. d'ellas se substitue pelo preço medio P, será

$$Pq + Pq' + Pq'' + \text{etc.} = pq + p'q' + p''q'' + \text{etc.}$$

e por consequencia $$P = \frac{pq + p'q' + p''q'' + \text{etc.}}{q + q' + q'' + \text{etc.}}$$

Chama-se medio a este preço, porque o seu valor é maior do que o menor de todos elles e menor que o maior. Com effeito, suppondo que p e p''' designam o menor e o maior dos quatro preços p, p', p'', p''', será evidentemente

$$\frac{pq + pq' + pq'' + pq'''}{q + q' + q'' + q'''} < \frac{pq + p'q' + p''q'' + p'''q'''}{q + q' + q'' + q'''} < \frac{p'''q + p'''q' + p'''q'' + p'''q'''}{q + q' + q'' + q'''}$$

Dividindo os dois termos do primeiro e ultimo quebrado por $q + q' + q'' + q'''$, e substituindo o segundo quebrado pelo seu va-

lor P, acha-se finalmente

$$p < P < p'''$$

que é o que se queria demonstrar[1].

A *regra de liga* póde, pois, servir para achar o preço medio de muitos simples, e por isso é tambem denominada *regra de preço medio*[2].

573. **Problema.** *Tendo-se comprado* 12 *contos de réis em inscripções a* $49\frac{3}{4}$ *por cento,* 10 *contos a* $51\frac{1}{2}$ *por cento e* 8 *contos a* 52,60, *qual foi o preço medio por que ficaram os* 30 *contos?*

12 contos a	49,75 %	importaram	(§ 536) em	12000$000 × 0,4975 =	5970$000
10 »	51,50	»	»	10000$000 × 0,5150 =	5150$000
8 »	52,60	»	»	8000$000 × 0,5260 =	4208$000
30 contos nominaes importaram em.....					15328$000

Logo 1 real nominal importou em $\frac{15328\$}{30000\$}$ ou 0,5109

O *preço medio*, n'este exemplo, é 0,5109, e os preços dos simples são 0,4975; 0,5150 e 0,5260. Estes preços representam os valores de 1 real em *inscripções*. As quantidades dos simples são

---

[1] Se as quantidades q, q', q'' etc. forem iguaes entre si, o preço medio será igual ao meio arithmetico (§ 230) de todos os preços. Não sendo iguaes entre si aquellas quantidades, ainda o preço medio será igual á media arithmetica dos preços, comtanto que cada uma das mercadorias se considere formada de outras do mesmo valor e que as quantidades de todas ellas sejam iguaes entre si. Substituindo por numeros inteiros as quantidades q, q', q'', etc., o que sempre é possivel (§ 568), tem-se

$$P = \frac{(p+p+p+\text{etc.})+(p'+p'+\text{etc.})+(p''+p''+p''+\text{etc.})+\text{etc.}}{(1+1+1+\text{etc.})+(1+1+\text{etc.})+(1+1+1+\text{etc.})+\text{etc.}}$$

e reconhece-se que o preço medio é expresso por um quebrado, no qual o numerador é a somma de todos os preços, iguaes ou desiguaes, das diversas mercadorias, depois de reduzidas as suas quantidades a serem iguaes, e o denominador é o numero das mesmas mercadorias.

[2] A *regra de vencimento medio*, ou *praso medio* não differe essencialmente da *regra de preço medio*, que na pratica se reduz á *regra de liga* ou *de mistura*. A *regra de vencimento medio*, ou *praso medio* ensina a achar o dia, em que devem ser pagas duas ou mais letras, que se vencem em dias differentes, de sorte que não haja prejuizo para quem as paga, nem para quem as recebe. Deduz-se esta regra procurando os valores actuaes (§ 523) das diversas letras e igualando a sua somma ao valor actual da letra unica de praso desconhecido. O calculo do valor actual da letra póde fazer-se empregando o *desconto por dentro* ou *racional*, ou o *desconto por fóra* ou *commercial*.

Sejam L, L', L'', etc. os valores nominaes das letras, t, t', t'', etc. o tempo que falta a cada uma para o seu vencimento referido ao anno, r a taxa reduzida do desconto, referida tambem ao anno, A, A', A'', etc. os valores actuaes das letras, e T o tempo que falta para o seu vencimento á letra unica, que ha de substituir todas as outras.

No caso do *desconto racional* ou valores actuaes das letras são $\frac{L}{1+rt}$, $\frac{L'}{1+rt'}$, $\frac{L''}{1+rt''}$, etc. $\frac{L+L'+L''+\text{etc.}}{1+rT}$ e portanto é

12:000$000 réis, 10:000$000 réis e 8:000$000 réis. Multiplicando estas quantidades pelos preços correspondentes, sommando os productos e dividindo a sua somma pela somma das quantidades dos simples, acha-se, com effeito, o *preço da mistura*, ou antes o *preço medio*.

574. Na *regra de liga inversa* não são conhecidas as quantidades dos simples, nem as relações entre ellas, porém conhecem-se os preços tanto dos simples, como do mixto.

Suppondo que ha só dois simples, cujas quantidades são x e x', ter-se-ha (§ 567)

$$P=\frac{px+p'x'}{x+x'} \quad \text{ou} \quad \frac{px+p'x'}{x+x'}=\frac{P}{1}$$

Multiplicando os consequentes d'esta proporção por a mesma quantidade, p' ou p, vem

$$\frac{px+p'x'}{p'x+p'x'}=\frac{P}{p'} \quad \text{ou} \quad \frac{px+p'x'}{px+px'}=\frac{P}{p}$$

e suppondo (§ 572) $\qquad p<P<p'$

$$\frac{L+L'+L''+\text{etc.}}{1+rT}=\frac{L}{1+rt}+\frac{L'}{1+rt'}+\frac{L''}{1+rt''}+\text{etc.}$$

e successivamente

$$L\left(1-\frac{1}{1+rt}\right)+L'\left(1-\frac{1}{1+rt'}\right)+L''\left(1-\frac{1}{1+rt''}\right)+\text{etc.}=$$
$$=\left(\frac{L}{1+rt}+\frac{L'}{1+rt'}+\frac{L''}{1+rt''}+\text{etc.}\right)rT$$

$$T=\frac{At+A't'+A''t''+\text{etc.}}{A+A'+A''+\text{etc.}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

No caso do *desconto commercial* os valores actuaes das letras são $L(1-rt)$, $L'(1-rt')$, $L''(1-rt'')$, etc. $(L+L'+L''+\text{etc.})(1-rT)$ e por consequencia é

$$(L+L'+L''+\text{etc.})(1-rT)=L(1-rt)+L'(1-rt')+L''(1-rt'')+\text{etc.}$$

ou $$(L+L'+L''+\text{etc.})T=Lt+L't'+L''t''+\text{etc.}$$

e $$T=\frac{Lt+L't'+L''t''+\text{etc.}}{L+L'+L''+\text{etc.}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Estas duas formulas (1 e 2) são analogas ás do *preço medio* (§ 567) comtanto que se considerem os prasos dos vencimentos como preços e como quantidades dos simples os valores actuaes das letras, ou os seus valores nominaes, segundo se empregar o desconto racional ou o commercial Na primeira das duas formulas o valor T do praso medio depende da taxa r, porque d'ella dependem os valores de A, A', A'', etc., na segunda o praso medio é independente de r.

Chama-se *regra de vencimento commum*, ou *praso commum* aquella que ensina a achar o valor nominal de uma letra unica, que se pretende substituir a diversas, suppondo conhecidos os dias de vencimento tanto d'aquella como d'estas e os valores nominaes das letras substituidas. É claro que, conforme se empregue o desconto racional, ou o commercial, assim se terá para valor nominal da letra unica

$$(A+A'+A''+\text{etc.})(1-rT) \quad \text{ou} \quad \frac{A+A'+A''+\text{etc.}}{1-rT}$$

será (§ 365) $\frac{(p'-p)x}{p'-P}=\frac{x+x'}{1}$ ou $\frac{(p'-p)x'}{P-p}=\frac{x+x'}{1}$

e consequentemente

$$\left.\begin{array}{l} p'-p : p'-P :: x+x' : x \\ p'-p : P-p :: x+x' : x' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

N'estas proporções $x+x'$ é a quantidade do mixto, x é a quantidade do simples de menor valor e x' é a quantidade do simples de maior valor. Enunciam-se as duas proporções dizendo: *a differença entre os preços dos simples, está para a differença entre o preço do mixto e o do simples de maior valor* (ou de menor valor), *assim como a quantidade do mixto está para a quantidade do simples de menor valor* (ou de maior valor).

575. Igualando os dois valores de $x+x'$ achados no § precedente tem-se

$$\frac{(p'-p)x}{p'-P}=\frac{(p'-p)x'}{P-p}$$

dividindo ambos os membros por $p'-p$ e alternando vem

$$x : x' :: p'-P : P-p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Logo *as quantidades de dois simples, que se misturam, estão na rasão inversa das differenças entre o preço do mixto e o de cada simples.* É n'esta proporção que consiste propriamente *a regra de liga inversa simples*, isto é, a *regra de liga inversa* no caso de serem sómente 2 os simples.

Conhecida por esta proporção (2) a relação entre as quantidades dos simples, que hão de ser misturados, bastará recorrer á regra das *divisões proporcionaes* (§ 374) para se obter o valor absoluto de cada uma d'ellas, quando se supponha conhecida a quantidade do mixto. Fazendo nas proporções (1) do numero antecedente $x+x'$ igual a qualquer numero, igual a 1 por exemplo, acham-se para x e x' dois numeros, cuja relação é igual á relação entre as quantidades dos simples.

576. **Problema.** *Em que proporção se deve misturar farinha de 580 réis o kilogramma com farinha de 510 réis o kilogramma, a fim de que a mistura se possa vender sem vantagem nem prejuizo, a 540 réis o kilogramma?*

Designando por x a quantidade, que ha de empregar-se da farinha de 580 réis e por x' a da farinha de 510 réis, tem-se (§ 575),

$$\frac{x}{x'}=\frac{540-510}{580-540} \quad \text{e portanto} \quad \frac{x}{x'}=\frac{3}{4}$$

Logo o peso da farinha de 580 réis deve estar para o da farinha de 510 réis na rasão de 3:4.

Na pratica dispõe-se a operação assim

$$\begin{array}{lll} 580 & & 540-510=30\ldots x \\ & 540 & \\ 510 & & 580-540=40\ldots x' \end{array}$$

Por meio da proporção (1), e fazendo $x+x'=1$, acha-se tambem

$$580-510:540-510::1:x \quad \text{ou} \quad 7:3::1:x \quad \text{e} \quad x=\frac{3}{7}$$

O valor de x' póde achar-se ou pela proporção

$$580-510:580-540::1:x' \quad \text{ou pela igualdade} \quad \frac{3}{7}+x'=1$$

Por qualquer dos modos acha-se

$$x'=\frac{4}{7}.$$

Se se tivesse feito $x+x'=7$ obtinha-se

$$x=3 \quad \text{e} \quad x'=4.$$

577. **Problema.** *Em que proporção se deve misturar vinho de 170 réis o litro com agua para que o preço medio da mistura seja 100 réis o litro?*

Este problema resolve-se como o anterior, com a differença, porém, de se poder suppor zero o preço da agua. Admittindo esta supposição, tem-se

$$\begin{array}{ccc} 170 & & 100-0=100\ldots x \\ & 100 & \\ 0 & & 170-100=\ 70\ldots x' \end{array}$$

Logo a relação do vinho para a agua deve ser 100:70 ou 10:7. A proporção (1) dá n'este exemplo

$$170-0:100-0::1:x \quad \text{ou} \quad x=\frac{10}{17}$$

e

$$x'=1-\frac{10}{17}=\frac{7}{17}$$

578. **Problema.** *Em que proporção se deve fundir prata de 916 millesimos com prata de 820 millesimos, para que a liga tenha 900 millesimos de toque?*

$$\begin{array}{ccc} 916 & & 900-820=80\ldots x \\ & 900 & \\ 820 & & 916-900=16\ldots x' \end{array}$$

Logo a prata de 916 deve estar para a de 820, na rasão de 80:16 ou de 5:1.

579. Quando ha mais de dois simples a *regra de liga, ou de mistura inversa* toma a denominação de *regra de liga composta.*

Um dos meios[1] de resolver as questões d'esta ordem consiste em formar, com todos os simples dados, diversas misturas parciaes

[1] Outro meio de resolver as questões de *regra de liga composta* consiste em formar, com todos os simples, duas misturas parciaes, tomando partes arbitrarias d'elles e compondo uma das misturas com os simples de preço menor que o preço do mixto e a outra com os simples de preço maior. Pela *regra de liga directa* acham-se os preços das duas misturas parciaes e com estes preços, e por meio da

todas de preço igual ao preço do mixto, contendo cada uma dois simples, um de preço maior que o mixto e outro de preço menor. Determinam-se pela *regra de liga inversa simples* as relações em que devem entrar os simples em cada mistura parcial e com estas misturas parciaes, tomadas em qualquer proporção, fórma-se afinal o mixto pedido.

É evidente que, sendo iguaes os preços de todas as misturas parciaes, qualquer que seja a proporção, em que ellas se combinem, sempre o preço da mistura resultante será igual ao das misturas parciaes.

D'este modo de resolver as questões de *regra de liga composta* resúlta, que todas ellas têem uma infinidade de soluções.

580. **Problema.** *Em que proporção se podem misturar simples dos preços* 720, 680, 540 *e* 230 *para com elles se formar um mixto de preço* 600?

A operação dispõe-se d'este modo

720		$600-230=370\ldots x=37t$
680		$600-540=\ 60\ldots x'=3t'$
	600	
540		$680-600=\ 80\ldots x''=4t'$
230		$720-600=120\ldots x'''=12t$

Com os simples dos preços 720 e 230 formou-se um composto de preço 600, que, segundo o processo (§ 575) anteriormente exposto, deve ser formado pela mistura dos simples tomados na rasão de 370:120 ou de 37:12. Com os simples dos preços 680 e 540 formou-se outro composto de preço 600, no qual os simples entram na rasão de 60:80 ou de 3:4. Misturando os dois compostos, cujos preços são 600, obtem-se evidentemente um mixto de preço 600, seja qual fôr a proporção, em que elles se misturem. Este mixto, em cuja composição entram os quatro simples dados, satisfaz evidentemente ao problema.

Tomando 37 partes do simples de preço 720 e 12 do de preço 230, obtêem-se $37+12$ partes do primeiro composto. Tomando 3 partes do simples de preço 680 e 4 do simples de preço 540, obtêem-se $3+4$ partes do segundo composto.

Multiplicando por qualquer numero t, inteiro ou fraccionario, a parte $37+12$ do primeiro composto, e por qualquer numero t' a parte $3+4$ do segundo composto, e juntando as porções dos ditos compostos representadas pelos productos $(37+12)t$ e $(3+4)t'$ obtem-se um mixto, que tambem satisfaz ás condições do problema. Suppondo, pois, que se tomam $37t+12t$ partes do primeiro

---

regra de liga inversa, determinam-se as porções, com que cada uma d'aquellas misturas deve contribuir para a formação do mixto pedido e finalmente decompõe-se cada uma d'essas porções em partes proporcionaes ás quantidades arbitrarias com que cada um dos simples entra na composição da sua mistura parcial.

composto e $3t'+4t'$ do segundo, tem-se afinal

$$x=37t \qquad x'=3t' \qquad x''=4t' \qquad x'''=12t$$

Fazendo t, por exemplo, igual a 3 e t' igual a 4, acha-se uma solução

$$x=111 \qquad x'=12 \qquad x''=16 \qquad x'''=36$$

Dando a t e t' quaesquer outros valores inteiros, ou fraccionarios, acham-se novas soluções.

Formando um composto dos simples de preços 720 e 540, e outro dos simples de preços 680 e 230, podem achar-se novas soluções do problema proposto.

Seja qual fôr o processo empregado[1], é facil verificar, se qualquer solução satisfaz, determinando pela *regra de liga directa* o preço do mixto (§ 567) correspondente a essa solução, e vendo se elle é effectivamente igual a 600.

581. **Problema.** *Um ourives precisa obter* 11,27 *hectogrammas de oiro de* 833 *millesimos, ligando oiro de* 625 *millesimos com oiro de* 708, 750 *e* 917 *millesimos. Que parte deve tomar de cada uma d'estas qualidades de oiro?*

A resolução d'este problema depende propriamente da *regra de liga inversa composta* e da regra das *divisões proporcionaes* (§ 374).

Pela primeira regra obtem-se a relação, em que devem estar as porções com que os simples hão de entrar na formação do mixto e pela segunda acham-se os valores absolutos das referidas porções.

Na applicação da *regra de liga* a este exemplo convém attender a que o mixto ha de formar-se de tres misturas parciaes, em cada uma das quaes tem de entrar o simples de toque 917 millesimos.

917 $\qquad (833-750)+(833-708)+(833-625)=83+125+208$

$$x=83t+125t'+52t''$$

833

750 $\qquad 917-833=84 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x'=84t$

708 $\qquad 917-833=84 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x''=84t'$

625 $\qquad 917-833=84 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x'''=21t''$

Vê-se, pois, que as quatro qualidades de oiro devem estar na rasão de

$$(83t+125t'+52t'') : 84t : 84t' : 21t''$$

---

[1] Tomando 2 partes, por exemplo, do simples de preço 720 e 3 do de preço 680 obtem-se uma mistura parcial com o preço 696. Tomando 3 partes do simples de preço 540 e 7 do de preço 230 tem-se outra mistura parcial com o preço 323. A relação em que devem juntar-se estas duas misturas para darem um mixto de preço 600 é 277:96. Decompondo 277 em partes proporcionaes a 2 e 3, e 96 em partes proporcionaes a 3 e 7, acha-se que um dos meios de formar a mistura pedida é tomando dos quatro simples partes iguaes, ou proporcionaes aos numeros 1108, 1662, 969 e 2261. Variando os numeros de partes dos simples, que entram em cada mistura parcial, acham-se novas soluções.

Designando, por q, q', q'', q''' as quantidades dos simples, ter-se-ha dividindo 11,27 hectogrammas em partes proporcionaes a x, x', x'' e x'''

$$(83t+125t'+52t'')+84t+84t'+21t'':11,27::(83t+125t'+52t''):q$$

ou $$(167t+209t'+73t''):11,27::(83t+125t'+52t''):q$$

Dando a t, t' e t'' quaesquer valores acha-se q. As outras quantidades q', q'' e q''' calculam-se por proporções analogas.

Obtem-se $q=6^{Hg},5261$, $q'=q''=2^{Hg},1084$, $q'''=0^{Hg},5271$, fazendo $t=t'=t''=1$.

582. *A* regra de falsa posição, *conhecida tambem pela denominação de* methodo das partes proporcionaes, *ensina a achar por intermedio de uma ou de duas hypotheses o numero desconhecido, que depois de sujeito a dadas operações produz um resultado conhecido.*

Arbitrando ao numero desconhecido um valor qualquer, e sujeitando esse valor ás operações a que tem de satisfazer o numero desconhecido, é facil verificar se o resultado das ditas operações coincide effectivamente com o resultado conhecido, ou não, e, portanto, se o valor arbitrado ao numero desconhecido é ou não verdadeiro.

O valor arbitrado ao numero desconhecido constitue evidentemente uma *hypothese*, que será *verdadeira*, ou *falsa* segundo fôr *verdadeiro*, ou *falso* o *resultado* das operações effectuadas sobre o valor do numero hypothetico.

É notavel, comtudo, que algumas vezes basta conhecer duas *hypotheses*, embora *falsas*, com os correspondentes *resultados*, ou mesmo uma só, para se poder determinar, por uma simples proporção, a *hypothese verdadeira*, isto é, o numero desconhecido.

583. A proporção empregada para se calcular a *verdadeira hypothese*, quando se conhecem duas *hypotheses falsas* com os *dois resultados falsos* correspondentes, é a seguinte[1].

A differença entre dois falsos resultados está para a differença entre as duas falsas hypotheses correspondentes assim como a diffe-

---

[1] Os problemas dependentes de *falsa posição* podem tambem resolver-se comparando os *erros* dos resultados com as hypotheses correspondentes.

O erro d'um resultado r póde existir, ou por ser r menor que o verdadeiro resultado R, ou por ser r maior que R. No primeiro caso tem-se um *erro por defeito* ou *por falta*, no segundo caso tem-se um *erro por excesso*. No calculo distinguem-se uns erros de outros affectando do signal $+$ os valores absolutos dos primeiros, e do signal $-$ os valores absolutos dos segundos. D'aqui provém chamarem-se *positivos* os erros por defeito e *negativos* os erros por excesso.

Admittindo isto tem-se

$$R=r+e$$

ou seja $r<R$ ou $r>R$, porque, se fôr $r>R$, o erro será $-e$ e a precedente igualdade reduzir-se-ha a

rença entre o verdadeiro resultado e um dos falsos está para a differença entre a verdadeira hypothese e a falsa hypothese correspondente ao ultimo falso resultado.

Esta proporção só é verdadeira, quando a *differença das hypotheses é directamente proporcional á differença dos resultados.* Com effeito, sendo h e h' duas *hypotheses falsas*, r e r' os *resultados falsos* correspondentes e H e R a *hypothese* e *resultado verdadeiros*, ter-se-ha

$$r-r' : h-h' :: R-r : H-h \quad \text{e} \quad \frac{h-h'}{r-r'}=\frac{H-h}{R-r}$$

Suppondo que varia sómente uma das hypothes h' com o correspondente resultado r' a rasão $(H-h):(R-r)$ será constante, isto é, o seu valor não mudará, embora variem h' e r', e portanto será tambem constante a rasão $(h-h'):(r-r')$, visto que é sempre igúal áquella. Logo sendo verdadeira a proporção, será (§ 470) $h-h'$ directamente proporcional a $r-r'$.

Inversamente, quando $r-r'$ fôr directamente proporcional a $h-h'$, a proporção $\frac{r-r'}{h-h'}=\frac{R-r}{H-h}$ será verdadeira.

584. A ultima proporção applica-se tambem, algumas vezes, a questões em que não é completamente verdadeira, porém então sómente póde servir para se calcular um valor mais, ou menos approximado de H.

Quando isto acontece, convém escolher para hypotheses dois numeros h e h', que não possam differir muito da quantidade desconhecida H.

Por este modo acha-se um valor H' pouco differente de H, ao qual corresponderá um resultado R' differente de R. Querendo um valor mais approximado de H, do que é H', emprega-se outra proporção, na qual as hypotheses serão H' e aquella das duas hypo-

---

$$R=r+(-e) \quad \text{ou} \quad R=r-e$$

Substituindo na igualdade

$$\frac{h-h'}{r-r'}=\frac{H-h}{R-r}$$

os valores $r=R-e$ $\quad r'=R-e'$, tem-se, pois

$$\frac{h-h'}{e'-e}=\frac{H-h}{e}$$

ou *a differença* $(h-h')$ *das hypotheses é directamente proporcional á differença invertida* $(e'-e)$ *dos erros tomados com os respectivos signaes.*

Na ultima igualdade o segundo membro representa a relação entre a differença de duas hypotheses, H e h, uma verdadeira e outra falsa, e a differença entre o erro e da segunda hypothese h e o erro zero da primeira hypothese H.

Resolvendo aquella igualdade, acha-se

$$H=\frac{e'h-eh'}{e'-e}$$

theses, h ou h', que se julgar mais proxima de H. Tem-se assim, por exemplo,

$$r-R' : h-H' :: R-r : H''-h \quad \text{ou} \quad \frac{r-R'}{h-H}=\frac{R-r}{H''-h}$$

e consequentemente um valor H'' de H mais approximado do verdadeiro H, do que era H'. Considerando H'' e o resultado correspondente R'' com uma nova *hypothese falsa* com o seu *falso resultado* ainda se póde obter um valor H''' mais proximo de H e assim successivamente.

Na pratica é conveniente escolher as duas hypotheses de modo que uma seja maior e outra menor que a verdadeira. Com esta precaução é facil apreciar o grau de approximação de um certo valor achado para H por meio dos algarismos communs a duas hypotheses, entre as quaes se comprehenda o verdadeiro valor de H.

585. **Problema.** *Tres negociantes ganharam* 31:293$000 *réis e repartiram este ganho, por fórma que o segundo teve* 243$000 *réis mais que o primeiro, e o terceiro mais* 351$000 *réis que os dois primeiros. Pergunta se qual foi o ganho de cada negociante?*

Se o ganho do primeiro fosse 1$000 réis, o do segundo seria 244$000 réis e o do terceiro 596$000 réis. A somma 841$000 réis differe do *verdadeiro resultado* 31:293$000 réis; logo é *falsa a hypothese* de ser 1$000 réis o ganho do primeiro negociante. Suppondo depois, que o ganho do primeiro foi 2$000 réis, acha-se que o resultado correspondente é 845$000 réis.

Ora é facil verificar, que n'este problema é *a differença das hypotheses proporcional á differença dos resultados*, porque

ao ganho	1$000	do 1.º	ao ganho	1$000 + 1$000	do 1.º
corresponde	1$000	do 2.º	corresponde	1$000 + 1$000	do 2.º
	+ 243$000			+ 243$000	
e	1$000	do 3.º	e	1$000 + 1$000	do 3.º
	+ 1$000			1$000 + 1$000	
	+ 243$000			+ 243$000	
	+ 351$000			+ 351$000	
ou	841$000			841$000 + 4$000	
				845$000	

logo, se d designar a differença das duas hypotheses, será $4 \times d$ a differença dos correspondentes resultados, e, portanto, qualquer que seja o valor de d, a differença d das hypotheses será directamente proporcional á differença $r-r'$ dos resultados, ou

$$845000-841000 : 31293000-841000 :: 2000-1000 : H-1000$$

Simplificando a proporção, e effectuando os calculos, obtem-se $H=7:614$000$ réis. Com este valor de H obtem-se promptamente os ganhos dos outros negociantes, isto é,

Ganho do primeiro negociante =	7:614$000 réis
Ganho do segundo negociante =	7:857$000 »
Ganho do terceiro negociante =	15:822$000 »
Ganho da sociedade =	31:293$000 réis

586. Quando *as hypotheses são directamente proporcionaes aos resultados*, póde resolver-se o problema, empregando *duas hypotheses*, ou *uma só*.

Continuando a suppor que h', h e H são duas hypotheses falsas e a hypothese verdadeira, e que r', r e R são os resultados correspondentes, ter-se-ha, no caso especial de serem as hypotheses proporcionaes aos resultados,

$$\frac{h}{r}=\frac{h'}{r'}=\frac{H}{R}$$

e portanto (§ 363)

$$\frac{h-h'}{r-r'}=\frac{h}{r} \quad \text{e} \quad \frac{H-h}{R-r}=\frac{h}{r}$$

ou

$$\frac{h-h'}{r-r'}=\frac{H-h}{R-r} \quad \text{e} \quad r-r':h-h'::R-r:H-h$$

Logo, no caso de serem as hypotheses proporcionaes aos resultados, póde tambem empregar-se esta ultima proporção (§ 583) para se resolver o problema.

É claro, porém, que, verificando-se uma tal proporcionalidade, o valor de H póde ser dado por uma só hypothese, empregando a proporção

$$\frac{h}{r}=\frac{H}{R} \quad \text{ou} \quad r:R::h:H$$

que se enuncia assim: *o falso resultado está para o verdadeiro, assim como a falsa hypothese está para a verdadeira.*

587. Diz-se que a *regra de falsa posição é simples*, quando a proporção, que a resolve, depende de uma só hypothese; e diz-se que a *regra de falsa posição é composta*, ou *dobrada*, quando a proporção, que se emprega, depende de duas hypotheses.

Todas as questões, que podem resolver-se pela *regra de falsa posição simples*, podem tambem ser resolvidas pela *regra de falsa posição composta;* as questões, porém, que podem ser resolvidas pela *regra de falsa posição composta*, nem sempre o são pela *simples*. É esta a rasão por que nem todas as arithmeticas tratam da *regra de falsa posição simples*.

Quando se sabe, que um certo problema depende da *regra de falsa posição*, é muito facil descobrir, se elle póde resolver-se por uma só *hypothese*, ou se é indispensavel empregar duas, porque sendo no primeiro caso $rH=Rh$, a hypothese $h=0$ produzirá um resultado r tambem nullo, e no segundo caso a mesma hypothese zero não dá resultado zero.

588. **Problema.** *Achar um numero tal que a sua metade, quinta parte e tres quartas partes reunidas dêem uma somma igual a* 899.

Para facilidade do calculo escolhe-se para hypothese um numero, que seja multiplo dos denominadores 2, 5 e 4. O menor numero, que satisfaz a esta condição, é 20. Tomando 20 para hypothese acha-se

hypothese	20
metade	10
quinta parte	4
tres quartas partes	15
resultado	29

N'este caso é manifestamente desnecessario empregar uma segunda hypothese, porque, se ella fosse, por exemplo 2×20, as tres parcellas, de que se compõe o resultado, duplicariam tambem, e por consequencia (§ 57) o proprio resultado viria dobrado.

Empregando a regra de *falsa posição simples* (§ 587), que n'este problema é sufficiente, tem-se

$$29 : 899 :: 20 : H$$

e effectuando as operações acha-se

$$H = 620$$

É facil verificar que o numero 620 satisfaz ás condições do problema.

589. **Problema.** *Decompor o numero* 372 *em tres partes, que estejam entre si nas mesmas rasões que os numeros* $1, \frac{1}{5}$ e $\frac{4}{7}$.

Este problema póde resolver-se pelas *divisões proporcionaes* (§ 374), porém, nenhuma difficuldade ha em o resolver pela *regra de falsa posição.*

A fim de evitar fracções toma-se para hypothese $5 \times 7 = 35$, ou um multiplo d'este producto, e calculam-se depois os numeros, que estão para 35, assim como $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{7}$ estão para 1.

hypothese	35
$1 : \frac{1}{5} :: 35 :$	7
$1 : \frac{4}{7} :: 35 :$	20
resultado	62

Reconhece-se, como no problema precedente, que uma só hypothese basta para o resolver, e, portanto, que é

$$62 : 372 :: 35 : H \quad \text{e} \quad H = 210$$

590. **Problema.** *A idade de um sujeito é actualmente quadrupla da de seu filho; ha 4 annos, porém, a idade do pae era sextupla da idade do filho. Quaes são as idades do pae e do filho?*

Seja por hypothese 5 o numero de annos, que actualmente tem

o filho. Admittindo esta hypothese, deve o pae ter actualmente 4×5 ou 20 annos, e por consequencia ha 4 annos, teria o pae $20 - 4$ annos, e o filho $5 - 4$ annos. Mas não é zero a differença $(4 \times 5 - 4) - 6(5 - 4)$, como devia ser, se effectivamente ha 4 annos o pae tivesse 6 vezes tantos annos, como o filho. Logo a hypothese de ter agora 5 annos o filho é falsa, e o resultado falso, que lhe corresponde é $(20 - 4) - 6(5 - 4)$ ou 10.

Suppondo que o filho tem actualmente 6 annos, acha-se, por um raciocinio analogo, o resultado $(4 \times 6 - 4) - 6(6 - 4)$ ou 8, que tambem é falso[1].

Comparando os dois resultados $(4 \times 5 - 4) - 6(5 - 4)$ e $(4 \times 6 - 4) - 6(6 - 4)$ com as hypotheses correspondentes 5 e 6, reconhece se sem difficuldade que as differenças das hypotheses variam na proporção das differenças dos resultados, mas que a uma hypothese maior corresponde um resultado menor; logo a proporção, que deve empregar-se, é a seguinte

$$10 - 8 : 6 - 5 :: 10 - 0 : H - 5$$

na qual zero representa o *verdadeiro resultado*.

Effectuando as operações acha-se $H = 10$.

EXERCICIOS

I. Um negociante fallido ficou devendo aos crédores 21:600$000 réis, porém, apuradas as contas, reconheceu-se, que os seus bens apenas chegavam a 7:200$000 réis. Pergunta-se, quanto tem a receber cada crédor, suppondo que são cinco os creditos, e que as suas importancias são iguaes a 1:200$000, 3:600$000, 8:000$000, 4:120$000 e 4:680$000 réis?

II. Um lavrador, precisando mandar abrir uma valla, procurou quatro empreiteiros, dos quaes o primeiro se comprometteu a fazer a obra em 30 dias, o segundo em 45 dias, o terceiro em 15, e o quarto em 20 dias. Em presença d'isto o lavrador resolveu-se a contratar a abertura da valla com os quatro empreiteiros, com a condição, porém, de que o primeiro havia de empregar metade dos seus operarios, o segundo a quarta parte, o terceiro todos, e o quarto um terço. Pergunta-se em quantos dias será aberta a valla?

III. Suppondo que em 32 grammas de agua salgada ha um gramma de sal, qual será a quantidade de agua doce, que deve juntar-se á agua salgada, para se poder encher 32 litros com agua que tenha apenas 1 por cento de sal?

IV. Um sujeito vende vinho a 140 réis a garrafa. Que porção de agua deverá misturar ao vinho para o poder vender a 100 réis a garrafa?

V. Em uma casa de pasto, que dá jantares de mesa redonda a 800 réis por cada homem e 700 réis por cada senhora, juntaram-se um dia ao jantar 25 pessoas,

---

[1] N'este exemplo ás hypotheses $h = 5$ e $h' = 6$ correspondem os erros $e = +10$ e $e' = +8$, logo a igualdade (§ 583 nota)

$$\frac{H - h}{e} = \frac{h - h'}{e' - e}$$

reduz-se a

$$\frac{H - 5}{10} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

ou

$$H = 10$$

entre homens e senhoras. Pergunta-se quantos eram os homens e quantas eram as senhoras, na hypothese de ser 19$300 réis a receita do dia?

VI. Um sujeito empregou 20:000$000 réis, parte a 5 % e parte a 7 %, e recebeu de juro no fim de 1 anno 1:160$000 réis. Pergunta-se qual foi o capital que empregou a 5 %, e qual o que empregou a 7 %?

VII. Dividir 128$000 réis por 3 pessoas, de modo que a segunda tenha o quadruplo do que tiver a primeira e a terceira duas vezes e um terço tanto, como o que tiverem as outras duas juntamente. Quanto tem cada pessoa a receber?

VIII. Uma sociedade de duas pessoas ganhou em certa negociação 650$000 réis. Pergunta-se, com quanto entrou cada socio, suppondo que a somma das entradas era 2:000$000 réis, e que um d'elles ganhou 130$000 mais que o outro?

IX. Tendo-se prata de 887 millesimos, de 920 e de 482 millesimos, que porções se devem tomar d'estas tres qualidades de prata, para se formar uma barra de 900 millesimos, que tenha 3,943 kilogrammas de peso?

X. O director de uma fabrica, em que trabalham 84 homens, 49 mulheres, e 35 rapazes, pretende gratificar os seus operarios com 1:080$000 réis, distribuidos proporcionalmente aos salarios, que elles recebem. Pergunta-se, qual é a gratificação, que compete a cada um d'elles, suppondo que o salario dos homens é 620 réis, o das mulheres 325 réis e o dos rapazes 200 réis?

APPENDICE

CAPITULO I

Systemas de numeração

591. Na Grecia, e em todas as nações antigas, era com as letras do alphabeto, que se escreviam os numeros.

Os gregos empregavam, porém, além das 24 letras minusculas do seu alphabeto, 3 signaes particulares para representarem os numeros 6, 90 e 900 do systema de numeração decimal. Com um d'esses 3 signaes e com as 8 primeiras letras do alphabeto grego escreviam os nove primeiros numeros inteiros, com outro signal e as 8 letras immediatas do alphabeto grego representavam as nove primeiras dezenas da unidade (10, 20, 30. . 90, e finalmente com o ultimo signal e as 8 letras restantes designavam as nove primeiras centenas da unidade (100, 200, 300... 900). Os primeiros nove milhares (1000, 2000, 3000... 9000) eram no systema de numeração grega representados pelos mesmos caracteres, que se empregavam na representação das nove primeiras unidades, acrescentando-lhes, comtudo, á direita de cada um, e um pouco mais abaixo, um pequeno traço vertical, ou a letra *iota*.

Com estes 36 differentes signaes escreviam os gregos todos os numeros inteiros até 10000 exclusivè, sem necessitarem para isso de dar aos signaes valores relativos, ou de posição. Assim, por exemplo, o numero 1872 podia ser escripto por qualquer dos seguintes modos $\alpha,\omega o\beta$, ou $\omega o\beta\alpha,$, ou $\beta o\omega\alpha,$, etc.

Para se poderem escrever quaesquer numeros inteiros, imaginou o celebre Apollonius (244 annos antes de Jesus Christo) uma serie de unidades crescendo de 10000 em 10000, e estabeleceu que o numero que representasse unidades de primeira ordem, isto é, unidades de menor grandeza, se escrevesse á direita do que representasse unidades de segunda ordem, o qual deveria tambem escrever-se á direita do numero, que representasse unidades de terceira ordem, e assim successivamente.

Com este artificio continuava cada letra a ter só um valor absoluto emquanto

não saísse do logar destinado ás unidades da ordem a que ella correspondia, porém começava a haver valores relativos, ou de posição, para a collecção de caracteres (4 ou menos) que representava unidades de ordem determinada. Entre duas collecções successivas collocava-se um ponto. A falta de uma d'estas collecções de caracteres era preenchida pelo signal Μυ. O numero 40321872, era pois escripto por qualquer dos seguintes modos, δ,λβ.α,ωοβ ou λδ,β.ωβοα,, etc., e o numero 4032000018720000, era escripto assim δ,λβ.Μυ.α,ωοβ.Μυ por exemplo.

Os gregos representavam os quebrados tambem por dois numeros inteiros, com a differença, porém, de escreverem os denominadores como se fossem expoentes aos quaes os numeradores estivessem elevados.

Quando o numerador do quebrado era α (ou 1), substituiam-no por um pequeno traço vertical posto á direita e um pouco acima do denominador. As expressões δ^{θ} e θ' correspondiam, pois, a $\frac{4}{9}$ e a $\frac{1}{9}$.

592. Os romanos empregavam principalmente as sete letras I, V, X, L, C, D, M, com que representavam 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, para escreverem os numeros inteiros. Em vez, porém, das letras D e M empregavam muitas vezes os signaes IↃ e CIↃ.

O numero escripto com duas d'aquellas letras era igual á somma dos numeros designados por ellas separadamente, quando a letra da direita tinha menor valor, que a da esquerda, e era igual á differença dos mesmos numeros no caso contrario.

No systema de numeração dos romanos as nove primeiras unidades eram representadas assim

I, II, III, IV (ou IIII), V, VI, VII, VIII, IX

as nove primeiras dezenas assim

X, XX, XXX, XL (ou XXXX), L, LX, LXX, LXXX, XC

e as nove primeiras centenas assim

C, CC, CCC, CD (ou CCCC), D (ou IↃ), DC, DCC, DCCC, DCCCC (ou CM)

Para representarem os productos do numero IↃ por 10, 100, 1000, etc., escreviam á direita de IↃ, um, dois, tres, etc., CC invertidos e para representarem os productos de CIↃ por 10, 100, 1000, etc., collocavam á direita de CIↃ, um, dois, tres, etc., CC invertidos e á esquerda igual numero de CC. Os numeros 5000, 50000, 500000, etc., eram, pois, escriptos assim IↃↃ, IↃↃↃ, IↃↃↃↃ, etc., e os numeros 10000, 100000, 1000000, etc., eram representados por este modo CCIↃↃ, CCCIↃↃↃ, CCCCIↃↃↃↃ, etc.

O producto de qualquer numero por 1000 indicava-se collocando por cima d'esse numero uma linha horisontal ou um I deitado. O numero 40000 era, portanto, representado por $\overline{\text{XL}}$, o numero 2537000 por $\overline{\text{MMDXXXVII}}$, etc.

593. Acredita-se geralmente, que foram os indios os primeiros, que empregaram caracteres especiaes ou *algarismos* na escripta dos numeros.

Dos indios passou o uso dos algarismos (no seculo IX) para os arabes, que mais tarde (no seculo XIII) o transmittiram á Europa. O systema de numeração usado pelos indios tinha por base 10. Segundo Montucla *(His-*

toire des mathématiques) poucos são os povos, que não fazem uso do systema de numeração decimal. Parece, comtudo, que alguns adoptaram [1] para bases dos seus systemas de numeração os numeros 2, 4 ou 5.

594. Todo o systema de numeração analogo ao decimal funda-se: 1.°, no emprego de um numero illimitado de unidades de diversas ordens, cada uma das quaes contém tantas de ordem immediatamente inferior, quantos são os algarismos empregados; 2.°, em que todo o algarismo escripto á esquerda de outro representa unidades de ordem immediatamente superior á ordem das unidades, a que se refere esse outro algarismo. Em todos estes systemas suppõe-se tambem, geralmente, que entre os algarismos ha um, denominado zero, sem valor algum, que serve sómente para dar a cada algarismo o seu valor relativo, ou de posição, quando faltam unidades de ordem inferior á maxima.

Nos systemas de numeração analogos ao decimal chama-se *base* ao numero de algarismos empregados. No systema *binario*, cuja *base* é 2, empregam-se apenas 2 algarismos, 0 e 1; no systema *ternario*, cuja *base* é 3, empregam-se 3 algarismos, 0, 1 e 2, e assim successivamente. Quando a base do systema é superior a 10, não bastam os algarismos do systema de numeração decimal. É necessario então inventar novos *algarismos*, ou novos signaes, que por commodidade, póde suppor-se, que são os proprios numeros do systema decimal encerrados dentro de parenthesis. No systema *duodecimal*, por exemplo, que é o que tem por *base* 12, são precisos mais dois algarismos, os quaes, segundo a convenção adoptada, se representarão assim (10) e (11).

Em todo o systema de numeração analogo ao decimal uma unidade de primeira ordem é representada por 1, uma unidade de segunda ordem é representada por 10, uma unidade de terceira ordem por 100, etc. O numero 10 representa, pois, a *base* de qualquer systema de numeração, ou elle seja *binario* ou *ternario*, etc.; quando, porém, se comparam systemas differentes, é necessario escrever as bases de todos elles n'um unico systema de numeração, que naturalmente é o decimal. É por este motivo que se escreve *systema de base* 12, não obstante representar-se n'este systema por 10 o numero de algarismos empregados.

As fracções analogas ás fracções decimaes podem tambem escrever-se á similhança dos numeros inteiros, seja qual fôr o systema de numeração, comtanto que se imaginem unidades successivamente menores que a unidade de primeira ordem, e variando na mesma rasão em que variam as unidades de ordem superior á primeira. A estas unidades de ordem inferior á primeira chamar-se-ha, posto que impropriamente, unidades decimaes de primeira, segunda, terceira, etc., ordem e ao numero em que ellas entram denominar-se-ha *numero decimal*. Suppondo que 314,25 representa um *numero decimal* escripto no systema de *base* 6, é evidente, que esse numero representa uma quantidade composta de 4 unidades de primeira ordem (4 metros por exemplo), 1 unidade de segunda ordem (ou 1 vez 6 metros), 3 unidades de terceira ordem, isto é, 3 vezes uma unidade de segunda ordem ou 3×6^2 unidades de primeira ordem, 2 unidades decimaes

[1] Montucla *(Histoire des mathématiques)* diz que os antigos chinezes empregaram o systema de base 2, que Aristoteles falla d'um povo, que parecia seguir o systema de base 4, e que perto do Senegal uma povoação de pretos, os Jalofs, usava do systema de base 5.

de primeira ordem, ou 2 vezes $\frac{1}{6}$ de uma unidade de primeira ordem, e 5 unidades decimaes de segunda ordem, isto é, 5 vezes $\frac{1}{6}$ de uma unidade decimal de primeira ordem ou 5 vezes $\frac{1}{6^2}$ de uma unidade de primeira ordem.

Todo o numero 314,25 escripto em um certo systema de *base* B, 6 por exemplo, póde considerar-se como um numero complexo composto de tantas partes (3, 1, 4, 2 e 5), quantos são os seus algarismos, e no qual cada uma d'ellas designa unidades B vezes maiores, que as unidades a que se refere a que lhe fica á direita. Basta, pois, saber effectuar as operações de complexos para se poderem effectuar, sem difficuldade, operações analogas sobre numeros escriptos em qualquer systema de numeração.

595. *Todo o numero inteiro, ou decimál é igual á somma dos algarismos da parte inteira multiplicados pelas potencias successivas da base do systema em que elle está escripto, mais a somma dos algarismos da parte decimal divididos pelas potencias successivas da base*, isto é,

$$6278{,}35 = 6B^3 + 2B^2 + 7B + 8 + \frac{3}{B} + \frac{5}{B^2}$$

designando B a *base* do systema de numeração.

O numero 6278,35 considerado como complexo póde escrever-se assim

$$6^{B^3}\ 2^{B^2}\ 7^{B}\ 8^{u}\ 3^{b}\ 5^{b^2}$$

sendo B^3, B^2, B, u, b, b^2, os signaes que designam as diversas unidades.

Reduzindo o numero complexo á infima especie, e advertindo que as unidades variam todas de B em B, tem-se

$$6B^5 + 2B^4 + 7B^3 + 8B^2 + 3B + 5$$

Com effeito, as 6 unidades de quarta ordem reduzidas a unidades de terceira ordem dão $6B$ unidades; que reunidas com as 2 de terceira ordem dão a somma $6B+2$. Reduzindo estas unidades de terceira ordem a unidades de segunda ordem e juntando-lhe 7 unidades de segunda ordem, acha-se $(6B+2)B+7$ unidades de segunda ordem ou $6B^2+2B+7$. Referindo esta somma a unidades de primeira ordem, e acrescentando-lhe 8 unidades de primeira ordem obtem-se $(6B^2+2B+7)B+8$ ou $6B^3+2B^2+7B+8$. Continuando com este raciocinio acha-se $6B^4+2B^3+7B^2+8B+3$ unidades decimaes de primeira ordem e depois $6B^5+2B^4+7B^3+8B^2+3B+5$ unidades decimaes de segunda ordem.

Reduzindo a ultima somma ás unidades designadas por a letra u, que são as de primeira ordem, e observando que a relação entre esta unidade e a unidade designada por b^2 é B^2, acha-se

$$(6B^5 + 2B^4 + 7B^3 + 8B^2 + 3B + 5) : B^2$$

ou

$$6B^3 + 2B^2 + 7B + 8 + \frac{3}{B} + \frac{5}{B^2}$$

que é o que se queria demonstrar.

596. O algarismo *zero* não é indispensavel, para se poderem escrever os numeros inteiros, em qualquer systema de numeração analogo ao decimal.

Quando, porém, se trata de escrever numeros decimaes não se póde, em geral, prescindir d'elle, isto é, de um signal sem valor algum, que sirva apenas para conservar aos outros algarismos os seus valores relativos. A suppressão do zero não póde, comtudo, fazer-se, sem crear um novo algarismo significativo para representar a *base* do systema.

Suppondo, por exemplo, que se pretende supprimir o zero no systema decimal, e imaginando que (10) é um novo algarismos significativo equivalente a $9+1$, ter-se-hão tambem $9+1$ algarismos, porém todos significativos, 1, 2, 3,... 8, 9, (10), para escrever os numeros inteiros.

Para passar do numero 5038 escripto no systema decimal com zero, para o numero correspondente escripto no systema decimal sem zero, é necessario advertir, que 5 unidades de quarta ordem n'aquelle systema representam 4 unidades de quarta ordem mais $9+1$ unidades de terceira ordem n'este systema, e como $9+1$ unidades são por convenção expressas pelo algarismo (10), segue-se que o numero 5038 deve ser escripto assim 4(10)38.

O numero 5006 do systema decimal corresponde no systema decimal sem zero a 49(10)6.

Esta decomposição de uma unidade em unidades de ordem inferior é inteiramente analoga á que se imagina na subtracção, quando algum dos algarismos do additivo é inferior ao seu correspondente no subtractivo.

Nos outros systemas de numeração a suppressão do zero faz-se de modo analogo.

Os numeros decimaes maiores que 1 podem tambem escrever-se sem zeros. O numero 65,043 do systema decimal, por exemplo, escrever-se-ha sem zero assim 64,(10)43.

Quando, porém, o numero decimal é inferior a 1, é impossivel prescindir do algarismo zero. Effectivamente n'estes numeros não ha unidades, que, decompondo-se em unidades de ordem inferior, sirvam para occupar os logares das unidades de primeira ordem e das de ordem decimal.

597. Problema. *Passar de um numero escripto no systema de base* 10 *para o numero correspondente em outro systema de numeração.*

Exemplo I. Seja 8423 o numero do systema decimal, que se pretende reduzir ao systema de base 12 ou $(11)+1$.

Considerando 8423 como um numero incomplexo, e reduzindo-o a complexo composto de partes, cada uma das quaes se refira a unidades 12 vezes maiores, que as unidades immediatamente inferiores,

$$\begin{array}{r|l} 8423 & 12 \\ \cline{2-2} 023 & 701 \\ \cline{2-2} 11 & 101 \\ \cline{2-2} & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 701 & 12 \\ \cline{2-2} 58 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 12 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}$$

acha-se que o numero dado contém 11 unidades de primeira ordem do systema duodecimal, 5 unidades de segunda ordem, 10 de terceira ordem e 4 de quarta ordem do mesmo systema. Considerando (10) e (11) como algarismos significativos, cujos valores absolutos são $9+1$ e $9+2$, tem-se

8423 no systema de base $10 = 4(10)5(11)$ no systema de base 12

Chega-se ao mesmo resultado reflectindo que, se a, b, c, etc. designarem os algarismos das unidades de primeira, segunda, terceira, etc. ordemno

systema duodecimal, será (§ 595)

$$8423 = a + b \cdot 12 + c \cdot 12^2 + d \cdot 12^3 + \text{etc.}$$

e por consequencia

$$8423 = (b + c \cdot 12 + d \cdot 12^2 + \text{etc.})\, 12 + a$$

e como o algarismo a deve ser menor que 12, segue-se que o seu valor será igual ao resto, que se obtiver dividindo 8423 por 12. Do mesmo modo se prova, que dividindo $701 = (c + d \cdot 12 + \text{etc.})\, 12 + b$ por 12, se obtem no resto o valor de b e no quociente incompleto um numero

$$58 = c + d \cdot 12 + \text{etc.}$$

que dividido por 12 dá no resto o algarismo c. Dividindo finalmente o quociente incompleto 4 da ultima divisão por 12 acha-se o resto 4, que evidentemente é igual ao algarismo d, e um quociente incompleto nullo. Logo o numero procurado tem só 4 algarismos, que são

$$d = 4,\ c = (10),\ b = 5,\ a = (11)$$

Exemplo II. Reduzir o numero 0,6875 do systema de base 10 ao systema de base 4.

Considerando 0,6875 como numero incomplexo, e reduzindo-o a complexo composto de partes, cujas unidades variem na rasão quadrupla, sendo a maior 4 vezes menor que a unidade de primeira ordem, tem-se

$$\begin{array}{r} 0{,}6875 \\ 4 \\ \hline 2{,}7500 \\ 4 \\ \hline 3{,}00 \end{array}$$

Logo o numero 0,6875 póde considerar-se composto de 2 unidades 4 vezes menores que a unidade de primeira ordem e de 3 unidades 4 vezes menores que esta, isto é, 0,6875 do systema da base 10 = 0,23 do systema de base 4.

Chega-se ao mesmo resultado reflectindo que, se a, b, etc., forem os algarismos do numero procurado, será (§ 595)

$$0{,}6875 = \frac{a}{4} + \frac{b}{4^2} + \frac{c}{4^3} + \text{etc.}$$

e, portanto,

$$0{,}6875 \times 4 \quad \text{ou} \quad 2{,}75 = a + \frac{b}{4} + \frac{c}{4^2} + \text{etc.}$$

Cada algarismo b, c, etc. deve ser menor que 4, logo $\frac{b}{4}$ é menor[1] que 1

[1] Suppondo que são 5, por exemplo os algarismos da parte decimal, isto é, que $0{,}6875 \times 4 = a + \frac{b}{4} + \frac{c}{4^2} + \frac{d}{4^3} + \frac{e}{4^4} + \frac{f}{4^5}$ ou $2{,}75 = a + \frac{b.4^4 + c.4^3 + d.4^2 + e.4 + f}{4^5}$ será o numerador d'este quebrado menor que o denominador, porque este representa 1 unidade de sexta ordem e aquelle um numero inteiro composto de 5 algarismos, e por consequencia menor que a dita unidade. Logo ter-se-ha forçosamente $2 = a$ e $0{,}75 = \frac{b.4^4 + c.4^3 + d.4^2 + e.4 + f}{4^5}$ ou $0{,}75 = \frac{b}{4} + \frac{c}{4^2} + \frac{d}{4^3} + \frac{e}{4^4} + \frac{f}{4^5}$.

e por conseguinte a igualdade precedente decompõe-se em

$$2 = a \quad \text{e} \quad 0{,}75 = \frac{b}{4} + \frac{c}{4^2} + \text{etc.}$$

Da ultima igualdade tira-se similhantemente

$$0{,}75 \times 4 \quad \text{ou} \quad 3 = b + \frac{c}{4} + \text{etc.}$$

a qual só póde ser satisfeita, sendo $b = 3$ e $c = 0$.

Vê-se, pois, que é $a = 2$ e $b = 3$, e por consequencia que 0,6875 é igual a $\frac{2}{4} + \frac{3}{4^2}$ ou 0,23 no systema de base 4.

598. **Problema.** *Passar de um numero escripto no systema de base B para o numero correspondente no systema de base* 10.

Exemplo I. Seja 28(10)53 o numero escripto no systema de base 12, que se quer reduzir á base 10.

Considerando o numero dado, como numero complexo composto de partes referidas a unidades, que variam de 12 em 12, e reduzindo-o á infima especie, obtem-se o numero pedido, comtanto que se escreva no systema decimal, tanto a base do systema em que está escripto o numero, como cada um dos seus algarismos. Effectuando as operações pelo modo abaixo indicado.

```
      2
     12
     ---
     24
    + 8
     ---
     32
     12
     ---
     64
    32
    ---
    384
   + 10
    ---
    394
     12
    ---
    788
   394
   ----
   4728
   + 5
   ----
   4733
     12
   ----
   9466
  4733
  -----
  56796
   + 3
  -----
  56799
```

reconhece-se que

28(10)53 no systema de base 12 = 56799 no systema de base 10

Exemplo II. Reduzir ao systema de base 10 o numero 0,006582 escripto no systema de base 9.

Considerando o numero dado como numero complexo, cujas unidades variam de 9 em 9, e reduzindo-o á infima especie para depois o referir á unidade de primeira ordem, que n'este exemplo é 9^6 vezes maior, que a unidade da infima especie, obtem-se primeiro 4853 unidades da infima especie, e por consequencia $\frac{4853}{9^6}$ ou $\frac{4853}{531441}$ unidades de primeira ordem.

Convertendo em dizima este ultimo quebrado, acha-se

0,006582 no systema de base 9 = 0,009132...no systema de base 10

599. **Problema.** *Passar de um numero escripto no systema de base B para o numero correspondente no systema de base B'.*

Por dois modos diversos se póde resolver este problema, ou determinando primeiro no systema de base 10 o numero correspondente ao numero dado e passando depois do numero achado, para o numero pedido, ou effectuando directamente a mudança de systema. N'este ultimo caso, porém, é preciso: 1.°, saber escrever no systema de base B' a base B e os algarismos do numero dado; 2.°, saber effectuar as operações de arithmetica sobre numeros escriptos no systema de base B'.

600. Basta conhecer os restos das divisões do algarismo das unidades de qualquer inteiro pela base B do seu systema, ou por algum dos submultiplos de B, para se terem immediatamente os restos das divisões do mesmo inteiro por aquelles divisores.

Attendendo só a esta consideração seria rasoavel reputar melhor entre dois systemas de numeração, aquelle cuja base admittisse mais divisores. Tratando-se, porem, de comparar dois systemas de numeração é necessario attender tambem á maior ou menor quantidade de algarismos com que deve ser escripto o mesmo numero em cada um d'elles.

Em geral, quanto maior é a base de um systema, isto é, quanto maior é o numero total de algarismos, que n'elle se empregam, menor é o numero de algarismos com que se escreve um numero dado. Assim o numero 1874 do systema decimal é representado por 11101010010 no systema de base 2, por 1102 no systema de base 12 e por 97(12) no systema de base 14. Não convém por consequencia adoptar, para base de um systema de numeração um numero muito grande, nem um numero muito pequeno.

Tem-se considerado o systema de base 12 preferivel ao systema decimal por dois motivos: 1.°, porque o numero 12 admitte mais divisores (2, 3, 4 e 6) do que 10, que só por 2 e por 5 é divisivel; 2.°, porque, differindo muito pouco entre si os numeros 12 e 10, pouca ou nenhuma differença poderá haver na quantidade de algarismos com que o mesmo numero deverá ser escripto n'um ou n'outro systema.

Por maiores, comtudo, que sejam as vantagens de um systema de numeração sobre o actualmente usado, seria extremamente difficil, senão impossivel, lutar contra habitos adquiridos de tão remota data a ponto de conseguir que todos deixassem esquecer o systema de numeração, a que estão habituados, para lhe substituir um outro, cujas vantagens serião desconhecidas para muitos.

CAPITULO II

Propriedades dos numeros. Indice periodico

601. Theorema. *Sendo* A *e* B *dois numeros primos entre si, os restos, que se obtêem dividindo* B *termos consecutivos de uma progressão arithmetica, cuja rasão é* A, *pelo divisor* B *são todos desiguaes entre si*[1].

Sejam (§ 336)

$$C,\ C+A,\ C+2A,\ldots\ C+mA,\ldots\ C+m'A,\ldots\ C+(B-1)A$$

B termos consecutivos de uma progressão arithmetica, na qual a rasão é um numero A primo com B. Quaesquer dois d'estes B termos, $C+mA$ e $C+m'A$ por exemplo, divididos por B dão restos desiguaes, porque, se elles fossem iguaes, seria (§ 81)

$$C+mA=BQ+R \qquad C+m'A=BQ'+R$$

designando Q e Q' os quocientes incompletos e R o resto commum ás duas divisões. Diminuindo a primeira igualdade da segunda, e tirando na igualdade resultante os factores communs A e B (§ 58), tem-se

$$(m'-m)A=B(Q'-Q)$$

D'esta igualdade resulta que B é divisor de $(m'-m)A$ e como, por hypothese, B é primo com A, segue-se (§ 143) que B é divisor de $(m'-m)$. Mas $(m'-m)$ não póde ser multiplo de B, porque é inferior a B, logo a ultima igualdade é impossivel, e por consequencia não podem haver dois restos iguaes.

A mesma demonstração é applicavel ao caso particular de ser $C=A$, isto é, ao caso dos termos da progressão serem A, $2A$, $3A,\ldots BA$.

602. Corollario I. *Sendo* A *e* B *dois numeros primos entre si, os restos, que se obtêem dividindo* B *termos consecutivos de uma progressão arithmetica, cuja rasão é* A, *pelo divisor* B *são todos os inteiros* 0, 1, 2, 3,... (B — 1) *inferiores a* B, *incluindo* 0.

Devendo ser desiguaes (§ 601) e menores que B os restos das B divisões e havendo sómente $(B-1)$ numeros inteiros inferiores a B, não contando 0, é evidente que cada um d'aquelles inteiros ha de ser resto de uma das divisões, e só de uma, e por consequencia que uma das B divisões ha de ter o resto nullo.

---

[1] *Sendo* D *o maximo divisor commum entre* A *e* B, *os restos que se obtêem dividindo* (B : D) *termos consecutivos de uma progressão arithmetica, cuja rasão é* A, *pelo divisor* B *são todos desiguaes.*

Fazendo $A=A'D$, $B=B'D$ e raciocinando sobre os B' termos em progressão

$$C,\ C+A,\ C+2A,\ldots\ C+nA,\ldots\ C+n'A,\ldots\ C+(B'-1)A$$

como se raciocinou sobre os B termos, quando se suppoz B primo com A, conclue-se que não podem dois termos $C+nA$ e $C+n'A$ divididos por B dar iguaes restos sem ser

$$(n'-n)A=B(Q'-Q) \quad \text{e} \quad (n'-n)A'=B'(Q'-Q)$$

Ora a ultima igualdade é absurda por ser B' primo com A' e superior aos numeros n' e n, logo os B' restos são effectivamente desiguaes entre si.

No caso particular de ser $C=A$ a divisão, que se faz sem resto, é evidentemente aquella em que o dividendo, BA, é o ultimo dos B termos. Vê-se, pois, que, *sendo* A *primo com* B, *os restos que se obtêem dividindo* A, 2A, 3A... (B — 1)A *por* B *são todos os inteiros* 1, 2, 2,... (B — 1) *inferiores a* B *com exclusão de* 0.

603. Corollario II. *Sendo* A *e* B *dois numeros primos entre si, ha tantos numeros primos com* B *em* B *termos consecutivos de uma progressão arithmetica, cuja rasão é* A, *quantos são os numeros primos com* B *e inferiores a* B.

Sendo $C+mA$ um termo da progressão primo com B, será

$$C+mA=BQ+R$$

e não poderá ser $R=0$, porque n'esse caso haverá entre B e $C+mA$ o maximo divisor commum B.

Mas o maximo divisor commum entre $C+mA$ e B é (§ 136) igual ao maximo divisor commum entre B e R, logo, quando $C+mA$ e B forem primos entre si, tambem serão primos entre si B e R e inversamente. A cada termo da progressão primo com B corresponde, pois, um resto R primo com B e inversamente, e, como não podem haver dois restos iguaes (§ 601), segue-se que são tantos os termos da progressão primos com B, quantos forem os restos primos com este numero.

O mesmo acontece, quando se suppõe $C=A$.

Suppondo que é $A=15$, $B=8$, $C=10$ a progressão reduzir-se-ha a

10; 25; 40; 55; 70; 85; 100; 115

e os restos a

2; 1; 0; 7; 6; 5; 4; 3

e verifica-se facilmente que a cada numero da primeira linha primo com 8 corresponde na segunda linha outro numero primo com 8 e vice-versa.

604. Theorema. *Sendo* A *e* B *dois numeros primos entre si, os restos, que se obtêem dividindo os termos consecutivos de uma progressão arithmetica, cuja rasão é* A, *pelo divisor* B, *reproduzem-se periodicamente de* B *em* B *divisões*[1].

Sendo $$C,\ C+A,\ C+2A,\ldots\ldots C+(B-1)A$$

B termos consecutivos de qualquer progressão arithmetica, serão

$$C+BA,\ C+A+BA,\ C+2A+BA,\ldots\ldots C+(B-1)A+BA$$

os B termos immediatos da mesma progressão, e como cada um d'estes é igual ao correspondente na linha anterior augmentado de BA, que é um multiplo de B, segue-se (§ 103) que dividindo por B dois termos correspondentes das duas series hão de achar-se restos iguaes.

Designando a somma $C+BA$ por C', a segunda serie de B termos reduz-se a

$$C',\ C'+A,\ C'+2A,\ldots\ldots C'+(B-1)A$$

e raciocinando sobre estes B termos, como se raciocinou sobre a primeira serie de B termos, reconhece-se que os restos tambem se reproduzem na pas-

---

[1] Sendo $A=A'D$, $B=B'D$, e D o maximo divisor commum entre A e B os restos reproduzir-se-hão periodicamente, porém de B' em B' divisões.

sagem da segunda serie de B termos para a terceira, e assim successivamente.

O mesmo acontece, quando se tem $C = A$.

Suppondo que é $A = 5$, $B = 8$, $C = 15$ tem-se

dividendos:	15;	20;	25;	30;	35;	40;	45;	50;	55;	60;	65;	70;	etc.	
restos:	7;	4;	1;	6;	3;	0;	5;	2;	7;	4;	1;	6;	etc.	

Sendo $A = 27$, $B = 8$, $C = 4$ tem-se

dividendos:	4;	31;	58;	85;	112;	139;	166;	193;	220;	247;	274;	etc.
restos:	4;	7;	2;	5;	0;	3;	6;	1;	4;	7;	2;	etc.

Finalmente fazendo $A = C = 19$, $B = 8$ tem-se

dividendos:	19;	38;	57;	76;	95;	114;	133;	152;	171;	190;	209;	etc.
restos:	3;	6;	1;	4;	7;	2;	5;	0;	3;	6;	1;	etc.

605. **Indice periodico** *de qualquer numero inteiro* N *é o numero, que designa quantos são os numeros primos com* N *inferiores a* N.

O indice periodico de 15 é 8, porque os numeros primos com 15 inferiores a 15 são 8, a saber, 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 e 14. Todos os outros inteiros menores que 15 têem com este numero o divisor commum 3 ou 5.

Representa-se abreviadamente o indice periodico de um numero escrevendo-o entre parenthesis, e precedendo este da letra grega φ. A expressão $\varphi(15)$, que se lê *phi de* 15, representa, pois, quantos são os numeros primos com 15 e inferiores a 15.

606. **Theorema.** *O indice periodico de qualquer numero primo é igual ao numero inteiro immediatamente inferior,* isto é,

$$\varphi(7) = 6 - 1$$

Com effeito, o maximo divisor commum entre qualquer numero primo P e outro numero inteiro N só póde ser P ou 1, visto que (§ 161) são estes os unicos divisores d'um numero primo P. Quando P e N têem o maximo divisor commum P, não é N inferior a P, mas multiplo de P, logo, quando N é inferior a P, o maximo divisor commum entre estes dois numeros é 1.

607 **Theorema.** *O indice periodico de qualquer potencia de numero primo é igual á potencia immediatamente inferior do numero primo multiplicada pelo numero immediatamente inferior ao mesmo numero primo,* isto é,

$$\varphi(5^s) = 5^{s-1} \times (5 - 1)$$

Todo o numero inteiro, que não fôr primo com 5^s, ou, em geral, com qualquer potencia de numero primo, é multiplo d'esse numero primo 5, porque o maximo divisor commum d'elle e da referida potencia só póde conter o dito factor primo 5 (§ 178). Logo desde 1 até 5^s inclusivamente ha só numeros primos com 5^s ou multiplos de 5. Excluindo da totalidade d'elles todos os multiplos de 5, restam, pois, os numeros primos com 5^s e inferiores a esta potencia.

Desde 1 até 5^s inclusivamente ha 5^{s-1} multiplos de 5 que são 5×1, 5×2, $5 \times 3 \ldots 5 \times 5^{s-1}$.

Diminuindo de 5^8, que representa quantos numeros inteiros ha desde 1 até 5^8 inclusivé, 5^{8-1}, que mostra quantos multiplos de 5 ha desde 1 até 5^8, tem-se pois

$$\varphi(5^8) = 5^8 - 5^{8-1} \quad \text{ou} \quad \varphi(5^8) = 5^{8-1} \times (5-1)$$

608. **Theorema.** *O indice periodico de um producto de dois factores primos entre si é igual ao producto dos indices periodicos d'esses factores*, isto é,

$$\varphi(A \cdot B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$$

suppondo que A e B representam numeros primos entre si.

Tomem-se dois numeros primos entre si, 8 e 15 por exemplo, e escrevam-se por ordem de grandeza, em quinze linhas horisontaes de oito numeros cada uma, todos os numeros inteiros desde 1 até $8 \times 15 = 120$, como abaixo se vê

1;	2;	3;	4;	5;	6;	7;	8
1.8+1;	1.8+2;	1.8+3;	1.8+4;	1.8+5;	1.8+6;	1.8+7;	2.8
2.8+1;	2.8+2;	2.8+3;	2.8+4;	2.8+5;	2.8+6;	2.8+7;	3.8
3.8+1;	3.8+2;	3.8+3;	3.8+4;	3.8+5;	3.8+6;	3.8+7;	4.8
4.8+1;	4.8+2;	4.8+3;	4.8+4;	4.8+5;	4.8+6;	4.8+7;	5.8
5.8+1;	5.8+2;	5.8+3;	5.8+4;	5.8+5;	5.8+6;	5.8+7;	6.8
6.8+1;	6.8+2;	6.8+3;	6.8+4;	6.8+5;	6.8+6;	6.8+7;	7.8
...	...	...	...	...	...	...	...
14.8+1;	14.8+2;	14.8+3;	14.8+4;	14.8+5;	14.8+6;	14.8+7;	15.8

Cada columna vertical d'este quadro contém 15 termos consecutivos d'uma progressão arithmetica, cuja rasão é um numero 8 primo com 15. Logo (§§ 603 e 605) ha em cada columna $\varphi(15)$ numeros primos com 15. O maximo divisor commum entre 8 e um numero qualquer do quadro é o mesmo (§ 136) para todos os numeros que com elle estão na mesma columna vertical. Logo em $\varphi(8)$ columnas todos os numeros são primos com 8, nas restantes columnas não ha numero algum que seja primo com 8.

Combinando estes dois resultados reconhece-se (§ 146) que ha no precedente quadro $\varphi(15) \times \varphi(8)$ numeros primos com 8×15 e portanto que é

$$\varphi(8 \times 15) = \varphi(8) \times \varphi(15)$$

609. **Corollario.** *O indice periodico de um producto de factores primos entre si dois a dois é igual ao producto dos indices periodicos d'esses factores*, isto é,

$$\varphi(A\,B\,C\,D\ldots) = \varphi(A) \cdot \varphi(B) \cdot \varphi(C) \cdot (D)\ldots$$

suppondo que A, B, C, $D\ldots$, representam numeros primos entre si dois a dois.

De serem A, B, C, D,... primos entre si dois a dois conclue-se que A é primo com B, com C, com D, etc., e portanto (§ 146) que A é primo com o producto $B\,C\,D\ldots$

Logo (§ 608) é

$$\varphi(A \times B\,C\,D\ldots) = \varphi(A) \cdot \varphi(B\,C\,D\ldots)$$

Sendo A, B, C, D, etc., primos entre si dois a dois, será B primo com os factores do producto $C\,D\ldots$ e portanto B primo com este producto e (§ 608)

$$\varphi(B \times C\,D\ldots) = \varphi(B) \cdot \varphi(C\,D\ldots)$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades, ou substituindo na primeira o valor de $\varphi(BCD\ldots)$ dado pela segunda, obtem-se

$$\varphi(ABCD\ldots)=\varphi(A)\cdot\varphi(B)\cdot\varphi(CD\ldots)$$

Finalmente continuando a discorrer do mesmo modo com $\varphi(CD\ldots)$ até não existir parenthesis com mais de um factor, acha-se a igualdade, que se queria demonstrar:

610. Theorema. *O indice periodico de qualquer numero inteiro obtem-se dividindo o numero pelo producto de todos os seus divisores primos e multiplicando o quociente pelo producto dos inteiros immediatamente inferiores aos mesmos divisores primos*, isto é,

$$\varphi(360)=\frac{360}{2.3.5}(2-1)(3-1)(5-1)$$

por serem 2, 3 e 5 os divisores primos de 360.

Decompondo 360 em factores primos obtem-se (§ 172) um producto $2^3\times3^2\times5$, cujos factores, 2^3, 3^2 e 5, são primos entre si dois a dois: 1.º, porque, sendo as suas raizes, 2 e 3 por exemplo, numeros primos absolutos, serão (§ 162) as mesmas raizes numeros primos entre si; 2.º, porque, sendo primos entre si estes numeros, quaesquer potencias d'elles, 2^3 e 3^2, serão tambem (§ 147) numeros primos entre si. Applicando, pois, ao producto $2^3\times3^2\times5$ o corollario anterior, vem

$$\varphi(2^3\times3^2\times5)=\varphi(2^3)\cdot\varphi(3^2)\cdot\varphi(5)$$

e applicando a cada factor d'este segundo membro os §§ 607 e 606

$$\varphi(2^3\times3^2\times5)=2^{3-1}\times(2-1)\cdot3^{2-1}\times(3-1)(5-1)$$

ou

$$\varphi(2^3\times3^2\times5)=\frac{2^3\cdot3^2}{2.3}(2-1)(3-1)(5-1)$$

e finalmente

$$\varphi(2^3\times3^2\times5)=\frac{2^3\cdot3^2\cdot5}{2.3.5}(2-1)(3-1)(5-1)$$

e

$$\varphi(360)=96$$

611. Theorema. *Sendo* A *e* B *numeros primos entre si, o resto, que se obtem dividindo a potencia* $A^{\varphi(B)}$ *de um d'elles pelo outro, é igual a* 1, isto é,

$$15^{\varphi(8)}=\text{multiplo de } 8+1 \qquad \text{ou} \qquad 8^{\varphi(15)}=\text{multiplo de } 15+1$$

suppondo que 8 e 15 são primos entre si.

Multiplicando 15 por um numero primo com 8 e inferior a 8, e dividindo o producto por 8, obtem-se necessariamente para resto um numero tambem primo com 8 e inferior a 8. Tome-se, por exemplo, o numero 7 inferior a 8 e primo com 8. O producto 7×15 é primo com 8, porque (§ 146) cada um dos seus factores o é, logo 7×15 não é divisivel por 8. Designando Q e R o quociente incompleto e o resto da divisão de 7×15 por 8, será

$$7\times15=8Q+R$$

e como 7×15 e 8 são primos entre si, segue-se (§§ 131 e 136) que 8 e R tambem serão primos entre si.

Dividindo por 8 os productos 1.15, 3.15, 5.15, 7.15 de 15 por cada um

dos numeros primos com 8 e inferiores a 8, obtêem-se, pois, restos, que são tambem primos com 8 e inferiores a 8, e, como entre estes restos não pódem haver dois iguaes, porque então tambem haveria restos iguaes (§ 601) nas divisões de 1.15, 2.15, 3.15, 4.15,... 7.15, por 8, segue-se que os referidos restos hão de ser todos os numeros primos com 8 e inferiores a 8. Effectuando as divisões, acha-se

$$1 \cdot 15 = \text{multiplo de } 8+7$$
$$3 \cdot 15 = \text{multiplo de } 8+5$$
$$5 \cdot 15 = \text{multiplo de } 8+3$$
$$7 \cdot 15 = \text{multiplo de } 8+1$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades, e advertindo que o resto da divisão de um producto por qualquer inteiro 8 não muda de valor (§ 107), quando aos seus factores se subtrahem multiplos do divisor, tem-se (§ 58)

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\,(15^4 - 1) = \text{multiplo de } 8$$

O primeiro membro é divisivel por 8, e como 8, por ser primo com os factores do producto 1.3.5.7, é primo (§ 146) com o producto, segue-se (§ 143) que 8 divide $15^4 - 1$. Logo

$$15^{\varphi(8)} - 1 = \text{multiplo de } 8$$

visto que o expoente 4 indica o numero de divisões, ou o numero de numeros primos com 8 e inferiores a 8. Quando B é primo absoluto tem-se o theorema de Fermat.

612. **Escholio.** Não sendo A e B primos entre si, não ha potencia alguma de A, que dividida por B dê 1 de resto. Com effeito, suppondo que fosse

$$A^m = \text{multiplo de } B+1$$

todo o numero que dividisse A e B seria divisor commum de A^m e de B, e por consequencia dividiria (§ 136) o resto 1.

613. **Theorema.** *Sendo* A *e* B *numeros primos entre si ha uma infinidade de potencias de* A *que divididas por* B *dão o resto* 1, *e os expoentes de todas ellas são multiplos do menor d'elles.*

Está demonstrado já (§ 611) que sendo A e B primos entre si, ha uma potencia de A que dividida por B dá o resto 1 e sabe-se tambem já (§ 109) que, havendo uma potencia de A que satisfaça áquella condição, uma infinidade de outras potencias de A satisfará á mesma condição.

Sejam A^m e A^n duas das potencias de A que divididas por B dão o resto 1 e, suppondo-se que é $m > n$, seja $m = nq + r$. Será (§§ 72 e 109)

$$A^{nq} = (A^n)^q = (\text{multiplo de } B+1)^q = \text{multiplo de } B+1$$

e portanto (§ 70)

$$A^m = A^{nq+r} = (\text{multiplo de } B+1)\,A^r = \text{multiplo de } B + A^r$$

Mas por hypothese é tambem

$$A^m = \text{multiplo de } B+1$$

Logo tem-se afinal

$$\text{multiplo de } B+1 = \text{multiplo de } B + A^r$$

ou (§ 103)

$$A^r = \text{multiplo de } B + 1$$

Portanto, se duas potencias, A^m e A^n, de A, divididas por B derem o resto 1, e se a divisão do maior dos expoentes m pelo menor n der um resto r, haverá uma potencia A^r inferior a A^n que tambem dará o resto 1, se fôr dividida por B. É, pois, necessario, que a divisão de m por n dê o resto nullo para A^n ser a menor das potencias de A que divididas por B dão 1 de resto. Não se pense, porém, que é sufficiente que m seja divisivel por n para se poder concluir que A^n é a menor de todas as potencias de A, que dão aquelle resto.

É comtudo certo que, se A^n fôr a menor d'essas potencias, todas as outras potencias de A, que derem o mesmo resto divididas por B, terão expoentes multiplos de n.

614. **Corollario.** Depois do que se demonstrou nos §§ 612 e 613 é evidente que, se A e B forem numeros primos entre si, $\varphi(B)$ é ou o expoente da menor potencia de A, que dividida por B dá o resto 1, ou um dos multiplos d'esse menor expoente.

615. **Indice periodico** *de um inteiro* B **relativamente** *a outro inteiro* A *é o expoente da menor potencia de* A *que dividida por* B *dá o resto* 1.

N'esta definição não póde deixar de suppor-se (§ 612) que A e B são numeros primos entre si. O indice periodico de B relativamente a A é igual a $\varphi(B)$, ou a um dos divisores de $\varphi(B)$.

O indice periodico de 8 relativamente a 15 é 2, porque 15^2 é a menor potencia de 15, que dividida por 8 dá o resto 1. E 2 é divisor de $\varphi(8) = 4$.

O indice periodico de 12 relativamente a 25 é 1, e 1 é divisor de $\varphi(12) = 4$.

O indice periodico de 7 relativamente a 10 é 6, e é $6 = \varphi(7)$.

616. **Theorema.** *Dividindo por* B *os termos consecutivos de qualquer progressão geometrica, que tenha por primeiro termo um numero* C *primo com o divisor* B, *acha-se uma serie de restos, dos quaes os primeiros são desiguaes entre si e differentes de zero e os seguintes formam periodos que se reproduzem indefinidamente. Decompondo o divisor* B *em dois factores* α *e* β, *taes que o primeiro,* α, *contenha todos os factores primos de* B, *que entram na rasão* A *da progressão e o segundo,* β, *todos os factores primos de* B, *que não entram em* A, *será o numero de restos desiguaes igual ao expoente da menor potencia de* A *divisivel por* α *e o numero de restos de cada periodo igual ao indice periodico de* β *relativamente a* A.

Com effeito, se um termo CA^m da progressão fôr divisivel por B, será

$$CA^m = BQ = \alpha\beta Q$$

e, não suppondo $\beta = 1$, esta igualdade é absurda, pois que β, sendo primo com C e com A, é primo (§§ 147 e 146) tambem com CA^m.

Logo, quando o divisor B contem factores primos, que não entram na rasão A da progressão, nenhum dos restos é nullo.

Existindo todos os factores primos de α em A necessariamente as potencias de A de certo grau em diante serão divisiveis por α. Seja m o expoente da menor d'essas potencias. Os restos resultantes da divisão dos termos

$$C,\ CA,\ CA^2, \ldots CA^k, \ldots CA^{k'}, \ldots CA^{m-1}$$

por B serão todos differentes de zero e desiguaes entre si. Porque, se um dos restos fosse nullo, seria por exemplo

$$CA^k = BQ = \alpha \beta Q$$

e, como α é primo com C, α dividiria A^k, deixando portanto de ser A^m a menor potencia de A divisivel por α; e, se dois restos fossem iguaes, seria

$$CA^k = \alpha \beta Q + R \qquad CA^{k'} = \alpha \beta Q' + R$$

e por consequencia $\quad C(A^{k'} - A^k) = \alpha \beta (Q' - Q)$

ou $\quad CA^k(A^{k'-k} - 1) = \alpha \beta (Q' - Q)$

e como α é primo com $A^{k'-k} - 1$, porque todos os factores primos de α entram em $A^{k'-k}$, e é tambem primo com C, a ultima igualdade somente seria verdadeira, quando α fosse divisor de A^k, isto é, quando A^m deixasse de ser a menor potencia de A divisivel por α.

Logo, *se fôr* A^m *a menor poteneia de* A *divisivel por* α, *os* m *restos que se obtêem dividindo por* B *os termos* C, CA, $CA^2, \ldots CA^{m-1}$ *serão todos differentes de zero e desiguaes entre si.*

Continuando a dividir por B os termos seguintes

$$CA^m,\ CA^{m+1},\ CA^{m+2}, \ldots\ CA^{m+n}, \ldots\ CA^{m+n'}, \ldots$$

da progressão geometrica, obtem-se uma serie de restos, que se reproduzem periodicamente.

Com effeito, suppondo que são iguaes os restos correspondentes aos termos CA^{m+n} e $CA^{m+n'}$

será $\quad C(A^{m+n'} - A^{m+n}) = \alpha \beta (Q'_1 - Q_1)$

ou $\quad CA^{m+n}(A^{n'-n} - 1) = \alpha \beta (Q'_1 - Q_1)$

e, como β é primo com C e com A, é necessario, para que se verifique esta igualdade, que β divida $A^{n'-n} - 1$ ou que seja

$$A^{n'-n} = \text{multiplo de } \beta + 1$$

Depois do que se demonstrou (§ 613) ha uma infinidade de valores de $n' - n$ que satisfazem a esta igualdade e todos elles são multiplos do menor, que é (§ 615) o indice periodico de β relativamente a A. Designando por p este indice periodico, serão iguaes os restos das divisões por B de CA^{m+n}, CA^{m+n+p}, CA^{m+n+2p}, etc., qualquer que seja o valor de n, comtanto que m designe o expoente da menor potencia de A divisivel por α e p o indice periodico de β relativamente a A. Em particular fazendo $n = 0$, serão iguaes os restos das divisões por B de

$$CA^m,\ CA^{m+p},\ CA^{m+2p}, \text{ etc.}$$

É evidente que em cada um dos periodos haverá p restos.

617. Corollario I. *Dividindo por* B *os termos consecutivos de uma progressão geometrica, que tenha por primeiro termo um numero* C *primo com o divisor* B *e na qual todos os factores primos de* B *entram na rasão* A *da progressão, acha-se uma serie de restos dos quaes os primeiros são differentes de zero e desiguaes entre si e os seguintes são todos nullos. O numero de restos desiguaes e differentes de zero é igual ao expoente da menor potencia de* A *divisivel por* B.

Quando todos os factores primos de B entram em A é (§ 616) $\beta = 1$ e por consequencia $B = \alpha$ e é tambem $p = 1$, pois que todas as potencias de 1

divididas por B dão 1 de resto. E sendo A^m a menor potencia de A divisivel por $\alpha = B$, serão nullos os restos das divisões de CA^m, CA^{m+1}, CA^{m+2}, etc. por B.

618. **Corollario II.** *Dividindo por* B *os termos consecutivos de uma progressão geometrica, que tenha por primeiro termo um numero* C *primo com o divisor* B *e na qual nenhum dos factores primos de* B *entre na rasão* A *da progressão, acha-se uma serie de restos, que se reproduzem periodicamente de* p *em* p *divisões, designando* p *o indice periodico de* B *relativamente a* A.

Quando nenhum dos factores primos de B entra em A é (§ 616) $\alpha = 1$ e $B = \beta$ e, como a menor potencia de A divisivel por 1 é a que tem por expoente zero (§ 100), segue-se que o primeiro resto, isto é, o resto da divisão de C por B, é um termo do primeiro periodo de restos.

619. Converter um quebrado irreductivel $\frac{C}{B}$ em dizima é decompol-o em uma somma de quebrados, cujos denominadores sejam as potencias successivas de 10. Os numeradores d'estas fracções serão iguaes ou desiguaes, conforme forem iguaes ou desiguaes os restos das divisões, de que elles são quocientes incompletos, e os restos d'essas divisões são (§ 235) iguaes aos que resultam da divisão de C, $10C$, 10^2C, 10^3C, etc., por B. Suppondo, pois, $A = 10$ nos §§ 616 a 618 têm-se: 1.° *todo o quebrado irreductivel, cujo denominador* B *admitte alguns dos divisores primos de* 10 *conjunctamente com outros, produz uma dizima periodica mixta, na qual a parte não periodica consta de tantos algarismos, quantas são as unidades do expoente da menor potencia de* 10 *divisivel por o denominador* B, *depois de se lhe haverem extrahido os factores primos differentes de* 2 *e* 5, *e o numero de algarismos de cada periodo é igual ao indice periodico relativamente a* 10 *do denominador* B *privado dos factores primos* 2 *e* 5; 2.° *todo o quebrado irreductivel, cujo denominador* B *só admitte os divisores primos* 2 *e* 5 *produz uma dizima limitada, na qual o numero de algarismos é igual ao expoente da menor potencia de* 10 *divisivel pelo denominador* B *do quebrado;* 3.° *todo o quebrado irreductivel, cujo denominador* B *é primo com* 10, *produz uma dizima periodica simples, da qual o numero de algarismos de cada periodo é igual ao indice periodico do denominador* B *relativamente a* 10.

CAPITULO III

Approximações numericas

620. Na pratica das operações da arithmetica raras vezes se encontram numeros, que possam reputar-se absolutamente isentos de erro. Estes erros podem provir ou da imperfeição dos meios de medir e observar as grandezas, que têem de sujeitar-se ao calculo, ou da necessidade de substituir por numeros commensuraveis os que o não são.

Convêm, pois, saber resolver os dois seguintes problemas: 1.° calcular o maximo erro que póde affectar o resultado de certas operações, quando são conhecidos os maximos erros, que poderão envolver os numeros de que elle depende; 2.° determinar os maximos erros que podem admittir-se nos numeros, de que depende um certo resultado, quando previamente se fixa o maximo erro que póde ter o mesmo resultado.

621. O *erro* de um numero póde ser *absoluto* ou *relativo*.

Erro absoluto *é a differença entre o valor exacto do numero e o valor ap-*

proximado. O erro absoluto póde ser *por defeito* ou *por falta*, e *por excesso*. É *por defeito*, quando o valor approximado do numero é menor que o exacto, e é *por excesso*, quando o valor approximado excede o numero exacto.

Distingue-se no calculo o *erro por defeito* do *erro por excesso* affectando o primeiro, por exemplo, do signal + e o segundo do signal —. Adoptando esta convenção dir-se-ha que o *erro por defeito* é *positivo* e o erro por excesso é *negativo*.

Erro relativo *de um numero é o quociente, que resulta da divisão do erro absoluto pelo valor exacto do numero*. O *erro relativo* será tambem *positivo* ou *negativo*, segundo fôr positivo ou negativo o erro absoluto.

É pelo erro relativo, que principalmente se aprecia o grau de exactidão, ou antes de approximação, de um numero dado.

Duas distancias, na medição das quaes se commetteu um erro de 3 decimetros, envolvem o mesmo erro absoluto; deixarão, porém, de envolver o mesmo erro relativo, se forem differentes. Assim, se o valor exacto da primeira fôr 5 metros e o da segunda 5 kilometros, serão $\frac{3}{50}$ e $\frac{3}{50000}$ os erros relativos. E ninguem duvidará de que, não obstante terem ambas o mesmo erro absoluto, a segunda está medida com muito maior approximação do que a primeira.

622. Geralmente não se conhecem com exactidão os erros dos numeros, que entram nos calculos, e sómente se suppõem dados numeros superiores a elles, que se tomam como *limites*[1] *dos erros*.

Toma-se geralmente para limite do erro absoluto de um numero uma, ou meia, unidade inteira, ou decimal, maior que o dito erro.

Sendo 76584325 um numero exacto, será 76584000 um valor approximado d'aquelle numero, com um erro por defeito inferior a 1 unidade de quarta ordem ou a 1 milhar; e 76585000 outro valor approximado do mesmo numero, com um erro por excesso menor que 1 milhar. É evidente, porém, que o erro 325 do primeiro numero é menor que o erro 1000 — 325, ou 675 do segundo, por ser o seu primeiro algarismo menor que 5. N'este caso o numero approximado por defeito envolve, pois, um erro menor, que o numero approximado por excesso.

Sendo 0,0065478 um numero exacto, serão 0,00654 e 0,00655 dois valores approximados d'elle com um erro inferior a 0,00001; mas o erro do primeiro é por defeito e igual a 0,0000078, e o do segundo é por excesso e igual a 0,00001 — 0,0000078 ou 0,0000022, logo, n'este exemplo, o erro por excesso é menor que o erro por defeito. Isto mesmo se reconhecerá facilmente, observando que o primeiro erro contém 78 unidades da setima casa decimal, e é por consequencia maior que meia unidade da quinta casa decimal, e o segundo contém 100 — 78 unidades da setima casa, isto é, menos de meia unidade da quinta casa de dizima.

Em geral, quando em qualquer numero inteiro ou decimal, se substituem por zeros, alguns algarismos significativos a contar da direita, commette-se um erro por defeito, menor que uma unidade da ordem do ultimo algarismo conservado. Esse erro será menor ainda que meia unidade da ordem do ultimo algarismo conservado, quando o primeiro dos algarismos desprezados fôr inferior a 5. Quando o primeiro algarismo desprezado fôr 5,

---

[1] A palavra *limite* não tem, n'este logar, a significação (§ 257) restricta, que muitas vezes se lhe dá.

ou outro de maior valor, o erro por defeito excede meia unidade da ordem do ultimo algarismo conservado.

Substituindo por zeros os ultimos algarismos significativos da direita de um numero inteiro, ou decimal, e juntando 1 ao ultimo dos algarismos conservados, commette-se um erro por excesso inferior a uma unidade da ordem do ultimo algarismo conservado. Este erro será maior que meia unidade da ordem d'aquelle ultimo algarismo, quando o primeiro dos algarismos desprezados fôr menor que 5, e menor que meia unidade da referida ordem, quando este algarismo fôr 5, ou maior que 5.

Quando se despreza só um algarismo, e esse é 5, o erro é sempre igual a meia unidade da ordem do ultimo algarismo conservado, e por isso é indifferente juntar, ou não, 1 a este algarismo.

Quando os algarismos, que se substituem por zeros, pertencem á parte decimal de algum numero, é desnecessario fazer a substituição, basta desprezal-os (§ 238) ou apagal-os.

623. Diz-se que um numero tem 2, 3, 4, etc. algarismos exactos, quando o seu erro absoluto é inferior a uma unidade da ordem do 2.°, 3.°, 4.°, etc., algarismo a contar do primeiro algarismo significativo da esquerda.

O numero 472,586726 terá, pois, 8 algarismos exactos, se o seu erro absoluto fôr menor que 0,00001; o numero 0,0004382 terá apenas 2 algarismos exactos, se o seu erro absoluto tiver tambem por limite 0,00001. O numero 82654300 tem 6 algarismos exactos, se o seu erro absoluto fôr menor que 1 centena, ou 100 unidades.

Conhecidas duas das tres quantidades, numero de algarismos exactos, limite do erro absoluto, ordem da unidade a que se refere o primeiro algarismo significativo da esquerda, é facil determinar a terceira.

Sendo $\frac{1}{10^6}$ o limite do erro absoluto de um numero, e suppondo que o seu primeiro algarismo significativo da esquerda representa milhares, é evidente que o numero tem 10 algarismos exactos, 4 á esquerda da virgula e 6 á direita. Se o limite do erro absoluto fôr ainda $\frac{1}{10^6}$, porém, o primeiro algarismo significativo da esquerda representar centesimas, o numero terá então sómente 5 algarismos exactos.

624. Quando não se póde garantir a exactidão de todos os algarismos de um numero, convem desprezar aquelles com a exactidão dos quaes não é prudente contar. Este desprezo, porém, importa um novo erro, que, segundo os casos, póde, combinando-se com o que já existia, agravar a falta de exactidão do numero, ou pelo contrario attenual-a. É, pois, indispensavel conhecer o sentido, ou signal do erro que affecta o numero, antes d'aquelle desprezo, para se poder decidir se o erro final é a somma ou a differença dos dois.

Seja 32,65847 um numero approximado por defeito com um erro absoluto inferior a 0,001. N'este exemplo é conhecido o sentido do erro e sabe-se que, se $+e$ representar o seu valor exacto, será $32,65847+e$ o numero sem erro algum. Desprezando no numero approximado os dois ultimos algarismos, por não se supporem (§ 623) exactos, commette-se um segundo erro tambem por defeito ou positivo e reduz-se o numero a 32,658 com um erro por defeito igual a $0,00047+e$, isto é, igual á somma dos dois erros. É certo, porém, que, sendo $e<0,001$, aquelle ultimo erro póde exceder 0,001, sem comtudo chegar a ser 0,002. Basta comtudo juntar

0,001 a 32,658 para se introduzir um erro em sentido contrario, um erro negativo, cujo effeito será reduzir o erro resultante a menos de 0,001.

Effectivamente, podendo representar-se por

$$32,659 - 0,001 + 0,00047 + e$$

o numero exacto, o erro de 32,659 será $+0,00047 + e - 0,001$, isto é, uma quantidade inferior a 0,001. Não se conhecendo o valor exacto de e, é impossivel prever o signal que affecta o ultimo erro, e por isso sómente se póde affiançar que o erro de 32,659 é inferior a 0,001, sem nada se poder decidir ácerca do seu signal.

625. Theorema. *O erro relativo de um numero, que tem* m *algarismos exactos, é menor que* $\frac{1}{k.10^{m-1}}$, *quando* k *não excede ao primeiro algarismo significativo da esquerda do numero; e é menor que* $\frac{1}{k.10^{m-2}}$, *quando* k *excede ao referido algarismo, sem comtudo ser maior que* 10.

Suppondo que 47,56879 tem 5 algarismos exactos, isto é, que o seu erro absoluto é inferior (§ 623) a 0,001, será o erro relativo (§ 621) menor que $\frac{0,001}{N}$, designando N o valor exacto do numero. Porém N é maior que 40, logo será

$$\frac{0,001}{N} < \frac{0,001}{40} = \frac{1}{40000} = \frac{1}{4.10^{5-1}}$$

isto é, o erro relativo do numero 47,56879, que tem 5 algarismos exactos, é inferior a $\frac{1}{k.10^{5-1}}$, quando k é o primeiro algarismo significativo da esquerda.

Com maior rasão será o erro relativo inferior a $\frac{1}{k.10^{5-1}}$, quando fôr k menor que o primeiro algarismo 4 da esquerda do numero.

Suppondo, porém, que é $k > 4$ ter-se-ha

$$\frac{1}{4.10^{5-1}} > \frac{1}{k.10^{5-1}}$$

e suppondo tambem que não é k maior que 10, será $\frac{k}{10} <$ ou $= 1$ e com maior rasão $\frac{k}{10} < 4$. Será portanto

$$\frac{1}{4.10^{5-1}} < \frac{1}{\frac{k}{10}.10^{5-1}} = \frac{1}{k.10^{5-2}}$$

e, como se sabe que o erro relativo do numero 47,56879, que tem 5 algarismos exactos, é menor que $\frac{1}{4.10^{5-1}}$, será o mesmo erro menor ainda que $\frac{1}{k.10^{5-2}}$, quando k fôr maior que 4 e não exceder 10.

626. Corollario. *O erro relativo de um numero, que tem* m *algarismos exactos, é menor que* $\frac{1}{10^{m-1}}$.

Com effeito, n'este caso é $k = 1$ e portanto k não póde exceder em valor ao primeiro algarismo significativo da esquerda do numero approximado.

627. Theorema. *O numero de algarismos exactos de um numero, cujo erro relativo é menor que* $\frac{1}{k \cdot 10^m}$, *é igual a* m *quando* k *não excede em valor ao primeiro algarismo significativo da esquerda; e é igual*[1] *a* $m+1$, *quando* k *excede o referido algarismo, mas não é superior a* 10.

Seja 4358,725 um numero approximado, cujo erro relativo é menor que $\frac{1}{4 \cdot 10^5}$.

Designando por e o erro absoluto do numero, será (§ 621) o seu erro relativo

$$\frac{e}{4358{,}725 \pm e}$$

conforme o numero estiver approximado por defeito, ou por excesso.

Em qualquer dos casos tem-se por hypothese

$$\frac{e}{4358{,}725 \pm e} < \frac{1}{4 \cdot 10^5}$$

Reduzindo ao mesmo denominador os dois membros da desigualdade, e comparando (§ 185) os numeradores dos quebrados resultantes, vem

$$4 \cdot 10^5 e < 4358{,}725 \pm e$$

e

$$(4 \cdot 10^5 \mp 1) e < 4358{,}725$$

$$e < \frac{4358{,}725}{4 \cdot 10^5 \mp 1}$$

Multiplicando ambos os membros por a maior potencia de 10 que torna o quebrado inferior a 1, vem

$$10 e < \frac{43587{,}25}{4 \cdot 10^5 \mp 1}$$

O maior dos dois valores, que póde ter este quebrado, é

$$\frac{43587{,}25}{4 \cdot 10^5 - 1} = \frac{43587{,}25}{399999} < 1$$

Logo, ou o numero esteja approximado por defeito ou por excesso, sempre será

$$10 e < 1 \qquad \text{ou} \qquad e < 0{,}1$$

---

[1] Deixa de ser igual a $m+1$ o numero de algarismos exactos, quando o numero estiver approximado por defeito, $k-1$ fôr o valor do seu primeiro algarismo significativo da esquerda e 9 o de cada um dos m algarismos immediatos. N'este caso excepcional apenas se póde contar com m algarismos exactos.

Suppondo que 399,99975 é um numero approximado por defeito com um erro relativo inferior a $\frac{1}{4 \cdot 10^5}$ será

$$e < \frac{399{,}99975}{4 \cdot 10^5 - 1} = \frac{399{,}99975}{399999}$$

e portanto

$$100 e < \frac{39999{,}975}{399999} < 1 \qquad 1000 e < \frac{399999{,}75}{399999} > 1$$

Não se póde, pois, affirmar que seja e menor que 0,001, mas tem-se a certeza de ser $e < 0{,}01$. Logo o numero 399,99975 tem, n'este caso, 5 algarismos exactos.

Se se houvesse multiplicado por 100 o segundo membro, achar-se-ia um producto maior que 1. Não é portanto possivel assegurar que seja $e < 0{,}01$.

Quando é $k < 4$, por exemplo $k = 3$, tem-se tambem

$$10\,e < \frac{43587{,}25}{3 \cdot 10^5 + 1}$$

e finalmente

$$e < 0{,}1$$

Em qualquer d'estes dois casos o numero tem 5 algarismos exactos.

Suppondo, porém, que é $k > 4$, por exemplo $k = 5$, tem-se

$$e < \frac{4358{,}725}{5 \cdot 10^5 + 1}$$

e multiplicando ambos os membros por 100 ainda será

$$100\,e < \frac{435872{,}5}{499999} < 1$$

e por consequencia

$$100\,e < 1 \quad \text{ou} \quad e < 0{,}01$$

Não succederia o mesmo, se se multiplicassem por 1000 ambos os membros.

Logo para $k = 5$ o numero tem $m + 1$ ou 6 algarismos exactos.

628. Corollario. *O numero de algarismos exactos de um numero, cujo erro relativo é inferior a* $\frac{1}{10^m}$, *é igual*[1] *a* m.

Com effeito, n'este caso é $k = 1$ e portanto k não excede em valor ao primeiro algarismo significativo da esquerda do numero approximado.

629. Theorema. O *erro absoluto de uma somma de parcellas approximadas no mesmo sentido* (todas por defeito, ou todas por excesso) *é igual em grandeza e sentido á somma dos erros absolutos das parcellas. O erro absoluto de uma somma de parcellas approximadas em differentes sentidos* (umas por defeito e outras por excesso) *é igual á differença entre a somma dos erros por defeito e a somma dos erros por excesso, e tem o sentido dos erros, que entram na maior das duas sommas.*

Sejam A, B, C, etc., os valores approximados das parcellas e a, b, c, etc. os correspondentes erros absolutos.

Se uma parcella B estiver approximada por defeito, será (§ 622) $B + b$ o seu valor exacto, se estiver approximada por excesso, o valor exacto d'ella será $B - b$.

---

[1] Deixa de ser igual a m o numero de algarismos exactos, quando o numero estiver approximado por defeito e fôr 9 cada um dos m primeiros algarismos significativos da esquerda. N'este caso excepcional sómente se póde contar com $m - 1$ algarismos exactos.

Esta proposição póde demonstrar-se directamente, mas deduz-se com facilidade, do que se disse em nota ao § 627, advertindo que, sendo n'este caso $k = 1$, será $k - 1 = 0$, e portanto que basta considerar, como algarismo significativo, o zero que estiver á esquerda dos m primeiros noves. Suppondo que 0,0009999996 é um numero approximado por defeito com um erro relativo inferior a $\frac{1}{10^6}$ concluir-se-ha que os algarismos exactos do numero são $k - 1$ ou 0 e os cinco noves immediatos. Logo 0,0009999996 tem apenas 5 algarismos exactos.

Suppondo que todas as parcellas estão approximadas no mesmo sentido, será o valor exacto da somma

$$(A+a)+(B+b)+(C+c)+\text{etc.} \quad \text{ou} \quad (A-a)+(B-b)+(C-c)+\text{etc.}$$

conforme as parcellas estiverem todas approximadas por defeito ou todas por excesso e o seu valor approximado será

$$A+B+C+\text{etc.}$$

A differença entre as duas sommas, ou o erro absoluto da ultima, é igual a $\pm(a+b+c+\text{etc.})$, tomando o parenthesis com o signal $+$, quando todas as parcellas estão approximadas por defeito, e com o signal $-$, quando todas estão por excesso.

Quando umas parcellas estão approximadas por defeito e outras por excesso, a somma exacta será, por exemplo,

$$(A+a)+(B-b)+(C+c)+(D-d)+\text{etc.}$$

e a approximada $\qquad A+B+C+\text{etc.}$

A differença entre estas duas sommas é $a-b+c-d+\text{etc.}$, isto é, (§ 44)

$$(a+c+\text{etc.})-(b+d+\text{etc.}) \quad \text{ou} \quad (b+d+\text{etc.})-(a+c+\text{etc.})$$

conforme fôr $a+c+\text{etc.}$ maior, ou menor que $b+d+\text{etc.}$ No primeiro caso o erro da somma é por defeito, no segundo é por excesso.

630. Corollario. *O erro absoluto de uma somma é sempre inferior á somma dos limites dos erros absolutos das parcellas*[1].

631. Problema. *Calcular a somma* $\sqrt{8}+\sqrt[3]{31}+\sqrt{162}$ *com um erro relativo inferior a* $\frac{1}{10^4}$.

Pelo § 626 sabe-se, que, se a somma procurada tiver 5 algarismos exactos, o seu erro relativo será inferior a $\frac{1}{10^4}$ como se deseja, mas a somma $\sqrt{8}+\sqrt[3]{31}+\sqrt{162}$ está comprehendida entre

$$\sqrt{2^2}+\sqrt[3]{3^3}+\sqrt{12^2}=17 \quad \text{e} \quad \sqrt{3^2}+\sqrt[3]{4^3}+\sqrt{13^2}=20$$

logo dois dos 5 algarismos pertencem á parte inteira, e por consequencia os 3 restantes pertencerão á parte decimal.

---

[1] *O erro relativo de uma somma é inferior ao maximo erro relativo das parcellas.*

Sendo a, b, c, etc. os erros absolutos das parcellas e A', B', C', etc. os valores exactos d'ellas (§ 621) serão $\frac{a}{A'}, \frac{b}{B'}, \frac{c}{C'}$, etc., os seus erros relativos e $\frac{a+b+c+\text{etc.}}{A'+B'+C'+\text{etc.}}$ ou uma quantidade ainda menor, o erro relativo da somma. Mas este ultimo quebrado é (§ 227) menor, que o maior dos quebrados $\frac{a}{A'}, \frac{b}{B'}, \frac{c}{C'}$, etc., logo o erro relativo da somma é sempre inferior ao maior dos erros relativos das parcellas. Este theorema raras vezes se emprega na pratica: 1.º, porque é muito facil calcular o limite do erro absoluto de uma somma e por consequencia o grau da sua approximação; 2.º, porque o limite do erro relativo calculado por elle póde afastar-se muito do verdadeiro erro, especialmente se alguma das parcellas fôr muito pequena relativamente ás outras.

É necessario portanto calcular a somma com um erro absoluto menor que 0,001. Representando e o limite commum dos erros absolutos, que podem ter as tres parcellas, para a somma vir com um erro absoluto inferior a 0,001, tem-se

$$3e < 0{,}001 \quad \text{ou} \quad e < \frac{0{,}001}{3}$$

Calculando, pois, cada parcella com um erro menor que $\frac{0{,}001}{10}$ ou 0,0001, tem-se a certeza, de que o erro da somma é inferior a 0,001.

Effectuando as operações (§§ 278 e 307) acha-se

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} = 2{,}8284 \\ \sqrt[3]{31} = 3{,}1413 \\ \sqrt{162} = 12{,}7279 \\ \hline \sqrt{8} + \sqrt[3]{31} + \sqrt{162} = 18{,}6976 \end{array}$$

O erro, que esta somma envolve, é por defeito, porque o são tambem os erros das parcellas, e o seu valor é desconhecido e inferior a 0,001. Convém, pois, desprezar o ultimo algarismo da dizima, com a condição, porém (§ 624), de se juntar 1 unidade ao que lhe ficar á esquerda.

Vê-se portanto que é

$$\sqrt{8} + \sqrt[3]{31} + \sqrt{162} = 18{,}698$$

com um erro absoluto (por defeito, ou por excesso) menor que 0,001 ou com um erro relativo menor que $\frac{1}{10^4}$.

632. Em geral, quando se deseja calcular uma somma de p parcellas com um erro absoluto menor que $\frac{1}{10^m}$, o maior erro absoluto e das parcellas deve ser tal, que torne

$$p \cdot e < \frac{1}{10^m}$$

Tomando effectivamente cada parcella com um erro absoluto menor que $\frac{1}{p \cdot 10^m}$ tem-se a certeza (§ 630) de que o erro absoluto da somma é menor que $\frac{1}{10^m}$.

Quando o numero p das parcellas não excede 10, tem-se

$$\frac{1}{p \cdot 10^m} > \frac{1}{10^{m+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{p \cdot 10^m} = \frac{1}{10^{m+1}}$$

e basta por conseguinte tomar cada parcella com $m+1$ casas decimaes, isto é, com mais uma do que as que deve ter a somma, para os erros d'ellas serem inferiores a $\frac{1}{p \cdot 10^m}$.

Quando o numero p das parcellas excede 10, porém não excede 100 ou 10^2, tem-se

$$\frac{1}{p \cdot 10^m} > \frac{1}{10^{m+2}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{p \cdot 10^m} = \frac{1}{10^{m+2}}$$

e é necessario, portanto, tomar cada parcella com duas casas mais, do que as que se requerem na somma.

Generalisando estas considerações chega-se á seguinte conclusão:

Para se calcular uma somma com um erro absoluto inferior a uma[1] *unidade* (inteira ou decimal) *de certa ordem, deve-se tomar cada parcella com um erro absoluto menor que uma unidade de ordem* 1, 2, 3, *etc., vezes menor, conforme o numero de parcellas fôr igual, ou inferior a* 10, 100, 1000, *etc.*

633. Theorema. *O erro absoluto do resto de uma subtracção é igual á somma dos erros absolutos do additivo, ou diminuendo, e do subtractivo, ou diminuidor, quando estes dois erros são de sentidos contrarios* (um por defeito e outro por excesso), *e é igual á differença dos mesmos erros, quando ambos têem o mesmo sentido*[2].

Sendo A e B dois numeros approximados em sentidos contrarios e a e b os erros absolutos, o verdadeiro valor do resto será

$$(A \pm a) - (B \mp b)$$

tomando os signaes superiores, quando o additivo é approximado por defeito e o subtrativo por excesso, e os signaes inferiores no caso contrario.

Em ambos os casos o valor approximado do resto é $A-B$, e a differença entre elle e o valor exacto dá a medida do erro absoluto do resto. Advertindo portanto (§ 47) que é

$$(A \pm a) - (B \mp b) = A \pm a - B \pm b$$

ou (§§ 43 e 44)

$$(A \pm a) - (B \mp b) = (A - B) \pm (a + b)$$

concluir-se-ha, que o erro absoluto de $A-B$ é igual a $\pm(a+b)$, quando os erros de A e B não são no mesmo sentido, devendo o parenthesis ter o signal $+$, quando o erro do additivo fôr por defeito e o signal $-$ no caso contrario.

Se os dois numeros A e B forem approximados no mesmo sentido, será o verdadeiro valor do resto igual a

$$(A \pm a) - (B \pm b)$$

e como (§ 47)

$$(A \pm a) - (B \pm b) = A \pm a - B \mp b$$

seguir-se-ha (§§ 46 e 47) que

$$(A \pm a) - (B \pm b) = (A - B) \pm (a - b)$$

adoptando sempre os signaes superiores, ou sempre os signaes inferiores.

---

[1] Se se quizer, que o erro absoluto da somma seja inferior a meia unidade da ordem m, deve-se tomar cada parcella com um erro absoluto menor que $\frac{5}{p.10^{m+1}}$. Sendo pois $p =$ ou < 5 será $\frac{5}{p.10^{m+1}} =$ ou $> \frac{1}{10^{m+1}}$ e dever-se-ha contar com $m+1$ casas de dizima em cada parcella. Se fôr $p =$ ou < 50, será $\frac{5}{p.10^{m+1}} =$ ou $> \frac{1}{10^{m+2}}$ e $m+2$ o numero de casas de dizima, com que se deve tomar cada parcella, etc.

[2] Não se póde estabelecer uma regra geral para determinar o limite do erro relativo do resto, quando se suppõem conhecidos os limites dos erros relativos do additivo e subtractivo, porque o primeiro dos tres erros tanto póde exceder como ser inferior a qualquer dos outros erros.

Em qualquer das hypotheses o erro do resto $A-B$ é igual á differença $\pm(a-b)$, tomando o parenthesis com o signal $+$ quando o additivo e subtractivo estão approximados por defeito, e com o signal $-$ no caso contrario.

634. Corollario. *O erro absoluto do resto de uma subtracção é sempre inferior á somma dos limites dos erros absolutos do additivo e do subtractivo, ou ao dobro do maior d'elles. Quando os dois numeros estão approximados no mesmo sentido, o erro absoluto do resto é inferior ao maior dos limites dos erros absolutos dos mesmos numeros.*

635. Problema. *Calcular o resto da subtracção indicada $\sqrt{7}-\sqrt[3]{2}$ com um erro relativo inferior a $\frac{1}{10^2}$.*

Conhecendo o numero de algarismos exactos do resto e a ordem da unidade a que se refere o primeiro algarismo significativo da esquerda, póde (§ 623) determinar-se o limite do erro absoluto do resto, e por consequencia (§ 634) o limite commum dos erros absolutos do additivo e subtractivo.

Convém que o numero de algarismos exactos do resto seja (§ 626) 3, para se poder reputar o seu erro relativo inferior a $\frac{1}{10^2}$. Resta portanto fixar a ordem da unidade do primeiro algarismo. Para esse fim é necessario advertir, que sendo

$$2<\sqrt{7}<3 \quad \text{e} \quad 1<\sqrt[3]{2}<2$$

a differença $\sqrt{7}-\sqrt[3]{2}$ augmenta, quando o additivo $\sqrt{7}$ é substituido por qualquer numero maior, 3, e o subtractivo $\sqrt[3]{2}$ por qualquer numero menor, 1, e diminue no caso contrario, isto é, quando aquelle é substituido por um numero menor, 2, e este por um maior, 2, de sorte que será

$$2-2<\sqrt{7}-\sqrt[3]{2}<3-1 \quad \text{ou} \quad 0<\sqrt{7}-\sqrt[3]{2}<2$$

Estas desigualdades indicam apenas, que o primeiro algarismo significativo da esquerda não é de ordem superior á das unidades. Não se sabendo, pois, se elle será o das unidades, o das decimas, etc., é impossivel fixar já qual deva ser o erro absoluto do resto, embora seja dado o seu erro relativo. Fazendo o calculo, como se aquelle algarismo fosse o das unidades, e advertindo que o resto deve ter 3 algarismos exactos, concluir-se-ha que o resto póde ter um erro inferior a 0,01, e portanto que bastará calcular o additivo e o subtractivo com um erro absoluto inferior a 0,01, se porventura (§ 634) ambos os numeros ficarem approximados no mesmo sentido.

Extrahindo as raizes com erros por defeito inferiores a 0,01 achar-se-ha

$$\begin{array}{r} \sqrt{7}=2{,}64 \\ \sqrt[3]{2}=1{,}25 \\ \hline \sqrt{7}-\sqrt[3]{2}=1{,}39 \end{array}$$

O calculo mostra que o primeiro algarismo significativo da esquerda é effectivamente o algarismo das unidades e portanto que é

$$\sqrt{7}-\sqrt[3]{2}=1{,}39$$

com 3 algarismos exactos, ou com um erro relativo inferior a $\frac{1}{10^2}$.

Se o primeiro algarismo significativo da esquerda fosse o das decimas, centesimas, etc., seria necessario calcular cada raiz com mais uma, duas, etc., casas de dizima.

636. Theorema. *O erro absoluto de um producto de dois factores approximados por defeito é menor que a somma dos productos do erro de cada um dos factores pelo valor exacto do outro factor* [1].

Representando por A' e B' os valores exactos dos factores e por a e b os seus erros, será $A'B'$ o producto exacto e

$$(A'-a)(B'-b) \quad \text{ou (§ 60)} \quad A'B'-A'b-aB'+ab$$

o valor approximado do producto.

A differença entre aquelle e este producto é (§ 47)

$$A'B'-(A'B'-A'b-aB'+ab) \quad \text{ou} \quad A'b+aB'-ab$$

e como esta differença, que representa o erro do producto, é menor que $A'b+B'a$, segue-se que o theorema é verdadeiro.

637. Corollario I. *O erro absoluto de um producto de mais de dois factores approximados por defeito é inferior á somma dos productos do erro de cada factor pelo producto dos valores exactos de todos os outros factores.*

Sendo A', B', C', etc. os factores exactos, a, b, c, etc. os erros absolutos, será (§ 636) o erro absoluto do producto dos factores A, B e C menor que o erro de AB multiplicado por C', mais o producto de $A'B'$ por c. Mas o erro de AB é menor que $A'b+B'a$, logo o erro de ABC é com maior rasão menor que

$$(A'b+B'a)C'+A'B'c \quad \text{ou} \quad A'C'b+B'C'a+A'B'c$$

Se os factores exactos fossem A', B', C', D', achar-se-ia o erro absoluto do producto $ABCD$ menor que

$$\text{erro de } (ABC)\times D'+A'B'C'd$$

e como

$$\text{erro de } (ABC)<A'B'c+A'C'b+B'C'a$$

seguir-se-ia que o erro de $ABCD$ é inferior a

$$A'B'D'c+A'C'D'b+B'C'D'a+A'B'C'd$$

638. Corollario II. *O erro relativo de um producto de dois ou mais factores approximados por defeito é menor que a somma dos erros relativos de todos os factores.*

Sendo A', B', C', D', os factores exactos de um producto, e $A'-a$,

---

[1] *O erro absoluto de um producto de dois factores approximados por excesso é menor que a somma dos productos do erro de cada um dos factores pelo valor approximado do outro factor.* Sendo A e B os valores approximados dos factores, e a e b os erros absolutos, será AB o producto approximado, e $(A-a)(B-b)$ ou $AB-Ab-Ba+ab$ o producto exacto. O erro do producto será n'este caso $AB-(AB-Ab-Ba+ab)$ ou $Ab+Ba-ba$.

O erro absoluto de um producto de dois factores approximados em sentidos contrarios é menor que a differença entre os productos do erro de cada factor pelo valor do outro, tomando indifferentemente os valores exactos de ambos os factores, ou os seus valores approximados.

Esta proposição demonstra-se como a antecedente, ou como a do § 636.

$B'-b$, $C'-c$, $D'-d$, os valores approximados por defeito d'esses factores, será o erro absoluto de $(A'-a)(B'-b)(C'-c)(D'-d)$ inferior a

$$A'B'C'd+A'B'D'c+A'C'D'b+B'C'D'a$$

e o erro relativo (§ 621) será, portanto, menor que

$$\frac{A'B'C'd+A'B'D'c+A'C'D'b+B'C'D'a}{A'B'C'D'} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{D'}+\frac{c}{C'}+\frac{b}{B'}+\frac{a}{A'}$$

639. **Theorema.** *O erro absoluto de uma potencia de qualquer numero approximado por defeito é menor que o producto do expoente da potencia pela potencia immediatamente inferior do numero exacto e pelo erro absoluto do mesmo numero.*

Seja A' o valor exacto de um numero, A o seu valor approximado por defeito e a o erro absoluto.

Considerando[1] que a potencia A^5, por exemplo, equivale a um producto $A.A.A.A.A$, será (637) o erro absoluto de A^5 menor que

$$A'A'A'A'a+A'A'A'A'a+A'A'A'A'a+A'A'A'A'a+A'A'A'A'a$$

e por consequencia menor tambem que $5A'^4.a$.

640. **Corollario.** *O erro relativo de uma potencia de qualquer numero approximado por defeito é menor que o producto do expoente da potencia pelo erro relativo do numero.*

Sendo e o erro absoluto da potencia A^5, será o erro relativo da mesma potencia igual a $\frac{e}{A'^5}$, e portanto menor que

$$\frac{5A'^4a}{A'^5} \quad \text{ou (§ 100)} \quad 5.\frac{a}{A'}$$

641. **Problema.** *Calcular o erro absoluto do producto* $2{,}645\times1{,}259$, *suppondo que cada factor tem um erro absoluto por defeito inferior a* $0{,}001$.

Solução I. Chamando e e e' aos erros absolutos dos factores, será o erro absoluto do producto (§ 636) menor que

$$e'(2{,}645+e)+e(1{,}259+e')$$

e como e e e' são menores que $0{,}001$, segue-se que o referido erro será ainda menor que

$$0{,}001\times2{,}646+0{,}001\times1{,}260 \quad \text{ou} \quad 0{,}003906$$

O erro do producto $2{,}645\times1{,}259$ ou $3{,}330055$ é pois menor que $0{,}01$. Desprezando as quatro ultimas casas de dizima, e juntando 1 á das centesimas (§ 624) vem finalmente

$$2{,}645\times1{,}259=3{,}34 \text{ com um erro absoluto menor que } 0{,}01$$

---

[1] Em geral, sendo $A=A'-a$ será

$$A^m=(A'-a)^m=A'^m-maA'^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2A'^{m-2}-\text{etc.}$$

$$A'^m-A^m=maA'^{m-1}-\frac{m(m-1)}{1.2}a^2A'^{m-2}+\text{etc.}$$

e, para valores sufficientemente pequenos de a,

$$A'^m-A^m<maA'^{m-1}$$

Solução II. Cada factor tem 4 algarismos exactos, e, portanto, o erro relativo de 2,645 será (§ 625) menor que $\frac{1}{2.10^3}$ e o do factor 1,259 será menor que $\frac{1}{10^3}$. O erro relativo do producto é pois (§ 638) inferior a

$$\frac{1}{2.10^3}+\frac{1}{10^3} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2.10^3}$$

e com mais rasão ainda inferior a $\frac{10}{2.10^3}$ ou $\frac{1}{2.10^2}$.

Sendo $\frac{1}{2.10^2}$ o erro relativo de 3,330055, haverá n'este numero (§627) dois algarismos exactos sómente, e portanto o erro absoluto do producto não chega a 0,1, isto é,

$$2{,}645\times1{,}259=3{,}4 \text{ com um erro absoluto menor que } 0{,}1$$

Vê-se, portanto, n'este exemplo, que a segunda solução, na qual se empregam os erros relativos, dá menor approximação que a primeira.

642. Problema. *Calcular o valor de* $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{45}-1)(\sqrt{8}+1)$ *com um erro absoluto menor que* 0,1.

N'este problema a primeira questão, que convém resolver, é a da approximação com que deve ser extrahida cada uma das raizes. A melhor maneira de a resolver é procurar a ordem da unidade correspondente ao primeiro algarismo significativo da esquerda do producto, depois o erro relativo do producto, e finalmente o erro relativo que deve ter cada factor.

Para conhecer a ordem do primeiro algarismo, extrahe-se cada uma das raizes com um erro absoluto inferior a 1, e obtem-se então

$$(\sqrt{1^2}+2)(\sqrt{6^2}-1)(\sqrt{2^2}+1)<(\sqrt{3}+2)(\sqrt{45}-1)(\sqrt{8}+1)<$$
$$<(\sqrt{2^2}+2)(\sqrt{7^2}-1)(\sqrt{3^2}+1)$$

ou

$$45<(\sqrt{3}+2)(\sqrt{45}-1)(\sqrt{8}+1)<96$$

O primeiro algarismo da esquerda do producto representa, portanto, dezenas, e como o erro do producto procurado deve ser menor que 0,1, segue-se que elle ha de conter tres algarismos exactos, e por consequencia (§ 628) que deve ser calculado com um erro relativo inferior a $\frac{1}{10^3}$.

Para o producto vir com um erro relativo menor que $\frac{1}{10^3}$ é necessario, que cada um dos tres factores seja calculado (§ 638) com um erro relativo menor que $\frac{1}{3.10^3}$ ou menor ainda que $\frac{1}{10^4}$ e por consequencia com (§ 626) 5 algarismos exactos.

Attendendo, porém, a que, n'este exemplo, o primeiro algarismo de cada factor é igual ou superior a 3, reconhece-se que é sufficiente calcular cada factor com 4 algarismos exactos para se obterem (§ 625) erros relativos menores que $\frac{1}{3.10^3}$.

Tem-se pois

$$\sqrt{3}+2=3{,}732$$
$$\sqrt{45}-1=5{,}708$$
$$\sqrt{8}+1=3{,}828$$

e

$$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{45}-1)(\sqrt{8}+1)=81{,}545035968$$

tendo o segundo membro apenas tres algarismos exactos.

Juntando 1 ao algarismo das decimas, e desprezando (§ 624) os algarismos que lhe ficam á direita, obtem-se

$$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{45}-1)(\sqrt{8}+1)=81{,}6$$

com um erro absoluto menor que 0,1.

643. **Problema.** *Calcular* $(1+\sqrt[3]{5})^2$ *com um erro relativo inferior a* $\frac{1}{10^3}$.

Para o erro relativo do quadrado ser menor que $\frac{1}{10^3}$ é preciso (§ 640) que o erro relativo de $1+\sqrt[3]{5}$ seja menor que $\frac{1}{2\cdot 10^3}$. Para o valor de $1+\sqrt[3]{5}$ vir com um erro relativo menor que $\frac{1}{2\cdot 10^3}$, basta (§ 625) calcular o mesmo valor com 4 algarismos exactos, visto ser igual a 2 o primeiro algarismo significativo de $1+\sqrt[3]{5}$ ou 2,709....

Extrahindo a raiz cubica de 5 com 4 algarismos exactos, juntando-lhe unidade, e elevando a somma ao quadrado, acha-se

$$(1+\sqrt[3]{5})^2=(2{,}709)^2=7{,}338681$$

e, como este quadrado está approximado por defeito e tem (§ 628) 3 algarismos exactos, segue-se (§ 624) que é

$$(1+\sqrt[3]{5})^2=7{,}34$$

com um erro relativo menor que $\frac{1}{10^3}$.

644. **Theorema.** *O erro absoluto de um quociente é igual, ou inferior ao quebrado, que tem por numerador a somma dos productos do erro absoluto de cada um dos termos da divisão* (dividendo e divisor) *pelo valor exacto do outro termo, e por denominador o producto do divisor exacto pelo divisor approximado* [1].

---

[1] De ser o erro de um quociente $\frac{A}{B}$ sempre igual ou inferior a $\frac{A'b+B'a}{B'B}$ conclue-se que, quando fôr $A'<B'$ e os erros a e b menores que $\frac{1}{2}$, o erro do quociente é menor que $\frac{1}{B}$. É, com effeito, evidente que, por ser $A'<B'$ será $\frac{A'b+B'a}{B'B}<\frac{B'b+B'a}{B'B}=$ $=\frac{a+b}{B}$ e por serem a e b iguaes, ou inferiores a $\frac{1}{2}$ será $\frac{A'b+B'a}{B'B}<\frac{1}{B}$. Este theorema é sobretudo util para calcular os erros provenientes de se recorrer ás taboas das differenças dos logarithmos para a determinação dos numeros correspondentes a logarithmos dados.

Sejam A' e B' o dividendo e divisor exactos, A e B os seus valores approximados, a e b os erros absolutos correspondentes.

A differença

$$\frac{A}{B}-\frac{A'}{B'}=\frac{AB'-BA'}{BB'}$$

dará em grandeza e signal o erro do quociente $\frac{A}{B}$.

Mas

$$AB'-BA'=(A'\mp a)B'-(B'\mp b)A'=\mp aB'\pm bA'$$

Logo o erro absoluto de $\frac{A}{B}$ é igual ou inferior a

$$\frac{aB'+bA'}{B'B}$$

645. Theorema. *O erro relativo de um quociente, cujo divisor está approximado por excesso, é igual, ou inferior á somma dos erros relativos do dividendo e do divisor.*

Com effeito, sendo o erro absoluto do quociente $\frac{A}{B}$ (§ 644) igual ou inferior a $\frac{A'b+B'a}{B'(B'+b)}$, será o erro relativo do quociente (§ 621) igual ou inferior a

$$\frac{A'b+B'a}{B'(B'+b)}:\frac{A'}{B'} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{B'+b}+\frac{B'}{B'+b}\cdot\frac{a}{A'}$$

Mas,

$$\frac{b}{B'+b}<\frac{b}{B'} \qquad \frac{B'}{B'+b}<1$$

logo o erro relativo do quociente $\frac{A}{B}$ é menor que $\frac{b}{B'}+\frac{a}{A'}$.

646. Problema. *Calcular o erro absoluto do quociente* 4,5678:0,06324, *suppondo que ambos os termos têem um erro absoluto menor que uma unidade da ultima casa de dizima.*

O erro absoluto do quociente é (§ 644) menor que

$$\frac{5\cdot 0{,}00001+0{,}07\cdot 0{,}0001}{0{,}06\cdot 0{,}06} \quad \text{ou} \quad \frac{0{,}000057}{0{,}0036}$$

e por consequencia menor que

$$\frac{57}{3600}=0{,}015\ldots$$

Logo n'este exemplo, é

$$\frac{4{,}5678}{0{,}06324}=72{,}229\ldots$$

com um erro inferior a 0,1.

Não suppondo conhecido o sentido do erro de 72,229..., segue-se (§ 624) que, desprezando os algarismos escriptos á direita do das decimas, se tem o quociente 72,2 com um erro absoluto inferior a 0,2. Juntando 1 ao algarismo das decimas tem-se outro quociente, 72,3, com um erro tambem menor que 0,2.

647. Problema. *Achar o valor de* $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{13}}$ *com um erro absoluto menor que* $\frac{1}{10^4}$.

Extrahindo as duas raizes com um erro menor que 1, acha-se

$$2<\sqrt{7}<3 \qquad\qquad 3<\sqrt{13}<4$$

e como o quociente $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{13}}$ augmenta de valor, quando ao dividendo se substitue um numero maior, 3, e ao divisor um numero menor, 3, e diminue de valor, quando áquelle se substitue um numero menor, 2, e a este um numero maior, 4, segue-se que será

$$\tfrac{2}{4}<\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{13}}<\tfrac{3}{3} \qquad \text{ou} \qquad 0{,}5<\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{13}}<1$$

e portanto que o primeiro algarismo significativo da esquerda do quociente procurado é o algarismo das decimas. Logo basta calcular o quociente com quatro algarismos exactos, para o seu erro absoluto ser menor que $\frac{1}{10^4}$.

É necessario, pois, calcular o quociente (§ 628) com um erro relativo inferior a $\frac{1}{10^4}$ e, como o erro relativo do quociente (§ 645) é menor que a somma dos erros relativos do dividendo e divisor, quando este está approximado por excesso, segue-se que basta fazer esta somma menor que $\frac{1}{10^4}$ ou calcular cada termo da divisão com um erro relativo menor que $\frac{1}{2.10^4}$.

Mas os primeiros algarismos das raizes quadradas de 7 e 13 são iguaes, ou superiores a 2, logo (§ 625) cada uma das raizes deve ter 5 algarismos exactos, ou um erro absoluto menor que 0,0001.

Extrahindo a raiz quadrada de 7 com um erro por defeito menor que 0,0001, e a raiz quadrada de 13 com um erro por excesso menor que 0,0001 obtem-se

$$\sqrt{7}=2{,}6457 \qquad\qquad \sqrt{13}=3{,}6056$$

Dividindo a primeira raiz pela segunda, acha-se

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{13}}=0{,}733775\ldots$$

com 4 algarismos exactos ou com um erro absoluto menor que 0,0001.

N'este exemplo sabe-se, que o erro de 0,733775... é por defeito, porque o dividendo está approximado por defeito e o divisor por excesso. É por consequencia permittido desprezar os algarismos, que ficam á direita da quarta casa de dizima, comtanto que (§ 624) se junte 1 ao ultimo algarismo conservado.

Fazendo isto obtem-se finalmente

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{13}}=0{,}7338$$

com um erro absoluto menor que 0,0001.

648. **Lemma.** *O erro absoluto de uma potencia de qualquer numero approximado por defeito é maior que o producto do expoente da potencia pela po-*

tencia immediatamente inferior do numero approximado e pelo erro absoluto do mesmo numero[1].

Sendo A e B dois numeros approximados por defeito, a e b os seus erros absolutos, serão $A+a$ e $B+b$ os verdadeiros valores d'elles e $(A+a)(B+b)-AB$ ou $Ab+Ba+ab$ o erro absoluto do producto AB dos numeros approximados. O erro absoluto do producto AB de dois factores approximados por defeito é, pois, maior que $Ab+Ba$.

Quando o segundo factor B é igual a A, tambem o erro b é igual a a, e por consequencia o erro de $A \cdot A$, ou de A^2, é maior que $Aa+Aa$ ou $2Aa$.

Se o segundo factor B fôr igual a A^2 sera tambem $b>2Aa$ e portanto o erro absoluto de $A.A^2$, ou A^3 será maior que $A.2Aa+A^2a$ ou $3A^2a$.

O erro absoluto de A^4, ou $A.A^3$, é tambem maior que $A.3A^2a+A^3a$ ou $4A^3a$.

Continuando a raciocinar do mesmo modo reconhece-se que, para qualquer valor inteiro de m, é o erro absoluto de A^m maior do que $mA^{m-1}a$, quando o erro a de A é por defeito.

649. Theorema. *O erro absoluto de uma raiz de qualquer numero approximado por defeito é menor que o quebrado, que tem p r numerador o erro absoluto do numero e por denominador o producto do indice da raiz pela potencia immediatamente inferior da raiz do numero approximado.*

A potencia m de $\sqrt[m]{A}$ é evidentemente A, porque

$$(\sqrt[m]{A})^m = A$$

logo o erro absoluto da potencia m de $\sqrt[m]{A}$, isto é, o erro de A é maior (§ 648) que o producto de tres factores, a saber, o expoente m, a potencia $m-1$ de $\sqrt[m]{A}$ e o erro de $\sqrt[m]{A}$ e por consequencia, designando por a o erro de A e por e o erro de $\sqrt[m]{A}$, tem-se

$$a > m(\sqrt[m]{A})^{m-1} \times e$$

e dividindo ambos os membros por $m(\sqrt[m]{A})^{m-1}$ acha-se

$$e < \frac{a}{m(\sqrt[m]{A})^{m-1}}$$

que é o que se queria demonstrar[2].

---

[1] Em geral, sendo $A+a$ o valor exacto de um numero e A o approximado, será o erro absoluto de A^m

$$(A+a)^m - A^m = m\,a\,A^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2A^{m-2} + \text{etc.} > m\,a\,A^{m-1}$$

[2] Da formula do binonio de Newton

$$(A+a)^{\frac{1}{m}} = A^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}aA^{\frac{1}{m}-1} + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1.2}a^2A^{\frac{1}{m}-2} + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)}{1.2.3}a^3A^{\frac{1}{m}-3} + \text{etc.}$$

deduz-se

$$e = \sqrt[m]{A+a} - \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \cdot \frac{a}{\sqrt[m]{A^{m-1}}} - \frac{m-1}{2m^2}\,\frac{a^2}{\sqrt[m]{A^{m-2}}} + \frac{(m-1)(m-2)}{2.3\,m^3} \cdot \frac{a^3}{\sqrt[m]{A^{m-3}}} - \text{etc.}$$

e d'esta, para valores sufficientemente pequenos de a,

$$e < \frac{a}{m\sqrt[m]{A^{m-1}}}$$

650. Corollario I. *O erro absoluto da raiz quadrada de um numero* A *approximado por defeito é menor que o quebrado* $\frac{a}{2\sqrt{A}}$ *que tem por numerador o erro absoluto de* A *e por denominador o dobro da raiz quadrada do numero approximado.*

651. Corollario II. *O erro absoluto da raiz cubica de um numero* A *approximado por defeito é menor que o quebrado* $\frac{a}{3(\sqrt[3]{A})^2}$ *que tem por numerador o erro absoluto de* A *e por denominador o triplo do quadrado da raiz cubica do numero approximado.*

652. Theorema. *O erro relativo da raiz de qualquer numero approximado por defeito é menor que o quebrado, que tem por numerador o erro absoluto do numero e por denominador o producto do indice da raiz pelo numero approximado.*

Sendo A um numero approximado por defeito, e $A+a$ o seu verdadeiro valor, será $\frac{a}{m(\sqrt[m]{A})^{m-1}}$ um numero maior (§ 649) que o erro absoluto de $\sqrt[m]{A}$ e por consequencia (§ 621)

$$\frac{a}{m(\sqrt[m]{A})^{m-1}} : \sqrt[m]{A+a} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{m(\sqrt[m]{A})^{m-1} \times \sqrt[m]{A+a}}$$

uma quantidade maior que o erro relativo de $\sqrt[m]{A}$.

Mas, a ultima d'estas quantidades é evidentemente menor (§ 185) que

$$\frac{a}{m(\sqrt[m]{A})^{m-1} \times \sqrt[m]{A}} \qquad \text{ou (§§ 318 e 317)} \qquad \frac{a}{m(\sqrt[m]{A})^{m}} = \frac{a}{mA}$$

logo o erro relativo de $\sqrt[m]{A}$ é effectivamente inferior a $\frac{a}{mA}$.

653. Corollario I. *O erro relativo da raiz quadrada de um numero* A *approximado por defeito é menor que o quebrado* $\frac{a}{2A}$ *que tem por numerador o erro absoluto de* A *e por denominador o dobro do numero approximado.*

654. Corollario II. *O erro relativo da raiz cubica de um numero* A *approximado por defeito é menor que o quebrado* $\frac{a}{3A}$ *que tem por numerador o erro absoluto de* A *e por denominador o triplo do numero approximado.*

655. Theorema. *Para se extrahir a* $\sqrt[m]{A}$ *com* n *algarismos exactos é sufficiente calcular* A *por defeito com* n+1 *algarismos exactos.*

É, com effeito, sabido que $\sqrt[m]{A}$ terá n algarismos exactos, se fôr (§ 628) calculada com um erro relativo inferior a $\frac{1}{10^n}$, mas (§ 652) este erro relativo é menor que $\frac{a}{mA}$ ou $\frac{a}{m(A'-a)}$, sendo A' o verdadeiro valor de A, logo, se fôr

$$\frac{a}{m(A'-a)} < \frac{1}{10^n} \qquad \text{ou} \qquad a\,10^n < mA' - ma$$

e por consequencia

$$\frac{a}{A'} < \frac{m}{10^n + m}$$

será o erro relativo de $\sqrt[m]{A}$ menor que $\frac{1}{10^n}$, e portanto a raiz terá, como se deseja, n algarismos exactos.

Ora a expressão $\frac{a}{A'}$ representa o erro relativo do numero approximado A, ao qual se extrahe a raiz, logo este numero deve ser calculado com um erro relativo menor que $\frac{m}{10^n+m}$.

Suppondo que m é menor que 10^n, como difficilmente deixará de acontecer, e advertindo que o indice m da raiz é igual, ou superior a 2, concluir-se-ha que $\frac{m}{10^n+m}$ será, em geral, igual ou superior a $\frac{2}{10^n+10^n}$ ou $\frac{1}{10^n}$. Logo, se se fizer $\frac{a}{A'}<\frac{1}{10^n}$, ter-se-ha tambem $\frac{a}{A'}<\frac{m}{10^n+m}$.

E como para o erro relativo de A ser menor que $\frac{1}{10^n}$ basta (§ 626) que A tenha $n+1$ algarismos exactos, segue-se que, se A estiver approximado por defeito e tiver $n+1$ algarismos exactos, $\sqrt[m]{A}$ terá n algarismos exactos.

656. Problema. *Calcular o valor de* $\sqrt{\frac{7}{13}}$ *com 4 algarismos exactos.*

Reduzindo $\frac{7}{13}$ a dizima com 5 algarismos exactos e approximada por defeito, acha-se

$$\frac{7}{13}=0{,}53845\ldots$$

e, como é

$$\sqrt{0{,}53845000}=0{,}7337 \text{ proximamente}$$

segue-se que, juntando 1 ao ultimo algarismo da direita, (§ 655) se obterá

$$\sqrt{\frac{7}{13}}=0{,}7338$$

com 4 algarismos exactos.

657. Problema. *Calcular o numero de algarismos exactos com que póde obter-se* $\sqrt{0{,}04572}$, *suppondo que* 0,04572 *envolve um erro absoluto por defeito menor que* $\frac{1}{10^5}$.

Sendo $\frac{1}{10^5}$ o erro absoluto de 0,04572, serão 4 os algarismos exactos d'este numero, e, como o erro é por defeito, só se poderá contar com a exactidão de 3 algarismos da raiz (§ 655).

Extrahindo a raiz quadrada ao numero dado, até a raiz ter 3 algarismos a contar do primeiro significativo da esquerda, e juntando 1 ao ultimo d'elles (§ 624), acha-se

$$\sqrt{0{,}04572}=0{,}214$$

com 3 algarismos exactos.

658. Problema. *Calcular o numero de algarismos exactos com que póde obter-se o valor de* $\sqrt{\frac{645}{3{,}142}}$, *suppondo que* 645 *tem um erro absoluto por defeito menor que* 1 *e* 3,142 *um erro por excesso inferior a* 0,001.

O erro relativo de $\frac{645}{3{,}142}$ é (§§ 645 e 625) igual ou inferior a $\frac{1}{6.10^2}+$

$+\frac{1}{3.10^3}=\frac{1}{5.10^2}$, e, como o primeiro algarismo do quociente é 2, não se póde assegurar (§ 627) senão que o quociente terá 3 algarismos exactos.

Acha-se portanto

$$\frac{645}{3,142}=205$$

com 3 algarismos exactos e com um erro por defeito, e (§ 655)

$$\sqrt{\frac{645}{3,142}}=15$$

com 2 algarismos exactos.

659. **Problema.** *Calcular o valor*[1] *de* $16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ *com* 5 *algarismos exactos.*

Para a expressão $16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ vir com 5 algarismos exactos é preciso (§ 628) que o seu valor seja calculado com um erro relativo menor que $\frac{1}{10^5}$ e, como o factor 16 se suppõe não envolver erro algum, o factor $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ deve (§ 638) tambem ser calculado com um erro relativo inferior a $\frac{1}{10^5}$ ou (§ 626) com 6 algarismos exactos.

É necessario portanto (§ 655) obter o valor de $2-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ com 7 algarismos exactos, ou com um erro absoluto inferior a uma unidade da ordem do ultimo d'aquelles 7 algarismos, o que equivale a dizer (§ 627) que $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ deve ser calculado com um erro absoluto inferior á unidade da ordem do dito algarismo, ou com 7 algarismos exactos, e por consequencia $\sqrt{2}$ com 8 algarismos tambem exactos. Póde porém acontecer que da subtracção indicada $2-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ resulte um resto só com 6 algarismos exactos, e por isso é mais seguro calcular $\sqrt{2}$ até á oitava casa de dizima.

Effectuando as operações acha-se

$$\sqrt{2}=1,41421356\ldots \quad \text{e} \quad 2+\sqrt{2}=3,41421356\ldots$$

por defeito tendo 9 algarismos exactos, e

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}=1,8477590\ldots$$

com 8 algarismos exactos. Juntando 1 ao ultimo algarismo do numero precedentemente achado, obtem-se (§ 627)

$$2-\sqrt{2+\sqrt{2}}=0,1522409$$

com um erro absoluto por defeito inferior a $\frac{1}{10^7}$, ou com (§ 623) 7 algarismos exactos.

---

[1] A expressão $16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ representa o perimetro do polygono regular de 16 lados inscripto no circulo de raio unidade.

Continuando o calculo obtem-se

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=0{,}390180\ldots$$

com 6 algarismos exactos, ou (§ 626) com um erro relativo inferior a $\frac{2}{10^5}$ e

$$16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=6{,}24288\ldots$$

com um erro relativo inferior a $\frac{1}{10^5}$ (§ 638), e por consequencia (§ 628) com 5 algarismos exactos. Juntando 1 ao quinto algarismo, para se poderem desprezar os que se lhe seguem (§ 624), obtem-se finalmente

$$16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=6{,}2429\ldots,$$

com a approximação que se deseja.

CAPITULO IV

Operações abreviadas

660. As regras das operações sobre numeros inteiros, ou fraccionarios, expostas anteriormente, foram deduzidas na hypothese de que os numeros dados não envolviam erro algum. Quando, porém, elles estejam approximados, é possivel modifical-as, de modo que, em cada um, não se attenda senão aos algarismos, cujo desprezo possa influir no grau de approximação, que se deseja no resultado. Taes modificações tendem evidentemente a simplificar e abreviar os processos de calculo, e constituem por isso as regras sobre as operações abreviadas.

661. Addição abreviada. *Para se obter a somma de diversos numeros inteiros ou decimaes, com um erro absoluto inferior a uma unidade de certa ordem, tomam-se as parcellas com erros por defeito menores que uma unidade de ordem* 1, 2, 3, etc., *vezes menor, que a que marca a approximação da somma, conforme fôr igual, ou inferior*[1] *a* 10, 100, 1000, etc., *o numero das parcellas. Sommam-se depois os valores approximados, desprezam-se no resultado tantos algarismos, a contar da direita, quantos forem os que se tomaram em cada parcella além da approximação pedida, e junta-se* 1 *ao ultimo algarismo conservado.*

Esta regra deduz-se facilmente da relação que existe entre o erro absoluto de uma somma e os erros absolutos das parcellas.

---

[1] Póde mesmo tomar-se cada parcella com mais 1, 2, 3, etc. algarismos, que os que se pretendem na somma, quando o numero das parcellas fôr igual a 11, 101, 1001, etc. Admittindo, por exemplo, que ha 101 parcellas, e que o erro de cada uma é inferior a $\frac{1}{10^{m+2}}$ é evidente que, depois de desprezados os dois algarismos da somma, ficará esta com um erro menor que $\frac{101}{10^{m+2}}+\frac{99}{10^{m+2}}$ ou $\frac{2}{10^m}$, e por consequencia que este erro se reduzirá a menos de $\frac{1}{10^m}$ depois de se juntar 1 ao ultimo algarismo conservado.

Suppondo que a somma consta de p parcellas, e que cada uma d'estas envolve um erro absoluto e, deverá ser (§ 632)

$$e < \frac{1}{p \cdot 10^m} \quad \text{ou} \quad e < \frac{1}{p} \cdot 10^m$$

conforme se quizer que o erro absoluto da somma seja inferior a $\frac{1}{10^m}$ ou inferior a 10^m.

Quando o numero p das parcellas é igual, ou inferior a 10, basta evidentemente que seja

$$e < \frac{1}{10^{m+1}} \quad \text{ou} \quad e < \frac{1}{10} \cdot 10^m = 10^{m-1}$$

para se ter a certeza de que o erro e de cada parcella é effectivamente inferior a $\frac{1}{p \cdot 10^m}$ ou a $\frac{1}{p} \cdot 10^m$.

Logo, não excedendo a 10 o numero das parcellas, deve cada uma ter mais uma casa decimal, ou inteira, do que as que se desejam na somma. A somma traz pois um algarismo a mais, que deve ser desprezado, comtanto que se ajunte 1 ao ultimo algarismo conservado (§ 624) sempre que a somma estiver approximada por defeito.

Quando o numero p das parcellas excede a 10, mas não excede a 100 ou 10^2, isto é, quando se tem $p =$ ou < 100 basta que seja

$$e < \frac{1}{10^{m+2}} \quad \text{ou} \quad e < 10^{m-2}$$

para se ter a certeza de que será

$$e < \frac{1}{p \cdot 10^m} \quad \text{ou} \quad e < \frac{1}{p} \cdot 10^m$$

Logo, quando o numero das parcellas é superior a 10, mas não excede a 100, cada parcella deve ter mais 2 casas decimaes ou inteiras do que as que se pedem na somma.

Os dois algarismos, que a somma tem a mais, devem pois ser desprezados, juntando-se 1 ao ultimo algarismo conservado sempre que a somma fôr inferior á verdadeira.

Os exemplos seguintes indicam o modo pratico de effectuar a addição abreviada, suppondo que a primeira somma deve ter um erro absoluto inferior a $\frac{1}{10}$, e a segunda um erro inferior a 10.

52634,76|8523	52634,|768523
4206,23|514	4206,|23514
154710,43|7282	154710,|437282
164,20|73	164,|2073
82033,17|2902	82033,|172902
1652,02|3582	1652,|023582
12903,64|026	12903,|64026
308304,45	308302
308304,5 com um erro $< \frac{1}{10}$	308310 com um erro < 10

662. **Subtracção abreviada.** *Para se obter a differença de dois numeros inteiros, ou decimaes, com um erro absoluto inferior a uma unidade de certa ordem, tomam-se ambos os numeros por defeito, ou ambos por excesso, com a*

mesma approximação, que deve ter a differença, e effectua-se depois a subtracção dos numeros approximados.

Esta regra funda-se em que, estando tanto o additivo como o subtractivo approximados no mesmo sentido, o erro absoluto do resto é (§ 633) igual á differença entre os erros d'aquelles dois numeros, e por consequencia menor que o maior dos dois erros. Os exemplos seguintes mostram como se effectua a subtracção abreviada.

4857632,45|19	48576|32,4519
769324,84375	7693|24,84375
4088307,61 com um erro $< \frac{1}{10^2}$	408830 0 com um erro $< 10^2$

663. **Multiplicação abreviada**[1]. *Para se obter o producto de dois numeros inteiros, ou decimaes com um erro absoluto inferior a uma unidade de certa ordem, escreve-se o algarismo das unidades do numero, que se considera como multiplicador, por baixo do algarismo do multiplicando, que representa unidades* 10 *vezes menores do que a unidade a que se refere a approximação, e escrevem-se depois os outros algarismos do multiplicador em ordem inversa, isto é, de modo que as decimas fiquem á esquerda das unidades, estas á esquerda das dezenas, as centesimas á esquerda das decimas,* etc., etc. *Sommam-se todos os algarismos do multiplicador, que ficaram por baixo de outros algarismos do multiplicando, e junta-se a esta somma o primeiro algarismo da esquerda do multiplicando augmentado de unidade.*

Se a somma obtida não exceder 10, *multiplica-se cada algarismo do multiplicador pelo algarismo superior do multiplicando e por todos os que lhe estiverem á esquerda, escrevem-se os productos parciaes por baixo uns dos outros, de modo que os primeiros algarismos da direita fiquem na mesma linha vertical, sommam-se os mesmos productos, despreza-se o ultimo algarismo da somma, junta-se unidade ao penultimo, e colloca-se a virgula no logar correspondente á approximação, que se requer no producto.*

Se a somma dos algarismos do multiplicador, augmentada do primeiro algarismo da esquerda do multiplicando e da unidade, exceder 10, *sem comtudo ser maior que* 100, *desviar-se-ha o multiplicador invertido uma casa para a direita, a fim de que o seu algarismo das unidades fique por baixo do algarismo do multiplicando, que representa unidades* 100 *vezes menores, que as da approximação, e verifica-se novamente, se a somma dos algarismos do multiplicador escriptos por baixo dos do multiplicando, augmentada do primeiro algarismo da esquerda do multiplicando e de* 1, *é igual, ou inferior a* 100. *Suppondo que assim acontece, procede-se, como ha pouco se ensinou, com a differença, porém, de se desprezarem no producto os dois ultimos algarismos.*

Excedendo 100 *aquella somma, em que entram os algarismos do multiplicador, sem chegar comtudo a tornar-se superior a* 1000, *collocar-se-ha o algarismo das unidades do multiplicador por baixo do algarismo do multiplicando, que representa unidades* 1000 *vezes menores, que as que marcam o limite da approximação, e desprezar-se-hão no producto os tres ultimos algarismos,* etc., etc.

Sejam 372,654829 e 2,37465184 dois numeros cujo producto se pretende obter com um erro absoluto inferior a 0,01.

---

[1] Esta regra é geralmente conhecida pelo nome do seu auctor, Guilherme Oughtred, theologo e mathematico, nascido em Eton (Inglaterra) no anno de 1573.

Applicando a regra da multiplicação abreviada reconhece-se, que o algarismo das unidades do segundo numero deve ficar por baixo do algarismo das decimas millesimas do primeiro numero. Collocando os numeros em harmonia com o que acima se disse, e effectuando a multiplicação obtem-se

```
   372,65 4829
 48156 47 32
 ------------
   745 30 96
   111 79 62
    26 08 55
     1 49 04
       22 32
        1 85
           3
 ------------
   884 92(37
   884,93
```

Cada um dos productos parciaes representa decimas millesimas, e envolve um erro por defeito menor que tantas decimas millesimas, quantas são as unidades do algarismo do multiplicador correspondente ao producto que se considera.

O primeiro producto é $372,6548 \times 2$ e tem um erro igual a $0,000029 \times 2$, e por consequencia menor que $0,0001 \times 2$. O segundo producto é $372,654 \times 0,3$, ou $37,2654 \times 3$, e o seu erro é igual a $0,000829 \times 0,3$, ou menor que $0,001 \times 0,3 = 0,0001 \times 3$. O terceiro producto é $372,65 \times 0,07$ ou $3,7265 \times 7$, e envolve um erro igual a $0,004829 \times 0,07$, e portanto menor que $0,01 \times 0,07 = 0,0001 \times 7$. Todos os mais productos representam igualmente decimas millesimas e contêem erros por defeito, cujos limites se calculam do mesmo modo.

Sommando todos os productos parciaes commette-se, pois, um erro por defeito inferior a $0,0001(2+3+7+4+6+5+1)$. Além d'este erro é necessario ainda attender a outro, que é o resultante de se não terem empregado todos os algarismos do multiplicador. Este novo erro é igual a $372,654829 \times 0,00000084$ e por conseguinte menor que $400 \times 0,000001 = 4 \times 0,0001$.

Logo o erro total do producto 884,9237 é inferior a $0,0001 \times (2+3+7+4+6+5+1) + 4 \times 0,0001$ ou $(2+3+7+4+6+5+1+3+1)$ decimas millesimas. E como os dois numeros se collocaram de modo que a somma (32) d'estas decimas millesimas não fosse superior a 100, segue-se que, ainda no caso mais desfavoravel de serem noves os dois ultimos algarismos, podem estes ser desprezados, comtanto que (§ 624) se junte 1 ao ultimo dos algarismos conservados [1].

Fica pois evidente que 884,93 differe do verdadeiro producto menos de 0,01.

N'este exemplo reconhece-se tambem com facilidade, que 884,92 é outro valor do producto com um erro inferior a 0,01, porque, sendo e o erro absoluto de 884,9237, será $884,9237 + e$ o producto exacto e $0,0037 + e$ o

[1] Reconhece-se facilmente, que se póde collocar o algarismo das unidades do multiplicador uma casa á direita do algarismo do multiplicando, ao qual se refere a approximação ou 2 ou 3, etc. casas, quando a somma dos algarismos empregados do multiplicador, mais o primeiro do multiplicando e mais 1, é igual a 11 ou 101 ou 1001, etc. Ha para isto a mesma rasão, que para a addição abreviada (V. a nota ao § 661).

erro de 884,92. Mas o erro *e* não póde deixar de ser inferior a 0,0032, como acima se provou, logo o erro total de 844,92 é menor que 0,0037+ +0,0032 ou 0,0069, e por consequencia menor ainda que 0,01.

664. No exemplo do § precedente a approximação dos dois factores é tal, que podem reputar-se exactos todos os algarismos do multiplicando e do multiplicador empregados na multiplicação abreviada. Quando isto não acontece, é necessario juntar ao erro devido a não serem empregados todos os referidos algarismos, os erros provenientes: 1.° de não serem conhecidos todos os algarismos do multiplicando, que deviam ser empregados; 2.° de não se formarem os productos parciaes correspondentes a algarismos desconhecidos do multiplicador.

Conhecida a somma de todos os erros, é facil decidir, se o producto póde ser, ou não calculado com a approximação, que se deseja. O exemplo seguinte mostra, como podem ser calculados os novos erros.

665. **Problema.** *Calcular abreviadamente o producto dos numeros* 2,645 *e* 1,259 *approximados por defeito até* 0,001.

Sabe-se já que este producto obtido pelo methodo ordinario (§ 641) tem um erro inferior a 0,01. Procure-se, pois, o producto com a approximação de 0,01 pelo methodo abreviado (§ 663) e avalie-se a importancia dos novos erros que d'ahi resultam. Effectuando a multiplicação abreviada obtem-se

```
  2,64 50...
...95 21
-----------
  2 64 50
    52 90
    13 20
     2 34
.........
-----------
  3 32(94
  3,33
```

O erro do primeiro producto parcial é evidentemente maior, do que seria, se o algarismo das decimas millesimas do multiplicando fosse conhecido. Este erro é comtudo menor que $0,0010 \times 1$. Os outros productos parciaes envolvem erros, que se calculam pelo modo já conhecido. A parte desconhecida do multiplicador é inferior a 0,001, e o producto d'ella pelo multiplicando é portanto menor que $0,001 \times 2,645$, e por consequencia menor ainda que $0,001 \times 3$. Referindo todos estes erros a decimas millesimas e reunindo-os, acha-se

erro do primeiro producto	$< 10 \times 0,0001$
erro do segundo producto	$< 2 \times 0,0001$
erro do terceiro producto	$< 5 \times 0,0001$
erro do quarto producto	$< 9 \times 0,0001$
erro proveniente da falta de productos parciaes	$< 30 \times 0,0001$
erro da somma 3,3294	$< 56 \times 0,0001$

O producto 3,32 envolve pois um erro por defeito menor que 0,0094+ +0,0056 ou 0,0150, e por consequencia o erro com que fica 3,33 é inferior á differença entre 0,0150 e 0,01, isto é, menor ainda que 0,01.

666. **Divisão abreviada.** *Para se obter o quociente resultante da divisão de dois numeros inteiros, ou decimaes com um erro inferior a uma unidade*

de certa ordem, multiplicam-se ou dividem-se os dois numeros por a mesma potencia de 10, a fim de que o divisor venha inteiro, e desloca-se depois a virgula no dividendo para a direita, ou para a esquerda, até que o novo algarismo das unidades seja o que, antes d'esta mudança da virgula, representava unidades da ordem a que se refere a approximação com que se quer o quociente.

Determina-se o numero de algarismos do quociente approximado e multiplica-se por 9 esse numero. O ultimo divisor *é formado pelos primeiros algarismos da esquerda do divisor proposto, que dão um numero igual, ou superior áquelle producto. O* primeiro divisor *é formado pelo ultimo divisor seguido de tantos algarismos do divisor proposto, quantos são os algarismos do quociente approximado menos um.*

Desprezam-se ou riscam-se no divisor todos os algarismo que estão á direita do primeiro divisor, e no dividendo todos os que pertencem á parte decimal e tantos da inteira a contar da direita, quantos são os que no divisor proposto estão depois do ultimo divisor.

Divide-se a parte conservada no dividendo, que é o primeiro dividendo parcial, pelo primeiro divisor, e obtem-se o primeiro algarismo do quociente e o primeiro resto. Este resto, tomado como segundo dividendo parcial, divide-se pelo segundo divisor, que é o numero que se obtem, quando ao primeiro divisor se risca o ultimo algarismo da direita. Acha-se assim o segundo algarismo do quociente e o segundo resto, ou terceiro dividendo parcial. Risca-se o ultimo algarismo da direita do segundo divisor, e divide-se pelo numero resultante o terceiro dividendo parcial, e assim se continua até estarem determinados todos os algarismos com que deve ficar o quociente. Colloca-se finalmente a virgula n'este quociente na posição, que deve ter para o quociente vir com a approximação que se requer.

Sejam 300,73360754 e 468,432 o dividendo e divisor de uma divisão, cujo quociente se pretende obter com um erro absoluto inferior a 0,001.

Para se effectuar a divisão é necessario (§ 246) tornar inteiro o divisor, reduzindo portanto os dois numeros dados a 300733,60754 e 468432. Multiplicando por 1000 o dividendo 300733,60754, e dividindo o producto 300733607,54 por 468432 obtem-se um quociente mil vezes maior que o verdadeiro. Basta pois dividir o primeiro d'estes dois numeros pelo segundo, de modo que o erro do quociente seja menor que 1, e dividir depois por 1000 o quociente approximado até ás unidades, para se obter o quociente de 300,73360754 por 468,432 com um erro inferior a 0,001. É o mesmo que se faz (§ 231), quando se quer achar o valor de um quebrado com um erro inferior a 0,001.

Comparando o dividendo 300733607,54 com o divisor 468432 reconhece-se facilmente (§ 82), que a parte inteira do quociente consta de 3 algarismos, e portanto que o ultimo divisor ha de, segundo a regra, ser igual ou superior a 3×9 ou 27. O ultimo divisor é pois 46 e o primeiro 4684.

No divisor devem por consequencia desprezar-se dois algarismos, e no dividendo hão de desprezar-se, além dos que estão á direita da virgula, quatro da parte inteira, isto é, tantos, quantos são os algarismos escriptos á direita de 46 no divisor dado.

Effectuando a divisão, como abaixo se vê, isto é, segundo a regra enunciada

```
30073|3607,54 | 4684|32
 1969|         642
   97|
    5|
```

acha-se para quociente approximado até millesimas 0,642.

Conhecido o quociente incompleto 6 da primeira divisão parcial multiplicou-se o seu valor relativo 600, não por o divisor completo, mas por 468400, e subtrahiu-se o producto obtido 281040000 do dividendo proposto, como em seguida se vê:

```
30073|3607,54 | 4684|32
28104|0000     642
 1969|3607,54
 1872|0000
   97|3607,54
   92|0000
    5|3607,54
```

N'esta subtracção o resto 19693607,54 é maior do que seria se se tivesse multiplicado 600 por todo o divisor.

Dividindo 1969 pelo segundo divisor 468, multiplicando o quociente 4 por 468, ou antes 40 por 468000, e subtrahindo o producto 18720000 do resto anterior, obtem-se um segundo resto, que tambem ha de ser maior do que o que ficaria, se a divisão se fizesse pelo methodo ordinario, porque, além do additivo ter augmentado, o numero que se lhe subtrahe é menor do que deve ser. Continuando a raciocinar por este modo, conclue-se que nas successivas subtracções, que se vão effectuando, os restos são sempre maiores do que seriam, se não se tivesse empregado o methodo abreviado, e portanto que é

$$53607,54 > 300733607,54 - 468432 \times 642$$

Subtrahindo, porém, do ultimo resto 53607,54, os productos parciaes 600×32, 40×432 e 2×8432, que deixaram de ser subtrahidos nas successivas subtracções, obtem-se evidentemente um resto igual ao que fica depois de effectuada a subtracção $300733607,54 - 468432 \times 642$, logo

$$300733607,54 - 468432 \cdot 642 = 53607,54 - (32 \cdot 600 + 432 \cdot 40 + 8432 \cdot 2)$$

Basta, pois, que o segundo membro seja menor que o divisor 468432 para 642 differir de 300733607,54:468432 menos de unidade.

Ora o segundo membro é uma subtracção indicada, e por isso, se cada um dos seus dois termos fôr menor que o divisor, o resto ha de necessariamente ser inferior a 468432.

Dos dois termos o primeiro, 53607,54, é sem duvida menor que 468432, porque, sendo 5 o resto da ultima divisão parcial, é 5 menor que o ultimo divisor 46, e o numero inteiro 53607 formado do algarismo 5 seguido de 4 algarismos inteiros, ou mesmo 53607,54 será tambem menor que 46 seguido de outros 4 algarismos.

O segundo termo da subtracção, ou $32 \times 600 + 432 \times 40 + 8432 \times 2$, é tambem menor que 468432. Com effeito, esta somma é igual ao erro, que se commetteria na multiplicação de 468432 por 642, se se empregasse o methodo abreviado, escrevendo os factores como em seguida se vê:

$$\begin{array}{r} 468432 \\ 246 \\ \hline 28104 \\ 1872 \\ 92 \\ \hline 30068 \end{array}$$

e este erro é (§ 663) menor que $(6+4+2)\times 10000$, isto é, menor que tantas dezenas de milhar, quantas são as unidades contidas na somma dos algarismos do quociente approximado.

Ainda que todos estes algarismos fossem noves, o erro do producto seria inferior a 9×3 dezenas de milhar, e como o ultimo divisor 46 foi escolhido com a condição de ser igual ou superior a 9×3 segue se que 270000 deve ser menor que o divisor proposto 468432, o qual com maior rasão excederá tambem a $32\times 600+432\times 40+8432\times 2$.

De tudo isto se conclue[1] que 642 differe menos de 1 do quociente indicado 300733607,54 : 468432, e que 0,642 differe menos de 0,001 do quociente 300733,60754 : 468432 ou de

300,73360754 : 468,432

667. Quando o numero de algarismos do divisor não chega para se formar o *primeiro divisor*, multiplicam-se o dividendo, e o divisor depois de reduzido a inteiro, por uma potencia tal de 10, que o divisor fique com o numero necessario de algarismos, ou começa-se a divisão pelo methodo ordinario, passando d'este para o abreviado, logo que o divisor possa tomar-se como *primeiro divisor* em relação á parte do quociente, que estiver por calcular.

Sejam 63583497,2165 e 4635 o dividendo e divisor de uma divisão, na

---

[1] M. Guy deu em 1845 uma nova regra de divisão abreviada, cuja demonstração se encontra no *Tratado de arithmetica* de J. A. Serret, publicado em Paris no anno de 1852, nas *Lições de arithmetica* de D. Ambrosio Moya, impressas em Madrid em 1867 e em outros livros. As differenças entre a regra de Guy e a que acima expozemos reduzem-se a duas, que são: 1.ª, fazer o ultimo divisor igual, ou superior a $2n\times 0,9$, ou $n\times 1,8$, designando n o numero de algarismos do quociente approximado; 2.ª, aproveitar, em cada uma das multiplicações dos algarismos do quociente pelo divisor, as dezenas do producto dos mesmos algarismos pelo algarismo situado á direita do numero, que está servindo de divisor. Assim, depois de se ter achado no exemplo do texto o algarismo 6 do quociente, em vez de o multiplicar pelo primeiro divisor 4684, multiplica-se por este divisor seguido do algarismo 3 e despreza-se no producto 281058 o ultimo algarismo 8. É pois 28105 o numero que se subtrahe de 30073 e não 28104, como acima se fez. O methodo de Guy abrevia algumas vezes a divisão, por tomar para ultimo divisor um numero geralmente menor; mas, em compensação, tem o inconveniente de attender ás dezenas provenientes de multiplicações por algarismos desprezados.

Os inglezes e allemães empregam outra regra de divisão abreviada, que se reduz a formar o primeiro divisor com tantos algarismos do divisor proposto, quantos são os algarismos do quociente approximado mais um e a approximar até meia unidade da ordem do ultimo algarismo cada producto do divisor por um algarismo do quociente. No mais seguem exactamente a regra acima exposta. Quando o quociente approximado tem mais algarismos que o divisor dado, fazem a divisão pelo modo ordinario, até que o numero dos algarismos do quociente por determinar, seja igual ao numero de algarismos do divisor.

qual se quer o quociente com um erro inferior a 1. O quociente approximado tem 5 algarismos, e por consequencia o ultimo divisor tem de ser igual, ou superior a 5×9 ou 45. O ultimo divisor é pois 46, e o primeiro constará portanto de $2+4$ ou 6 algarismos. Vê-se, pois, que, ou se ha de multiplicar por 100, isto é, 10^2, tanto o dividendo como o divisor, ou se hão de calcular os tres primeiros algarismos pelo methodo ordinario e os dois restantes pelo methodo abreviado.

Estes dois modos de proceder são identicos, como facilmente se verifica nas seguintes divisões:

635834	9721,65	463500	63583497,2165	4635
172334		13718	17233	13718
33284			33284	
839			839	
376			376	
8			8	

668. Augmentando os restos successivamente na divisão abreviada é possivel que um d'elles, considerado como dividendo, chegue a ser 10 vezes maior que o seu divisor. Quando isto acontecer, é desnecessario continuar a divisão, porque juntando 1 ao ultimo algarismo achado no quociente, e escrevendo á direita d'elle tantos zeros, quantos são os algarismos que faltam, tem-se o quociente.

Procurando pelo methodo abreviado o quociente com um erro inferior a 1 de 189537243,127 dividido por 47385 acha-se

189537	243,127	47385
47382		3 (10)
2		

Dos quatro algarismos, que deve ter o quociente, o primeiro é 3, o segundo póde suppor-se que é 10, e os dois ultimos são evidentemente zeros. Logo o numero pedido é 4000. N'este exemplo não ha duvida de que os dois ultimos algarismos são zeros, porque o resto 2 é menor que o ultimo divisor.

É facil comtudo provar, que o mesmo acontecerá sempre que se obtiver o quociente 10 n'alguma divisão parcial

Com effeito, por serem 47382 e 47385 o resto e o divisor de uma divisão, será

$$47382 < 47385 = 4738 \times 10 + 5$$

e, por ser 10 o quociente resultante da divisão de 47382 por 4738, será

$$47382 > 4738 \times 10$$

Logo é

$$4738 \times 10 < 47382 < 4738 \times 10 + 5$$

e portanto a differença entre o dividendo 47382 e o producto do divisor 4738 pelo quociente 10 é inferior ao algarismo das unidades, 5, do divisor antecedente 47385.

Mas o quociente não póde deixar de ter dois, ou mais algarismos, visto que só em uma das divisões parciaes se obtem o quociente 10, logo o ultimo divisor ha de ser igual, ou superior a 2×9 ou 18, e consequente-

mente ha de ser tambem superior ao resto da divisão anterior, o qual, como se demonstrou, é inferior[1] a 10.

669. Quando se demonstrou a regra da divisão abreviada (§ 666), suppoz-se que todos os algarismos do quociente eram noves, porque só assim se podia ter a certeza, de que o ultimo divisor era maior que a somma de todos os algarismos do quociente.

Representando, porém, estes algarismos os quocientes incompletos resultantes das diversas divisões parciaes e podendo succeder que algum dos quocientes seja 10, segue-se que, se por acaso forem noves todos os quocientes menos o ultimo e este fôr 10, a somma de todos os referidos quocientes parciaes, ou de todos os algarismos do quociente total, se tornará superior a $9n$, designando n o numero de divisões parciaes. N'este caso muito especial póde haver incerteza sobre a exactidão da regra da divisão abreviada. Como acontece, porém, que o quociente se reduz então a unidade seguida de zeros, segue-se que será muito facil, multiplicando-o pelo divisor, verificar se elle satisfaz.

Na seguinte divisão abreviada dão-se effectivamente estas circumstancias particulares, e por isso é necessario verificar, se o quociente dado pela operação tem um erro inferior a 1.

```
367528|254 | 36754
 36742|     999(10)
  3667|
   364|
     4|
```

O quociente dado por este processo é 999(10) ou 10000, e o producto do divisor pelo quociente é 367540000. Este producto excede o dividendo, porém, como o excesso 11746 é menor que o divisor, 10000 é realmente um valor approximado por excesso do quociente com um erro inferior a 1.

670. **Extracção abreviada da raiz quadrada.** *Para se obter a raiz quadrada de um numero inteiro, ou decimal, com um erro inferior a uma unidade de certa ordem, determinam-se pelo methodo ordinario* (§ 280) *mais de metade dos algarismos da raiz, e baixa-se para a direita do resto a classe immediata e todas as que se lhe seguem; divide-se o numero assim formado pelo dobro da raiz achada seguido de tantos zeros, quantos são os algarismos da raiz, que estão por determinar. Escrevendo á direita da raiz achada o quociente approximado até ás unidades, que resultou d'esta divisão, tem-se a raiz quadrada do numero dado, com um erro por defeito, ou por excesso, inferior á unidade escolhida.*

O erro da raiz será por defeito, ou por excesso conforme o resto da divisão fôr maior, ou menor que o quadrado do quociente incompleto. Quando este

---

[1] Em geral, representando por $d \cdot 10 + u$ o divisor de uma das divisões parciaes e por u o seu algarismo das unidades, será d o divisor da divisão immediata. Sendo R o resto correspondente áquella divisão, ou o dividendo d'esta será $R < d \cdot 10 + u$ e por hypothese $R : d > 10$ ou $R > d \times 10$.

Logo é $d \times 10 < R < d \times 10 + u$, e portanto o resto da segunda divisão, isto é, $R - d \times 10$, não póde deixar de ser menor que o numero digito u. E como a hypothese de ser 10 um dos quocientes parciaes não póde verificar-se, sem que o quociente procurado tenha 2 ou mais algarismos, segue-se que, quando ella se realisar, o ultimo divisor tem 2 ou mais algarismos, e é por consequencia maior que o resto $R - d \times 10$.

resto é igual ao quadrado do quociente incompleto, o numero dado é um quadrado perfeito.

Seja N um numero, cuja raiz quadrada approximada até ás unidades tem 5 algarismos, dos quaes os tres primeiros são 3, 2 e 6.

A raiz achada é, n'este exemplo, 326 ou antes 326×10^2.

Designando por q e r o quociente incompleto e o resto resultantes da divisão de $N-(326 \times 10^2)^2$ por $2(326 \times 10^2)$ tem-se (§ 81)

$$N-(326 \times 10^2)^2 = 2(326 \times 10^2)\,q + r \qquad \text{sendo} \qquad r < 2(326 \times 10^2)$$

D'esta igualdade deduz-se (§ 32)

$$N = (326 \times 10^2)^2 + 2(326 \times 10^2)\,q + r$$

e juntando e subtrahindo q^2 ao segundo membro, vem (§ 268)

$$N = (326 \times 10^2 + q)^2 - q^2 + r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Suppondo que é $r > q^2$ tem-se (1)

$$N > (326 \times 10^2 + q)^2 \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{N} > 326 \times 10^2 + q$$

Reconhece-se, porém, que N é inferior ao quadrado, $(326 \times 10^2 + q + 1)^2$, do numero inteiro immediatamente superior a $326 \times 10^2 + q$, porque sendo (§ 268)

$$(326 \times 10^2 + q + 1)^2 = (326 \times 10^2 + q)^2 + 2(326 \times 10^2 + q) + 1$$

e

$$r - q^2 < r < 2(326 \times 10^2)$$

será necessariamente

$$(326 \times 10^2 + q + 1)^2 > (326 \times 10^2 + q)^2 + r - q^2 = N$$

Logo é

$$326 \times 10^2 + q < \sqrt{N} < 326 \times 10^2 + q + 1$$

e por consequencia $326 \times 10^2 + q$ é o valor de $\sqrt{N}$ approximado por defeito até ás unidades (§ 265). Subtrahindo $(326 \times 10^2 + q)^2$ de N obtem-se a differença $r - q^2$ igual ao resto da extracção da raiz quadrada de N.

Suppondo que é $r < q^2$ tem-se (1)

$$N < (326 \times 10^2 + q)^2 \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{N} < 326 \times 10^2 + q$$

Reconhece-se, porém, que N é superior ao quadrado, $(326 \times 10^2 + q - 1)^2$, do numero inteiro immediatamente inferior a $326 \times 10^2 + q$ porque, sendo (§ 272)

$$(326 \times 10^2 + q)^2 - (326 \times 10^2 + q - 1)^2 = 2(326 \times 10^2 + q - 1) + 1$$

será

$$(326 \times 10^2 + q - 1)^2 = (326 \times 10^2 + q)^2 - [2(236 \times 10^2 + q - 1) + 1]$$

e sendo $q < 326$ e $q < 10^2$, visto que o quociente q tem só 2 algarismos, será $q^2 < 326 \times 10^2$ e

$$q^2 - r < q^2 < 326 \times 10^2$$

e ter-se-ha finalmente

$$(326 \times 10^2 + q - 1)^2 < (326 \times 10^2 + q)^2 - q^2 + r = N$$

Logo é

$$326 \times 10^2 + q - 1 < \sqrt{N} < 326 \times 10^2 + q$$

e por consequencia $326 \times 10^2 + q$ é o valor de $\sqrt{N}$ approximado até ás unidades (§ 265) com um erro por excesso. O valor de $\sqrt{N}$ approximado até ás unidades com um erro por defeito é $326 \times 10^2 + q - 1$. O resto que se obteria na extracção da raiz quadrada de N, é igual ao excesso de N sobre $(326 \times 10^2 + q - 1)^2$. Effectuando esta subtracção acha-se (§ 272)

$$[(326 \times 10^2 + q)^2 - q^2 + r] - (326 \times 10^2 + q - 1)^2 = \\ = 2(326 \times 10^2 + q - 1) + 1 + r - q^2$$

Logo, quando é $r < q^2$, o resto da extracção da raiz quadrada obtem-se subtrahindo q^2 da somma de r com o dobro da raiz achada, $(326 \times 10^2 + q - 1)$, augmentado de 1.

Suppondo finalmente que é $r = q^2$ tem-se (1)

$$N = (326 \times 10^2 + q)^2$$

e portanto a raiz de N é $326 \times 10^2 + q$ exactamente.

671. **Problema.** *Extrahir a raiz quadrada de* 1065697659 *abreviadamente com um erro inferior a* 1.

A raiz tem (§ 274) 5 algarismos, e portanto basta empregar uma divisão, para se obterem os dois ultimos algarismos, depois de conhecidos os tres primeiros.

```
√10'65'69'76'59 | 32645
 9               62×2
 165             646×6
  4169
   29376(59     | 652(00
    3296          45
      36
```

N'este exemplo é $r = 3659$, $q^2 = (45)^2 = 2025$ e portanto $r > q^2$, logo (§ 670)

$$\sqrt{1065697659} = 32645 \text{ com um erro por defeito menor que } 1$$

672. Depois de se terem determinado m algarismos da raiz quadrada de um numero por o methodo abreviado, póde empregar-se o mesmo methodo, para se obterem os $m-1$ algarismos seguintes, comtanto, porém, que, antes de se proceder á segunda divisão, se compare o resto r da primeira com o quadrado, q^2, do quociente incompleto achado na mesma divisão, a fim de reduzir-se aquelle resto ao que se acharia, se não se tivesse seguido o methodo abreviado.

Se por acaso fôr $r > q^2$ será necessario subtrahir q^2 de r para se ter (§ 670) o resto $r - q^2$ que junto com as $m-1$ classes seguintes ha de dividir-se pelo dobro da raiz achada.

Se fôr $r < q^2$ tomar-se-ha $q-1$ para segunda parte da raiz e $r + [2(326 \times 10^2 + q - 1) + 1] - q^2$, para resto da extracção da raiz quadrada. Obtido o valor d'este resto, escrevem-se-lhe á direita as $m-1$ classes seguintes e divide-se o numero resultante pelo dobro da raiz achada seguido de tantos zeros, quantos são os algarismos, que faltam para determinar.

Para esclarecer isto procure-se o valor de $\sqrt{2}$ com 17 algarismos ou 16 casas de dizima. N'esta extracção de raiz os primeiros 3 algarismos são de-

terminados pelo methodo ordinario e os dois seguintes deduzem-se pelo methodo abreviado, depois de conhecidos os tres primeiros algarismos. Subtrahindo de 5600, que é o valor de r, $(42)^2$ ou q^2 acha-se o resto $r-q^2$ ou 3836 adiante do qual se escrevem 4 classes de 2 algarismos. Dividindo este numero pelo dobro da raiz achada seguido de 4 zeros, acham-se mais 4 algarismos da raiz, etc.

Eis aqui o typo da operação:

```
√2                                  | 1,41 42 1356 23730950
 1                                                  24×4
 100                                               281×1
   400
   11900(00  | 282(00
     620       42
     r=5600
q²=42²=1764
r—q²... 38360000(0000  | 28284(0000
        100760          1356
         159080
          176600
         r'=68960000
q'²=(1356)²= 1838736
r'—q'²...... 6712126400000000(00000000 | 282842712(00000000
             1055272160                  23730950
              2067440240
               875412560
                2688442400
                 1428579920
                   14366360
```

$\sqrt{2}=1{,}4142135623730950$ com um erro absoluto inferior a $\frac{1}{10^{16}}$

CAPITULO V

Annuidades

673. **Annuidade** *é a quantia que se paga annualmente durante certo tempo para se extinguir ou amortisar alguma divida.*

O valor da *annuidade* deve ser tal que chegue para pagamento dos juros vencidos no fim de cada anno, e de uma parte do capital em divida.

A parte da annuidade destinada para pagamento da divida chama-se *prestação para amortisação*, ou simplesmente *amortisação*.

Seja A a divida, ou o capital primitivamente emprestado, $R:100=r$ o juro de 1 real em 1 anno, a o valor de cada annuidade e t o numero de annuidades, isto é, o numero de annos que dura a amortisação da divida.

A divida A contrahida no principio de certo anno (§ 528) estará elevada a $A(1+r)$ no fim de um anno, se o devedor, antes de terminar este praso, nada tiver pago ao credor. Suppondo, porém, que no fim do primeiro anno o devedor pagou a annuidade a ao credor, a divida ficará reduzida a

$$A_1=A(1+r)-a$$

no fim do primeiro anno ou no principio do segundo.

A divida A_1, existente no principio do segundo anno, estará reduzida no fim d'este anno a

$$A_2 = A_1(1+r) - a$$

depois de paga a segunda annuidade a.

Substituindo n'esta expressão o valor achado precedentemente para A_1 obtem-se

$$A_2 = A(1+r)^2 - a(1+r) - a$$

e, continuando a discorrer do mesmo modo, obtem-se successivamente

$$A_3 = A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) - a$$
$$A_4 = A(1+r)^4 - a(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) - a$$

e em geral

$$A_{t'} = A(1+r)^{t'} - a(1+r)^{t'-1} - a(1+r)^{t'-2} - \cdots - a(1+r) - a$$

designando A_3, $A_4, \ldots A_{t'}$ a importancia da divida no fim de 3, 4,... t' annos.

A expressão precedente póde converter-se em

$$A_{t'} = A(1+r)^{t'} - [a(1+r)^{t'-1} + a(1+r)^{t'-2} + \cdots + a(1+r) + a]$$

e, notando que o termo subtractivo é a somma de t' termos de uma progressão geometrica, cuja rasão é $1+r$, se porventura se considerar a como primeiro termo e $a(1+r)^{t'-1}$ como ultimo, ter-se-ha (§ 387)

$$A_{t'} = A(1+r)^{t'} - \frac{a(1+r)^{t'} - a}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Esta formula (1) póde tambem deduzir-se do seguinte modo.

O sujeito, que recebeu a quantia A emprestada, será no fim de t' annos devedor da quantia $A(1+r)^{t'}$, se em todo este periodo nada pagar de capital, nem de juros.

O sujeito que emprestou no fim de cada anno a prestação a, durante t' annos successivos, será no fim dos t' annos credor da somma

$$a(1+r)^{t'-1} + a(1+r)^{t'-2} + \cdots + a(1+r) + a$$

cujo valor se sabe que é

$$\frac{a(1+r)^{t'} - a}{r}$$

Logo no fim de t' annos o sujeito, que tenha recebido uma vez A e emprestado t' vezes a, será devedor ou credor de

$$A_{t'} = A(1+r)^{t'} - \frac{a(1+r)^{t'} - a}{r}$$

devedor se o segundo membro fôr positivo, credor se fôr negativo.

Por esta formula (1) póde calcular-se a importancia da divida no fim de t' annos, suppondo que em cada um d'elles se pagou uma annuidade constante a e que a taxa $R = 100r$ conservou sempre o mesmo valor.

Admittindo que a divida ficou extincta depois de pagas t annuidades, isto é, suppondo $A_t = 0$ a formula (1) converter-se-ha em

$$A(1+r)^t = \frac{a(1+r)^t - a}{r}$$

D'esta igualdade deduz-se

$$Ar(1+r)^t = a(1+r)^t - a$$

e

$$a = \frac{Ar(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Esta igualdade constitue a *formula das annuidades* e serve para calcular qualquer das quatro quantidades A, a, r e t, quando se conhecem as tres restantes.

674. Convém observar, que a formula das annuidades deixa de ser exacta, quando fôr $a <$ ou $= Ar$.

Com effeito, dividindo por Ar ambos os membros, obtem-se a igualdade

$$\frac{a}{Ar} = \frac{(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$$

na qual, por ser o segundo membro um quebrado improprio, deverá o primeiro membro ser maior que 1.

Reconhece-se directamente, que, se fosse $a = Ar$, a primeira annuidade chegaria apenas para pagar o juro do primeiro anno, e por consequencia que a divida A passaria para o segundo anno sem amortisação alguma e do mesmo modo chegaria ao fim do terceiro, quarto,... anno exactamente com o mesmo valor, que tinha primitivamente. Logo a hypothese $a = Ar$ é incompativel com a hypothese $A_t = 0$. Sendo $a < Ar$, a primeira annuidade não chega nem para pagar o juro do primeiro anno e por consequencia a divida no fim do primeiro anno será ainda maior do que era no principio. Não chegando a para pagamento do juro vencido por A em 1 anno com maior rasão não chegará para pagamento do juro vencido por A_1 em 1 anno, visto que é $A_1 > A$. Logo na hypothese de ser $a < Ar$ a divida vae augmentando de anno para anno, isto é, $A < A_1 < A_2 \ldots$ e portanto jámais chegará a ser $A_t = 0$.

675. Substituindo o valor da annuidade a na formula (1), obtem-se outra formula que dá a importancia da divida no fim de t' unidades de tempo expressa nas quantidades A, r, t' e t.

Fazendo a substituição e reduzindo ao mesmo denominador os dois termos do segundo membro, acha-se

$$A_{tt'} = \frac{Ar\{(1+r)^t - (1+r)^{t'}\}}{r\{(1+r)^t - 1\}}$$

ou

$$A_{tt'} = \frac{A\{(1+r)^t - (1+r)^{t'}\}}{(1+r)^t - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

676. Sabe-se já (§ 674) que, para haver amortisação, deve ser $a > Ar$. Verificando-se esta desigualdade, a quantidade a deve comprehender duas partes, das quaes uma, cujo valor vae diminuindo de anno para anno, representa o juro vencido em cada unidade de tempo pelo capital em divida, e a outra, que vae augmentando successivamente, representa propriamente a *amortisação*. É facil obter formulas, que dêem separadamente os valores d'estas duas partes da annuidade.

Mudando na formula (3) t' em $t'-1$ obtem-se a importancia da divida

$$A_{t'-1}=\frac{A\{(1+r)^t-(1+r)^{t'-1}\}}{(1+r)^t-1}$$

depois de pagas $t'-1$ annuidades.

Designando por $J_{t'}$ o juro pago no fim de t' unidades de tempo, será $J_{t'}=A_{t'-1}\times r$ e por consequencia

$$J_{t'}=\frac{Ar\{(1+r)^t-(1+r)^{t'-1}\}}{(1+r)^t-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Designando por $P_{t'}$ a prestação correspondente ao fim do anno t', será evidentemente

$$P_{t'}=a-J_{t'}=\frac{Ar(1+r)^t}{(1+r)^t-1}-\frac{Ar\{(1+r)^t-(1+r)^{t'-1}\}}{(1+r)^t-1}$$

e effectuando as operações

$$P_{t'}=\frac{Ar(1+r)^{t'-1}}{(1+r)^t-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

677. **Problema.** *Que* annuidade *deve pagar um mutuario, que levantou* 25 *contos de réis emprestados da* Companhia geral de credito predial portuguez, *suppondo que pelo seu contracto a divida ha de ser amortisada em* 15 *annos e o juro pago na rasão de* 5 % *ao anno? Qual é o valor do juro e o da amortisação semestral no fim de* 6 *annos?*

Cada annuidade comprehende: 1.° o *juro do capital* mutuado; 2.° a *amortisação;* 3.°, a *commissão* de gerencia, que tem sido de $\frac{4}{5}$ % do capital mutuado, e pode ser elevada até 1 % do mesmo capital.

Em cada semestre o mutuario tem de pagar meia annuidade, ou uma *prestação semestral*, e, como as *taboas dos annuidades* da companhia foram construidas na hypothese dos juros se accumularem aos capitaes de seis em seis mezes, o calculo tem de ser feito suppondo t igual a 30 na formula das annuidades, a qual por isso dá apenas o valor de *meia annuidade diminuida de metade da commissão.*

Substituindo na formula (2) as letras pelos seus valores numericos, tem-se

$$a'=\frac{25000000\times0{,}025(1{,}025)^{30}}{(1{,}025)^{30}-1}$$

porque, sendo 0,05 o juro de 1 real n'um anno, será 0,025 o juro de 1 real em um semestre.

Empregando os logarithmos, acha-se

$$(1{,}025)^{30}=2{,}097567$$

e, substituindo este valor e tornando a applicar os logarithmos, vem

$$a'=\frac{25000000\times0{,}025\times2{,}097567}{1{,}097567}=1194\$441 \text{ réis}$$

Juntando a este valor de a' metade da *commissão de gerencia* tem-se a importancia de uma *prestação semestral.* Representando por c a *commissão de gerencia*, é

$$100:\frac{4}{5}::25000000:c \qquad \text{e} \qquad c=200\$000 \text{ réis}$$

O valor de cada *prestação semestral* é pois

$$a' + \frac{1}{2}c = 1294\$441 \text{ réis}$$

e o de cada *annuidade*

$$a = 2a' + c = 2588\$882 \text{ réis}$$

A parte a' da *prestação semestral* comprehende duas parcellas, juro e amortisação, variaveis de semestre para semestre. As formulas (4) e (5) dão os valores d'ellas para qualquer numero t' de semestres. No fim de 12 semestres é

$$(1,025)^{11} = 1,312087$$

e portanto

$$J_{12} = \frac{25000000 \times 0,025[(1,025)^{20} - (1,025)^{11}]}{(1,025)^{20} - 1} = 447\$285 \text{ réis}$$

$$P_{12} = \frac{25000000 \times 0,025 \times (1,025)^{11}}{(1,025)^{20} - 1} = 747\$156 \text{ réis}$$

Sommando estas duas parcellas com metade da *commissão de gerencia* acha-se com effeito a *prestação semestral* 1:294$441 réis.

678. **Problema.** *Um proprietario levantou emprestados* 40 *contos de réis da* Companhia geral de credito predial portuguez *com a condição de os amortisar em* 50 *annos, pagando juros na rasão de* 6 % *ao anno. Pergunta-se qual é a importancia da divida no fim de* 24 *annos*, isto é, *depois de estarem pagas* 48 *prestações semestraes, e qual é na mesma época o valor do juro e da amortisação semestraes.*

Substituindo na formula (3) os valores $A = 40:000\$000$, $t = 100$ semestres, $t' = 48$ semestres e $r = 0,03$, tem-se

$$A_{48} = \frac{40000000\{(1,03)^{100} - (1,03)^{48}\}}{(1,03)^{100} - 1}$$

Empregando os logarithmos acha-se

$$(1,03)^{100} = 19,2185 \qquad (1,03)^{48} = 4,1322$$

Entrando com estes valores na formula, e effectuando as operações, obtem-se para importancia da divida no fim de 48 semestres

$$A_{48} = 32:123\$034 \text{ réis}$$

Procedendo do mesmo modo com a formula (4), e advertindo que $(1,03)^{47} = 4,0119$, acha-se para valor do juro correspondente ao ultimo dos 48 semestres

$$J_{48} = 1:001\$615 \text{ réis}$$

Finalmente, recorrendo á formula (5), acha-se

$$P_{48} = 264\$250 \text{ réis}$$

679. Da formula (2) das annuidades tira-se

$$A = \frac{a[(1+r)^t - 1]}{r(1+r)^t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Esta formula serve para calcular a importancia do capital mutuado, ou da divida, quando se conhecem os valores de a, r e t.

Da mesma formula se deduz o valor de t, como em seguida se vê:

$$a(1+r)^t - a = Ar(1+r)^t$$
$$(a - Ar)(1+r)^t = a$$
$$\lg.(a - Ar) + t \lg.(1+r) = \lg. a$$
$$t = \frac{\lg. a - \lg.(a - Ar)}{\lg.(1+r)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

O valor da *taxa* r é o unico impossivel de calcular directamente pelos meios elementares [1].

---

[1] Da formula das unidades (§ 673) tira-se

$$r = \frac{a}{A} - \frac{a}{A(1+r)^t}$$

Considerando $\frac{a}{A}$ como um valor approximado de r, que designaremos por r_1, e calculando $\frac{a}{A(1+r_1)^t}$ por logarithmos, ter-se-ha um segundo valor r_2 mais approximado de r igual a $\frac{a}{A} - \frac{a}{A(1+r_1)^t}$. Procedendo depois com o valor achado r_2 como se procedeu com r_1, ter-se-ha

$$r_3 = \frac{a}{A} - \frac{a}{A(1+r_2)^t}$$

e, continuando sempre com o mesmo methodo, acha-se uma serie de valores r_4, r_5, r_6, etc. successivamente mais proximos de r. Os algarismos communs a dois d'estes valores successivos pertencem tambem ao verdadeiro valor de r. Este modo de calcular a taxa r chama-se *methodo das approximações por substituição.*

Callet, na introducção ás *táboas de logarithmos,* dá a seguinte formula para calcular a taxa,

$$r = \frac{6}{t-1} - \sqrt{\frac{6}{t-1}\left[\frac{6}{t-1} - 2(g-1)\right]} \qquad \text{sendo} \qquad g = \left(\frac{at}{A}\right)^{\frac{2}{t+1}}$$

Montferrier (*Dictionnaire des sciences mathématiques,* annuité) deduz da formula das annuidades o valor de r expresso em uma fracção continua, cuja terceira reduzida é igual a

$$r = \frac{[12-(t-1)q]q}{12-(5t+7)q} \qquad \text{sendo} \qquad q = \frac{2(at-A)}{at(t+1)}$$

Estas formulas dão sempre para r um valor menor que o verdadeiro, porém, na maior parte dos casos, sufficientemente approximado.

Póde tambem calcular-se a taxa pela seguinte formula devida a Baily

$$r = b\,\frac{1 - b\frac{t-1}{12}}{1 - b\frac{t-1}{6}} \qquad \text{sendo} \qquad b = \left(\frac{at}{A}\right)^{\frac{2}{t+1}} - 1$$

A demonstração d'ella encontra-se na *Théorie mathématique des opérations financières* de H. Charlon.

No mesmo livro ha uma outra formula bastante simples devida a M. Achard, mas de que não póde fazer-se uso sem o auxilio de uma *táboa* especial.

Qualquer que seja o meio empregado para obter um primeiro valor r da taxa, póde ter-se outro mais approximado $r+z$ calculando z pela formula

$$z = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t} - \frac{Ar}{a}}{\frac{A}{a} - \frac{t}{(1+r)^{t+1}}}$$

680. **Problema.** *Em quantos annos poderá amortisar-se um emprestimo de* 40 *contos de réis contrahido na* Companhia geral de credito predial portuguez *suppondo que a prestação semestral é* 4:633$026 *réis e a taxa* 5 %.

A commissão de gerencia (§ 677) n'este problema é 320$000 réis por anno, ou 160$000 réis por semestre. O valor de a' é pois 4:633$026 — 160$000 ou 4:473$026, e o de r para cada semestre é 0,025.

Substituindo estes valores e o de A na formula (7), tem-se o tempo t expresso em semestres

$$t = \frac{\lg. 4473\$026 - \lg. (4473\$026 - 40000\$000 \times 0{,}025}{\lg. 1{,}025}$$

ou

$$t = 24 \text{ semestres proximamente.}$$

FIM

INDICE

§ PAG.
1 Noções geraes 1

PARTE I.—Numeros abstractos

LIVRO I.—Numeração. Operações sobre inteiros

CAPITULO I.—Numeração

8 Numeração de numeros inteiros 3
18 Numeração de numeros fraccionarios 7
Exercicios 10

CAPITULO II.—Addição e subtracção de inteiros

23 Addição de inteiros 11
32 Subtracção de inteiros 15
Exercicios 25

CAPITULO III.—Multiplicação de numeros inteiros e de potencias de inteiros

48 Multiplicação de numeros inteiros 25
69 Potencias e raizes. Multiplicação de potencias. Potencias de potencias .. 36
Exercicios 39

CAPITULO IV.—Divisão de numeros inteiros e de potencias de inteiros

75 Divisão de numeros inteiros 39
100 Divisão de potencias da mesma raiz ou do mesmo grau 55
Exercicios 56

LIVRO II.—Propriedades dos numeros

CAPITULO I.—Divisibilidade. Provas das operações

102 Divisibilidade 57
123 Provas das operações 64
Exercicios 69

CAPITULO II. Maximo divisor commum. Numeros primos entre si

131 Maximo divisor commum de dois ou mais numeros inteiros 70
146 Numeros primos entre si 77
Exercicios 78

CAPITULO III.—Menor multiplo commum

§ PAG.
148 Menor multiplo commum de dois numeros inteiros..... 78
157 Menor multiplo commum de mais de dois numeros inteiros..... 81
Exercicios..... 82

CAPITULO IV.—Numeros primos. Composição do maximo divisor commum e do menor multiplo commum

161 Numeros primos..... 83
178 Composição do maximo divisor commum..... 92
181 Composição do menor multiplo commum..... 93
Exercicios..... 95

LIVRO III.—Operações sobre numeros fraccionarios

CAPITULO I.—Simplificação de quebrados e reducção ao mesmo denominador. Addição e subtracção de quebrados

185 Generalidades sobre os quebrados..... 95
190 Simplificação de quebrados..... 98
192 Reducção de quebrados ao mesmo denominador..... 100
197 Addição de quebrados..... 103
203 Subtracção de quebrados..... 105
Exercicios..... 108

CAPITULO II.—Multiplicação e divisão de quebrados. Decomposição de um quebrado na somma de outros cujos denominadores são as potencias successivas de um numero dado

208 Multiplicação de quebrados. Potencias de quebrados..... 109
220 Divisão de quebrados..... 112
227 Valor medio de dois ou mais quebrados. Meio arithmetico..... 115
231 Valor approximado de um quebrado. Decomposição de um quebrado na somma de outros, cujos denominadores são as potencias successivas de qualquer numero..... 117
Exercicios..... 121

CAPITULO III.—Operações sobre numeros decimaes. Dizima periodica

236 Operações sobre numeros decimaes..... 122
248 Reducção de quebrados a dizima..... 128
253 Dizima periodica..... 131
Exercicios..... 138

LIVRO IV.—Raizes quadrada e cubica. Operações sobre numeros incommensuraveis

CAPITULO I.—Raiz quadrada

260 Raizes quadradas de numeros inteiros ou decimaes..... 139
284 Raizes quadradas de quebrados..... 151
Exercicios..... 153

CAPITULO II.—Raiz cubica

288 Raizes cubicas de numeros inteiros ou decimaes..... 154
308 Raizes cubicas de quebrados..... 164
Exercicios..... 166

CAPITULO III.—Operações sobre numeros incommensuraveis
Calculo de radicaes

§ PAG.
312 Operações sobre numeros incommensuraveis..... 166
317 Calculo de radicaes..... 168
Exercicios..... 171

LIVRO V.—Proporções, progressões e logarithmos

CAPITULO I.—Proporções e progressões por differença

324 Rasões e proporções por differença..... 171
335 Progressões por differença..... 175
Exercicios..... 180

CAPITULO II.—Proporções por quociente. Divisões proporcionaes

350 Rasões e proporções por quociente..... 181
374 Divisões proporcionaes..... 192
Exercicios..... 195

CAPITULO III.—Ppogressões por quociente

377 Progressões por quociente..... 195
396 Dizima periodica..... 204
Exercicios..... 205

CAPITULO IV.—Logarithmos

398 Theoria geral dos logarithmos..... 206
417 Logarithmos vulgares. Taboas de logarithmos. Problemas..... 219
Exercicios..... 242

PARTE II.—Numeros concretos

LIVRO I.—Medidas e moedas legaes. Operações sobre numeros concretos

CAPITULO I.—Medidas e moedas legaes.
Reducção de umas unidades a outras

435 Medidas e moedas legaes..... 243
448 Reducção de umas unidades a outras..... 257
Exercicios..... 264

CAPITULO II.—Operações sobre numeros concretos

456 Addição e subtracção..... 264
459 Multiplicação e divisão. Problemas..... 266
Exercicios..... 277

LIVRO II.—Applicações da arithmetica

CAPITULO I.—Quantidades proporcionaes. Regras de tres

470 Quantidades proporcionaes..... 277
480 Regras de tres. Problemas. Methodo de reducção a unidade..... 283
Exercicios..... 291

CAPITULO II.—Regra de reducção de medidas e moedas. Regra conjuncta

§ PAG.
492 Regra de reducção de medidas e moedas..... 291
502 Regra conjuncta..... 298
Exercicios..... 302

CAPITULO III.—Juros e descontos. Juros compostos

508 Juros simples..... 302
522 Descontos..... 308
527 Juros compostos..... 311
Exercicios..... 316

CAPITULO IV.—Regra de compra e venda de fundos publicos, acções e obrigações de bancos e companhias

534 Fundos publicos..... 317
540 Acções e obrigações..... 320
Exercicios..... 323

CAPITULO V.—Regra de cambio

548 Cambio interior. Cambio exterior..... 324
557 Cambio indirecto..... 329
Exercicios..... 331

CAPITULO VI.—Regra de companhia. Regra de mistura ou de liga Regra de falsa posição

560 Regra de companhia..... 332
565 Regra de mistura ou de liga..... 336
582 Regra de falsa posição..... 346
Exercicios..... 351

APPENDICE

591 CAPITULO I.—Systemas de numeração..... 353
601 CAPITULO II.—Propriedades dos numeros. Indice periodico..... 361
620 CAPITULO III.—Approximações numericas..... 369
660 CAPITULO IV.—Operações abreviadas..... 389
673 CAPITULO V.—Annuidades..... 401

ERRATAS

PAG.	LIN.	ERROS	EMENDAS
27	38	$5 \times 3 = 3 \times 3$	$5 \times 3 = 3 \times 5$
40	25	$2Q$	$3Q$
47	penultima	8esto	resto
»	ultima	r43	843
189	31	$\frac{3,2 \times 8}{2}$	$\frac{3,2 \times 3}{2}$
229	30	$1,3146154 = 0,2063551$	$\bar{1},3146154 = \lg.0,2063551$
252	32	fabricadas em	fabricadas ou importadas em
253	5	soldas. As	soldas, tolerancia que se elevará a 20 por 1000 nas obras ôcas e a 30 por 1000 nas de filigrana. As
»	8	fabricadas em	fabricadas ou importadas em
255	9	moedas es-	moedas d'oiro es-
»	20	4$500 réis: as moedas de prata denominadas *patacas* ou *duros*..... .....7 oitavas de peso (25ᵍ,085) por 860 réis.	4$500 réis. Por decreto de 1 de julho de 1886 as moedas de prata, que têem curso legal na provincia de Cabo Verde, são unicamente as que estão authorisadas para o reino pela carta de lei de 29 de julho de 1854.
362	5	1, 2, 2,...($B-1$)	1, 2, 3,...($B-1$)