# LETTRE
## A M. LE REDACTEUR
### DU *MONTHLY REVIEW*

# LETTRE
## A M. LE REDACTEUR
## DU *MONTHLY REVIEW*
OU
## RÉPONSE AUX OBJECTIONS
QU'ON A FAITES DANS CE JOURNAL À LA MÉTHODE
DES LIMITES DES FLUXIONS
HYPOTHÉTIQUES.

*PAR M. STOCKLER Colonel au Corps de l'Artillerie, de l'Académie Royale des Sciences, et Professeur de Mathématiques à celle de la Marine* &c.



À LISBONNE
DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES
1800
*Avec permission de S. A. Royale.*

# LETTRE
## A M. LE REDACTEUR
### *du Monthly Review.*

Mr.

SI la gloire de l'Académie Royale des Sciences de Lisbonne n'étoit si intimement liée à la réputation des premiers écrits imprimés dans le Recueil de ses Mémoires, peut-être que le jugement trop peu favorable, que vous avez porté sur mon Mémoire concernant les véritables principes de la Méthode des Fluxions, et que je viens de lire dans l'Appendix au 28.eme volume de votre Journal, ne m'auroit pas déterminé à vous faire la moindre observation à cet égard. Il est même plus que probable, qu'aussi peu sensible à des reproches injustes, qu'à des louanges non méritées, j'aurois gardé le plus profond silence sur cette matiere, en attendant, que les Géomètres de l'Europe, mieux instruits du mérite de ma Théorie par la lecture du Mémoire, qui la contient, que par celle de l'extrait que vous en avez fait, m'eussent rendu la justice, que je crois mériter, et que, si je ne me trompe, ils ne me réfuseront pas. Ce seroit en effet le parti le plus convénable à ma tranquillité, chose vraiment substantielle selon le grand Newton votre compatriote, qui apparemment ne se plaisoit pas plus que moi aux discussions polémiques : mais il seroit aussi le moins digne d'un homme de Lettres, dont la profession lui fait un devoir de s'interesser vivement aux progrés des lumieres dans son Pays, et pour qui l'honneur de la seule Société, qui y existe destinée à l'avancement des Sciences, ne doit être jamais indifférente.

Étant donc intimément persuadé, qu'il est de la derniere importance pour l'Académie des Sciences de Lisbonne, que sa réputation naissante ne soit dés ses premiers jours défigurée aux yeux du Public, je prends la liberté de vous adresser quelques observations sur le peu d'exactitude de l'exposition, que vous avez fait de ma Théorie des Fluxions, et sur l'injustice du jugement, que vous en avez porté. Mon but, en relevant vos méprises, n'est pas précisément de vous amener à une retractation formelle sur cet objet. Je n'ignore pas, que M.rs les Journalistes n'ont jamais eté dans l'usage d'avouer leurs fautes, pas même dans celui de modifier les opinions, qu'ils ont une fois prononcé dans leurs Journaux; quoiqu'ils ne puissent pas disconvenir, que tout le monde ne soit d'accord sur l'impossibilité, où ils sont ordinairement, d'apprecier d'après une lecture assez reflechie le mérite des oeuvres, dont ils donnent connoissance au Public. Je me propose uniquement de montrer aux Géomètres, que vous n'avez pas donné dans l'extrait de mon Mémoire une idée bien exacte des principes, que selon moi on doit regarder comme les véritables fondemens de la Méthode des Fluxions, et que par conséquent, s'ils en veulent concevoir toute la précision, et toute l'étendue, il faut absolument qu'ils lisent le Mémoire, dans le quel je les ai exposé.

Je tacherai au surplus de repandre ici quelques nouvelles lumieres sur les idées, qui sont la base de ma Théorie, afin d'en faciliter la comparaison avec celle des Fonctions Analytiques de M. de la Grange, dont le mérite trop réel, et la multiplicité d'applications hereuses, que ce grand Géometre en a fait à l'Analyse, à la Géométrie transcendante, et à la Méchanique vous ont ébloui à tel point, que vous etes resté prevenu contre toute autre Théorie. Cependant je suis si persuadé, que vous ne voudrez pas re-

renoncer à la réputation d'impartialité, qui caractérise votre Journal, et qui en fait un des principaux mérites, qu'aussitot la défense de mes principes vous sera connue, je m'attends à la voir annoncée au Public avec votre franchise ordinaire dans le même ouvrage, où il en a vu la censure.

Vous pretendez, Mr., que ma Théorie des Fluxions est fautive 1.° En ce qu'elle est, selon vous, essentiellement dépendante de l'idée du mouvement, et par conséquent en prise à la même objection que la Méthode de Newton, et celle de Maclaurin. Voici vos propres mots » In the first place the objection » justly made against the Méthode of Newton, Ma» claurin, &c. is equaly valid against that of Mr. Sto k» ler, which is grounded in the principle of motion—a » principle foreing to the nature of the subject. » 2.° En ce qu'ayant combiné la Théorie des Limites avec celle du développement des Fonctions, je n'ai pas démontré comment dans la Formule

$$F(\varphi+\omega)=F\varphi+P'\omega+P''\omega^2+P'''\omega^3+\&c.$$

les fonctions $P'$; $P''$; $P'''$; &c. sont indépendantes de $\omega$: comment elles dérivent de la Fonction primitive $F\varphi$, et par quelle raison la suite, qui provient du développement de $F(\varphi+\omega)$, ne doit renfermer que des puissances entieres et positives de $\omega$, en même-temps que selon vous, ou selon Mr. de la Grange, dont l'autorité semble être pour vous d'un poids presque egal à celui de la raison, il est très certain, que dans des cas particuliers il s'y trouve des puissances fractionaires de $\omega$. Vous avancez de plus, que mes principes ne sont rien moins que nouveaux, puisqu'ils sont précisément ceux de la Méthode des dernieres raisons des quantités évanouissantes, ou ceux de la Méthode des Limites du rapport des accroissements ysochrones des quantités variables; d'où il résulte, selon vous, que ma Méthode n'a que l'apparence d'une nouveauté, et qu'elle se réduit à l'introduction d'un nouveau terme, et d'un nouveau simbole dans le Calcul Fluxionel.

Pour répondre à la premiere de vos objections (la seule dont la force, si elle lui eût eté applicable, pourroit ébranler les fondemens de ma Théorie) il me suffiroit de nier le fait; et de vous faire le défi de montrer dans quel endroit de l'exposition de mes principes j'ai emploié un seul mot, dont on puisse conclure légitimement, que je suppose les Quantités Fluentes comme engendrées par du mouvement. Cependant vous l'assurez trop positivement lors que vous dites. » In the explanation of is own Method Mr. Stockler » supposes quantity to be generated by motion. » Et moi je vous assure, que vous vous étes trompé, apparemment parce que vous ne comprenez pas assez bien la Langue Portugaise, dont le peu de vulgarité vous excuse en certaine façon d'une si étrange méprise: Ce que je suppose effectivement dans ma Théorie, c'est que toute quantité, qui change de grandeur continuellement et successivement, doit être regardée comme ayant à chaque instant une certaine tendance pour changer d'état, et que ses accroissemens, ou ses diminutions doivent etre considerés comme des effets, qui en proviennent. *

L'idée

* Le but des Sciences en général étant l'utilité des hommes, celui des Sciences Mathématiques en particulier est de leur apprendre à calculer le *quantum*, ou la grandeur des Phénomenes de la Nature, tant physiquement, que moralement considerée. Les Phénomenes de la Nature, dont la variabilité est telle, qu'ils ne peuvent passer d'un état de grandeur à un autre plus grand, ou plus petit, qu'en passant par tous les états intermédiaires, sont ceux, dont on a derivé par abstration l'idée générale de Quantité Fluente. Et puisque dans la nature des choses tout changement d'état est nécessairement un effet, on ne peut pas affoiblir en aucune façon la généralité de l'idée de Fluente en regardant les incrémens, ou les decrémens des quantités de ce

L'idée de mouvement, et l'idée de vélocité sont assez particulieres pour être admises dans une Théorie générale des Quantités Fluentes. On n'y doit permetre que des idées communes à toute espece de quantité, et à toute espece de changement de grandeur, pourvu qu'il soit continuel : et c'est précisément à cause de cela, qu'on peut justement blamer Newton et Maclaurin d'avoir établi la Théorie des Fluxions sur les idées de mouvement, et de vélocité. Il est vrai aussi, que ma Théorie est essentiellement dépendante du rapport des parties du temps ; mais l'idée de ce rapport n'est pas un principe, ou un élément particulier á la Théorie du mouvement, comme on le supposoit jusqu'à present. L'idée du temps a une liaison nécessaire avec l'idée générale de succession : l'esprit ne peut concevoir l'une sans l'autre : et comme les quantités qu'on appelle Fluentes ſont précisément celles, qui changent de grandeur continuellement et successivement, l'idée de succession, et par conséquent celle du temps, sont essentiellement comprises dans l'idée de Quantité Fluente. Ce seroit donc une prétention deraisonable que celle de vouloir, que le rapport des parties du temps soit regardé comme un principe étranger dans la Théorie générale de ce genre de quantités. *

Vous

---

genre comme des effets provenants d'une cause quelconque, laquelle agissant sur les Quantités Fluentes, lui imprime à chaque instant une certaine tendance pour changer de grandeur. Mr. Jean Bernoulli de l'Académie Royale de Berlin se servit avant moi de cette supposition pour apprendre à son fils Mr. Jaques Bernoulli les principes du Calcul Fluxionel, et ce Jeune Mathématicien, trop tot enlevé aux Sciences exactes, en a fait usage dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Turin, de la quelle il a été Correspondant. Voyez les Mém. de l'Acad. de Turin pour les années 1784, et 1785.

* Quelle que soit la nature d'une Quantité Fluente il est toujours évident, qu'elle ne peut pas avoir deux états dif-

Vous me direz peut-être Mr., que quoique le rapport des parties du temps ne soit pas étranger dans la Théorie des Fluxions, cependant on n'y en a pas un tel besoin, qu'il soit impossible de s'en passer pour démontrer avec toute la rigueur géométrique les regles du Calcul Fluxionel. Supposons pour le moment, que cette assertion ne soit pas tout-à-fait destituée de fondement, il est toujours vrai, que vous n'avez pas raison de me reprocher d'avoir introduit dans ma Théorie un principe étranger à la nature du sujet. » The principle foreing to the nature of the » subject. » Vous ne pouvez m'objeter tout au plus que la superfluité de ce principe, quoique parfaitement conforme à la nature du sujet. Mais à quel titre peut-on le traiter de superflu ? Ce ne peut être que par ce que ma Méthode, étant essentiellement, à ce que vous prétendez, celle des dernieres raisons des quantités évanouissantes, ou celle des limites du rapport des accroissemens ysochrones des quantités variables, on a deja demontré exactement par ces Méthodes les Regles du Calcul Fluxionel sans l'intervention du rapport des parties du temps : ou bien parceque Mr. de la Grange est arrivé à ce but dans sa Théorie des Fonctions Analytiques indépendamment de la considération de ce rapport.

Si

---

férents de grandeur au même instant. Il faut donc admettre cette proposition comme généralement vraie » Que toute Quantité Fluente emploie un certain temps à passer d'un état de grandeur à un autre, quelque petite que soit la différence entre ces deux états. » Delà on conclue avec la derniere évidence, que l'incrément, ou le decrément d'une Fluente quelconque sera d'autant plus grand qu'elle emploiera plus de temps à l'acquerir : c'est-à-dire, que son incrément au bout d'un temps plus grand sera plus grand, que son incrément au bout d'un temps plus petit. Donc le rapport des parties du temps, loin d'être étranger dans la Théorie des Quantités Fluentes, y est au contraire nécessairement compris ; quoiqu'il soit très possible de n'en pas faire usage pour la démonstration des regles du Calcul.

Si le premier de ces motifs étoit celui sur le quel vous eussiez fondé ce reproche, j'aurois à vous répondre : Que les Géomètres en général ne semblent pas être bien satisfaits des démonstrations de la Méthode des dernieres raisons, ni de celle des Limites du rapport des accroissements ysochrones des quantités variables. * Ils reprochent également à l'une, et à l'autre le grand inconvénient de considerer les quantités, dont on cherche le dernier rapport, ou la limite du rapport, dans le moment, oú elles évanouissent toutes deux ensemble, et il faut avouer franchement, que l'idée du rapport de deux quantités au moment, oú elles cessent d'être quantités, si elle n'est pas tout-à-fait impossible, aumoins elle ne se présente pas immédiatement à l'esprit avec la clarté, qui convient aux principes d'une Science, d'ont la vérité doit être fondée sur l'évidence. Mais dans ma Méthode on ne cherche pas le rapport de quantités évanouissantes ni avant, ni après avoir évanoui, ni dans le moment même de l'évanouissement. On n'y cherche pas non plus la Limite de leur rapport, et par conséquent on

* Nous devons faire ici une exception en faveur des Géomètres de l'Académie de Berlin, qui ayant demandé dans le Programme pour l'année 1786. » Une Théorie claire, » et précise de l'Infini Mathématique. » ont accordé le prix sur cette question au Mémoire de Mr. L'Huillier intitulé *Exposition Élémentaire des Calculs Supperieurs*, dans le quel cet habíle Géomètre réduit toute la Théorie du Calcul Fluxionel à la Méthode des Limites du rapport des Incréments ysochrones des quantités variables. Mr. de la Grange étoit alors à Berlin, et il est plus que probable, que ce ne fut pas contre son voeu que le prix a eté accordé à Mr. L'Huillier. Quatorze ans s'étoient écoulés depuis que Mr. de la Grange avoit publié dans les Actes de cette illustre Académie le Mémoire, qui contient ses premieres idées sur la Théorie des Fonctions dérivées. Non obstant la publicité de ce Mémoire, la Théorie de Mr. L' Huillier a eté approuvée comme *claire et precise*.

on ne peut lui reprocher le même inconvénient. Son objet est la Limite du rapport des Fluxions hypothétiques, quantités qui ne sont pas évanouissantes, et dont il semble que vous même, malgré leur nouveauté, en avez conçu une idée si claire, et si précise, que vous n'avez pas hesité d'avouer, que par ce moyen l'entendement se trouve peut-être en état de se former une idée plus distincte de la nature des Fluxions propres. » By introduction of the hypothetical Fluxion » we are enabled, perhaps, to forme a more distinct » idea of the nature of the proper Fluxions. »

Cependant malgré cet avantage, et malgré celui, que je viens de faire observer, vous n'avez pas hésité non plus d'assurer, que ma Méthode ne contient rien de nouveau. . . . Mais est il bien vrai, qu'on peut assurer sans crainte de blesser la raison et la vérité, qu'il n'y a rien de nouveau ? . . J'ai introduit dans la Théorie du Calcul Fluxionel, et l'idée de la Fluxion hypothétique, et celle du rapport des parties du temps. J'ai degagé cette Théorie de toute considération étrangere, et même de toute considération particuliere. J'ai demontré, que les Fluxions propres sont les Limites des Fluxions hypothétiques. J'ai enseigné comment au moyen du développement des Fonctions, et de la Méthode des Limites, que j'avois auparavant perfectionée, on pouvoit toujours obtenir l'expression de la Fluxion propre d'une Fonction quelconque. J'ai delivré par là l'application de la Théorie des Limites à celle des Fluxions du seul inconvénient, qu'on lui reprochoit, celui de comparer les quantités dans le moment où elles cessent d'être quantités. Aucun des Géomètres, qui après Newton et Leibnitz avoient tenté cette entreprise, n'y avoit réussi ; et vous pretendez que je n'ai rien fait de nouveau ; que ma Théorie n'a que l'apparence d'une nouveauté ; et que tout le fruit de mon travail sur cette matiere se borne à avoir travesti la Méthode de Newton avec l'introduction d'un nouveau terme, et d'un nouveau symbole ! ! !

Si une semblable accusation pouvoit avoir quelque apparence de justice, ce seroit précisément contre la Méthode de M. de la Grange, la seule dont les démonstrations vous semblent assez naturelles, et assez exactes pour être admises dans le Calcul Fluxionel. Il me semble vous entendre déja crier à l'anathême contre le Mathématicien, qui ose prononcer un paradoxe si étrange. Cependant analysons les raisonemens sur les quels ce célébre Géomètre a établi tout l'Édifice de sa Théorie.

M. de la Grange commence par démontrer, quoique indirectement, que dans le développement de $f(x+i)$ on ne peut rencontrer que des puissances entieres de $i$, à moins qu'on ne donne à $x$ des valeurs particulieres. Après cela il observe qu'on peut faire

$$f(x+i)=fx+iP$$

$P$ étant une fonction de $x$, qui ne devient point infinie par la supposition de $i=0$. De cette équation il tire

$$P=\frac{f(x+i)-fx}{i}$$

et continue son raisonement de la sorte » Or $P$ étant » une nouvelle fonction de $x$ et de $i$, on en pour- » ra séparer ce qui est indépendant de $i$, et qui par » conséquent ne s'evanouit pas lorsque $i$ devient nul. » Soit donc $p$ ce que devient $P$ lorsqu'on fait $i=0$, » $p$ sera une fonction de $x$ sans $i$. » Cette fonction est précisément celle que M. de la Grange appelle la premiere fonction dérivée de $fx$ : et voilà tout l'artifice de sa Méthode, à l'égard de l'originalité et de l'exactitude de la quelle vous n'avez pas le moindre doute. Mais faisons sur cette belle Théorie des raisonemens, semblables à ceux que vous avez fait sur la mienne, et voyons à quoi elle se réduit en derniere analyse.

Appellons $i$ l'incrément de $x$, ce qui nous doit être d'autant plus permis, que M. de la Grange ne lui donne aucun nom, et qu'avec cette dénomination nous ne changeons essentiellement rien à sa Méthode. Alors $f(x+i)-fx$ sera l'incrément de $fx$: divisons ce nouvel incrément par $i$, nous aurons $\frac{f(x+i)-fx}{i}$, rapport des incrémens de $fx$ et de $x$, ce qui est la valeur de $P$. Supposons $i=0$, nous aurons la Limite de $P$, ou selon Newton le dernier rapport de $f(x+i)-fx$ et de $i$, c'est-à-dire, le rapport de $f(x+i)-fx$ et de $i$, précisément dans le moment, où $f(x+i)-fx$ et $i$ deviennent nuls ensemble. Cette quantité est celle que M. de la Grange appelle $p$. Aquoi se réduit donc tout l'artifice de ce grand Géomètre, et sa sublime Théorie? A ne pas nommer $i$ incrément de $x$, quoique $i$ soit en effet l'incrément de $x$, aussitot qu'on regarde $x$ comme variable, et qu'on met à sa place $x+i$: à ne pas nommer $f(x+i)-fx$ incrément de $fx$, quoique $f(x+i)-fx$ soit effectivement l'incrément de $fx$: à ne pas nommer $P$ le rapport de ces incrémens, quoique $P$ soit le rapport de ces incrémens: à ne pas nommer $p$ la Limite de $P$, quoique $p$ soit la Limite de $P$: à faire semblant, que par la supposition de $i=0$, $f(x+i)-fx$ ne devient pas nul, quoique indépendamment de toute signification particuliere de $i$, et de la considération de $x$ variable, ou de $x$ constante, $f(x+i)-fx$ devienne réellement $=0$, en vertu de la supposition de $i=0$.

Voilà donc la Méthode de M. de la Grange réduite à des simples changemens de mots, si on la compare à celle des dernieres raisons, ou à celle des Limites du rapport des incrémens ysochrones des quantités variables. La voilà en prise au même reproche que celles-ci; puisque la voilà réduite á chercher la valeur du rapport $\frac{f(x+i)-fx}{i}$ précisé-

ment

ment dans le moment, où ses deux termes cessent d'être quantités : ou véritablement voilà demontrée l'identité de toutes ces Méthodes, s'il est vrai, comme vous pretendez à mon égard avec bien moins de raison, qu'en changeant les mots on ne change pas les idées.

Cependant je n'ose point traiter la Méthode de M. de la Grange, comme vous avez traité la mienne. Je n'ose pas prononcer, qu'elle ne soit au changement des noms près que celle des Limites du rapport des accroissemens ysochrones des quantités variables. Au contraire je suis assez éloigné de nier, que la Théorie de M. de la Grange ne soit effectivement une nouveauté. Sa Méthode et la mienne sont réellement deux nouveautés ; puisqu'elles différent en des points assez essentiels de toutes celles auparavant connues. J'ai introduit dans ma Théorie des idées, qu'on n'avoit pas encore consideré dans l'exposition de la Méthode des Fluxions : et M. de la Grange, sans introduire dans la sienne aucune idée nouvelle, regarde sous un nouveau point de vue toutes celles, qu'on avoit consideré depuis l'invention de la Méthode des Fluxions comme étant ses véritables fondemens.

Il est vrai, qu'en reflechissant sur ces deux Méthodes on voit dans celle de M. de la Grange un Géomètre, qui cherche à eviter les difficultés : et dans la mienne (permettez moi que je le dise) un Géomètre, qui cherche à les vaincre. Si nous avons tous les deux atteint notre but, c'est-à-dire, s'il a tout-à-fait evité les difficultés, qui obscurcissoient les principes de la Méthode des Fluxions, et si je les ai vaincu, c'est ce que les Géomètres doivent décider. Il ne m'appartient pas d'être juge dans ce procés ; et si j'appelle aux Géomètres de votre jugement, ce n'est pas autant pour l'injustice, que j'y considére, que parce que tout le tort, qu'il fait à ma réputation, rejaillit sur la Societé, qui a honnoré mes idées de son approbation ; et dont l'autorité pour le moins vaut bien la votre. Je sais, que c'est trop oser pour un Géomètre, qui commence à peine d'être connu dans le Monde Savant, que de se mettre en parallele avec M. de la Grange ; mais qu'il ne s'en prenne pas à moi : c'est vous Mr., qui m'avez mis dans le cas ; et il faut absolument que je continue à me comparer avec lui, pour achever la defense de mes principes, dont vous avez pretendu ternir tout l'éclat, en les mettant à coté de ceux de ce grand Géomètre.

Mais en supposant même, que nos deux Méthodes soient également exactes, vous pouvez m'objecter encore, que l'exactitude de ma Théorie ne prouve pas, que celle de M. de la Grange n'en soit pas préférable. C'est vrai Mr., mais lorsque deux Méthodes quelconques sont toutes deux rigoureusement vraies, lorsqu'elles sont toutes deux également exactes, pour préférer l'une à l'autre, il faut les considérer sous différents rapports. Il faut examiner laquelle est la plus naturelle, la plus lumineuse, la plus simple, la plus générale, et la plus facile dans ses applications. Je laisse aux Géomètres à prononcer sur les quatre premiers articles, en les priant cependant de ne pas oublier, que les principes de M. de la Grange sont dérivés de la forme, ou représentation algébrique des quantités, et que les miens au contraire sont dérivés de leur nature : de façon que la Méthode de M. de la Grange ne peut pas subsister sans l'Algébre, dont la mienne est au fond indépendante. Je me bornerai donc pour le moment à donner quelques légers echantillons de la facilité avec laquelle ma Théorie des Fluxions s'applique à l'Analyse, à la Géomètrie, et à la Méchanique. Et afin de mettre ceux, qui liront cette lettre, à même de pouvoir décider sur le dernier des articles cy-dessus mentionnés, (si quelqu'un par hasard en veut faire l'examen), je choisirai presque tous mes exemples

par-

parmi les questions, que M. de la Grange a traité dans son excellent ouvrage sur les fonctions analytiques.

## APPLICATION

### A L'ANALYSE.

### *Des Questions de Maximis et Minimis.*

NOus appellons Maximum l'état de grandeur d'une quantité fluente, lorsqu'elle cesse d'augmenter pour commencer à diminuer, et Minimum l'état de grandeur d'une quantité fluente, lorsqu'elle cesse de diminuer pour commencer à augmenter. Or selon les principes de ma Théorie des Fluxions toute quantité, qui augmente, ou diminue, a une tendance pour augmenter, ou pour diminuer; et réciproquement toute quantité, qui a une tendance pour augmenter, ou pour diminuer, augmente, ou diminue. Donc lorsqu'une quantité fluente $Z$ cesse d'augmenter, ou de diminuer, elle n'a plus de tendance pour augmenter, ou pour diminuer: et puisque sa premiere fluxion $dZ$ n'est que l'incrément, ou le decrément, que cette même tendance, si elle fût devenue constante pendant l'unité de temps, auroit produit dans la variable $Z$, il faut que dans le moment, où $Z$ atteint son état maximum, ou son état mininum de grandeur, on ait $dZ=0$. Ce caractere est donc commun au Maximum, et au Minimum; et par conséquent il ne suffit pas pour les distinguer l'un de l'autre. Mais puisque dans le cas du Maximum, et dans le cas du Minimum $dZ$ devient également nul, il faut que $dZ$ avant d'évanouir soit une quantité fluente, laquelle ait une tendance pour diminuer; et par conséquent que $ddZ$ soit de signe contraire à $dZ$. Donc si dans le moment, où $dZ$ devient nul, $ddZ$ ne le devient pas aussi, la tendance, dont $ddZ$ exprime l'effet, obligera $Z$ de fluer en sens contraire à celui

dans

dans le quel cette quantité fluoit auparavant, et par conséquent $Z$ sera un Maximum, si $dZ$ étant $=o$, $ddZ$ est negative, et au contraire sera un Minimum, si $dZ$ étant $=o$, $ddZ$ est positive.

Dans le cas que $dZ$ et $ddZ$ evanouissent ensemble, il faut que $ddZ$ avant d'evanouir soit une quantité fluente, qui ait une tendance pour diminuer, et que sa fluxion $d^3Z$ soit de signe contraire à $ddZ$, ou, ce qui est la même chose, que $d^3Z$ soit du même signe que $dZ$. Donc si dans le moment, où $dZ$ et $ddZ$ deviennent nuls, $d^3Z$ ne le devient pas aussi, $Z$ continuera d'augmenter ou de diminuer, selon qu'il augmentoit ou diminuoit avant l'évanouissement de $dZ$, et de $ddZ$; et par conséquent il ne sera pas un Maximum, ni un Minimum. Mais si $d^3Z$ devient nul en même temps que $dZ$ et $ddZ$, alors il est évident, que $d^3Z$ avant de devenir nul etoit une quantité fluente, qui diminuoit, et que par conséquent sa fluxion $d^4Z$ doit être de signe contraire à $d^3Z$, et à $dZ$, d'où il suit, que dans ce cas $Z$ sera un Maximum, ou un Minimum, selon que $d^4Z$ sera negative, ou positive; puisque c'est en vertu de la tendance, dont $d^4Z$ est l'effet, que $Z$ continuera de fluer, et qu'il fluera en sens contraire à celui dans le quel il fluoit avant l'evanouissement de $dZ$, $ddZ$, et $d^3Z$. En général si $Z$ est une fluente, dont les fluxions successives $dZ$, $ddZ$, $d^3Z$, $d^4Z$, &c. sont des quantités, qui diminuent, il faut que toutes les fluxions d'ordre pair soient de signe contraire aux fluxions d'ordre impair. Donc si un nombre quelconque $m$ de fluxions successives de $Z$, en commençant par $dZ$, evanouissent ensemble, $Z$ continuera de fluer dans le même sens, ou en sens contraire à celui dans le quel il fluoit auparavant, selon que $m+1$,

ex-

exposant de l'ordre de la fluxion $d^{m+1}Z$, (la premiere de celles qui n'evanouissent pas) est un nombre impair, ou un nombre pair. Dans le premier cas $Z$ continuant d'augmenter, ou de diminuer comme auparavant, sa valeur ne sera pas un Maximum ni un Minimum; et dans le second elle sera un Maximum, ou un Minimum, selon que la fluxion $d^{m+1}Z$ sera negative, ou positive.

*Des Fractions, dont les deux termes deviennent nuls ensemble.*

Soit $\frac{Fx}{fx}$ une fraction telle, qu'en mettant à la place de $x$ une valeur particuliere $a$, devienne $\frac{Fx}{fx} = \frac{0}{0}$. Si $x$ est une quantité fluente, $Fx$, et $fx$ seront aussi des fluentes: et si l'on considére, que $x$ flue pendant un temps quelconque $t$, $x$ deviendra $x + t \triangle x$; et $\frac{Fx}{fx}$ deviendra $\frac{Fx + t \triangle Fx}{fx + t \triangle fx}$. Mais puisqu'il est possible de prendre $t$ si petit qu'on voudrá, $t$ est une quantité, qui n'a point de limite en diminution; et par conséquent, quel que soit la valeur de $x$, on aura

$$\frac{Fx}{fx} = \text{Lim}\left(\frac{Fx + t \triangle Fx}{fx + t \triangle fx}\right)$$

Or dans le cas de $x = a$, $Fx = 0$, et $fx = 0$; donc

$$\frac{Fx + t \triangle Fx}{fx + t \triangle fx} = \frac{\triangle Fx}{\triangle fx}$$

et par conséquent

Lim

$$\text{Lim}\left(\frac{Fx + t\,\Delta Fx}{fx + t\,\Delta fx}\right) = \frac{dFx}{dfx}$$

c'est-à-dire

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{dFx}{dfx}.$$

Par un raisonement semblable on démontrera, que si la valeur de $x$, qui fait $Fx = 0$, et $fx = 0$, fait aussi $dFx = 0$, et $dfx = 0$, on aura

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{ddFx}{ddfx}$$

et ainsi de suite.

## APPLICATION
### A LA GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

*De la génération des Lignes Courbes, et de leur principalles affections.*

POUR appliquer ma Théorie des Fluxions à celle des lignes courbes, je considére, à l'imitation des anciens Géomètres, une ligne quelconque comme engendrée par le mouvement d'un point, au quel je donne le nom de *point générateur*. Je suppose donc, que l'abscisse fluant emporte avec soi l'ordonnée, que lui est appliquée, sans que celle-ci change d'inclination à son égard : alors le point extrême de l'ordonnée est le point générateur, le quel décrit une ligne droite, ou une ligne courbe, selon que l'ordonnée est constante, ou qu'elle flue selon la même loi que l'abscisse, ou selon une loi différente. Je supposerai ici pour plus de simplicité, que les ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses, et que l'abscisse flue uniformément.

Soit donc $AP = x$ (Fig. 1) l'abscisse, et $PM = y$, l'or-l'ordonnée. Si $PM$ est constante, il est évident, que le point générateur $M$ décrit une ligne droite $MN$ parallele à l'axe des abscisses. Mais si $PM$ flue uniformément ainsi que $AP$, alors supposant que $PP'$ soit l'incrément de l'abscisse au bout du temps $t$, $NM'$ l'incrément de l'ordonnée au bout du même temps, $PQ$ l'incrément de l'abscisse acquis dans un intervalle de temps $t' < t$, et $OR$ l'incrément corréspondant de l'ordonnée, on aura par les principes de ma Théorie $NM = tdx$, $NM' = tdy$, $MO = t'dx$, et $OR = t'dy$ : donc $\frac{MN}{M'N} = \frac{dx}{dy}$, et $\frac{MO}{RO} = \frac{dx}{dy}$ : et par conséquent $MN : NM' :: MO : RO$ : d'où il suit, que les trois points $M$, $R$, et $M'$ appartiennent tous à une même droite inclinée à l'axe des abscisses. Mais le point $R$ représente une position quelconque du point générateur; donc ce point décrit effectivement la droite $MM'$ inclinée à l'axe des abscisses d'un angle dont la Tangente est $= \frac{dy}{dx}$.

Si l'ordonnée $PM = y$ (Fig. 2) flue variablement, alors sa premiere fluxion $dy$ est aussi une fluente. * Soit $MM''$ la droite que le point générateur $M$ auroit décrit, si $y$ fluoit uniformément avec sa premiere fluxion $dy$. Soit $PP'$ l'incrément de l'abscisse $AP = x$ au bout du temps $t$, et $PQ$ son incrément au bout du temps $t' < t$, on aura $PP' = tdx$, et $PQ = t'dx$. Si par le point $Q$ on mene la droite $QRT$ parallele aux ordonnées, et par le point $M$ la



* Selon les principes de ma Théorie on nomme variablement fluente toute quantité, dont la tendance pour changer de grandeur change aussi à chaque instant. C'est de cette définition qu'on déduit, que $dy$ est une fluente, lorsque $y$ flue variablement. Voyez les Mém. de l'Acad. R. des Scienc. de Lisbonne Tom. I. pag. 204, et 205.

la droite $MN$ parallele aux abscisses, on aura $NM'' = tdy$, et $OR = t'dy$. Soit $\Delta y$ la fluxion hypothétique de $y$ rélative au temps $t$, et $\Delta' y$ sa fluxion hypothétique rélative au temps $t'$; $t\Delta y$ sera l'incrément de $y$ au bout du temps $t$, et $t'\Delta' y$ son incrément au bout du temps $t'$. Supposons que $y$ flue en augmentant, alors on aura $\Delta' y > dy$, et $\Delta y > dy$; et par conséquent $t'\Delta' y > t'dy$, et $t\Delta y > tdy$; donc le point générateur $M$ se trouvera au bout du temps $t'$ dans quelque point au dessus de $R$, et au bout du temps $t$ dans quelque point au dessus de $M''$. Soient $S$ et $M'$ ces deux points, on aura $OS = t'\Delta' y$, et $NM' = t\Delta y$. Or par la construction de la Figure on voit, que $MN = PP'$, et $MO = PQ$, d'où on peut déduire $\frac{MO}{OS} = \frac{dx}{\Delta' y}$, et $\frac{MN}{NM'} = \frac{dx}{\Delta y}$: mais $\Delta y > \Delta' y$,* donc $\frac{MO}{OS} > \frac{MN}{NM'}$, et par conséquent aucun autre point de la Ligne engendrée par le mouvement du point générateur $M$, ne se trouve sur la droite, qui unit ses deux extremités $M$ et $M'$. Il s'ensuit donc

---

* Pour que chacun puisse se convaincre, que tant que $dy$ augmente, la fluxion hypothétique $\Delta y$ rélative à un temps $t$ plus grand que $t'$, est plus grande que la fluxion hypothétique $\Delta' y$ rélative au temps $t'$, il suffit qu'on réfléchisse; qu'en supposant $t = t' + t''$, si on nomme $dy$ la fluxion propre de $y$ au premier instant du temps $t$, $d'y$ sa fluxion propre au dernier instant du temps $t'$ et premier du temps $t''$, $d''y$ sa fluxion propre au dernier instant du temps $t''$: et $\Delta'' y$ sa fluxion hypothétique rélative au même temps $t''$, on a par les principes exposés dans mon Mémoire $\Delta' y < d'y$, $\Delta'' y > d'y$, et par conséquent $\Delta'' y > \Delta' y$; mais $t\Delta y = t'\Delta' y + t''\Delta'' y$: donc $t\Delta y > t'\Delta' y + t''\Delta' y$: c'est-à-dire, $t\Delta y > t\Delta' y$; et par conséquent $\Delta y > \Delta' y$.

donc que le point générateur décrit pendant le temps $t$ un arc de Courbe, dont $MM'$ est la corde : et puisque $\frac{MO}{OT} = \frac{MN}{NM'}$, on aura $\frac{MO}{OT} < \frac{MO}{OS}$ ; et par conséquent $OT > OS$, c'est-à-dire, que tous les points de cet arc de Courbe intermédiaires aux points $M$ et $M'$ sont situés entre sa corde et l'axe des abscisses ; donc l'arc $MSM'$ offre sa convexité vers ce même axe. Par un raisonement semblable on prouvera, que lorsque $dy$ diminue, le point générateur $M$ décrit un arc de courbe, le quel offre sa concavité vers l'axe des abscisses.

Or $dy$ augmente, lorsque $ddy$ est positive à son egard, et diminue, lorsque $ddy$ est négative. Il suit donc de tout ce que je viens de dire, que si $x$ flue uniformément, et $y$ est constante, le point générateur décrit une ligne droite parallele à l'axe des abscisses. Si $y$ flue aussi uniformément, ou ce qui est la même chose, si $dy$ est constante, le point générateur décrit une ligne droite, la quelle coupe l'axe des abscisses sous un angle dont la tangente est $= \frac{dy}{dx}$. Mais si $dy$ n'est pas constante, alors le point générateur décrit une ligne courbe concave, ou convexe vers l'axe des abscisses, selon que $ddy$ est négative, ou positive à l'égard de $dy$.

De-là on conclue, que si $dy$ après avoir augmenté diminue, ou si après avoir diminué augmente, la courbe de convexe, qu'elle etoit vers l'axe des abscisses, devient concave vers ce même axe, ou au contraire de concave devient convexe. Donc dans ce cas la courbe aura autant de points d'inflexion, que $dy$ cesserà de fois d'augmenter pour commencer à diminuier, ou de diminuer pour commencer à augmenter. Mais cette fluxion $dy$ ne peut éprouver aucun de ces changemens, que dans le moment, où elle atteint un état maximum, ou un état minimum de grandeur ; et elle ne peut atteindre aucun de ces états, que dans le moment, où $ddy = 0$. Donc la courbe, dont $y$ est l'ordonnée, aura autant de points d'inflexion, que l'equation $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ contiendra de racines réelles, pourvu que $d^3y$ ne devienne pas nul au même instant que $ddy$. En géneral elle aura autant de points d'inflexion, que l'équation $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} = 0$ aura de racines réelles ; $2n$ designant le nombre des fluxions successives de $y$, qui évanouissent au même instant.

*Des Tangentes, Soustangentes, Normales, et SousNormales des Lignes Courbes.*

Soit (Fig. 3) $PP' = MN = tdx$ l'incrément de l'abscisse $AP$ ; $NM' = t\Delta y$ sera l'incrément de l'ordonnée $PM$, et on aura $MM' = t\sqrt{dx^2 + \Delta y^2}$. Or puisque le point $M'$ peut être si proche qu'on voudra du point $M$, il est évident, que menant la tangente $MT$, prolongeant la corde $MM'$ jusqu'à la rencontre de l'axe des abscisses, et élevant au point $M$ la perpendiculaire $MI$ sur $MT$, et la perpendiculaire $MG$ sur $M'MV$, on aura $PT =$ Lim. $PV$ ; $MT =$ Lim. $MV$ ; $PI =$ Lim. $PG$ ; et $MI =$ Lim. $MG$. Les triangles semblables $MNM'$ ; $MPV$ ; et $MPG$ donnent

$$t\Delta y : tdx :: y : PV$$

$$t\Delta y : t\sqrt{dx^2 + \Delta y^2} :: y : MV$$

$$tdx : t\Delta y :: y : PG$$

$$tdx : t\sqrt{dx^2 + \Delta y^2} :: y : MG$$

d'où l'on déduit

$PV =$

$$PV = y\,\frac{dx}{\Delta y}$$

$$MV = y\,\frac{\sqrt{dx^2+\Delta y^2}}{\Delta y}$$

$$PG = y\,\frac{\Delta y}{dx}$$

$$MG = y\,\frac{\sqrt{dx^2+\Delta y^2}}{dx}.$$

Passant de ces expressions à celles de leurs Limites, on obtient

$$PT = y\,\frac{dx}{dy}$$

$$MT = y\,\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$$

$$PI = y\,\frac{dy}{dx}$$

$$MI = y\,\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}.$$

En suivant les principes de ma Théorie, on peut aussi arriver à toutes ces conclusions par une voie non moins simple que la précédente, et peut-être plus propre encore à mettre en tout son jour l'inexactitude du Calcul infinitésimal dans cette recherche. Soit $PQ = dx$ : les triangles semblables $MNM'$, et $MRO$ donnent.

$$t\,dx : t\Delta y :: dx : OR$$

donc

donc $OR = \Delta y$. Or en approchant le point $M'$ du point $M$, on peut approcher le point $R$ du point $H$ de façon, que $RH$ devienne si petite qu'on voudra; donc $RH$ est une variable, qui n'a point de Limite en diminution; et par conséquent $OH =$ Lim. $OR =$ Lim. $\Delta y = dy$. Après avoir reconnu cette vérité, rien de plus facile, que de conclure immédiatement des triangles $HOM$: $MPT$; et $PIM$ les expressions fluxionelles des Tangentes, Soustangentes, Normales, et Sousnormales des Lignes Courbes.

### *Des Assymptotes rectilignes.*

Les Assymptotes rectilignes n'étant que la Limite de position des Tangentes, il est évident, que leur position dépend de la grandeur des Limites des droites $AT$, et $AB$ (Fig. 3). L'expression fluxionelle de la premiere s'obtient en otant $DA$ de $PT$, ce qui donne

$$AT = y\,\frac{dx}{dy} - x$$

et celle de la seconde au moyen de cette proportion

$$dx : dy :: y\,\frac{dx}{dy} - x : AB$$

de laquelle on tire

$$AB = y - x\,\frac{dy}{dx}.$$

L'application de la Méthode des Limites à ces expressions doit décider si la Courbe a en effet des assymptotes rectilignes. Si les deux droites $AT$ et $AB$ sont toutes deux susceptibles de Limite, la Courbe a une assymptote inclinée à l'axe des abscisses d'un angle, dont la Tangente est la Limite de $\frac{dy}{dx}$. Si $AB$ est seulement susceptible de Limite, et

si

si $AT$ n'a point de Limite en augmentation, la Courbe aura une assymptote parallele à laxe des abscisses. Si au contraire $AT$ est susceptible de Limite, et $AB$ n'a point de Limite en augmentation, alors la Courbe a une assymptote parallele à l'axe des ordonnées. Mais si $AT$, et $AB$ sont l'une et l'autre incapables de Limite en augmentation, la Courbe n'aura point d'assymptote rectiligne.

## *Des différents ordres d'attouchement, dont les Courbes sont susceptibles.*

Lorsque plusieurs Courbes ont un point d'attouchement commun, nous disons que celle, qui ne comprend aucune des autres entr'elle et la tangente à ce point, est celle dont le contact avec la tangente commune est le plus intime ; et qu'au contraire la courbe entre laquelle et la tangente commune toutes les autres sont comprises, est celle, dont le contact avec cette même tangente se trouve le plus foible.

Soient donc ( Fig. 4 ) $BMS$ ; $CMR$ ; $DMO$ ; plusieurs Courbes différentes rapportées aux mêmes deux axes des coordonnées, et ayant un point d'attouchement commun ; si l'origine des abscisses est aussi commune, il est évident, qu'à ce point l'abscisse et l'ordonnée d'une quelconque de ces courbes appartiènent également à toutes les autres ; et que la premiere fluxion de l'ordonnée leur appartient aussi ; puisque la premiere fluxion de l'ordonnée d'une courbe n'est, comme je viens de le prouver, que la partie $HO$ ( Fig. 3 ) de la droite $QH$ menée parallelement aux ordonnées par le point extrême $Q$ de la fluxion de l'abscisse $AP$ jusqu'à la rencontre de la tangente, la partie, dis-je, de cette Ligne comprise entre le point, où elle rencontre la tangente, et la droite $MN$ qu'on conduiroit par le point $M$ du contact parallelement à l'axe des abscisses. Ce

ca-

caractére est celui, qui établit la différence entre l'intersection, et le contact des courbes.

Or, supposant pour plus de facilité, que toutes les courbes $BMS$; $CMR$; $DMO$, (Fig. 4) tournent leur concavité vers l'axe des abscisses et que l'origine de celles-ci soit au point $B$, si par l'extremité d'une abscisse $BP'$ plus grande que $BP$ on mene une parallele $P'M'$ à l'axe des ordonnées, et par le point $M$ de l'attouchement la droite $MN$ parallele à l'axe des abscisses, les parties $NO$; $NR$; $NS$; de la droite $P'M'$ comprises entre $MN$ et les différentes courbes $DMO$; $CMR$; et $BMS$ seront les incrémens respectifs de l'ordonnée commune, de façon que représentant l'équation de la courbe $DMO$ par $y = Fx$; celle de la courbe $CMR$ par $z = fx$; et celle de la courbe $BMS$ par $u = \varphi x$ le plus petit incrément $t \triangle Fx$ est celui qui répond à la courbe $DMO$, dont le contact avec la tangente $AM'$ est le plus foible: et l'incrément le plus grand $t \triangle \varphi x$ est celui qui répond à la courbe $BMS$, dont le contact avec la tangente $AM'$ est le plus intime. Ce seroit le contraire si les courbes au lieu d'offrir leur concavité vers l'axe des abscisses, lui offrissent la convexité.

Mais au point $M$ on a $Fx = fx = \varphi x$, et $dFx = dfx = d\varphi x$; et par conséquent il est évident, que l'inégalité des incrémens $t \triangle Fx$, $t \triangle fx$, et $t \triangle \varphi x$ ne peut provenir que de l'inégalité des fluxions de $Fx$, $fx$, et $\varphi x$ superieures aux premieres; puisque la grandeur absolue de $t \triangle Fx$, $t \triangle fx$, et $t \triangle \varphi x$ n'est pas, selon les principes de ma Méthode, seulement dependante de la grandeur de $dFx$, $dfx$, et $d\varphi x$; mais aussi de la grandeur des premieres fluxions de celles-ci et de toutes leurs variations successives depuis le premier jusqu'au dernier instant du temps $t$. » Donc » si plusieurs courbes rapportées aux mêmes deux » axes des coordonnées ont un point d'attouchement » commun celle, dont la seconde fluxion de l'ordon» née à ce point sera la plus grande, y aura avec

» la

» la tangente commune l'attouchement le plus foible.
» Ce sera tout au contraire pour celle, dont la se-
» conde fluxion de l'ordonnée sera la plus petite. »

Ce caractere suffira toujours pour distinguer parmi toutes les courbes, dont les secondes fluxions de l'ordonnée au point de l'attouchement commun sont inégales, celle qui à ce point a le contact le plus intime avec la tangente, et par conséquent aussi l'ordre selon lequel elles sont disposées par rapport à cete même ligne. Cependant il ne peut pas être suffisant dans le cas de $ddFx = ddfx = dd\varphi x$; puisqu'alors l'inégalité des incrémens $t\Delta Fx$, $t\Delta fx$, $t\Delta\varphi x$ ne pouvant pas provenir de la grandeur de $ddFx$, $ddfx$, et $dd\varphi x$, il faut nécessairement qu'elle provienne de la tendance, qu'ont ces secondes fluxions pour augmenter ou pour diminuer; c'est-à-dire, qu'elle doit provenir de la grandeur et du signe des trosiemes fluxions $d^3Fx$, $d^3fx$, et $d^3\varphi x$.

Je dis, qu'il faut qu'elle provienne du signe des troisiemes fluxions de l'ordonnée; par ce que la grandeur absolue de l'incrément $t\Delta Fx$, par exemple, dépendant de $dFx$, et $ddFx$, et de toutes leurs variations succéssives depuis le premier jusqu'au dernier instant du temps $t$, il est évident, que quelle que soit la grandeur de $d^3Fx$, si $ddFx$ diminue, l'incrément de $Fx$ dans l'hypothese de $ddFx$ négative sera plus grand, que lorsque $ddFx$ augmente: ou, ce qui est la même chose, sera plus grand, lorsque $d^3Fx$ sera positive. Et je dis, qu'il faut qu'elle provienne de la grandeur de la troisieme fluxion; par ce que, $d^3Fx$ étant négative, l'incrément $t\Delta Fx$ sera d'autant plus grand que $d^3Fx$ sera plus petite: et au contraire lorsque $d^3Fx$ sera positive. De là on conclue » 1.° Que parmi toutes les courbes rapportées
» aux mêmes deux axes des coordonnées, offrant leur
» concavité vers celui des abscisses, et ayant un point

» d'attouchement commun, et les secondes fluxions de » leurs ordonnées à ce point égales, celles, dont les » troisiemes fluxions des ordonnées seront positives, y » auront avec la tangente commune un attouchement » plus intime, que celles, dont les troisiemes fluxions des » ordonnées seront négatives. 2.° Que parmi les cour- » bes dont les troisiemes fluxions des ordonnées au » point de l'attouchement seront positives, celle, dont » cette troisieme fluxion sera la plus petite, y aura » avec la tangente commune un attouchement plus » foible, que toutes les autres. Et 3.° Que parmi » les courbes, dont les troisiemes fluxions des or- » données seront négatives au point de l'attouche- » ment, celle, dont cette troisieme fluxion sera la » plus grande, y aura avec la tangente commune » un attouchement plus intime, que toutes les au- » tres. »

En continuant à raisonner de la sorte on verra, que pour décider de la plus grande, ou de la plus petite intimité de l'attouchement des courbes avec leur tangente commune, lorsque les secondes et les troisiemes fluxions des ordonnées au point du contact sont égales, il faut recourir aux quatriemes, et ainsi de suite.

De tout ce que je viens de dire, on peut conclure » 1.° Qu'entre deux courbes, qui ont un point d'at- » touchement commun, et dont les secondes fluxions » des ordonnées à ce point sont égales, on ne peut pas » faire passer aucune autre courbe, dont la seconde » fluxion de l'ordonnée à ce point ne soit aussi éga- » le aux secondes fluxions des ordonnées des deux » autres. 2.° Qu'entre deux courbes, dont les secon- » des et les troisiemes fluxions des ordonnées au » point de l'attouchement sont égales, on ne peut pas » faire passer aucune autre courbe, dont la seconde » et la troisieme fluxion de l'ordonnée ne soient aussi » égales aux secondes et troisiemes fluxions des or- » données des deux autres. Et en général qu'entre

» deux

» deux courbes, dont toutes les fluxions successives
» des ordonnées au point de l'attouchement depuis la
» premiere jusqu'à celle de l'ordre $m$ sont égales
» chacune à celle de son ordre, on ne peut pas fai-
» re passer aucune autre courbe, dont toutes les flu-
» xions de l'ordonnée à ce point depuis la premie-
» re jusqu'à celle de l'ordre $m$, ne soient aussi éga-
» les aux fluxions correspondantes des ordonnées des
» deux autres. »

L'attouchement des courbes se nomme du premier, du second, du troisieme &c. ordre, selon le nombre des fluxions successives de leurs ordonnées au point de l'attouchement, qui sont égales chacune à celle de son ordre.

### *De la Courbure des Courbes, et du Raion de Courbure.*

Si le point générateur d'une courbe, au lieu de s'écarter de la direction de la tangente à chaque point selon la loi particuliere, qui en détermine les proprietés, s'en fût toujours écarté également, c'est-à-dire, que si au lieu d'avoir eu une tendance différente à chaque point pour s'écarter de la tangente, il eut eu au contraire une tendance constante pour s'en écarter, il est évident, qu'il auroit décrit une ligne courbe, dont la courbure séroit uniforme. Donc il auroit décrit un cercle, et par conséquent la courbure d'une courbe quelconque doit être censée égale à celle du cercle, que son point générateur auroit décrit, si au lieu de continuer de changer de direction selon la loi particuliere, qui détermine la nature de la courbe en question, il eut au contraire continué de changer de direction avec la même tendance, qu'il avoit pour en changer au point, où l'on veut mesurer la courbure de la courbe.

Or selon ce que nous avons dit sur la génération des courbes, on comprend avec la plus grande fa-

facilité, que si l'ordonnée $y$ d'une courbe quelconque à un point donné devenoit tout-à-coup uniformément fluente, c'est-à-dire, si $ddy$ devenoit tout-à-coup zéro, le point générateur au lieu de continuer de décrire la courbe en question, ne continueroit de décrire que sa tangente. Donc il est de la derniere évidence, que c'est en vertu de la seconde fluxion de l'ordonnée, que le point générateur tend à s'écarter de la tangente à chaque point, et que sa tendance pour s'en écarter est d'autant plus grande que la seconde fluxion de l'ordonnée est plus grande aussi. De là je conclue, que si deux courbes quelconques ayant un point d'attouchement commun, ont aussi les secondes fluxions de leurs ordonnées à ce point égales, elles y ont la même courbure: ou ce qui est la même chose, que leurs points générateurs y ont une égale tendance pour s'écarter de la tangente commune. L'égalité de courbure, et celle des secondes fluxions des ordonnées ayant donc lieu nécessairement ensemble, il s'ensuit, que la seconde fluxion de l'ordonnée de la courbe, dont on veut savoir la courbure à un point quelconque, doit être égale à la seconde fluxion de l'ordonnée du cercle, que le point générateur auroit décrit, si au lieu de continuer de s'écarter de la tangente selon la loi particuliere à la courbe, il eut continué de s'en écarter constamment avec la même tendance, qu'il avoit pour s'en écarter au point en question: et que par conséquent ce cercle doit avoir avec la courbe un attouchement du second ordre.

Or si on rapporte le cercle aux mêmes deux axes des coordonnées de la courbe, de façon que l'abscisse $x$ de celle-ci soit aussi l'abscisse du cercle; et si on représente par $y$ l'ordonnée de la courbe, et par $z$ celle du cercle, l'équation de celui-ci sera

$$(z-a)^2=2r(x-b)-(x-b)^2$$

$r$ étant le raion, dont la grandeur est inconnue. Mais au point de l'attouchement on a les conditions suivantes, $y = z$; $dy = dz$; et $ddy = ddz$; et par conséquent si on fluxione deux fois de suite l'équation du cercle, on aura les deux équations suivantes

$$(z - a)\,dz = (r - x + b)\,dx$$

$$(z - b)\,ddz = -(dx^2 + dz^2)$$

Substituant $y$ à la place de $z$, $dy$ à la place de $dz$, et $ddy$ à celle de $ddz$, ces deux équations fluxionelles, et celle, dont elles ont eté dérivées, se réduisent aux trois suivantes.

$$(y - a)^2 = 2r(x - b) - (x - b)^2$$

$$(y - a)\,dy = (r - x + b)\,dx$$

$$(y - a)\,ddy = -(dx^2 + dy^2)$$

des quelles éliminant $(y - a)$, et $(x - b)$ on déduit

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{2}{3}}}{\pm\, dx\, ddy}$$

valeur du raion du cercle, dont la courbure est égale à celle de la courbe.

## *De la Quadrature des Courbes.*

Avant que d'entrer en matiere il faut que je rapelle ici une proposition, que j'ai demontrée dans ma Théorie des Limites imprimée à Lisbonne en 1794; et qui est le fondement de l'application de la Méthode inverse des Fluxions à la Géométrie Transcendante. Je l'énonce de la sorte dans le petit ouvrage, que je viens de nommer. » Si trois quantités va- » riables, dont aucune n'a de Limite en dimi- » nution, sont telles que la premiere soit toujours

« plus

» plus grande que la seconde, et celle-ci toujours » plus grande que la troisieme, et si de plus la Li- » mite du rapport de la premiere à la troisieme est » le rapport d'égalité, ce rapport sera aussi la Limite » du rapport de la premiere à la seconde, et la Limi- » te du rapport de la seconde à la troisieme. » Je ne m'arrete pas à en donner ici la démonstration, pour ne pas alonger inutilement cette lettre, peut-être dé-ja trop longue. Vous pouvez la voir, si vous le desirez, dans l'ouvrage cité, ou dans l'Arithmétique Universelle appliquée à la Théorie du Commerce par M. Dantas, Jeune Mathématicien Portugais d'un mérite assez distingué, et déja connu par quelques autres travaux mathématiques non moins dignes de l'attention du Public.

Soit $APM$ (Fig. 3.) l'aire de la courbe, dont on veut la quadrature, ou le rapport de la surface au quarré de l'unité linéaire de l'abscisse $AP$. Soit $PP'M'SM$ son incrément au bout du temps $t$ : si on représente la surface $APM$ par $S$, $AP$ par $x$, et $PM$ par $y$, on aura $PP' = tdx$, $NM' = t\triangle y$, $NM'' = tdy$, l'incrément $PP'M'SM = t\triangle S$, l'aire du trapeze $PP'M''M = \left(y+\frac{1}{2}tdy\right)tdx$; et celle du trapeze $PP'M'M = \left(y+\frac{1}{2}t\triangle y\right)tdx$. Or aucune de ces trois dernieres quantités n'a de limite en diminution, et il est évident qu'on aura toujours.

$$\left(y+\frac{1}{2}tdy\right)tdx > t\triangle S$$

$$\left(y+\frac{1}{2}t\triangle y\right)tdx < t\triangle S.$$

En comparant les deux premiers membres de ces deux expressions d'inégalité, et cherchant la Limite de leur rapport, on a

Lim.

$$\text{Lim.}\frac{\left(y+\frac{1}{2}tdy\right)tdx}{\left(y+\frac{1}{2}t\Delta y\right)tdx}=\text{Lim.}\frac{y+\frac{1}{2}tdy}{y+\frac{1}{2}t\Delta y}=1,$$

et par conséquent

$$\text{Lim.}\frac{t\,\Delta S}{\left(y+\frac{1}{2}t\,\Delta y\right)tdx}=\text{Lim.}\frac{\Delta S}{\left(y+\frac{1}{2}t\Delta y\right)dx}=1.$$

Mais

$$\text{Lim.}\frac{\Delta S}{\left(y+\frac{1}{2}t\Delta y\right)dx}=\frac{dS}{y\,dx};$$

donc $\frac{dS}{ydx}=1$ ; ou $dS=y\,dx$ ; et par conséquent

$$S=\int y\,dx.$$

*De la Rectification des Courbes.*

Soit $AM'$ ( Fig. 3. ) l'arc de courbe, dont on veut la rectification, ou le rapport avec l'unité linéaire de l'abscisse $AP$ : et soit $MSM'$ son incrément au bout du temps $t$. Si on représente $AM'$ par $S'$, on aura $MSM'=t\,\Delta S'$, $MHM''=t\sqrt{dx^2+dy^2}$ et $MRM'=t\sqrt{dx^2+\Delta y^2}$. Aucune de ces quantités n'a de Limite en diminution, et l'on démontre assez facilement, que tant que $y$ augmentera on aura toujours les deux inégalites suivantes.

$$t\sqrt{dx^2+dy^2}>t\,\Delta S'$$

$$t\sqrt{dx^2+\Delta y^2}<t\,\Delta S'$$

Or

Or

$$\text{Lim.}\ \frac{t\sqrt{dx^2+dy^2}}{t\sqrt{dx^2+\Delta y^2}} = \text{Lim.}\ \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{dx^2+\Delta y^2}} = 1,$$

et par conséquent

$$\text{Lim.}\ \frac{t\,\Delta\,S'}{t\sqrt{dx^2+\Delta y^2}} = \text{Lim.}\ \frac{\Delta\,S'}{\sqrt{dx^2+\Delta y^2}} = 1.$$

Mais

$$\text{Lim.}\ \frac{\Delta\,S'}{\sqrt{dx^2+\Delta y^2}} = \frac{d\,S'}{\sqrt{dx^2+dy^2}};$$

donc $\dfrac{d\,S'}{\sqrt{dx^2+y^2}} = 1$ : ou $d\,S' = \sqrt{dx^2+dy^2}$ ; et par conséquent

$$S' = \int dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\ ;\ \text{ou}\ S' = \int dy\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}$$

*De la Quadrature des Surfaces courbes des Solides de révolution.*

---

Si on imagine que le plan de la courbe $AMM'$ (Fig. 3) tourne autour de l'axe des abscisses $AP$, l'aire $AMM'P'$ engendrera un solide de révolution, dont la surface courbe sera celle engendrée par l'arc $AMM'$. Les trapezes $PP'M'M$, et $MPP'M''$ engendreront deux cones tronqués, dont les surfaces courbes seront celles engendrées par $MM'$ et $MM''$. Soit $AP$ représentée par $x$, $PM$ par $y$, et la surface courbe du solide de révolution par $S''$, la surface

face courbe engendrée par la droite $MM''$ sera $=$ $\frac{c}{r}\left(y+\frac{1}{2}\,t\,dy\right)t\sqrt{dx^2+dy^2}$, celle engendrée par l'arc $MSM'$ sera $= t\,\Delta\,S''$, et celle engendrée par la corde $MRM'$ sera $= \frac{c}{r}\left(y+\frac{1}{2}\,t\Delta y\right)t\sqrt{dx^2+\Delta y^2}$.

Aucune de ces quantités n'a de limite en diminution, et on a toujours, tant que $y$ augmente,

$$\frac{c}{r}\left(y+\frac{1}{2}\,t\,dy\right)t\sqrt{dx^2+dy^2} > t\,\Delta\,S''$$

et

$$\frac{c}{r}\left(y+\frac{1}{2}\,t\,\Delta y\right)t\sqrt{dx^2+\Delta y^2} < t\,\Delta\,S''.$$

En comparant les deux premiers membres de ces expressions d'inégalité, et cherchant la limite de leur rapport, on a

$$\text{Lim.}\frac{\frac{c}{r}\left(y+\frac{1}{2}\,tdy\right)t\sqrt{dx^2+dy^2}}{\frac{c}{r}\left(y+\frac{1}{2}t\Delta y\right)t\sqrt{dx^2+\Delta y^2}} = \text{Lim.}\frac{\left(y+\frac{1}{2}\,tdy\right)\sqrt{dx^2+dy^2}}{\left(y+\frac{1}{2}t\Delta y\right)\sqrt{dx^2+\Delta y^2}} = 1$$

et par conséquent

$$\text{Lim.}\frac{t\,\Delta\,S''}{\frac{c}{r}\left(y+\frac{1}{2}t\Delta y\right)t\sqrt{dx^2+\Delta y^2}} = \text{Lim.}\frac{\Delta\,S''}{\frac{c}{r}\left(y+\frac{1}{2}t\Delta y\right)\sqrt{dx^2+\Delta y^2}} = 1.$$

Mais

$$\text{Lim.}\frac{\Delta\,S''}{\frac{c}{r}\left(y+\frac{1}{2}\,t\Delta y\right)\sqrt{dx^2+\Delta y^2}} = \frac{d\,S''}{\frac{c}{r}y\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

 donc

donc $\dfrac{dS''}{\frac{c}{r}y\sqrt{dx^2+dy^2}}=1$ ; ou $dS''=\frac{c}{r}y\sqrt{dx^2+dy^2}$ ; et

par conséquent

$$S''=\frac{c}{r}\int ydx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}, \text{ ou } S''=\frac{c}{r}\int ydy\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}.$$

*De la Cubature des Solides de révolution.*

Si on représente par $S'''$ la solidité du solide de révolution engendré par la surface curviligne $AFM$, et qu'on conserve les dénominations precédentes, la solidité du cone tronqué, engendré par le trapeze $MPP'M''$, sera $=\frac{c}{2r}\left(y^2+ytdy+\frac{1}{3}t^2dy^2\right)tdx.$

Celle de la partie du solide de révolution engendré par $PP'M'SM$ sera $=t\Delta S'''$ ; et celle du cone tronqué engendré par le trapeze $PP'M'RM$ sera $=$ $\frac{c}{2r}\left(y^2+yt\Delta y+\frac{1}{3}t^2\Delta y^2\right)tdx$. Aucune de ces quantités n'a de limite en diminution ; et il est évident qu'on aura toujours

$$\frac{c}{2r}\left(y^2+ytdy+\frac{1}{3}t^2dy^2\right)tdx>t\Delta S'''$$

et

$$\frac{c}{2r}\left(y^2+yt\Delta y+\frac{1}{3}t^2\Delta y^2\right)tdx<t\Delta S'''$$

Si on compare les premiers membres de ces deux expressions d'inégalité, et qu'on cherche la Limite de leur rapport, on a

Lim.

$$\text{Lim.}\ \frac{\frac{c}{2r}\left(y+y\,t\,dy+\frac{1}{3}t^2dy^2\right)t\,d\,x}{\frac{c}{2r}\left(y+y\,t\triangle y+\frac{1}{3}t^2\triangle y^2\right)t\,d\,x}=$$

$$\text{Lim.}\ \frac{y^2+y\,t\,d\,y+\frac{1}{3}t^2\,d\,y^2}{y^2+y\,t\triangle y+\frac{1}{3}t^2\triangle y^2}=1$$

et par conséquent

$$\text{Lim.}\ \frac{t\triangle S'''}{\frac{c}{2r}\left(y^2+y\,t\triangle y+\frac{1}{3}t^2\triangle y^2\right)t\,d\,x}=$$

$$\text{Lim.}\ \frac{\triangle S'''}{\frac{c}{2r}\left(y^2+y\,t\triangle y+\frac{1}{3}t^2\triangle y^2\right)d\,x}=1.$$

Mais

$$\text{Lim.}\ \frac{\triangle S'''}{\frac{c}{2r}\left(y^2+yt\triangle y+\frac{1}{3}t^2\triangle y^2\right)dx}=\frac{d\,S'''}{\frac{c}{2r}y^2\,dx}$$

donc $\frac{d\,S'''}{\frac{c}{2r}y^2dx}=1$, ou $d\,S'''=\frac{c}{2r}y^2\,d\,x$ ; et par conséquent

$$S'''=\frac{c}{2r}\int y^2\,d\,x.$$

On démontre avec une égale facilité, que quelle que soit la figure d'un solide, si on l'imagine engendré par le mouvement d'une surface plane le long d'une ligne perpendiculaire á cette même surface, et sur la quelle on compte la hauteur du solide, on a

$$S=\int s\,d\,x\ ,$$

en nommant $s$ la surface génératrice, $x$ la hauteur, et $S$ la solidité du solide.

# APPLICATION
## A LA MÉCHANIQUE.

### *Des mouvemens uniformes, et uniformément accélérés.*

LE Temps, et l'Espace décrit par les corps en mouvement sont des quantités fluentes. Le Temps flue uniformément. L'Espace flue selon la loi á laquelle est assujeti le mouvement du corps, qui le parcourt. Les forces, qui mettent les corps en mouvement, sont de deux genres tout-à-fait différens. Je nomme les unes *impulsives*, et les autres *accélératrices.* L'action de celles du premier genre est instantanée. L'action de celles du second est continuelle et successive. La vîtesse d'un corps mis en mouvement en vertu d'une force du premier genre est l'espace, qu'il parcourt dans une unité de temps. La vîtesse d'un corps mis en mouvement en vertu d'une force du second genre est pour chaque instant l'espace, qu'il parcoureroit dans une unité de temps comptée depuis cet instant, si la force cessoit de continuer son action sur le mobile pendant cette unité de temps.

L'action instantanée d'une force ne produit dans le corps auquel on l'applique, qu'une certaine tendance pour se mouvoir avec une vîtesse proportionelle à la grandeur de la même force, et suivant la direction dans la quelle elle agit. En combinant ces idées avec les Définitions, que je viens de donner de la vîtesse, on peut réduire les mêmes Définitions à une seule, en disant » Que par vîtesse d'un corps à tel ou tel instant on doit entendre l'espace, que la tendance, qu'il a pour se mouvoir à cet instant, lui auroit fait parcourir, si elle eut continué constamment la même pendant l'unité de temps. »

La vîtesse du corps est donc la même chose que la fluxion de l'Espace qu'il parcourt ; l'espace parcouru n'ayant d'autre tendance pour augmenter que celle qu'a le corps pour se mouvoir. Et puisque la fluxion du temps est évidemment la portion du temps qu'on a pris pour unité, si on représente par $E$ l'espace parcouru depuis le commencement du mouvement, et par $V$ la vîtesse du corps au bout du temps $t$, qu'il a emploié à parcourir le même espace $E$, on aura cette équation $dE = Vdt$, laquelle doit avoir lieu pour tous les mouvemens imaginables.

Si $V$ est constante, le mouvement est dit uniforme. Alors de cette équation on déduit par la Méthode inverse des Fluxions cette autre $E = Vt$, la quelle renferme toutes les proprietés de ce mouvement.

Si $V$ est uniformément fluente, alors la fluxion de $V$ sera constante, et le mouvement est dit uniformément et continuellement accéléré. En représentant par $p$ l'incrément, que la force accélératrice communique à la vîtesse $V$ dans une unité de temps, on aura cette autre équation $dV = pdt$, de laquelle et de la precédente, éliminant $dt$, on tire celle-ci $VdV = pdE$. Des équations $dE = Vdt$ ; $dV = pdt$ ; et $VdV = pdE$ se dérivent par la Méthode inverse des Fluxions ces trois autres. $V = pt$ ; $E = \frac{pt^2}{2}$, ou $E = \frac{Vt}{2}$ ; et $V^2 = 2pE$, les quelles renferment toutes les proprietés des mouvemens uniformément et continuellement accélérés. La quantité $p$ est ce qu'on appelle en Méchanique *force accélératrice.*

Si $p$ au lieu d'être constante étoit uniformément fluente, représentant alors par $p'$ l'incrément de la force accélératrice pendant l'unité de temps, on auroit $dp = p'dt$ ; et des trois équations $dE = Vdt$, $dV = pdt$ ;

et

et $dp = p'dt$ on déduiroit par la Méthode Inverse des Fluxions ces trois autres $p = p't$ ; $V = \frac{p't^2}{2}$ ; et $E = \frac{p't^3}{2.3}$. Éliminant $p'$, on obtiendroit ces deux autres $V = \frac{pt}{2}$ ; et $E = \frac{pt^2}{2.3}$ ; et éliminant $p$ de celles-ci, on obtiendroit encore cette autre $E = \frac{Vt}{3}$.

*Des mouvemens composés, et des trajectoires des mobiles dans le vide.*

Lorsqu'un corps est assujetti à l'action combinée de plusieurs forces, son mouvement est dit composé. Pour en avoir les proprietés, lorsque les forces agissent dans le même plan selon des directions inclinées sous un angle quelconque, il faut rapporter ce mouvement à deux lignes données de position.

Supposons qu'un mobile poussé suivant la direction $AD$ ( Fig. 5 ) par une force impulsive, qui lui communique la vitesse $V$, soit assujetti à l'action d'une force accélératrice constante, dont la direction est perpendiculaire à $AB$. Soit $b$ l'angle $DAB$ de projection, et $p$ la force accélératrice. Qu'on nomme $x$ l'abscisse $AP$, et $y$ l'ordonnée $PM$ : on aura

$$dx = Vdt \text{ Cos.}b$$

et

$$dy = Vdt \text{ Sin.}b - ptdt$$

De ces deux Équations on tire ces deux autres

$$x = Vt \text{ Cos.}b$$

$$y = Vt \text{ Sin.}b - \frac{pt^2}{2}$$

des

des quelles éliminant $t$ résulte l'Équation unique

$$V^2 y \text{Cos.} 2b = V^2 x \text{ Sin.} 2b - px^2$$

la quelle appartient à la parabole du second degré. Soit $h$ la hauteur, dont un corps assujetti à l'action de la gravité près de la surface de la terre devroit tomber pour acquerir la vîtesse $V$, et soit cette même gravité la force accélératrice du mobile ; si on substitue $2ph$ à la place de $V^2$, l'Équation trouvée se réduit à

$$2hy\text{Cos.}2b = 2hx \text{ Sin.}2b - x^2.$$

Prenons pour second exemple le mouvement d'un corps animé par une force tangentielle dont l'action soit instantanée, et par une force centrale dont l'action soit continuelle et successive. Soit $C$ ( Fig. 6. ) le centre vers le quel se dirige l'action de la force centrale. Représentons par $P$ l'intensité de cette force au point $M$. Soit $AP = x$, $AC = a$, $PM = y$, et $CM = z$. On aura $CP = a - x$, et $z^2 = y^2 + (a - x)^2$. Il est évident que si le corps étant arrivé au point $M$ la force centrale cessoit d'agir sur lui, il commenceroit à se mouvoir uniformément sur la Tangente à ce point. La vîtesse du corps est donc une quantité fluente, dont la tendance pour fluer est celle, qui provient de la force centrale $P$. Décomposons cette force en deux autres $P'$, et $P''$ la premiere parallele à l'axe des ordonnées, et la seconde parallele à celui des abscisses : on aura $P' = \frac{y}{z} P$, et $P'' = \frac{(a - x)}{z} P$. La premiere de ces quantités représentant donc la fluxion de la vîtesse dans le sens de l'ordonnée exprime la seconde Fluxion de $y$, et la seconde de représentant la fluxion de la vîtesse dans le sens de l'abscisse exprime la seconde Fluxion de $x$ : et par conséquent en les substituant dans la seconde des deux équations fondamentales des mouvemens varies, on aura les deux équations suivantes

$$-d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{y}{z} P\,dt$$

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{(a-x)}{z} P\,dt.$$

Si on multiplie la permiere par $(a-x)$, et la seconde par $y$, et qu'on retranche la premiere de la seconde, on aura

$$(a-x)\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) + y\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0. \quad (A)$$

Si on multiplie la premiere par $-\frac{dy}{dt}$, la seconde par $\frac{dx}{dt}$, et qu'on les ajoute ensemble, on aura

$$\frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{P}{z}\left(y\,dy - (a-x)\,dx\right)$$

équation, qu'on change en

$$\frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -P\,dz \quad (B)$$

en mettant à la place de $y\,dy - (a-x)\,dx$ sa valeur $z\,dz$.

Par la Méthode inverse des Fluxions on déduit des équations $(A)$ et $(B)$ ces deux autres

$$(a-x)\,dy + y\,dx = C\,dt \quad (A')$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 2C' - 2\int P\,dz \quad (B')$$

Soit

Soit l'angle $ACM = \varphi$, on aura $y = z$ Sin.$\varphi$, et $a - x = z$ Cos. $\varphi$; donc $dy = dz$ Sin.$\varphi$, et $dx = z d\varphi$ Sin.$\varphi$ — $dz$ Cos. $\varphi$. Et par conséquent les deux équations $(A')$ et $(B')$ se changeront en ces deux autres.

$$z^2 d\varphi = C dt$$

$$\frac{dz^2 + z^2 d\varphi^2}{dt^2} = 2C' - 2\int P dz$$

des quelles éliminant $dt$ on déduit celle-ci

$$d\varphi = \frac{C dz}{z\sqrt{2C' z^2 - 2z^2\int P dz - C^2}}.$$

Équation toute séparée, et par conséquent résolvable par les regles de la Méthode inverse, tant que $P$ sera une fonction de $z$.

Supposons que la force centrale agisse en raison réciproque des quarrés des distances, ce qui est le cas des corps célestes dans le systême de la gravitation universelle, et représentons par $g$ la vîtesse qu'elle engendreroit, si elle continuoit pendant l'unité de temps la même action qu'elle exerce à la distance $CA$. Alors on aura $P = \frac{a^2 g}{z^2}$; $\int P dz = -\frac{a^2 g}{z}$, et l'équation fluxionelle de la trajectoire se changera en

$$d\varphi = \frac{C dz}{z\sqrt{2C' z^2 + 2a^2 g z - C^2}}$$

ou, divisant les deux termes du second membre par $C^2 z^2$, en

$$d\varphi = \frac{\frac{dz}{z^2}}{\sqrt{\frac{2C'^2}{C^2} + \frac{2a^2g}{C^2z} - \frac{1}{z^2}}}$$

Pour déterminer les constantes $C$ et $C'$, il faut observer que les deux équations $(A')$ et $(B')$, lorsque $z = a$, se réduisent, la premiere à

$$a\,dy = C\,dt$$

et la seconde à

$$2ph = 2C' + 2ga$$

représentant par $p$ la vîtesse, que la gravité près de la surface de la Terre donne à un grave quelconque dans une unité de temps, et par $h$ la hauteur dont il devroit tomber pour acquerir la vîtesse de projection, ou la vîtesse tangentielle du mobile au point $A$. Soit l'angle de projection $PAD = \alpha$: on trouvera $C = a\,\text{Sin.}\alpha\sqrt{2ph}$, et $C' = ph - ag$. Donc

$$d\varphi = \frac{\frac{dz}{z^2}}{\sqrt{\frac{ph - ag}{a^2ph\,\text{Sin.}^2\alpha} + \frac{g}{phz\,\text{Sin.}^2\alpha} - \frac{1}{z^2}}}.$$

Formule, qui dans le cas de $\alpha = 90°$ se réduit à

$$d\varphi = \frac{\frac{dz}{z^2}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{g}{aph} + \frac{g}{phz} - \frac{1}{z^2}}}$$

et qu'on peut écrire ainsi

$$d\varphi = \frac{\frac{dz}{z^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}-\frac{g}{2ph}\right)^2-\left(\frac{g}{2ph}-\frac{1}{z}\right)^2}}.$$

Faisons pour simplifier cette expression

$\left(\frac{1}{a}-\frac{g}{2ph}\right)=r$, et $\left(\frac{g}{2ph}-\frac{1}{z}\right)=ru$; $u$ étant une nouvelle variable, et $r$ une constante ; nous aurons

$$d\varphi = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Formule assez simple, et de laquelle on tire par la Méthode inverse

$u = \text{Sin.}\,(\varphi + C'') = \text{Sin.}\,\varphi\,\text{Cos.}\,C'' + \text{Sin.}\,C''\,\text{Cos.}\,\varphi.$

Pour déterminer la constante $C''$ il faut observer, que lorsque $z=a$, $\varphi$ devient $=0$ : mais lorsque $z=a$, on a $u=\text{Sin.}\,C''$, et de l'équation $\frac{g}{2ph}-\frac{1}{z}=ru$ on tire $u=\frac{g}{2phr}-\frac{1}{ar}$; donc $\frac{g}{2phr}-\frac{1}{ar}=\text{Sin.}C''$.

En mettant à la place de $r$ sa valeur $\frac{1}{a}-\frac{g}{2ph}$ cette équation se réduit à $\text{Sin.}C''=-1$ ; donc $\text{Cos.}C''=0$, et par conséquent $u=-\text{Cos.}\varphi$. Or nous avons fait $u=-\frac{a(gz-2ph)}{(ag-2ph)z}$: Donc

$$\text{Cos.}\varphi = \frac{a(gz-2ph)}{(ag-2ph)z}.$$

Équation qui par la substitution de $\frac{a-x}{z}$ à la place de Cos.$\varphi$ se change en

$$a-x=\frac{a(gz-2ph)}{ag-2ph}.$$

Substituant à la place de z sa valeur, et faisant les réductions convenables, cette équation se réduit à

$$y^2=\frac{4ph}{a^2g^2}\left(a^2gx+(ph-ag)x^2\right).$$

Équation qui appartient en général à une Section Conique, dont $C$ est le foyer et $A$ le sommet. Elle appartiendra à l'Elipse lorsque $ph<ag$ : au Cercle lorsque $2ph=ag$ : à l'Hyperbole lorsque $ph>ag$ : et enfin elle appartiendra à la Parabole lorsque $ph=ag$.

### *Du Centre de Gravité.*

La regle, qu'on donne en Méchanique pour déterminer la position du Centre de Gravité d'un systême quelconque de corps, est de prendre la somme des momens de tous les corps, dont le systême est composé, par rapport à trois plans ou à trois axes perpendiculaires entr'eux, et de la diviser par la somme des masses. Ce qui est la conséquence de ce Théoreme. » La somme des momens de tous les » corps d'un systême quelconque est égale au mo» ment de leur centre commun de gravité. »

Cette regle aussi facile de démontrer que d'appliquer, tant qu'on regarde les corps comme des assemblages de différents points phisiques, tombe en defaut, aussitot qu'on les considére comme des quantités continues. Alors les Géomètres sont obligés d'introduire dans la démonstration de cette proposition

les

les idées de l'infini, et de l'infiniment petit; c'est-à-dire, qu'ils sont obligés de mettre un galimatias à la place d'une démonstration, au moins par rapport à ceux qui comme moi ne peuvent se former des idées assez nettes de la signification de tels mots, ni par conséquent de l'exactitude des principes, que quelques Mathématiciens en ont déduit.

Voici comment par mes principes on peut traiter cette question, sans jamais perdre de vue la lumiere de l'évidence qui caractérise les Sciences Mathématiques. Soit $P$ un corps quelconque, et représentons par $MP$ le moment de son centre de gravité par rapport à un axe, ou plan quelconque : $M$ étant une algorithme destinée à signifier le mot *Moment*. Supposons que le corps $P$ flue pendant le temps $t$: le moment $MP$ deviendra $M(P + t\triangle P)$. Si on tire de cete grandeur, que j'appelle *état varié du moment de P*, son état primitif $MP$ on aura son incrément

$$t\triangle(MP) = M(P + t\triangle P) - MP.$$

Mais

$$M(P + t\triangle P) = MP + M(t\triangle P)$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente elle se réduit à

$$t\triangle(MP) = M(t\triangle P)$$

Donc » L'incrément du moment d'un corps quelcon-» que est toujours égal au moment de son incré-» ment. » Or le moment de $t\triangle P$ doit être égal au produit de $t\triangle P$ par la distance de son centre particulier de gravité à l'axe, ou au plan, au quel on rapporte les momens. Représentons cette distance par $r'$, on aura

$$M(t\triangle P) = r' t\triangle P$$

donc

$$t \Delta ( MP ) = r' t \Delta P$$

et divisant par $t$

$$\Delta ( MP ) = r' \Delta P.$$

Équation aux fluxions hypothétiques, dont on tire par la Méthode des Limites la suivante, en représentant par $r$ la limite de $r'$

$$d ( MP ) = r \, d P.$$

De cette derniere l'on déduit enfin par la Méthode Inverse des Fluxions

$$MP = \int r \, d P$$

et si on représente par z la distance du centre de gravité du corps $P$ à l'axe des momens, cette équation se change en

$$z P = \int r \, d P$$

de laquelle on tire

$$z = \frac{\int r \, d P}{P}.$$

Or $r$ étant toujours la distance de la surface génératrice à l'axe des momens * on aura cette regle générale pour déterminer la position du centre de gra-

---

* Il est évident que $r'$ doit être toujours plus grande que la distance de la surface génératrice à l'axe des momens, et plus petite que la distance de l'autre surface, qui termine l'incrément $t \Delta P$, au même axe. Or ces deux surfaces pouvant être aussi proches l'une de l'autre qu'on voudra, la différence de leurs distances à l'axe des momens n'aura point de limite en diminution ; et par conséquent la distance de la surface génératrice à ce même axe sera en effet la Limite de $r'$.

gravité de quelque corps que ce soit. » Multipliez la » fluxion de la solidité du corps proposé par la dis- » tance de la surface génératrice à l'axe, au quel on » rapporte les momens : déterminez la Fluente de » ce produit, et divisez-la par la solidité du corps. »

Lorsqu'on veut déterminer le centre de gravité d'une surface, alors au lieu de dire dans la regle » fluxion de la solidité du corps » et « surface génératrice » on doit dire « fluxion de la surface » et « ligne génératrice. » Et lorsqu'on veut déterminer le centre de gravité d'une ligne on doit dire » fluxion de la ligne » et « point générateur » De façon que la regle lorsqu'on traite des grandeurs géométriques peut être énoncée de la sorte. « Multipliez la fluxion de » la quantité proposée par la distance de son *terme* » *générateur* à l'axe au quel on rapporte les momens, » déterminez la Fluente de ce produit, et divisez-la » par la quantité proposée. »

### *Des Centres de Percussion et d'Oscillation.*

La détermination des centres de percussion et d'oscillation est en général sujette aux mêmes difficultés, que celle du centre de gravité. Tant qu'on considére les corps, qui tournent autour d'un axe, comme des assemblages de points phisiques, on peut toujours faire une somme des produits de chaque particule ou point phisique par le quarré de sa distance à l'axe de rotation, et la diviser par le produit de la masse du corps multipliée par la distance de son centre de gravité au même axe. Cependant lorsqu'on veut donner à cette regle un sens géométrique, c'est-à-dire, lorsqu'on veut l'appliquer aux quantités continues, alors les Géomètres pour avoir la somme des produits de chaque point phisique par le quarré de sa distance à l'axe de rotation, ce que nous appellerons avec M. Euler et avec beaucoup d'autres Géomètres *Moment d'Inertie*, se voient forcés de recourir à cet infini, et à ces

ces infiniment petits, avec les quels il semble qu'on peut tout obtenir dans les Mathématiques hormis la clarté et l'exactitude.

Suivant les principes de ma Méthode, dont la marche uniforme et simple est assez remarquable, on parvient avec la derniere facilité à determiner la regle, qu'il faut suivre pour obtenir le Moment d'Inertie d'un corps quelconque géométriquement consideré. Soit $P$ le corps dont on veut savoir le Moment d'Inertie, et représentons ce moment par $M'P$. Supposons que $P$ soit une quantité fluente, $M'P$ le sera aussi. Et si $P$ devient au bout du temps $t$, $P + t \triangle P$, $M'P$ deviendra $M'(P + t \triangle P)$. Si de cette quantité, qui j'appelle l'état varié du Moment d'Inertie du corps $P$, on tire son état primitif $M'P$, on aura son incrément

$$t \triangle (M'P) = M'(P + t \triangle P) - M'P.$$

Mais

$$M'(P + t \triangle P) = M'P + M'(t \triangle P)$$

donc substituant dans l'équation précedente elle se réduit à

$$t \triangle (M'P) = M'(t \triangle P) \qquad (A)$$

de laquelle on conclue » Que l'incrément du Mo» ment d'Inertie d'un corps quelconque est toujours » égal au Moment d'Inertie de son incrément. » Or si on représente par $r'$ une ligne telle que $M'(t \triangle P) = r'r' t \triangle P$, $r'$ sera plus grande que la distance de la surface antérieure de l'incrément $t \triangle P$ à l'axe de rotation, et plus petite que la distance de sa surface postérieure au même axe, ou au contraire selon la position de celui-ci. Supposons que la distance de la surface génératrice à l'axe de rotation soit $= r$, on aura $r = \text{Lim.}\ r'$. Substituant la valeur de $M'(t \triangle P)$ à sa place dans l'équation $(A)$, elle se réduit à

$t\triangle$

$$t \triangle (M'P) = r'r' t \triangle P.$$

De celle-ci on tire

$$\triangle (M'P) = r'r' \triangle P.$$

Équation aux fluxions hypothétiques de la quelle on déduit par la Méthode des Limites

$$d(M'P) = r^2 dP.$$

Soit $S$ la surface génératrice du solide $P$, et $x$ la perpendiculaire à cette surface, on aura $dP = S dx$, valeur qui étant substituée dans l'équation précédente la réduit à

$$d(M'P) = r^2 S dx.$$

Formule de la quelle on déduit par la Méthode inverse des Fluxions

$$M'P = \int r^2 S dx.$$

Voilà donc comment à l'aide de mes principes, ou veritablement à l'aide de ceux des anciens Géomètres, que je n'ai fait que développer méthodiquement, et appliquer aux idées de Fluxions et de Fluentes, la regle pour la détermination des centres de percussion et d'oscillation rentre das la classe des vérités mathématiques : et voilà comment on parvient à lever les difficultés, que les nouvelles Méthodes avoient plutot éludées que vaincues.

*De la Pression des Fluides.*

La pression, qu'un fluide pesant exerce, étant en repos, sur une surface plane parallele au plan de niveau est égale au poids d'un prisme de fluide, dont la base est la surface proposée, et dont la hauteur est égale à la distance de cette surface au plan de niveau. Cette proposition sur la pression des Fluides

 est

est peut-être, parmi celles qui composent leur Théorie, la seule dont la vérité soit démontrée par les principes des Géomètres modernes de façon à pouvoir être également admise, lorsqu'on considére la pression des fluides comme une quantité discontinue, et lorsqu'on la considére comme une quantité continue. Quoique la premiere de ces considérations soit plus conforme à la nature des choses, il faut cependant que dans la Théorie des fluides on donne la préférence à la seconde. Il est vrai que tous les corps fluides existants dans la Nature sont des assemblages de particules très petites, et par conséquent la tranche inférieure d'un fluide quelconque ne peut toucher la surface, sur laquelle il repose, que dans un nombre de points égal à celui des particules, qui sont contenues dans cette même tranche. Cependant leur petitesse est si extrême, que nous sommes là dessus dans l'impossibilité de former des hypothéses, dont les erreurs ne soient mille fois plus à craindre, que celles qui doivent résulter de l'hypothése de la continuité de la pression. Il est vrai que l'esprit peut s'en appercevoir, mais nos sens sont trop foibles pour jamais reconnoitre leur existence. Les résultats de cette hypothése ne sont à la vérité que les limites des vrais résultats de la nature; mais au moins nous sommes assurés qu'ils en approchent de plus près, que ceux qu'on peut déduire de toute hypothése arbitraire. Je passe donc à considérer la pression des fluides comme agissant sur tous les points des surfaces des corps, qui y sont plongés, ou des vases, qui les contiennent.

Supposons que *AB* ( Fig. 7 ) représente la surface superieure d'un fluide quelconque homogéne et incompressible, dont la pesanteur spécifique soit $= p$: que le fluide soit en équilibre, et que *CD* soit une surface plane inclinée à l'horizon. Il s'agit de connoitre la pression qu'elle souffre de la part du fluide dans cette position. Soit $CD = S$, et re-

pré-

présentons par $PS$ la pression qu'on cherche, $P$ étant une algorithme destinée à représenter le mot *Pression*. Supposons que $S$ flue, $PS$ fluera aussi; et pendant que $S$ devient $S + t \triangle S$, $PS$ deviendra $P(S + t \triangle S)$. Donc tirant de l'état varié de $PS$ son état primitif on aura

$$t \triangle (PS) = P(S + t \triangle S) - PS$$

mais

$$P(S + t \triangle S) = PS + P(t \triangle S)$$

donc substituant dans l'équation précédente elle se changera en

$$t \triangle (PS) = P(t \triangle S) \qquad A$$

d'où l'on conclue « Que l'incrément de la pression » d'une surface quelconque sera toujours égal à la » pression de son incrément. » Soit $DG = t \triangle S$, $DE = r$; et $GF = r'$, il est évident que les deux inégalités suivantes auront toujours lieu

$$P(t \triangle S) > prt \triangle S$$

$$P(t \triangle S) < pr' t \triangle S$$

Soit $P(t \triangle S) = pr'' t \triangle S$; $r''$ sera plus grande que $r$, et plus petite que $r'$: mais $r' - r$ n'a point de limite en diminution; puisqu'on peut prendre $DG$ si petit qu'on voudra; donc aussi $r'' - r$ n'aura point de limite en diminution, et par conséquent $r$ sera la limite de $r''$. Or si dans l'équation $A$ on substitue à la place de $P(t \triangle S)$ sa valeur on aura

$$t \triangle (PS) = pr'' t \triangle S$$

et divisant par $t$

$$\triangle (PS) = pr'' \triangle S.$$

De-là on déduit par la Méthode des Limites l'équation suivante

 d

$$d(PS) = prdS$$

et de celle-ci par la Méthode inverse des Fluxions on déduit enfin cette autre

$$PS = p\int rdS.$$

Représentons par z la distance du centre de gravité de $S$ au plan de niveau, on aura $\int rdS = zS$; donc substituant cette valeur dans celle de $PS$, qu'on vient de trouver, on aura

$$PS = pzS.$$

Équation de la quelle on tire ce Théorême « La pression que souffre une surface plane quelconque, sur » la quelle repose un fluide homogéne et incompres- » sible, est égale au poids d'un prisme de fluide, » dont la base est la même surface, et dont la hau- » teur est égale à la distance de son centre de gra- » vité au plan de niveau. »

On voit bien que je suppose tacitement dans la démonstration précédente, que la ligne génératrice de la surface représentée par $S$ est une droite paralle- le au plan de niveau. Si $S$ au lieu d'être une surfa- ce plane étoit au contraire une surface courbe, cette supposition ne sauroit avoir toujours lieu. Cependant si on suppose le corps, auquel cette surface appar- tient, coupé par un plan parallele au plan de niveau, l'intersection de la surface du corps avec ce plan sera une ligne droite, ou une ligne courbe toute exis- tante dans ce même plan. Alors si on regarde cette ligne comme le terme générateur de la surface cour- be, on voit clairement qu'on peut appliquer à la re- cherche de la pression qu'elle souffre les mêmes rai- sonemens, que nous avons emploié dans le cas que nous venons d'examiner; et par conséquent on peut conclure de même, et par les mêmes formules « Que » la pression que souffre une surface courbe, sur la-

» quel-

» quelle repose un fluide quelconque homogéne et » incompressible, est égale au poids d'un prisme de flui- » de, dont la base seroit une surface plane égale à » la surface courbe en question, et dont la hauteur » seroit égale à la distance de son centre de gravi- » té au plan de niveau. »

### *De la Résistance des Fluides.*

La résistance que les Fluides opposent au mouvement des corps solides, qui y sont plongés, provient en partie de la ténacité ou cohésion des molécules, dont ils sont composés; en partie du frottement; et en partie de l'inégalité de la pression, qu'ils exercent sur les différents points des corps qui ne sont pas à une égale profondeur. Elle provient aussi en partie des loix de la communication du mouvement. Et ç'est précisément la résistance, qui provient de cette derniere cause, dont je me propose de donner la mésure suivant l'hypothése de M. d'Alembert dans le Chap. 1. du Liv. 3. de son Traité de l'Équilibre et du mouvement des Fluides. Hyphothése qu'il a rejettée après dans son Essai d'une nouvelle Théorie de la Résistance des Fluides, et que j'adopte ici malgré son insuffisance; parce qu'elle n'a jamais eté parfaitement discutée, qu'elle mérite de l'être; et qu'elle est précisément celle qu'on expose à la Jeunesse Portugaise dans les Écoles, où l'on explique le Cours de Mathématiques de M. Bézout. Je suppose donc que toutes les parties du fluide soient successivement frappées par une surface plane la quelle se meut dans une direction perpendiculaire. Pour cela il faut que les particules du fluide aussitot qu'elles auront été choquées s'aneantissent, ou bien qu'elles s'echappent de tous les cotés, de façon que le corps continuant de se mouvoir rencontre successivement toutes celles qui sont dans la direction de son mouve vement, avant qu'elles soient sorties de l'état de repos.

Pour établir solidement les conséquences de cette Théorie il faut auparavant déterminer la différence, qui existe entre la percussion momentanée d'une masse quelconque, et la percussion successive de toutes ses parties. Soit un corps $M$, le quel avec une vîtesse $V$ choque un autre corps dont la masse soit $m$. Si celui-ci est en repos la vîtesse du choquant après la percussion sera $\frac{MV}{M+m}$. Supposons qu'avec cette vîtesse il rencontre un autre corps $= m$ aussi en repos, sa vîtesse après cette seconde percussion sera $\frac{M^2 V}{(M+m)^2}$, et en général après avoir choqué successivement un nombre $n$ de corps chacun $= m$, sa vîtesse sera $\frac{M^n V}{(M+m)^n}$; et la quantité de mouvement qu'il aura perdue sera . . . . . . $MV\left(\frac{(M+m)^n - M^n}{(M+m)^n}\right)$. Si le corps $M$ au lieu de choquer successivement les $n$ parties, dont je suppose composée la masse $nm$, les eut au contraire choqué toutes ensemble sa vîtesse après la percussion seroit $\frac{MV}{M+nm}$, et la quantité de mouvement qu'il auroit perdue seroit $\frac{nmMV}{M+nm}$. En comparant ces deux expressions on voit que

$$\frac{MV\,((M+m)^n - M^n)}{(M+m)^n} > \frac{nmMV}{M+nm}$$

tant que $n > 1$. Donc un corps quelconque perd une partie plus grande de son mouvement, lorsqu'il cho-

choque successivement les parties d'un autre corps, que lorsqu'il les choque toutes ensemble. Or si on veut savoir quelle devroit être la vîtesse $V'$ d'un corps $M$ pour qu'il perdisse, en choquant une masse $M'$ composée d'un nombre arbitraire $n$ de parties égales, la même quantité de mouvement qu'il perd, lorsqu'animé de la vîtesse $V$ il choque successivement toutes les $n$ parties de cette masse, alors il est facile de voir que la quantité de mouvement $\frac{MM'V'}{M+M'}$, perdue dans le premier cas, doit être égale à la quantité de mouvement . . . .

$$MV\,\frac{\left((M+\frac{M'}{n})^n-M^n\right)}{\left(M+\frac{M'}{n}\right)^n},$$ perdue dans le second; et que par conséquent on aura

$$V'=\frac{\left(M+M'\right)\left(\left(M+\frac{M'}{n}\right)^n-M^n\right).V}{M'\left(M+\frac{M'}{n}\right)^n}$$

expression de laquelle, substituant à la place de $n$ sa limite 1, on déduit

$$\text{Lim. } V'=V.$$

Soit $ALB$ (Fig. 8) un corps quelconque, dont la surface représentée par $AB$, et que je nomme $S$, soit une surface plane; supposons que ce corps plongé dans un fluide homogéne, dont la densité soit $D$, ait parcouru l'espace $CC'$, et que sa vîtesse au point $C$ soit $V$. Supposons de plus que ce corps continuant de se mouvoir pendant un temps quelconque $t$ passe de la position $AB$ à la position $ab$. Soit $CC'=x$; et représentons par $R$ la résistance du flui-

de

de, ou la quantité de mouvement que le corps $M$ a perdue depuis le commencement de son mouvement, on aura $Cc = t \triangle x$; et la quantité de mouvement perdue depuis $AB$ jusqu'à $ab$ sera $= t \triangle R$. Soit $V'$ la vîtesse dont le corps $ALB = M$ devroit être animé, pour que la quantité de mouvement, qu'il perdroit en choquant à la fois toutes les parties du fluide contenu depuis $AB$ jasqu'à $ab$, soit égale à celle qu'il perd réellement en les choquant les unes après les autres avec la vîtesse $V$. La masse du fluide contenue depuis $AB$ jusqu'à $ab$ est $DSt \triangle x$; et par conséquent on aura

$$t \triangle R = \frac{MV' DSt \triangle x}{M + DSt \triangle x}$$

et divisant par $t$

$$\triangle R = \frac{MV' DS \triangle x}{M + DSt \triangle x}.$$

Equation aux fluxions hypothétiques de la quelle on déduit par la Méthode des Limites l'équation aux fluxions propres

$$dR = VDSdx.$$

Mais $dx = Vdt$; donc

$$dR = DSV^2 dt.$$

Soit $h$ la hauteur due à la vîtesse $V$, si on substitue à la place de $V^2$ sa valeur $2ph$, on aura

$$dR = 2phDSdt.$$

Donc la Fluxion de la résistance ou la résistance momentanée, qu'un flluide homogéne et incompressible oppose au mouvement direct d'une surface plane, est égale au poids d'un prisme de fluide dont la base est la même surface, et dont la hauteur est le le double de celle , dont un grave devroit tomber pour acquerir la vîtesse avec la quelle se fait la percussion.

Si celle-ci au lieu d'ètre directe étoit oblique, alors l'angle d'incidence du fluide sur la surface $S$ étant $= i$, la vîtesse $V$ se décomposeroit en deux autres $V$ Cos. $i$, et $V$ Sin. $i$, la premiere parallele, et la seconde perpendiculaire à la surface $S$; et puisque celle-ci seroit alors la vîtesse de percussion on devroit avoir

$$dR = DSV^2 dt \,\text{Sin.}^2 i$$

ou

$$dR = 2phDSdt \,\text{Sin.}^2 i.$$

Si le fluide étoit élastique, la résistance, qu'il opposeroit au mouvement du solide dans cette hypothése, seroit le double de celle que nous venons de déterminer.

Appliquons ces principes à la recherche de la résistance, qu'un solide de révolution mû dans la direction de son axe souffre de la part d'un fluide homogéne et incompressible, dans le quel il est plongé.

Soit $AMONQ$ (Fig. 9.) le solide en question, $AMP$ la courbe génératrice, l'abscisse correspondante $AP = x$; l'ordonnée $PM = y$, et la surface courbe du solide $= S$. Soit $D$ la densité du fluide, et représentons par $RS$ la résistance momentannée, qu'il oppose au solide dans le moment où sa vîtesse est $= V$, $R$ étant une algorithme destinée à représenter le mot *Résistance.* Si le solide sans changer de vîtesse eût flué pendant le temps $t$, sa surface $S$ seroit devenue $S + t \Delta S$; et la résistance $RS$, qu'elle souffroit au commencement du temps $t$, seroit devenue $R(S + t \Delta S)$. En prennant la différence entre ces deux états de la résistance on aura

$$t \Delta (RS) = R(S + t \Delta S) - RS$$

mais

$$R(S+t\Delta S)=RS+R(t\Delta S)$$

donc, substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle se changera en

$$t\Delta(RS)=R(t\Delta S) \qquad (B)$$

d'où l'on conclue » Que l'incrément de la résistance, » que souffre une surface quelconque de la part du » fluide dans le quel elle se meut, est égale à la » résistance de son incrément. » Or si on réfléchit que la résistance, qu'éprouve chaque point de la surface $t\Delta S$, peut être décomposée en deux autres, la premiere perpendiculaire, et la seconde parallele a l'axe $AP$; et que chaque point de cette surface repond à un autre, qui lui est diametrallement opposé, et dont la résistance est parfaitement égale à la sienne, on verra que la résultante de toutes les résistances perpendiculaires à l'axe $AP$ doit être necessairement nulle, et par conséquent la surface $t\Delta S$ ne peut éprouver de la part du fluide qu'une résistance unique perpendiculaire au plan $MONQ$. Et puisque la résistance absolue, que chaque point éprouve doit être à celle qui est perpendiculaire au plan $MONQ$ dans le rapport du rayon au sinus de l'angle, que la tangente de la courbe génératrice à ce point fait avec l'axe des abscisses; si on appelle z, et z′ les angles que la courbe $AMM'$ fait avec l'axe $AP$ aux points $M$, et $M'$, on aura les deux inégalités suivantes

$$R(t\Delta S)<DV^2 t\Delta S\ \text{Sin.}^3 z$$

$$R(t\Delta S)>DV^2 t\Delta S\ \text{Sin.}^3 z'.$$

Supposant $R(t\Delta S)=DV^2 t\Delta S\ \text{Sin.}^3 z''$; on aura $z''<z$, et $z''>z'$; mais $z-z'$ n'a point de Limite en diminution; donc $z=\text{Lim.}\, z''$ et par conséquent $\text{Sin.}\, z=\text{Lim. Sin.}\, z''$. Substituant dans l'équation

tion $(B)$ à la place de $R(t\Delta S)$ sa valeur, et divisant les deux membres de cette même équation par $t$, on aura

$$\Delta(RS) = DV^2 \Delta S \,\text{Sin.}^3 z''.$$

Équation aux fluxions hypothétiques, de la quelle on déduit par la Méthode des Limites

$$d(RS) = DV^2 dS \,\text{Sin.}^3 z.$$

Si dans celle-ci on substitue à la place de Sin. z sa valeur $\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, elle se réduit à

$$d(RS) = \frac{DV^2 dS}{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais $dS = \frac{cy}{r}\sqrt{dx^2 + dy^2}$; donc

$$d(RS) = \frac{c}{r} DV^2 \frac{ydy}{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$$

et par conséquent

$$RS = \frac{c}{r} DV^2 \int \frac{ydy}{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$$

ou substituant à la place de $V^2$ sa valeur $2ph$

$$RS = \frac{2cphD}{r} \int \frac{ydy}{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

La Théorie de la résistance des fluides que je viens de développer n'est pas tout-à-fait exacte. Si on compare les résultats des formules qu'on en déduit avec ceux de l'experience, on y trouve le paradoxe vraiment inattendu d'une résistance plus grande que la véritable résistance, lors qu'elle n'en devoit être qu'une partie. Tous les Géomètres qui ont adopté cette Théorie ont remarqué d'après l'experience, qu'elle étoit fautive ; cependant aucun, que je sache, n'a jamais expliqué parfaitement la raison de ce paradoxe. Je crois qu'on peut la trouver en partie dans la différence entre la percussion successive et la percussion instantannée, que nous avons remarquée cidessus, et sur l'aquelle j'ai fondé l'application de ma Théorie des Fluxions à cette recherche ; et en partie dans l'hypothese que les particules choquées ne coopérent point à la percussion de celles qui les avoisinent. La supposition de la résistance successive et continuelle est absolument indispensable pour que la Méthode des Fluxions soit applicable à cette partie de la Théorie des Fluides. Cependant l'hypothese de la séparation des particules choquées de façon qu'il soit possible au corps de rencontrer successivement toutes les autres, avant qu'elles soient sorties de l'état de repos, est incompatible avec la continuité de percussion. Peut-être qu'une telle continuité est phisiquement impossible. Cependant la Théorie, qui n'auroit que cet inconvénient, seroit, à ce que je crois, incontestablement préférable à toutes celles qu'on pourra jamais imaginer sans y admettre la supposition de cette continuité. Le défaut de celle, que je viens d'exposer, ne me semble pas tout-à-fait irrémédiable ; mais les bornes de cet écrit ne me permettent pas de m'y arreter, quoique la facilité de l'application de ma Théorie des Fluxions reste toujours la même malgré la diversité des hypotheses et la complication de la formule, qui alors doit exprimer la résistance momentannée.

Il me semble que les questions, que je viens de résoudre, doivent être trés suffisantes pour faciciliter la comparaison réfléchie de ma Méthode avec celle de M. de la Grange, aumoins sous le rapport de la fécondité des principes, et de la facilité de leur application. J'ai donné dans cette partie de ma Lettre un tour peut-être trop élémentaire à l'exposition de mes idées. J'en conviens; cependant ce n'a pas eté faute d'égards envers vous. Dans le choix des questions, aux quelles je devois faire l'application de ma Méthode, j'ai donné la preférence aux plus élémentaires précisément parce que celles-ci, étant le fondement des solutions de presque toutes les autres, je me procurois par-là le double avantage de renfermer un plus grand nombre d'exemples dans un plus petit espace, et de résoudre en quelque façon dans leurs élémens beaucoup d'autres questions d'un ordre plus élevé.

Peut-être un jour j'en publierai la solution de quelques unes dans un Ouvrage, que j'ai eté obligé d'interrompre il y a long temps, et que je compte reprendre bientot, s'il ne me survient pas quelque nouvel obstacle. Mais pour le moment il faut que je me borne à celles que je viens de traiter, et que je continue de répondre aux autres argumens, avec les quels vous avez prétendu décrier ma Théorie des Fluxions, et relever la réputation de M. de la Grange aux dépens de la mienne.

Le second défaut, que vous me reprochez, est de n'avoir pas démontré comment dans la suite

$$F\varphi + P'\omega + P''\omega^2 + P'''\omega^3 + P''''\omega^4 + \&c.$$

qui provient du développement de $F(\varphi + \omega)$ les Fonctions $P'$; $P''$; $P'''$; &c. sont indépendantes de $\omega$: comment elles dérivent de la fonction primitive $F\varphi$; et par quelle raison il n'est pas possible qu'il s'y trouve d'autres puissances de $\omega$, que des puissances entieres et positives. Pour vous montrer l'injustice de tous ces nouveaux reproches il me suffiroit de vous répondre, que le but de mon Mémoire étant l'ex-

po-

position des véritables principes de la Méthode des Fluxions, j'avois le droit de supposer connu tout ce qui regarde le développement des fonctions en suites, aussi bien que quelqu'autre principe subsidiaire à ma Théorie. Mais puisque dans toutes vos sorties contre mes principes vous mettez toujours en avant M. de la Grange, je ne dois pas me borner à une reponse si concise, afin d'éviter qu'on soupçonne que je crains de me mesurer avec un si vaillant Athlete, et que ce soupçon ne rejaillisse en quelque façon sur la bonté de ma Méthode. Que cette résolution ne deplaise pas à M. de la Grange : je le respecte comme un des premiers Géomètres de l'Europe : je le respecterai toujours comme un des plus grands hommes de notre siecle ; mais je respecte encore plus la vérité ; et tant que je serai persuadé que la raison est de mon coté, je ne la sacrifierai jamais à la renommée de ceux, qui doivent être les premiers à lui rendre hommage.

Je passe donc à démontrer à *priori*, et directement que dans la suite

$$F\varphi + P'\omega + P''\omega^2 + P'''\omega^3 + P''''\omega^4 + \&c.$$

qui résulte du développement de $F(\varphi + \omega)$ on ne peut pas trouver d'autres puissances de $\omega$, que des puissances entieres et positives ; et que $P'$; $P''$; $P'''$, &c. sont des fonctions de $\varphi$ indépendantes de $\omega$. Pour ce qui regarde la façon, dont ces fonctions dérivent de la fonction primitive $F\varphi$, ayant démontré dans mon Mémoire, que $P' = \frac{dF\varphi}{d\varphi}$ ; $P'' = \frac{ddF\varphi}{1.2d\varphi^2}$ ; $P''' = \frac{d^3F\varphi}{1.2.3d\varphi^3}$ ; &c. je ne sais pas comment l'on peut m'accuser de faute à cet égard ; et en conséquence je me borne pour toute réponse, à vous inviter de lire une seconde fois les pages 216, et 217 du du premier Vol. des Mem. de l'Académie Royale des Sciences de Lisbonne.

Soit $F\varphi$ une fonction quelconque de $\varphi$ la quelle développée en suite simple, c'est-à-dire, dans une suite de monomes, donne la suite finie, ou infinie

$$A + B\varphi^m + C\varphi^n + D\varphi^p + E\varphi^q + \&c.$$

$A$; $B$; $C$; $D$; $E$; &c. étant des coéfficiens indéterminés indépendants de $\varphi$: et $m$; $n$; $p$; $q$; &c. étant des nombres quelconques entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs. Si on met $\varphi + \omega$ à la place de $\varphi$, on aura

$$F(\varphi+\omega) = A + B(\varphi+\omega)^m + C(\varphi+\omega)^n + D(\varphi+\omega)^p + \&c.$$

et développant chacun de ces binomes à part

$$F(\varphi+\omega) = \begin{cases} A \\ + B\left(\varphi^m + m\varphi^{m-1}\omega + \frac{m(m-1)}{2}\varphi^{m-2}\omega^2 + \&c.\right) \\ + C\left(\varphi^n + n\varphi^{n-1}\omega + \frac{n(n-1)}{2}\varphi^{n-2}\omega^2 + \&c.\right) \\ + D\left(\varphi^p + p\varphi^{p-1}\omega + \frac{p(p-1)}{2}\varphi^{p-2}\omega^2 + \&c.\right) \\ + \&c. \end{cases}$$

Si on ajoute les termes, qui forment chaque colonne de cette expression, elle se change en

$$F(\varphi+\omega) = \begin{cases} A + B\varphi^m + C\varphi^n + D\varphi^p + \&c. \\ + \left(mB\varphi^{m-1} + nC\varphi^{n-1} + pD\varphi^{p-1} + \&c.\right)\omega \\ + \left(\frac{m(m-1)}{2}B\varphi^{m-2} + \frac{n(n-1)}{2}C\varphi^{n-2} + \frac{p(p-1)}{2}D\varphi^{p-2} + \&c.\right)\omega^2 \\ + \&c. \end{cases}$$

Met-

Mettant $F\varphi$ à la place de la premiere de ces suites: et représentant par $P'$ la somme des termes de celle qui multiplie $\omega$ ; par $P''$ la somme des termes de celle qui multiplie $\omega^2$; par $P'''$ la somme des termes de celle qui multiplie $\omega^3$ &c. dans le cas que toutes ces suites soient finies ; ou bien représentant par $P'$; $P''$; $P'''$; &c. les Limites d'expression des sommes de leurs termes, si elles sont infinies, on aura

$$F(\varphi+\omega)=F\varphi+P'\omega+P''\omega^2+P'''\omega^3+\&c.$$

c'est-à-dire, une suite, où $P'$; $P''$; $P'''$; &c. sont des fonctions de $\varphi$ sans $\omega$ ; et dans la quelle on ne peut pas troûver d'autres puissances de $\omega$, que des puissances entieres et positives.

Observant que dans la suite, qui multiplie $\omega^2$, tous les termes sont divisés par 2 ; que dans la suite, qui multiplie $\omega^3$, tous les termes sont divisés par 2 et par 3, et ainsi des autres, suivant l'ordre des diviseurs des termes du binome Newtonien ; et observant de plus, que selon les regles de la Méthode directe des Fluxions

$$\frac{dF\varphi}{d\varphi}=mB\varphi^{m-1}+nC\varphi^{n-1}+pD\varphi^{p-1}+\&c.$$

$$\frac{ddF\varphi}{d\varphi^2}=m(m-1)B\varphi^{m-2}+n(n-1)C\varphi^{n-2}+p(p-1)D\varphi^{p-2}+\&c.$$

$$\frac{d^3F\varphi}{d\varphi^3}=m(m-1)(m-2)B\varphi^{m-3}+n(n-1)(n-2)C\varphi^{n-3}+\&c.$$

&c.

on aura

$$F(\varphi+\omega)=F\varphi+\frac{\omega}{1}\frac{dF\varphi}{d\varphi}+\frac{\omega^2}{1.2}\frac{ddF\varphi}{d\varphi^2}+\frac{\omega^3}{1.2.3}\frac{d^3F\varphi}{d\varphi^3}+\&c.$$

c'est-à-dire, la démonstration la plus simple, et peut-

être

être la plus élégante que je connoisse du Théorème de Taylor.

Voilà donc comment je m'étois assuré, que dans le développement de $F(\varphi + \omega)$ les fonctions $P'$, $P''$, $P'''$, &c. sont indépendantes de $\omega$, et qu'il n'y peut entrer que des puissances entieres et positives de $\omega$, tant qu'on considére cette quantité comme le second terme du binome $(\varphi + \omega)$.

La démonstration, que je viens de donner de cette vérité, se présenta d'abord à ma pensée, lorsque pour la premiere fois je m'avisai d'examiner l'étendue de la proposition en question : et il me sembla si naturel qu'elle se fût présentée de même à quelqu'autre avant moi, que je n'oserois pas encore aujourd'hui la donner au public comme une nouveauté, dont la doctrine des Suites me soit redevable, si M. de la Grange ne m'en eut pas fait sentir tout le prix dans le n.° 10. de la Premiere Partie de sa Théorie des Fonctions Analytiques.

En vain m'objecteriez vous d'après ce grand Géomètre, que malgré ma démonstration la suite

$$F\varphi + P'\omega + P''\omega^2 + P'''\omega^3 + P''''\omega^4 + \&c.$$

quoique vraie tant que $\varphi$ et $\omega$ demeurent indéterminés, devient fautive dans des cas particuliers ; puis qu'il y a des fonctions de $\varphi$, dans le développement des quelles, en donnant à $\varphi$ des valeurs determinées, on doit trouver des puissances fractionaires de $\omega$ : je n'en resterois pas plus convaincu. Le raisonement avec le quel M. de la Grange entend prouver cette assertion vraiment remarquable ne me semble pas concluant. Le voici : il vaut bien la peine d'être analysé. « Si $fx$ contient la quantité $\sqrt[m]{X}$ ; $X$ étant » une fonction de $x$, qui devienne nulle lorsque » $x = a$, en mettant $x + i$ à la place de $x$, $X$ de- » viendra

$$X + \frac{i}{1} X' + \frac{i^2}{1.2} X'' + \frac{i^3}{1.2.3} X''' + \&c.$$

» et faisant $x = a$ on aura simplement

$$i X' + \frac{i^2}{2} X'' + \frac{i^3}{1.2} X''' + \&c.$$

» pour la valeur de $X$; de sorte que $\sqrt[m]{X}$ devien-
» dra

$$\sqrt[m]{i}\left(X' + \frac{i}{2} X'' + \frac{i^2}{2.3} X''' + \&c.\right)$$

» donc la fonction $f(x+i)$ contiendra dans le cas
» de $x = a$ le radical $\sqrt[m]{i}$, qui devra par conséquent
» se trouver dans son développement suivant les
» puissances de $i$. » Si M. de la Grange au lieu de substituer $x+i$ à la place de $x$ dans la fonction $X$, avant de développer $\sqrt[m]{X}$, eut au contraire commencé par développer ce radical, et n'y eut fait qu'après cela cette substitution, il est évident qu'il n'auroit pas trouvé dans la suite, qui provient du développement de $f(x+i)$, des puissances fractionaires de $i$. Il faut donc convenir que de telles puissances de $i$ ne doivent pas s'y trouver nécessairement; et par conséquent la pretendue démonstration de M. de la Grange ne prouve que la possibilité de développer $\sqrt[m]{X}$ de façon, que dans le développement d'une fonction binomialle $f(x+i)$, la quelle contienne un radical de cette forme, il se trouve des puissances fractionaires de $i$.

Cette même conclusion pouvoit être également déduite de ma démonstration. En effet s'il est toujours possible de faire

$$F(\varphi+\omega) = A + B(\varphi+\omega)^m + C(\varphi+\omega)^n + D(\varphi+\omega)^p + \&c.$$

il

il est évident qu'on peut également développer les binomes $(\varphi+\omega)^m$; $(\varphi+\omega)^n$; &c. en regardant $\omega$ comme leur second terme, ou en le regardant comme leur premier terme : dans la premiere hypothese on trouve le développement de $F(\varphi+\omega)$ représenté par la suite.

$$F\varphi + P'\omega + P''\omega^2 + P'''\omega^3 + P''''\omega^4 + \&c.$$

et dans la seconde on trouve le développement de la même fonction représenté par cette autre suite

$$F\omega + {}^{I}P\varphi + {}^{II}P\varphi^2 + {}^{III}P\varphi^3 + \&c.$$

dans la quelle

$$F\omega = A + B\omega^m + C\omega^n + D\omega^p + \&c.$$

$${}^{I}P = mB\omega^{m-1} + nC\omega^{n-1} + pD\omega^{p-1} + \&c.$$

$${}^{II}P = m\frac{(m-1)}{2}B\omega^{m-2} + n\frac{(n-1)}{2}C\omega^{n-2} + p\frac{(p-1)}{2}D\omega^{p-2} + \&c.$$

$${}^{III}P = m\frac{(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}B\omega^{m-3} + n\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}C\omega^{n-3} + \&c.$$

&c.

Or il n'est pas moins évident, que si un ou plusieurs des exposants $m$, $n$, $p$ &c. sont des nombres fractionaires la suite

$$F\omega + {}^{I}P\varphi + {}^{II}P\varphi^2 + {}^{III}P\varphi^3 + \&c.$$

doit effectivement renfermer des puissances fractionaires de $\omega$, quelle que soit la valeur de $\varphi$.

Donc si M. de la Grange pretend prouver avec sa démonstration, que dans le développement de $F(\varphi+\omega)$ il peut se trouver quelquefois des puissances fractionaires de $\omega$, j'en suis d'acord, pourvu qu'il ne pré-

 ten-

tende pas que de telles puissances doivent s'y trouver necessairement.

Les deux développemens, dont $F(\varphi+\omega)$ est susceptible, sont tous les deux également vrais, et par conséquent aucune des suites, qui en proviennent, ne peut être exclusive de l'autre. Il est vrai que lorsqu'il n'est pas possible d'assigner la valeur exacte de $F(\varphi+\omega)$, et qu'on en veut avoir une valeur approchée, le choix parmi les deux suites n'est pas indifférent. Alors on doit préférer celle qui sera convergente; et ce sera la premiere si $\varphi>\omega$; et au contraire la seconde si $\varphi<\omega$.

La faute ordinaire des Géomètres, lorsqu'ils parlent du développement des fonctions, est de supposer qu'il existe toujours une parfaite égalité entre la fonction qu'on veut développer, et la somme des termes de la suite, qui provient de son développement. Cette supposition n'est vraie que lorsque la suite est finie. Si elle est infinie, la fonction n'est que la Limite de grandeur, ou simplement la Limite d'expression de la somme de ses termes, selon qu'elle est convergente ou divergente.

Or il me semble que, si M. de la Grange avoit fait cette remarque, il n'oseroit pas assurer si positivement, que lorsque, en conséquence de la supposition d'une valeur particuliere de $x$, il existe dans $f(x+i)$ une puissance fractionaire de $i$, cette même puissance doit se trouver aussi dans son développement. Il est vrai que M. de la Grange occupé toute sa vie à perfectionner et à développer de plus en plus les branches les plus considérables des Mathématiques, semble n'avoir jamais donné à la Méthode des Limites, presque entierement oubliée des Géomètres modernes, toute l'attention qu'elle mérite. Il n'est donc pas surprenant, que malgré la supériorité de son génie ce Géomètre illustre n'ait jamais fait cette remarque si importante dans la doctrine des suites, et que je crois avoir fait le premier dans ma Théorie des Limi-

mi-

mites. Cependant l'artifice, qu'il a employé dans sa Théorie des Fonctions Analytiques pour dévolopper $a^x$, pouvoit fort bien lui suffire pour de le convaincre, que même dans le cas que $f(x+i)$ contienne un radical de $i$, il n'est pas d'une nécessité absolue que ce radical se trouve dans le développement de cette fonction. En effet supposons que dans la fonction $f(x+i)$ il existe un radical $\sqrt[m]{i}$; il est évident que $\sqrt[m]{i} = \sqrt[m]{a^m + i - a^m}$, ou plus particuliairement $\sqrt[m]{i} = \sqrt[m]{1 + i - 1}$. Or si on développe $\sqrt[m]{(1+i-1)}$ on trouvera

$$\sqrt[m]{(1+i-1)} = 1 + \frac{1}{m}(i-1) + \frac{(1-m)}{2m^2}(i-1)^2$$
$$+ \frac{(1-m)(1-2m)}{2.3m^3}(i-1)^3 + \&c.$$

ou bien

$$\sqrt[m]{(1+i-1)} = A + Bi + Ci^2 + Di^3 + Ei^4 + \&c.$$

$A$; $B$; $C$; $D$; &c. représentant les suites, qui multiplient $i^0$, $i$; $i^2$; $i^3$; &c. Il est donc évident que l'existance effective de $\sqrt[m]{i}$ dans le développement de $f(x+i)$, lorsque $f(x+i)$, contient ce radical, n'est pas d'une nécessité absolue.

Avant que de finir cette Lettre vous me permetrez d'observer, que la suite

$$F\omega + {}^{\text{I}}P\varphi + {}^{\text{II}}P\varphi^2 + {}^{\text{III}}P\varphi^3 + {}^{\text{IV}}P\varphi^4 + \&c.$$

peut-être aussi représentée de la sorte

$$F\omega + \frac{\varphi}{1}\frac{dF\omega}{d\omega} + \frac{\varphi^2}{1.2}\frac{ddF\omega}{d\omega^2} + \frac{\varphi^3}{1.2.3}\frac{d^3F\omega}{d\omega^3} + \&c.$$

et par conséquent la Formule de Taylor nous offre

fre deux moyens pour développer $F(\varphi + \omega)$; avec cette singularité que le passage de la suite, qui provient du premier développement, à celle qui provient du second, s'obtient immédiatement par le changement réciproque des places de $\varphi$ et $\omega$.

La Formule de Taylor me fait ressouvenir d'un trait de votre critique, que je ne puis me dispenser de relever ici : c'est lorsque vous parlez de ma démonstration de ce Théorême si justement célebre. Il est vrai que vous n'y faites pas la moindre objection; cependant vous avez jugé à propos de citer la démonstration que M. de la Grange en donna en 1772 dans les Actes de Berlin, apparemment par ce que vous desirez qu'on la compare avec la mienne, afin de faire mieux sentir combien j'ai resté par tout inferieur à ce respectable Géomètre. Je sais bien qu'il est très possible d'être inférieur à M. de la Grange en restant superieur à beaucoup d'autres Mathématiciens d'un mérite assez distingué; cependant permetez-moi que laissant à d'autres le soin de vous satisfaire sur cet article, je prenne la liberté de vous demander, si vous avez consulté le Mémoire en question, ou si vous le citéz simplement par ce que M. de la Grange le rappelle à ses Lecteurs au commencement de sa Théorie des Fonctions Analytiques? Je vous avoue avec toute la franchise qui convient à mon caractere, que je panche pour cette seconde pensée. 1.° Par ce que M. de la Grange débute dans son Mémoire précisément par supposer le développement des fonctions binomialles tel que je le suppose aussi dans le mien. Or il me semble extrêmement probable, que si vous eussiez consulté le Mémoire de ce Géomètre, vous ne m'auriez pas reproché l'ommission de la démonstration de ce développement au nombre des défauts de ma Théorie, la quelle n'en a qu'une dépendance accidentelle; ou vous auriez trouvé plus defectueuse encore la démonstration, que M. de la Grange y donne du Théo-

Théorème de Taylor, la quelle en depend essentiellement. En ce cas il est plus que probable que vous ne l'auriez pas cité ; puisque à considérer la maniere, dont vous traitez mes écrits, on voit bien que votre intention n'étoit pas de rappeller la démonstration de ce célebre Mathématicien pour relever le mérite de la mienne. 2.° Parce que la démonstration de M. de la Grange indépendamment de ce défaut, que vous ne sauriez lui pardonner, n'a pas toute l'exactitude géométrique, qu'on y doit désirer : puisqu'elle est fondée sur les principes du Calcul Infinitésimal, dont M. de la Grange lui-même semble reconnoitre, l'inexactitude ; et dont pour le moins il avoue le peu de clarté.

Pour ce qui regarde mon Éloge de M. d'Alembert, je dois vous remercier et du bien, et du mal, que vous en avez dit ; du bien par ce qu'il m'honore, et du mal par ce que dévoilant assez l'esprit d'impartialité, qui présida à votre critique de mes ouvrages, il rend d'autant plus croyable tout le bien, que vous en dites. Cependant il me doit être permis de vous observer, que l'analyse des Oeuvres de M. d'Alembert remplit presque les trois quarts de l'Éloge, que j'ai consacré à la mémoire de ce grand Géomètre. * Or l'analyse

* Dans quelques exemplaires de cet Éloge, que l'Académie des Sciences m'a permis de publier séparément du premier volume de ses Mémoires, j'ai mis l'Epigraphe suivante tirée de l'Analyse de l'Esprit de Loix par M. d'Alembert lui même « On doit se souvenir que l'Histoire des Écri» vains célebres n'est que celle de leurs pensées et de leurs » traxaux, et que cette partie de leur Éloge en est la plus » essentielle et la plus utile. » Je voulois par-là montrer sous quel point de vue on devoit regarder l'Éloge du Géomètre Philosophe, dont je m'etois proposé de faire connoitre le mérite à mes compatriotes.

lyse des Oeuvres d'un Mathématicien est un sujet, qui par son exrrême aridité se réfuse absolument aux tours fleuris du stile panégyrique. Comment donc prétendez vous persuader au Monde Litteraire, que mon Éloge est écrit dans un stile semblable ? Si j'avois réussi à faire ce prodige, je serois si non l'Écrivain le plus digne d'imitation, au moins le plus admirable. Je conviens que le stile de mes Éloges en général, et en particulier celui que j'ai employé dans l'Éloge de M. d'Alembert, ne ressemble pas assez au stile de M. de Fontenelle pour mériter le suffrage de ceux, pour qui les Éloges Académiques de ce célebre Écrivain sont des modeles uniques dans ce genre. Cependant M.rs de Condorcet et Vicq-d'Azir ont écrit aussi de nos jours des Éloges Historiques dans un stile tout-à-fait nouveau, et très peu ressemblant à celui de M. de Fontenelle ; et malgré qu'ils s'en soient écartés la France entiere les a aplaudi, et les gens d'esprit de toutes les Nations les ont admiré. Je ne veux pas par-là contester absolument la supériorité de M. de Fontenelle. Un Étranger ne doit être que trop circonspect lorsqu'il s'agit de décider du mérite des écrivains célebres des autres Nations.

Avant que M.rs d'Alembert, Bailly, Vicq-d'Azir, et Condorcet eussent paru dans le Monde Litteraire, la France ne possedoit à la verité dans ce genre d'éloquence aucun écrivain comparable à M. de Fontenelle. C'etoit avec beaucoup de raison que les hommes les plus distingués par leur savoir, le mettoient alors au premier rang parmi les Orateurs, qui avoient écrit des Éloges Historiques. Il méritoit sans doute la preférence sur ceux, qui l'avoient précédé. Mais s'il a des droits aussi légitimes pour être également préféré à ceux qui l'ont suivi, c'est ce que je n'ose prononcer. La foule des gens médiocres, qui ne

sont

sont que les échos des grands hommes, et qui ne craignent jamais d'accorder leur suffrage aux opinions les plus surannées, pourvu que les gens d'esprit les aient soutenu autre-fois, continue encore aujourd'hui de proner celle-ci. Cependant si, au lieu de l'appuier du poids de votre autorité, vous lui eussiez procuré un nouveau degré de force au moyen de la comparaison raisonnée des Éloges de l'ancien Secrétaire de l'Académie des Sciences de Paris avec ceux des quatre Écrivains modernes, que je viens de nommer, vous m'eussiez donné une leçon bien plus importante; et, ce qui vous feroit encore beaucoup plus d'honneur, vous auriez fait un service non médiocre à la Litterature en général, et en particulier à la Litterature Française.

Il ne me reste plus qu'à vous démander excuse et de la longueur de cette Lettre, et de l'impropriété de quelques phrases, et même de quelques mots, dont j'y ai fait usage. Peut-être j'aurois besoin encore de plus d'indulgence sur le premier de ces articles, si je n'avois pas à la démander pour le second. C'est la premiere fois de ma vie que j'écris pour le public dans une langue étrangére; et si la difficulté de m'exprimer avec précision et clarté ne m'eut pas imposé une contrainte perpetuelle dans l'exposition de mes idées, j'aurois donné probablement plus d'essor à mon esprit; et j'aurois pour le moins développé avec beaucoup plus d'étendue la plupart des pensées, que je n'ai qu'indiquées, et qu'à proprement parler je n'ai fait qu'effleurer.

J'espere cependant que si ma Lettre ne va pas jusqu'à vous convaincre de la bonté de ma Méthode des Fluxions, et encore moins de la preférence que ma Théorie me semble mériter sur toutes celles, qu'on a jusqu'à présent imaginé sur le même objet, elle servira pour le moins à vous convaincre, que l'Académie Royale des Sciences de Lisbonne, lors qu' elle accorda son approbation à cette même Théorie, n'a pas manqué de raisons pour l'estimer comme une nouveauté digne de l'attention des Géomètres.

Le second volume des Mémoires de Mathématique et de Phisique de cette Société vient de paroître. Je n'ose pas me flater que vous y trouverez des argumens plus favorables de la finesse d'esprit, et de la richesse des connoissances des Savans Portugais, que vous n'en avez trouvé dans le premier. Cependant vous y trouverez un nouveau champ pour étaler votre profonde érudition, et pour exercer une seconde fois la finesse de votre critique sur les productions de mon esprit. Je m'y attends effectivement; et je compte avoir par là une nouvelle occasion de profiter de vos leçons, et d'admirer vos lumieres. En attendant j'ai l'honneur de vous assurer que je suis avec la plus parfaite estime

*Lisbonne ce 29 Janvier*
1800.

Votre très humble et très obeissant
serviteur

STOCKLER.

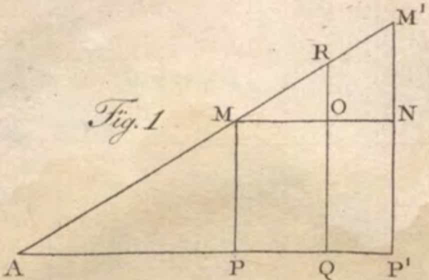

Fig. 1

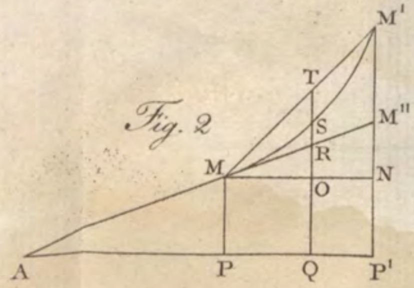

Fig. 2

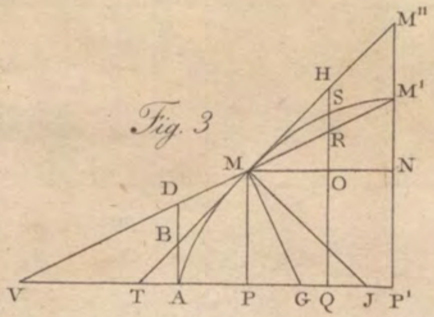

Fig. 3

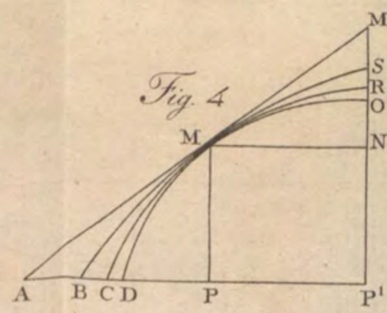

Fig. 4

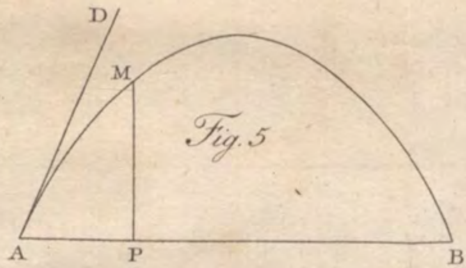

Fig. 5

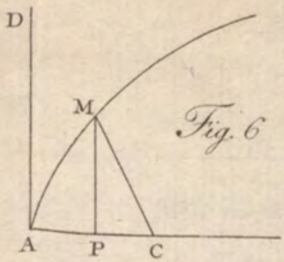

Fig. 6

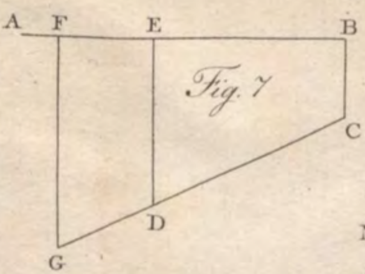

Fig. 7

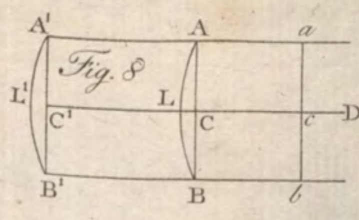

Fig. 8

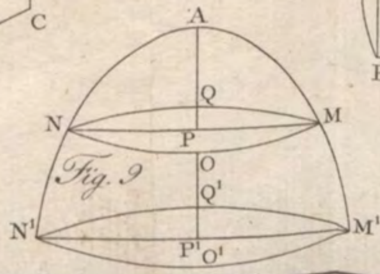

Fig. 9

## FAUTES A CORRIGER.

Pag. 3. Lign. 34. accroissements ysochrones — *lisez* — accroissemens isochrones. — *Faites la même correction dans la suite, jusqu'a la page* 11.
Pag. 6. Lign. 14. sujeḉt — *lisez* — sujet.
Pag. 16. Lign. 11. *et de ses* — lisez — *et de leurs.*
Pag. 26. Lign. 15. plus grande — *lisez* — plus petite.
Pag. 29. Lign. 5. *Effacez le mot* — suivantes —.
Pag. 37. Lign. 2. Espace — *lisez* — espace.
Pag. 39. Lign. 1, et 8. Equation — *lisez* — équation.
Pag. 46. Lign. 23. *Après les mots* — au même axe — *ajoutez* — ou au contraire selon la position de celui-ci.
Pag. 55. Lign. 21, et pag. 56. lign. 26. flluide — *lisez* — fluide.
Pag. 64. Lign. 18. suivant l'ondre — *lisez* — suivant l'ordre.
Pag. 69. Lign. 3. pour de le convaincre — *lisez* — pour le convaincre.
——— Lign. 24. peut-être — *lisez* — peut être.