NOVO CURSO
DE
MATHEMATICA
PARA USO DOS OFFICIAES
Engenheiros, e Artilheria

POR

MONSIEUR BELLIDOR,
Coronel de Infanteria, Socio das Reaes Academias de França, Inglaterra, e Pruſſia,

Traduzido no idioma Portuguez

POR

MANOEL DE SOUSA,
Capitão de Infanteria, com exercicio de Engenheiro, e Socio da Arcadia de Lisboa.

TOMO IV.

LISBOA,
Na Officina de Miguel Maneſcal da Coſta,
Impreſſor do Santo Officio. Anno 1765.

NOVO CURSO DE MATHEMATICA.

LIVRO XIV.

DO MOVIMENTO DOS CORPOS, e modo de lançar as bombas.

O PRINCIPAL objecto deſte Tratado do movimento he enſinar a arte de lançar as bombas. He verdade que não começo logo por iſſo, porque me parece ſeria bom dar primeiro huma idéa da colliſão, e percuſſão dos corpos, para daqui tirar alguns principios, que nos hão de ſervir na mecanica; e o capitulo do movimento me ſervirá para explicar na mecanica muitas cousas, que sem o conhecimento da descida dos corpos se não poderião entender. Além disso he absolutamente necessario áquelles, que se querem applicar ás Mathematicas, e ás Fysicas, e para explicar quantidade de cousas na Artilheria ácerca da collisão, e movimento dos corpos. Contém pois este Tratado trez Capitulos: o primeiro trata da collisão, e percussão dos corpos; o segundo das leis do movimento; e o terceiro da theorica, e pratica de lançar as bombas.

A respeito do modo de lançar as bombas não quero que os Bombeiros se cancem em saber se ha regras certas sobre isto na preoccupação, com que sempre tem estado, que a pratica he que só póde servir ao Bombeiro, que lançar bem as bombas; e isto procede sem dúvida de que como a maior parte delles não sabem Mathematica, nem Fysica, não podem persuadir-se que he possivel pôr leis ao movimento da polvora, a cuja irregularidade attribuem vulgarmente as faltas, que commettem. Confesso que no carregar o morteiro concorrem

tan-

tantas circumſtancias para deſmanchar tudo o que póde fazer o Bombeiro mais attento, e ſciente, que he temeridade julgar que as bombas ſe podem lançar em qualquer lugar, como ſe ſe levaſſem á mão.

Porém o certo he que ſe hum Bombeiro tiveſſe baſtante cuidado, quando carrega o ſeu morteiro, em examinar os defeitos, e carregar com igualdade, as regras ſerião de excellente uſo, pois para deitar as bombas em qualquer diſtancia baſtaria atirar com a carga competente, e com qualquer gráo de elevação para conhecer a elevação, que convem dar ao morteiro para deitar a bomba na diſtancia que ſe me pede; mas os que são meramente praticos ſuſtentão que he impoſſivel poder obſervar eſta exacção em carregar com igualdade, porque dizem que a deſigualdade dos grãos da polvora, ou no ſeu tamanho, ou nas materias, de que ſe compõem, faz que a meſma carga faça differentes effeitos, o que tambem póde fazer a terra, ſendo menos batida huma vez que outra. Além diſſo nem

to-

todas as bombas são bem calibradas, e de igual pezo, e muitas vezes mal coadas; e a platafórma, que quasi muda de ſitio a cada tiro, são outros tantos embaraços, que eſtão perſuadindo ſer moralmente impoſſivel atirar as bombas aonde quizerem; mas ainda que tudo iſto ſe poſſa remediar com hum pouco de cuidado, não ha dúvida que hum bom Bombeiro experimentado no ſeu officio, e que ſouber bem a arte de lançar as bombas, eſtá mais certo do que quer fazer, do que o que he ſómente pratico; porque ſe vê que o primeiro, e ſegundo tiro não deitão as bombas aonde quer, poderá corrigir o tiro, quando o que he meramente pratico andará apalpando, e gaſtará tempo conſideravel em augmentar, ou diminuir a polvora, ou os gráos de elevação; e ainda que digão que por acaſo governa o movimento do morteiro, a experiencia me fez conhecer, que quando ſe applicão com todo o cuidado a carregar com igualdade, e pôr o reparo no meſmo lugar da platafórma, e os munhões do meſmo ſitio, podem-

ſe

ſe atirar quantidade de bombas ſempre ao meſmo lugar: deve-ſe logo deixar a opinião, em que eſtão, que as regras para lançar as bombas não podem ſervir; porque ſe ha cuidado de ſe carregar bem igual, e as bombas são do meſmo pezo, não ha lugar de duvida ácerca das regras.

Além diſſo póde-ſe dizer que ha tão poucos Bombeiros, que ſe tenhão applicado a ſaber as regras, e ainda menos a praticallas, que certamente são mais cheios de preoccupações, que de conhecimento a reſpeito deſta materia; e quando as pudeſſem eſcuſar para lançar as bombas em hum lugar, que he de nivel, com as baterias, depois de ter atirado quantidade dellas inuteis, como ſuccede ſempre, como ſe haverião elles para deitallas em huma torre muito levantada, como ſobre hum rochedo eſcarpado, ao pé do qual eſtiveſſe a bateria, ou tambem ſe a bateria eſtiveſſe em ſitio elevado para as lançar para baixo?

Não ſei que haja Bombeiro, a quem a experiencia tenha enſinado alguma pra-

pratica para iſto, muito menos não tendo elles eſtes caſos como problematicos. Finalmente de tudo o que temos dito reſulta que nunca já mais ſe lançará huma bomba a huma diſtancia dada, ſem ſe ſaberem as regras eſtabelecidas para iſto, e ſem haver baſtante experiencia para prever todos os accidentes, a que eſtão ſujeitos os morteiros, e as bombas.

CAPITULO I.

Da collisão, e percuſsão dos corpos.

Definições.

I.

912 O Movimento de hum corpo he a ſua mudança de hum lugar para outro: o movimento he real, quando o corpo ſe move em virtude de huma força, que ſe lhe applicou pelas partes da extensão, comprehendidas entre os dous termos do movimento, que são o ponto donde ſahio, e o ponto, a que chegou: tal he o movimento de huma bala, que ſe move ſobre

hum

hum plano horizontal. O movimento relativo, ou reſpectivo he, quando o corpo paſſa de hum lugar a outro reſpectivamente a outro corpo, que ſe move, ainda que elle eſteja ſem ſe mover: tal he o movimento de hum homem, que vai embarcado. No movimento de hum corpo ſe devem conſiderar ſinco couſas; o corpo, que ſe move; a força, que o move, a que ſe chama força motriz; o eſpaço, que corre; o tempo do movimento; e direcção delle.

II.

913 Chama-ſe força motriz tudo aquillo, que póde mover hum corpo: o meſmo corpo em movimento he huma força motriz, porque a experiencia nos enſina, que elle meſmo póde pôr outro em movimento. Para avaliar huma força motriz, deve conhecer-ſe a maça do corpo, que eſtá em movimento; o eſpaço, que eſte corpo correo; e o tempo, que gaſtou em correr eſte eſpaço.

III.

914 A velocidade de hum corpo he o maior, ou menor eſpaço, que corre

re

re em tempo determinado, quando ha caufa, que o põe em movimento; outros definirão a velocidade pela razão do efpaço ao tempo. Com effeito para fe fazer idéa da velocidade de qualquer movel, não bafta fómente conhecer o efpaço, que correo, ou o tempo, que confervou o movimento, mas deve-fe conhecer em quanto tempo correo hum determinado efpaço. Por exemplo. Não fe póde dizer que hum homem fez huma grande jornada, porque andou dez leguas; mas conhece-fe a velocidade, fabendo-fe que as andou em finco horas.

IV.

915 A velocidade de hum corpo ou he uniforme, ou variavel: chama-fe uniforme, quando corre efpaços iguaes em iguaes tempos; e chama-fe variavel, quando em tempos iguaes corre efpaços defiguaes. As velocidades uniformes, ou variaveis eftão entre fi, como os efpaços, que correm em tempos iguaes. Se hum movel em hum minuto corre 10 braças, e outro 20 no mefmo tempo, as velocidades deftes dous moveis

veis são entre si como 10 a 20, isto he, a segunda he dupla da primeira.

V.

916 A direcção de hum corpo he a determinação do seu movimento por huma linha, por onde se ha de mover em virtude da força, que lhe foi communicada, e effectivamente corre, senão encontra embaraço, que lhe prohiba o mover-se por esta linha.

VI.

917 Como he evidente que hum corpo não póde mover-se por dous caminhos differentes; quando muitas forças concorrem a movello com as suas acções juntas, o movimento se chama composto, e a direcção, que segue o movel, direcção media.

VII.

918 Os corpos, de que se examina o movimento, ou são solidos, ou fluidos: tambem huns tem elasterio, e outros não.

VIII.

919 Chama-se corpo solido áquelle, cujas partes se não separão facilmente; e que sendo separadas, se não tor-

tornão a unir, como he huma pedra, &c.

IX.

920 Chama-ſe corpo fluido áquelle, cujas partes são faceis de dividir, e depois de ſeparadas ſe tornão facilmente a reunir, como he a agua.

X.

921 Chama-ſe corpo não elaſtico áquelle, que quando ſe encontra com outro, ou não muda de figura, ou ſe muda, não torna a reſtituir-ſe á ſua antiga figura.

XI.

922 Chama-ſe corpo elaſtico áquelle, que encontrando-ſe com outro, muda de figura na collisão, e depois torna á antiga figura.

Nota. Não tratamos aqui mais que dos corpos duros, e não elaſticos, a reſpeito dos outros fallaremos, quando nos for preciſo.

POSTULADOS.

I.

923 Pede-ſe que ſe conceda, como inconteſtavel, que quando dous corpos em movimento ſe encontrão com di-

direcções diametralmente oppoſtas, ſe communicão mutuamente o movimento, e que hum corpo perde tanto do ſeu movimento, quanto communica ao outro.

II.

924 Quando dous corpos ſem elaſterio ſe encontrão, não fica algum delles quieto, mas o mais forte faz mover ao mais fraco pela ſua meſma direcção.

COROLLARIO.

925 Segue-ſe daqui, que quando hum corpo tem mais força que outro, leva diante de ſi o mais fraco, e que eſtes dous corpos ſe podem conſiderar como ſenão foſſem mais que hum, cujo movimento he igual ao de ambos.

III.

926 Que ſe ſupponha que os corpos ſe movem por hum meio, que não reſiſte aos ſeus movimentos; de ſorte, que ſe hum corpo corre 4 braças, no primeiro minuto do ſeu movimento continuará a correr 4 braças em cada minuto.

Axioma.

927 Os effeitos são proporcionaes ás ſuas cauſas.

Corollario.

Eſtampa I. Figura I. 928 Segue-ſe daqui, que havendo dous corpos iguaes A, e C, que poſtos em movimento correm no meſmo tempo os eſpaços AB, e CD, eſtes dous corpos receberão gráos de velocidade, que eſtão na meſma razão dos eſpaços AB, e CD, pois os gráos de velocidade dos corpos podem tomar-ſe pelas cauſas, e os eſpaços corridos pelos effeitos.

Advertencia.

Como os corpos, que ſe fazem rolar ſobre hum plano, ſe movem por linhas rectas, (ſe huma ſó potencia os põe em movimento) expreſſaremos com linhas rectas não ſó o caminho, que fazem eſtes corpos, ou tem para fazer, mas tambem os gráos de força, que ſe lhes tem communicado; e ſupporemos tambem que os corpos, de que fallamos, são esfericos.

PRO-

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

929 Se dous corpos ſemelhantes da meſma materia, e iguaes ſe movem com velocidades deſiguaes, o corpo, que tiver maior velocidade, fará maior effeito contra o corpo, que encontrar, do que aquelle, que tiver menor velocidade.

DEMONSTRAÇÃO.

Se ſe ſuppõem dous corpos iguaes, dos quaes hum tenha huma velocidade dupla da outra, digo, que ſe eſtes dous corpos ſe encontrarem, o que tiver velocidade dupla o ferirá com duas vezes mais força que o outro, porque os effeitos são proporcionaes ás ſuas cauſas *: logo tomando as velocidades como cauſas, e a collisão como effeito, o corpo, que tiver duas vezes mais velocidade que o outro, obrará com duas vezes mais força contra o com que ſe encontra.

* Numer. 927.

PRO-

PROPOSIÇÃO II.

Theorema.

930 Se dous corpos deſiguaes da meſma materia ſe movem com velocidades iguaes, o maior fará mais impreſsão no corpo que encontra, que o menor.

Demonstração.

Supponhão-ſe dous corpos, dos quaes hum tenha 4 libras, e o outro duas, he certo que ſe eſtes dous corpos tem iguaes gráos de velocidade, o maior terá duas vezes mais força que o mais pequeno; porque ſe ſuppõe o corpo de 4 libras dividido em dous iguaes, teremos outros dous corpos, cada hum dos quaes ſerá igual ao de duas libras; e como tem a meſma velocidade que o de duas libras, a força de cada hum delles em particular ſerá igual á do mais pequeno: logo quando eſtes dous corpos fazem hum ſó, a força do maior corpo ſerá por conſequencia dupla da do menor.

Co-

Corollario I.

931 Dos dous Theoremas precedentes se segue, que a força de hum corpo, a que se póde chamar quantidade do movimento deste corpo, não depende sómente da velocidade, mas tambem da sua massa, e por isso se conhecerá sempre a quantidade do movimento de dous, ou mais corpos, multiplicando a massa de cada hum pela sua velocidade. Para se convencerem disto, imaginaremos dous corpos, dos quaes a massa de hum sejão 3, e tenha 4 gráos de velocidade, a massa do outro seja 5, e 6 gráos de velocidade: chamemos f á força, que póde dar hum gráo de velocidade a hum corpo, que só tiver huma parte de massa; e pois os effeitos são proporcionaes ás suas causas, a força, que podem dar os 4 gráos de velocidade, será $4f$: se o corpo for trez vezes maior, e se lhe queirão dar os mesmos 4 gráos de velocidade, não he menos evidente, que a força será $3 \times 4f$, ou $12f$. Pela mesma razão sendo os gráos de velocidade iguaes, chamando sempre f á que póde dar hum gráo de

de velocidade a huma parte do ſegundo corpo, $6f$ ſerá o que he capaz de lhe dar 6 gráos; e ſe o corpo for ſinco vezes maior, ſerá preciſa huma força ſinco vezes maior: logo a força, que lhe dá eſta meſma velocidade, ſerá $5\times 6f$, ou $30f$: logo as quantidades de movimento deſtes corpos, ou forças, que o puzerão em movimento, ſerão entre ſi como $12f$ a $30f$, ou como 12 a 30, iſto he, como os productos das maſſas pelas velocidades. Aſſim tendo dous corpos, a cuja maſſa chamaremos a, e b, chamando c á velocidade do primeiro, e d á do ſegundo, ac ſerá a quantidade do movimento de hum, e bd a quantidade do movimento do outro.

Corollario II.

932 Segue-ſe tambem daqui, que conhecendo-ſe a quantidade do movimento de hum corpo, e a ſua maſſa, dividindo a quantidade do movimento pela maſſa, o quociente ſerá a velocidade; e dividindo a quantidade do movimento pela velocidade, o quociente ſerá a maſſa.

PRO-

PROPOSIÇÃO III.

THEOREMA.

933 Se as maſſas, e velocidades de dous corpos eſtão entre ſi em razão reciproca, eſtes dous corpos tem a meſma quantidade de movimento.

DEMONSTRAÇÃO.

Pelo que temos dito a força de hum corpo, ou a quantidade do ſeu movimento, depende deſtas duas couſas, da ſua maſſa, e velocidade, iſto he, eſtá na razão compoſta da maſſa, e velocidade, ou como o producto da maſſa pela velocidade; mas pela hypotheſe a maſſa do primeiro he á do ſegundo, como a velocidade do ſegundo á do primeiro: logo as quantidades de movimento, ou as forças deſtes dous corpos, são iguaes. Aſſim chamando a á maſſa do primeiro, e c á ſua velocidade, b á maſſa do ſegundo, e d á ſua velocidade, ſerá $a:b::d:c$: logo $ac = bd$. O Q. S. Q. D.

Corollario I.

934 Segue-ſe daqui que ſe tivermos Figura 2. dous corpos A, e B, dos quaes as maſſas ſejão reciprocas com as velocidades, e eſtes dous corpos ſe encontrarem com direcções diametralmente oppoſtas, ſe ferirão com forças iguaes, e ficarão quietos no momento, que ſe encontrarem; porque ſuppondo que o corpo A ſeja de 4 libras, e tenha 12 gráos de velocidade, e o corpo B ſeja de 6 libras, e a ſua velocidade 8 gráos, a maſſa do corpo A, que he 4, multiplicada pela velocidade 12, dá 48 por quantidade do movimento do corpo A. Do meſmo modo, ſe ſe multiplica a maſſa do corpo B, que são 6, pela ſua velocidade 8, a quantidade do movimento ſerá tambem 48: logo ſe ferirão com forças iguaes diametralmente oppoſtas: logo o corpo A ferirá tanto o corpo B, como o corpo B ao corpo A, aſſim ficarão quietos, porque hum não tem mais força que outro.

Eſta igualdade entre duas forças, ou quantidades de movimento, que obrão

por

por direcções diametralmente oppoſtas, ſe chama equilibrio; aſſim para haver equilibrio entre duas, ou mais forças, que obrem por quaeſquer direcções, devem-ſe reduzir a duas forças iguaes, e directamente oppoſtas.

COROLLARIO II.

935 Segue-ſe tambem daqui, que ſe dous corpos iguaes com velocidades iguaes ſe encontrão em linhas de direcção diametralmente oppoſtas, ficarão em equilibrio no inſtante da colliſão, pois cada hum tem a meſma quantidade de movimento.

PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

936 Se dous corpos não elaſticos ſe moverem pela meſma determinação, e para a meſma parte, ſe o corpo, que leva maior velocidade, encontrar o que tem menos, indo eſtes dous corpos juntos, terão huma quantidade de movimento igual á ſomma da que tinhão antes da colliſão.

De-

Demonstração.

Se eſtes dous corpos ſe movem para a meſma parte, não ha couſa oppoſta, que lhes diminua o movimento: logo conſervarão depois da percuſsão a meſma quantidade de movimento, que tinhão antes della; porque ſe aquelle, que tinha mais quantidade de movimento, o communica ao que tem menos, eſta quantidade de movimento fica no ſegundo: logo conſiderando eſtes dous corpos como ſe não foſſem mais que hum depois da percuſsão, ſegue-ſe que a ſua quantidade de movimento he igual á ſomma das que tinhão antes da collisão.

Corollario I.

937 Segue-ſe daqui, que conhecendo a quantidade de movimento de dous corpos, que não fazem mais que hum depois de ſe encontrarem, ſe achará a velocidade, dividindo a quantidade de movimento pela ſomma das maſſas, e que conhecendo a velocidade, ſe achará a ſomma das maſſas, dividindo a quan-

quantidade de movimento pela velocidade.

COROLLARIO II.

938 Segue-ſe que ſe tivermos dous corpos iguaes em huma meſma linha de direcção, e que hum eſteja quieto, e outro em movimento, e o que ſe move encontrar com o que eſtá quieto, (não fazendo eſtes corpos mais que hum) lhe communicará metade da velocidade, que tinha antes da percuſsão; porque para termos eſta velocidade, devemos dividir a quantidade de movimento por huma maſſa dupla: em fim ſe o corpo movel encontra outro quieto, cuja maſſa ſeja tripla da ſua, a velocidade não ſerá mais que* terço hum ~~quarto~~,* e aſſim dos outros.

Geralmente ſeja u a velocidade do primeiro corpo, e m a ſua maſſa, v a velocidade do ſegundo corpo, e M a ſua maſſa: ſeja V a velocidade depois da percuſsão, ſerá pelo que acabamos de dizer $V = \frac{mu + MV}{m + M}$. Por eſta fórma ſe póde determinar a velocidade em todos

dos os casos possiveis, qualquer que seja a razão de M a m, e de u a V. Supponhamos, por exemplo, $u=v$, e $M=m$, será $V=\frac{MV}{2M}=\frac{v}{2}$, e he o que acabamos de dizer.

PROPOSIÇÃO V.

THEOREMA.

939 Se dous corpos se movem pela mesma direcção para partes diametralmente oppostas, encontrando-se estes corpos, e fazendo como hum só, a sua quantidade de movimento será a differença das quantidades de movimento, que tinhão antes da percussão.

DEMONSTRAÇÃO.

Se estes dous corpos se movem com determinações directamente oppostas, procurarão mutuamente embaraçar-se, de sorte que se tivessem forças iguaes, ficarião quietos depois da percussão: logo o mais forte perde tanto da sua força, quanto tem o mais fraco: logo para se moverem estes corpos depois

da

da percuſsão não reſta mais que a differença das ſuas forças, ou das ſuas quantidades de movimento: logo a quantidade de movimento deſtes dous corpos, conſiderados como ſe foſſem hum ſó, ſerá a differença da dos dous corpos antes da percuſsão.

COROLLARIO.

940 Segue-ſe daqui, que para achar a velocidade deſtes dous corpos depois da percuſsão, ſe deve dividir a differença das quantidades de movimento, que tinhão antes da percuſsão, pela ſomma das ſuas maſſas, e o quociente ſerá a velocidade, a qual ſeguirá a determinação o corpo, que tinha maior quantidade de movimento antes da percuſsão: logo a formula geral para determinar a velocidade dos corpos depois da percuſsão, ou eſtiveſſem na meſma direcção, ou em direcções diametralmente oppoſtas, ſerá $V = \frac{mu + MV}{m + M}$. $\frac{mu - M}{m +}$

CA-

CAPITULO II.

Do movimento dos corpos projectos.

Definições.

I.

941 SE hum corpo se move por hum certo tempo, que esteja dividido em muitas partes iguaes, chamaremos a cada huma destas pequenas partes momentos, ou instantes.

II.

942 Se hum corpo recebe em cada instante hum augmento igual de velocidade, se chama esta velocidade accelerada; e se pelo contrario hum corpo em cada instante perde iguaes gráos de velocidade, esta velocidade se chama retardada: a velocidade de hum corpo que cahe se chama accelerada, porque o pezo obra todo o instante, e lhe communica iguaes gráos de velocidade. Pelo contrario a velocidade de hum corpo atirado debaixo para sima he huma velocidade retardada, porque o pezo lhe tira em cada instante iguaes gráos de velocidade. Se os gráos

de

de velocidade adquiridos, ou perdidos em cada inſtante não são iguaes entre ſi, mas varião em huma conſtante razão, eſtas velocidades ſe chamão variaveis acceleradas, ou variaveis retardadas.

AXIOMAS.

I.

943 Hum corpo quieto, ou em movimento ſempre he o meſmo corpo: tambem he o meſmo, qualquer que ſeja, a determinação, ou quantidade do ſeu movimento.

II.

944 O corpo de ſi meſmo, ou de ſua natureza he inteiramente indifferente para o movimento, ou quietação; e por conſequencia poſto huma vez em movimento, ficará em movimento até que alguma couſa lho tire, e reciprocamente quieto huma vez hum corpo, de ſi meſmo nunca ſe porá em movimento.

III.

945 O corpo de ſi, ou de ſua natureza he abſolutamente indifferente pa-

para qualquer determinação, ou velocidade que ſeja; e conſequentemente eſte corpo de ſi meſmo nunca mudará de velocidade, nem da determinação, que teve ultimamente.

946 Acabamos de ver que hum corpo não ſe póde pôr em movimento ſem cauſa que o ponha; e que ſe nada ſe oppõe ao ſeu movimento, mover-ſe-ha eternamente. Na meſma ſuppoſição. Se nada ſe oppõe ao movimento, por pequena, ou grande que ſeja a força motriz, he evidente que a duração do movimento ſerá eterna. Parece que daqui ſe podia inferir que tanto a maior força, como a menor produziria duração infinita, e que as meſmas forças são infinitas, conforme o noſſo axioma, que diz que os effeitos são proporcionaes ás cauſas. Para ſe não enganarem com eſte ſofiſma, deve-ſe primeiro diſtinguir a duração do movimento de mais, ou menos eſpaço, que a força motriz faz correr ao corpo em hum tempo infinito: ſegundo, fazer reflexão que na hypotheſi, que nada ſe opponha, o movimento deſte corpo, e di-

direcção infinita deste movimento não vem directamente da força motriz, mas da indifferença do mesmo corpo ao movimento, ou quietação; do que se segue evidentemente que os effeitos das causas serão sempre infinitos, e proporcionaes ás suas causas, porque os effeitos não serão que o mais, ou menos espaço corrido em hum determinado tempo.

POSTULADO.

947 Pede-se que se conceda que o pezo, de qualquer causa que provenha, carrega sempre o corpo com a mesma força para baixo.

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

948 Se nada se oppuzesse ao movimento dos corpos projectos, cada hum destes corpos conservaria sempre a mesma velocidade igual ao movimento, que recebeo, e pela mesma linha recta.

DE-

Demonstração.

Como hum corpo não póde de ſi meſmo pôr-ſe em quietação, nem mudar de determinação, ou velocidade, que recebeo *, ſegue-ſe que ſenão ha couſa, que ſe opponha a eſta velocidade, o corpo conſervaria ſempre o ſeu movimento, e com huma velocidade ſempre igual, e pela meſma linha recta. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 944. e 945.

Corollario I.

949 Logo o meſmo movimento, que tem a potencia, que move, ou ſeja horizontal, obliqua, ou verticalmente, ſeria conſtante, igual, e ſempre para a meſma parte, ſe o ar não reſiſtiſſe ao ſeu corpo, e ſe o ſeu pezo o não fizeſſe deſcer ſempre para baixo, de ſorte que o movimento, como elle he, preciſamente da parte do movel deveſe conſiderar igual, perpetuo, e ſempre para a meſma parte, para que ſe empurrou o movel.

Co-

COROLLARIO II.

950 Do meſmo modo ſe immediatamente depois que hum movel adquirio huma certa velocidade cahindo, ceſſaſſe inteiramente a acção do ſeu pezo, e o ar não reſiſtiſſe, eſte corpo com tudo continuaria a mover-ſe com a meſma velocidade, que tiveſſe ultimamente recebido, conſervando ſempre igualmente eſta meſma velocidade, e ſeguindo ſempre a meſma linha recta.

COROLLARIO III.

951 Logo como a acção do pezo da gravidade não embaraça a velocidade de hum corpo, que cahe, ſe o ar, ou outra couſa ſe lhe não oppuzeſſe, a velocidade, que o pezo daria ao corpo no primeiro inſtante, ſubſiſtiria no ſegundo inſtante com huma igual velocidade cauſada pela meſma gravidade: pela meſma razão as velocidades dos dous primeiros inſtantes ſubſiſtirião no terceiro, e aſſim as velocidades de todos eſtes primeiros inſtantes ſubſiſtirião com as velocidades, que eſte meſmo corpo re-

receberia em cada hum dos inſtantes ſeguintes; ou tambem (o que he o meſmo) quando hum corpo cahe, recebe velocidades iguaes em tempos iguaes, ſuppondo a acção da gravidade uniforme, e não fazendo caſo da reſiſtencia do ar.

PROPOSIÇÃO II.

Theorema.

952 Hum corpo, que cahe, recebe em tempos iguaes gráos iguaes de velocidade, de ſorte que no ſegundo inſtante tem velocidade dupla da que tinha no ſegundo inſtante da ſua queda, e no terceiro tem velocidade tripla, e aſſim dos mais.

Demonstração.

Pois hum corpo, que cahe, he continuamente impellido para baixo pela ſua gravidade, que he ſempre a meſma *, ſegue-ſe que a gravidade deve dar a eſte corpo em cada inſtante da ſua queda iguaes gráos de velocidade: logo como os gráos de velocidade, que re-

* Numer. 947.

recebeo antecedentemente, ſubſiſtem ainda *, o corpo, que deſce, tem tantos gráos de velocidade cauſados pela ſua gravidade, quantos momentos ſe tem paſſado do principio da deſcida até o momento, em que ſe conta: logo eſte corpo terá no fim do ſegundo inſtante huma velocidade dupla da do primeiro, e no terceiro huma velocidade tripla.

* Numer. 948.

COROLLARIO.

953 Segue-ſe daqui que os gráos de velocidade, que hum corpo tem adquirido no fim de cada inſtante da queda, são como os tempos, que ſe tem paſſado do principio do ſeu movimento: logo como os inſtantes, que tem corrido do primeiro momento da queda, eſtão em progreſsão arithmetica, os gráos de velocidade adquiridos no fim deſtes tempos são tambem em progreſsão arithmetica.

POSTULADO.

954 Pede-ſe que ſe permitta repreſentar os tempos por linhas, o que

não deve fazer difficuldade; porque representando 1 minuto, v. gr. por huma linha de huma pollegada, reprefentarei 2, ou 3 minutos por linhas de duas, ou trez pollegadas. Por efta fuppofição não fe pertende que os tempos, e linhas fejão quantidades da mefma natureza, mas fó que as linhas fejão expreffões proprias para reprefentar as differentes razões dos tempos.

PROPOSIÇÃO III.

THEOREMA.

Figura 3. e 4. 955 Se dous corpos iguaes A, e B fe movem ao mefmo tempo, hum com velocidade uniforme, e outro com velocidade uniformemente accelerada, de forte que o ultimo gráo de velocidade adquirida feja igual á velocidade conftante do corpo, que fe move uniformemente, o efpaço corrido pelo primeiro ferá duplo do efpaço, que andou o fegundo.

DEMONSTRAÇÃO.

Reprefente-fe o tempo do movimento por AC, e fupponhamo-lo dividido com

com hum numero infinito de inſtantes; ſe o corpo, que ſe move com o movimento uniforme, corre em cada hum dos inſtantes a linha CD, em todo o tempo AC correrá tantas vezes CD, quantos inſtantes tem o tempo do movimento, ou quantos pontos tem AC: logo o rectangulo AC×CD repreſentará o eſpaço precorrido no tempo AC pelo corpo, cujo movimento he uniforme. Vejamos preſentemente qual he o eſpaço, que no meſmo tempo AC correrá o movel, que ſe move com movimento uniformemente accelerado, ſuppondo que a linha CD repreſente a velocidade, que adquirio no ultimo inſtante do tempo AC.

Iſto ſuppoſto, por ſerem as velocidades como os tempos pelo ultimo Corollario no fim do tempo AB, iſto he, no inſtante B, correrá a linha BE, que ſerá para CD, como AB a AC: logo a ſomma dos elementos do triangulo AEB reprepreſentará a dos eſpaços corridos pelo corpo, que ſe move com movimento uniformemente accelerado: logo o eſpaço total corrido no tempo AB não

 he

he differente desta somma, e se representará por $AC \times \frac{CD}{2}$: logo o primeiro movel correo no mesmo tempo hum espaço duplo do segundo. *O Q.S.Q.D.*

Corollario I.

956 Por serem os dous corpos iguaes se podem suppôr como hum só; do que se segue que se hum mesmo corpo se move com movimento uniforme em hum certo tempo, e que em tempo igual tenha adquirido com hum movimento uniformemente accelerado huma velocidade igual á do movimento uniforme, o espaço, que tiver corrido no primeiro caso, será duplo do que correo no segundo.

Corollario II.

957 Logo os espaços corridos com hum movimento uniformemente accelerado são entre si como os quadrados dos tempos, começando do instante, em que o corpo se poz em movimento; porque he evidente que sendo os triangulos ABE, e ACD, que represen-

tão os eſpaços corridos nos tempos AB, e AC ſemelhantes, eſtão entre ſi como os quadrados dos tempos, que são os lados AB, e AC.

COROLLARIO III.

958 Sendo os tempos como as velocidades *, e os eſpaços corridos do * Numer.
primeiro inſtante do movimento como 952.
os quadrados dos tempos, ſerão tambem entre ſi como os quadrados das velocidades adquiridas. Aſſim chamando L huma extensão corrida do ponto, em que começou a mover-ſe, e T o tempo, que ſe gaſtou em corrella, V a velocidade adquirida no fim deſte tempo, l hum comprimento andado do ponto, em que começou o movimento, t o tempo, que gaſtou em andallo, u a velocidade adquirida no fim deſte tempo, teremos L : L :: TT : tt, ou L : l :: VV : uu.

COROLLARIO IV.

959 Por ſer L : l :: VV : uu, ſe de cada termo ſe extrahe a raiz quadrada, ſerá $\sqrt{L}:\sqrt{l}::V:u$, o que moſtra que

no

no movimento accelerado ſe podem expreſſàr as velocidades pelas raizes dos comprimentos corridos do primeiro inſtante do movimento. Devemos cuidar em comprehender iſto para não nos embaraçarmos no que ſe ſegue.

Corollario V.

960 Como na deſcida dos corpos graves o pezo obra em cada inſtante para chegar ao centro da terra, e lhe communica em cada inſtante iguaes gráos de velocidade, (com tanto que eſta ſuppoſição não cauſe algum erro, conſiderando-os em diſtancia pouco attendivel do centro da terra ainda de algumas leguas) ſegue-ſe que os eſpaços andados por hum corpo, que cahe livremente, contando do primeiro inſtante de movimento, são como os quadrados dos tempos paſſados depois do ponto, que começou a mover-ſe.

Corollario VI.

961 Segue-ſe daqui que os eſpaços, que hum corpo cahindo corre em tempos iguaes, são entre ſi como

os numeros impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. Supponhamos que no primeiro inſtante da deſcida andou huma braça, como eſta velocidade ſe vai adquirindo por gráos, e além diſſo ſempre a conſerva em todos os inſtantes ſeguintes, no ſegundo inſtante, em virtude deſte ſegundo gráo de velocidade, correrá o corpo hum eſpaço duplo, iſto he, 2 braças *; mas a gravidade obra ſempre do meſmo modo: logo fará com que o corpo ande mais 1 braça neſte ſegundo inſtante: logo andará 3 braças. Do meſmo modo com os dous gráos de velocidade, que já tem no terceiro inſtante, andará 4 braças; e em virtude do novo gráo, que lhe communica a acção da gravidade, andará mais 1 braça: logo no terceiro inſtante andará 5 braças, e aſſim das mais: logo os eſpaços, que hum corpo que deſce corre em tempos iguaes, são como os numeros 1. 3. 5. 7. 9. &c.; de que ſe ſegue tambem que os eſpaços corridos deſde o primeiro inſtante da deſcida são como os quadrados dos inſtantes, que ſe tem paſſado, pois ſommando conti-

nua-

* Numer. 948.

nuamente os numeros impares da unidade por diante, resultarão numeros quadrados, pois he evidente que $1=1$, $4=3+1$, $9=1+3+5$, $16=1+3+5+7$, &c.

COROLLARIO VII.

962 Segue-se tambem que se hum corpo, depois de ter corrido hum certo espaço em hum certo numero de instantes, perdesse de repente toda a força da gravidade, continuaria com tudo a mover-se com huma velocidade uniforme igual á que lhe communicou a gravidade no ultimo instante, e consequentemente em hum tempo igual ao em que desceo correria sempre hum espaço duplo do que correo em todo o tempo, em que a gravidade obrava no dito movel.

COROLLARIO VIII.

963 Segue-se daqui que se se lança hum corpo de baixo para sima por huma direcção perpendicular, ou obliqua, o corpo se moverá com hum movimento uniformemente retardado; porque

que he evidente que nesta supposição, sendo a gravidade opposta em todo, ou em parte ao movimento de projecção deste corpo, deve em cada instante tirar-lhe iguaes gráos de velocidade; e por consequencia no fim de hum certo tempo, quando a gravidade lhe tem destruido toda a força, que o movel tinha para se elevar perpendicularmente, começará a cahir, e passará successivamente por todos os gráos possiveis de augmento, até que encontre algum corpo, que o detenha inteiramente.

COROLLARIO IX.

964 Logo a velocidade, que hum corpo adquirio, cahindo de huma certa altura, he igual á que o poderia fazer subir a esta mesma altura; ou, o que vem a ser o mesmo, se hum corpo se deita de baixo para sima com huma força igual á que adquirio, cahindo de certa altura, esta força seria capaz de o fazer subir á mesma altura; de que se segue tambem que os espaços corridos por hum corpo, lançado de baixo para sima, serão como os nume-

meros impares na ordem inverſa, ſe os tempos são iguaes.

COROLLARIO X.

965 Logo ſe a força do pezo ſe modifica conſtantemente, os eſpaços, que eſta força aſſim modificada faz correr a qualquer corpo, ſerão conforme as leis geraes da gravidade. Por exemplo: ſe hum corpo cahe por hum plano inclinado ao horizonte, róla ſobre o plano, conforme as leis da gravidade, que o obriga ſempre a deſcer: logo deve correr eſpaços, que eſtejão na razão dos quadrados dos tempos, contando do primeiro inſtante do movimento. Se na experiencia ſe não encontra eſta lei com toda a exacção poſſivel, he porque a fricção, e reſiſtencia do meio, em que ſe faz o movimento, póde alterar a exacção, de que ſe não póde concluir couſa alguma contra os principios, que acabamos de eſtabelecer, pois preſcindimos de todas eſtas circumſtancias.

REFLEXÃO.

966 Como a theorica da gravidade tem huma applicação directa, e immediata á projecção dos corpos, e se não póde entender a das bombas, sem estar convencido das verdades, que acabamos de estabelecer, e além disso ha infinidade de pezos possiveis capazes de fazer correr os corpos, que estão sujeitos ás suas acções, espaços, que serão entre si como os quadrados dos tempos do primeiro instante do movimento, ou como os numeros impares desde a unidade, supponde os tempos iguaes, a experiencia he que deve diffidir qual he a força da gravidade ao pé da superficie da terra; porque ainda na supposição que esta força augmentasse, ou diminuisse por causa das differentes distancias da terra, em qualquer razão, as distancias, a que se podem lançar ainda os maiores corpos, não são tão consideraveis que se possão conhecer as variações da acção do pezo.

967 A experiencia tem mostrado que hum corpo, que descendo corre

15 palmos no primeiro ſegundo da ſua deſcida, corre 45 no ſegundo, 75 no terceiro, e aſſim os mais: logo o pezo he huma força capaz de fazer correr no ſegundo 30 palmos a qualquer corpo, que eſtá ſujeito á ſua acção no meſmo tempo, pois os 15 palmos forão corridos por hum movimento accelerado, e aqui ſe falla de hum movimento uniforme. Do meſmo modo ſe a gravidade obra por 3 ſegundos, fará que o corpo corra 270 palmos no meſmo tempo, e conſequentemente 90 palmos em hum ſegundo. Ora he viſivel que as velocidades 30, e 90 palmos por ſegundo são como os tempos, nos quaes o movel cahio.

968 Tudo iſto nos prova eſte prodigioſo augmento de velocidade na razão das raizes quadradas das alturas, de que deſcem os corpos; porque ſe a velocidade de hum corpo, que cahe de 3 palmos, foſſe igual á de hum corpo, que cahe de 60 palmos de alto, não haveria maior perigo em cahir de hum terceiro andar, que de dous, ou trez palmos de alto, porque a pancada he á

pro-

proporção da velocidade, com que cahem. Do mesmo modo não ha pessoa, que não saiba que huma pedra nos fere muito mais, de quanto mais alto cahe.

Digressão ácerca das variações da gravidade.

969 „ Já apontámos que a gravi-
„ dade podia não ser huma força cons-
„ tante, e igual em todas as differen-
„ tes distancias do nosso globo, ainda
„ que se considera como tal em medio-
„ cres distancias, e he o que com ef-
„ feito succede. Mr. Newton foi o
„ primeiro, que demonstrou que esta
„ força diminuia na razão inversa dos
„ quadrados das distancias; de sorte,
„ que a força, que combinada com hu-
„ ma força de projecção retem a Lua
„ na sua orbita, apartando-a continua-
„ mente da tangente, por que ella per-
„ tende mover-se, não he outra cou-
„ sa mais que a gravidade diminuida
„ na razão inversa dos quadrados das
„ distancias. Prova que em virtude des-
„ te pezo, a Lua em hum minuto se af-
„ fasta 22 palmos e meio da tangente no

„ pon-

,, ponto da orbita, em que eſtava no
,, principio deſte minuto: logo para
,, comparar a força da gravidade ao pé
,, da Lua á gravidade ao pé da terra,
,, ſe deve ver o que ella fará deſcrever
,, em hum ſegundo, ſuppondo ſempre
,, os eſpaços corridos, como os qua-
,, drados dos tempos, e tomando o eſ-
,, paço de 22 palmos e meio como uni-
,, dade. Hum minuto tem 60 ſegundos:
,, logo os quadrados dos tempos ſerão
,, 1. e 3600; e fazendo eſta proporção
,, 3600 : 1 :: 1 : $\frac{1}{3600}$, eſte quarto termo
,, ſerá o eſpaço corrido ao pé da Lua
,, em hum ſegundo de tempo: logo os
,, eſpaços, que correm os corpos em
,, hum ſegundo ao pé da Lua, e ao pé
,, da terra em virtude da gravidade,
,, são $\frac{1}{3600}$ 1; e as diſtancias dos corpos,
,, que eſtão no noſſo globo, e da Lua
,, ao centro da terra, são 1. e 60 raios
,, da terra, e eſtes quadrados são 1. e
,, 3600, que são preciſamente na razão
,, inverſa das forças, ou eſpaços corri-
,, dos $\frac{1}{3600}$ e 1, pois $\frac{1}{3600}$: 1 :: 1 : 3600.
,, *O Q. S. Q. D.*

,, Aſ-

„ Aſſim ſe tem achado que a gravi-
„ dade varía conforme as diſtancias do
„ equador, de ſorte que ſe vai augmen-
„ tando do equador para os polos, e
„ reciprocamente. Conhece-ſe eſta va-
„ riação, obſervando hum pendulo,
„ que faz ſegundos em París, iſto he,
„ que faz 60 vibrações em hum minu-
„ to, e fazia menos numero perto do
„ equador; de que ſe concluio que o
„ pezo certamente he menor no equa-
„ dor que nos polos, pois as vibrações
„ dos pendulos, que não são mais que
„ effeitos da gravidade, são mais len-
„ tas no equador que nos polos. Eſta
„ diminuição da gravidade he cauſada
„ pelo movimento da rotação da terra
„ á roda do ſeu eixo, do qual reſulta
„ huma força contrifuga maior no
„ equador que nos polos. „

Tudo o que acabamos de ver a reſpeito das variações da gravidade não embaraça que ſe tome por huma força conſtante, pois eſtas variações não podem ſer ſenſiveis nas maiores diſtancias, a que ſe podem lançar os corpos. Ainda que eſtas verdades não poſsão ter hu-

huma directa applicação ao lançar das bombas, que deve ſer o principal objecto do Engenheiro, julguei as não devia deixar, porque são muito bellas, para que nenhum homem inſtruido as ignore; e além diſſo he conveniente que ſe ſaibão quaes são as cauſas, que podem alterar as leis eſtabelecidas, e quaes são as que não podem produzir o meſmo effeito.

PROPOSIÇÃO IV.

Problema.

970 Pergunta-ſe qual he o eſpaço, que a gravidade faz andar em 4 ſegundos a hum corpo, que cahe perpendicularmente.

Solução.

Chame-ſe x eſte eſpaço, que ſe não conhece: os eſpaços andados em tempos differentes do principio do movimento são como os quadrados dos tempos *; e além diſſo moſtra a experiencia que hum corpo anda 22 palmos e meio no primeiro ſegundo: logo teremos eſta proporção $1:16::22\frac{1}{2}:x=\frac{22\frac{1}{2}\times16}{1}$ $=360$ palmos.

* Numer. 958.

PRO-

PROPOSIÇÃO V.

PROBLEMA.

971 Pergunta-ſe que tempo gaſtou hum corpo, movido ſómente pela força da gravidade, em andar hum eſpaço de 562 palmos e meio?

SOLUÇÃO.

Seja x o tempo que ſe buſca: os eſpaços corridos são como os quadrados dos tempos *: logo teremos eſta proporção $22\frac{1}{2} : 562\frac{1}{2} :: 1 : xx$, e $x = \frac{562\frac{1}{2}}{22\frac{1}{2}} = 25$, de que ſe tira $x = 5$, iſto he, que o corpo eſteve 5 ſegundos em movimento.

* Numer. 957.

972 Como no lançar as bombas o movel ſe acha entre duas forças, huma de projecção, e ſimpleſmente motriz, que he a força da polvora, e outra de acceleração, ou de retardação conſtante, que he a força da gravidade, conforme o corpo ſobe, ou deſce, qualquer que ſeja a direcção, e além diſſo ſe preſcinde das reſiſtencias do ar a eſtas duas forças, póde-ſe achar a curva,

que o movel defcreve no feu movimento, fem fuppôr que fatisfez cada huma deftas duas forças, como fe foffe movido por huma, ou outra feparadamente. Vamos demonftrar efta propofição, a que fe chama movimento compofto.

Definição.

973 Chama-fe fimplesmente força motriz toda a força, que fe não applica a hum movel mais que hum inftante: todo o corpo duro, que fe move, he huma força motriz a refpeito de outro, que encontra, porque fó fe lhe applica no inftante da collisão.

974 Se duas, ou mais forças motrizes fe applicão em hum mefmo inftante para mover hum corpo, cada huma conforme a fua direcção, fe chamão forças componentes; e a força, que lhe dão, fe chama força refultante.

Proposição VI.

Theorema.

975 Se hum corpo K he impellido
Figura 5. ao mefmo tempo por duas forças M, e

N

N ſimplesmente motrizes, e capazes de lhe fazer correr no meſmo tempo, conforme as ſuas direcções, huma AB, e outra AC, digo primeiro que o corpo pela força, compoſta deſtas duas potencias, andará com hum movimento uniforme á diagonal AD do parallelogramo formado pelas duas direcções. Segundo, que andará eſta diagonal no meſmo tempo que teria andado o lado AB, ou o lado AC, ſe ſó huma das potencias o moveſſe.

DEMONSTRAÇÃO.

Imaginem-ſe duas regoas infinitamente delgadas MAB, e NAC, cada huma igual ao pezo do corpo K, e poſtas em movimento pelas direcções AB, e AC com as velocidades, que lhe fação andar o dobro das linhas AC, e AB, que as potencias M, e N fazem andar ao corpo K, que ſe ſuppõe quieto, communicar-lhe-ha cada huma metade das ſuas velocidades, conforme as leis dos corpos não elaſticos; e por conſequencia fazem preciſamente no corpo hum effeito igual ao que farião as potencias M, e N, que ſuppuzemos obrar no meſmo corpo, e não são differentes deſtas meſmas forças. Iſto ſupposto, o corpo K deve deſcrever a diagonal AD no meſmo tempo que ſe moveria pela linha AB, ou AC, ſe foſſe movido ſó por huma potencia M, ou N.

Para ſe comprehender iſto, ſe notará que as regoas não impellem o corpo mais que quanto lhe he preciſo, para que elle ſe não opponha ao movimento que lhe reſta, o qual he metade do que tinha antes de ſe encontrarem. He preciſo notar mais, que como as regoas eſcurregão huma por outra, não podem deſtruir mutuamente o movimento, que lhes reſta: logo movem-ſe com velocidade, que lhes fazem correr as linhas AB, AC nos tempos, que as potencias M, e N terião feito correr ao corpo K as meſmas linhas. Finalmente ſe fará reflexão que neſte meſmo tempo a ſua mutua interſecção deſcreve a diagonal AD; porque he evidente que quando a regoa AB chegou a EF, a regra AC correo huma parte proporcional do eſpaço AB, e por con-

ſe-

ſequencia ſe acha em GH; de que ſe ſegue evidentemente que a interſecção I he hum ponto da diagonal: logo para que o corpo K ſe não opponha ao movimento deſtas regoas, baſta que ſe moveſſe com igual velocidade de K para I, iſto he, que andaſſe KI no tempo que as regoas andárão os eſpaços AE, AH: logo chegará a D no tempo que as regoas chegárão a BD, e CD. Além diſſo he viſivel, como já fizemos reflexão, que eſtas regoas são iguaes ás potencias M, e N, pois communicão a meſma velocidade ao corpo K, conforme as leis dos corpos duros: logo o corpo deſcreverá a diagonal AD no meſmo tempo que correo AB, ou AC, ſenão foſſe movido mais que por huma das forças M, ou N. *O Q. S. Q. D.*

O movimento compoſto ſe póde tambem conceber de outro modo. Imaginemos que o corpo K ſe move ſobre huma regoa AB, e que no meſmo tempo que corre o comprimento da regoa huma força, leva eſta regoa pelo comprimento AC, fazendo-lhe correr AC. He evidente que neſte movimento o cor-

corpo K defcreve tambem a diagonal AD, pois os effeitos inteiros AB, e AC, e as fuas partes proporcionaes são defcriptas em tempos iguaes: logo, &c.

Poder-fe-hia temer nefta ultima demonftração que na fuppofição que fizemos de que o corpo fe moveo fobre a linha AB, e que efta linha fe levou fobre AC parallelamente a fi mefmo, não fe mude alguma coufa da força N, que move o corpo A para C. Para pervenir efta objecção, advertiremos com Mr. Varignon, que quando dous corpos fe movem com igual velocidade, como na noffa hypothefi, efta mefma velocidade os impoffibilita a fe ajudarem, ou deftruirem reciprocamente; e a força, que move cada hum feparadamente, he fempre a mefma: do que fe fegue que a força, que faz andar o corpo K á linha AC, he fempre a mefma, ou vá fobre a regoa AB, ou fe lhe tire a regoa: advertindo que efta ultima demonftração fe póde tomar como huma das melhores.

Quanto ao mais efta propofição não

fe

ſe põe aqui ſenão para entendermos o que havemos de dizer do lançar as bombas; e para moſtrar que hum corpo, que eſtá entre duas potencias, toma huma direcção, pela qual ſatisfaz ao impulſo de cada huma das forças, que obrão ſobre ella, daremos ainda outra demonſtração mais clara, e mais convincente deſta meſma propoſição no Tratado da Mecanica, que ſe ſegue a eſte. Como eſta propoſição he de ſumma importancia para tudo o que diz reſpeito á compoſição, e deſcompoſição das forças, deve-ſe quanto for poſſivel applicar a entender bem os principios.

COROLLARIO I.

976 Logo a força reſultante, conforme a diagonal AD, he a huma das componentes M, ou N, como AD a AB, ou como AD a AC; porque as forças, que movem corpos iguaes, são como os eſpaços andados no meſmo tempo.

COROLLARIO II.

977 Logo o corpo ſatisfaz ás duas potencias ao meſmo tempo, como ſe-não foſſe impellido mais que por huma dellas; porque he evidente que quando eſtá no ponto D, ſe acha apartado da linha AB pela quantidade BD = AC, e reciprocamente eſtá diſtante da direcção AC toda a linha DC = AB.

COROLLARIO III.

978 Logo a força, que o corpo tem pela diagonal, he capaz de fazer equilibrio com as componentes, ſe tiveſſe huma contraria direcção, iſto he, ſe o corpo foſſe impellido de D para A com huma velocidade capaz de lhe fazer correr a linha AD em hum certo tempo, eſte corpo com as forças, que tem neſta hypotheſi, faria equilibrio com a das potencias capazes de fazerem andar as linhas AB, e AC no meſmo tempo; porque o esforço, que reſulta deſtas duas potencias, applicadas no meſmo inſtante a eſte corpo, não lhes podem fazer andar mais que a diagonal com a meſma velocidade.

Co-

COROLLARIO IV.

979 Logo qualquer força ſe póde tomar como reſultante de outras duas, e ſuppôr que he a diagonal do parallelogramo feito das direcções deſtas duas: do que ſe ſegue tambem que ha huma infinidade de forças, em que ſe póde deſcompôr qualquer, porque huma linha póde ſer diagonal de huma infinidade de differentes parallelogramos. O eſtado da queſtão, ou as condições do problema, determinão ordinariamente quaes são as forças, de que ſe póde compôr qualquer direcção dada, como ſe verá nos exemplos da Mecanica.

COROLLARIO V.

980 Logo ſe hum corpo ſe acha huma vez ſujeito á acção de duas forças de acceleração, ou retardação conſtantes, deſcreverá a diagonal do parallelogramo formado pelas direcções deſtas forças, porque eſtas são forças motrices, que renovão a acção em cada inſtante; e como os gráos de augmento, ou diminuição são proporcionaes

em

em todos os inſtantes do movimento em cada força, ſegue-ſe que a linha deſcripta pelo movel deve ſer huma linha recta.

Corollario VI.

981 Se as duas forças não guardão a meſma razão conſtante em cada inſtante do movimento, a linha deſcripta pelo movel ſerá huma linha curva; e tal, que ſatisfaz em cada inſtante do movimento a ambas as forças juntamente, e no meſmo tempo, como ſe não tiveſſe mais que huma dellas.

Corollario VII.

982 Logo ſe huma deſtas forças he variavel, e a outra conſtante, a linha deſcripta pelo corpo ſujeito á acção deſtas duas forças ſerá neceſſariamente curva: do que, e do Corollario precedente ſe ſegue, que a theorica das curvas ſe póde applicar á dos movimentos, e reciprocamente conhecer a razão, que as forças motrizes devem ter entre ſi, para fazer deſcrever a hum corpo huma curva determinada.

Tu-

Tudo o que acabamos de dizer he baſtante para vir no conhecimento da curva, que deſcreve hum movel ſujeito á acção de huma força motriz, e á da gravidade, preſcindindo da reſiſtencia do ar, e diverſas circumſtancias, que podem alterar a exacção das regras, que vamos a eſtabelecer. Baſta dizer que as experiencias no vacuo demoſtrão que os corpos cahirião com as meſmas velocidades, qualquer que foſſem as ſuas maſſas, e volumes, ſe o ar não reſiſtiſſe ao ſeu movimento. Se ſe quizer attender a eſta reſiſtencia, deve-ſe determinar primeiro a reſiſtencia dos fluidos aos corpos, que ſe movem por elles na razão dos ſeus volumes, das ſuas maſſas, e das ſuas velocidades. Aſſim ſe vê que actualmente não podemos determinar as curvas, que deſcrevem os corpos, quando ſobem, ou deſcem por huma linha obliqua ao horizonte, ſenão preſcindindo das reſiſtencias do ar, porque o ar he hum fluido; e não temos ainda dado a theorica da reſiſtencia dos fluidos.

CA-

CAPITULO III.

Da theorica, e da pratica de lançar as bombas, para servir á intelligencia da construcção de hum instrumento geral para lançar as bombas.

983 TOdos ſabem geralmente que a bomba deſcreve huma curva do morteiro até o ſitio, em que cahe; mas deve-ſe ſaber que curva he eſta, para eſtabelecer certas regras, que ſervem de principios na pratica, e são conſequencias das propriedades da curva deſcripta pelo ſeu movimento. Vamos moſtrar que a curva deſcripta não ſómente por huma bomba, mas tambem por todo o corpo, qualquer que ſeja a direcção, parallela, ou obliqua ao horizonte, ſempre he huma parabola. Suppomos aqui, como antecedentemente, que o ar não faz alguma reſiſtencia, ou ſeja á força do impulſo, ou á da gravidade. Todos ſabem que ſe a direcção do projecto he vertical, ou perpendicular ao horizonte, o corpo deve deſcrever hu-

huma linha recta, e assim não tratamos desta direcção no caso presente.

POSTULADO.

984 Pede-se que se imagine a força da polvora capaz de fazer correr ao movel espaços iguaes: este postulado he consequencia immediata da hypothesi, que se não attende á resistencia do ar: além disso a força da polvora he huma força simplesmente motriz, que não obra no corpo mais que hum certo tempo, que se póde imaginar como hum instante a respeito da duração do movimento.

PROPOSIÇÃO VII.

THEOREMA.

985 Se hum corpo A he impellido por huma força motriz, por huma linha parallela, ou obliqua ao horizonte, digo que o movimento do impulso, e do pezo a farão descrever huma parabola. Figura 6. e 7.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

Qualquer que ſeja a direcção da força motriz o corpo A ſe achará entre duas forças, huma conſtante, que he a força da polvora, e outra conſtantemente accelerante, que he a força da
* Numer. 975. gravidade: logo * deve ſatisfazer no meſmo tempo a ambas eſtas forças, como ſe foſſem huma ſó. Em virtude da força do impulſo corre em tempos iguaes os eſpaços iguaes AE, EG, GI, IB, e em virtude da gravidade corre no fim de cada hum deſtes tempos os eſpaços EF, GH, IK, BD, que são como os quadrados dos tempos deſde o primeiro inſtante do movimento. Iſto ſuppoſto, como os eſpaços AE, AG, AI creſcem em progreſsão arithmetica, e os tempos creſcem na meſma progreſsão, e além diſſo os eſpaços corridos no fim de cada hum dos tempos, contando do primeiro inſtante, são como os quadrados dos tempos, eſtes meſmos eſpaços EF, GH, IH, BD ſerão tambem entre ſi como os quadrados das linhas AE, AG, AI, AB, pro-

proporcionaes aos tempos; e tomando em lugar das linhas AE, AG, AI as ſuas parallelas LF, MH, NK, e em lugar das linhas EF, GH, IK as ſuas parallelas AL, AM, AN, teremos pelo que acabamos de moſtrar $LF^2 : MH^2 :: NK^2 :: AL : AM : AN$, do que ſe ſegue que a curva AFD he huma parabola, porque os quadrados das ordenadas são entre ſi como as ſuas abciſas. *O Q. S. Q. D.*

Corollario I.

986 Como a gravidade não paſſa hum inſtante ſem obrar ſobre o projecto, qualquer que ſeja a direcção, he evidente que ella o deſvia deſta linha deſde o primeiro inſtante do movimento: logo a linha AB, que exprime a direcção da força motriz, he tangente á parabola.

Corollario II.

987 Se a direcção da força motriz he parallela ao horizonte, a vertical AO, tirada pelo ponto A, ſerá o eixo da parabola, e o ponto A o vertice da cur-

curva; e se a direcção he obliqua, a
Figura 7. linha AO, tirada do mesmo ponto A, será hum diametro. Se o corpo he impellido de A para B, o ponto H determinado pela vertical, tirada pelo meio de GB, será o mais alto, a que se póde levantar: se he impellido de A para Q, o ponto A será o mais alto, a que póde subir a bomba no seu movimento.

Corollario III.

988 As parabolas descriptas por hum mesmo movel tem tanta mais extensão, quanto maior he a força motriz com a mesma inclinação, porque a extensão depende da força motriz, e da inclinação da direcção desta mesma força ao horizonte.

Definição.

989 Se a linha AB, direcção da força motriz, se chama linha de projecção, a linha BD levantada do ponto D do horizonte, onde o corpo cahe perpendicularmente até á linha de projecção, se chama linha da gravidade.

A linha AD tirada do ponto, donde

de parte o corpo até o ponto, onde chega ſobre o horizonte, ſe chama linha da terminação. Se eſta linha he horizontal, como na Figura 7, ſe chama extensão de parabola: eſta linha determina a grandeza do tiro, e por iſſo ſe chama amplitude da parabola.

Principio fundamental.

990 Como as extensões das parabolas deſcriptas por hum meſmo movel dependem da força, que põe o movel em movimento, para reduzir eſta força a alguma medida fixa, e determinada, aſſentárão os Geometras, depois de Galileo julgar as forças pelas alturas, de que deverão cahir os moveis para adquirir a velocidade, que ſe lhes ſuppõe; porque como hum movel deſcendo adquire em cada inſtante novo gráo de velocidade, não ha velocidade, por muito grande que ſe poſſa imaginar, a qual não poſſa ter o meſmo movel, pois ſe póde ſuppôr qualquer que quizermos a altura, de que cahio.

PROPOSIÇÃO VIII.

Problema.

991 Conhecendo a linha da projecção AB, que se suppõe parallela ao horizonte, e a linha da descida BF da parabola AEF descripta por qualquer movel, pedem-me a altura, de que deve cahir o movel, para ter no fim da sua quéda huma velocidade, com que possa correr a linha AB com hum movimento uniforme, no mesmo tempo que a sua gravidade a obriga a andar a linha BF, ou AG.

Figura 8.

Solução.

Seja x a altura, de que deve cahir o corpo, para ter a velocidade pedida: seja F o tempo, que o corpo gasta em andar BF em virtude da sua gravidade: faça-se mais $BF = a$, $AB = 2b$, a velocidade da gravidade communicada ao corpo no fim da quéda por BF he tal, que lhe faz correr $2a$, ou 2BF no tempo F *; a velocidade, que deve ser adquirida pela altura incognita x, he tal, que faz andar no mesmo tempo F ao mes-

* Numer. 962.

meſmo corpo o eſpaço $2b$, ou AB: além diſſo * as velocidades adquiridas em differentes alturas são como as raizes quadradas deſtas alturas, que são a, e x: logo teremos eſta proporção $\sqrt{a} : \sqrt{x} :: 2a :: 2b :: a : b$, do que ſe ſegue $a\sqrt{x} = b\sqrt{a}$; e quadrando tudo, ſerá $a^2x = b^2a$, do que ſe ſegue $x = \frac{b^2}{a}$: logo teremos eſta proporção $a : b :: b : x$. *Numer. 959.

Para ter eſte valor de x do ponto D no meio da linha AB, ſe tire huma linha GD; do meſmo ponto D ſe levante CD perpendicular a GD, até encontrar a linha AG prolongada para C, digo que a linha AC he igual a x, iſto he, que eſta linha he a altura, de que deve cahir o corpo para ter a velocidade, que ſe pede; porque por ſerem os triangulos GAD, DAC ſemelhantes, ſerá AG a : AD b :: AD b : AC $\frac{bb}{a} = x$. *O Q. S. Q. D.*

992 Do Problema precedente ſe ſegue, que ſe ſe quer ſaber de que altura deve cahir o movel para adquirir huma velocidade capaz de lhe fazer andar a linha obliqua GD em hum tem-

po igual á metade do que teria gaſto em cahir por AG, faça-ſe a meſma altura que ſe não conhece $=y$, a linha GD conhecida $=d$, a altura AG $=a$, e digamos: a velocidade adquirida pela altura AG he para a velocidade adquirida pela altura y, como o eſpaço AG, que ella faz correr uniformemente em metade do tempo da deſcida por AG, he ao eſpaço GD, que ſe deve correr no meſmo tempo pela hypotheſi; e como as velocidades são como as raizes quadradas das alturas, teremos eſta proporção $\sqrt{a}:\sqrt{y}::a:d$; logo quadrando tudo, teremos $a^2:d^2::a:y$; logo $y=\frac{ad^2}{aa}$, ou $\frac{dd}{a}$: logo a linha GC he a altura, que ſe pede, porque por ſerem ſemelhantes os triangulos rectangulos GAD, GDC, teremos AG a: GD d:: DG d: GC $\frac{dd}{a}$. *O Q. S. Q. D.*

COROLLARIO.

993 Porque o movel com a velocidade adquirida na deſcida GC corre GD em metade do tempo, que gaſta em correr AG deſcendo, em hum tempo

Figura 9.

po

po quadruplo correrá huma linha quadrupla GE: logo em tempo duplo do tempo da descida por AG andará com hum movimento uniforme á linha GE quadrupla de GD; mas no mesmo tempo duplo do da descida por AG a gravidade fará andar hum espaço quadruplo de AG, contando do primeiro instante da descida; do que se segue que se hum movel he impellido por huma direcção obliqua GD com a força adquirida pelo diametro CG, correrá com hum movimento uniforme á linha GE quadrupla de GD, no mesmo tempo que a gravidade lhe faria correr com hum movimento accelerado a vertical EF tambem quadrupla de GA, o que he evidente do que acabamos de dizer, e por serem semelhantes os triangulos GAD, e GEN.

DEFINIÇÃO.

994 Qualquer linha, como CG, andada por hum movel para adquirir hum gráo de força capaz de lhe fazer descrever huma parabola determinada, se chama linha da altura.

PRO-

PROPOSIÇÃO IX.

Theorema.

995 O parametro de huma parabola descripta por hum movel he quadruplo da linha da altura.

Demonstração.

Este Problema comprehende dous casos, porque o corpo ou he impellido horizontalmente, como na Figura 8, ou por huma linha obliqua ao horizonte, como na Figura 9. Vamos demonstrar hum, e outro caso.

1. Se o movel he impellido horizontalmente pela linha AB, a ordenada GF he igual á linha AB, e por consequencia igual a 2AD: pela propriedade da parabola o quadrado de GF he igual ao producto da sua abcisa AG pelo parametro, assim teremos GF^2, ou $4AD^2 = AG \times 4AC$; mas por serem semelhantes os triangulos DAG, CAD, teremos $AG : AD :: AD : AC$; logo $AD^2 = AG \times AC$: logo $4AD^2$, ou $GF^2 = AG \times 4AC$: logo o quadruplo de AC, ou da linha da altura he igual ao parametro. *O Q. S. Q. D.*

Figura 8.

2. Se

2. Se a linha da projecção GE he obliqua ao horizonte, se notará logo, que sendo a linha de projecção EG tangente á parabola descripta de G, a linha HI parallela a GB será ordenada ao diametro GI; e como pela hypothesi GB he dupla de GD, $IH = GB$ será tambem dupla de GD; mas por serem os triangulos GAD, GDC semelhantes, teremos $AG : GD :: GD : GC$: logo $GD^2 = GA \times GC$, e por consequencia $4GD^2$, ou $IH^2 = GA \times 4GC = GI \times 4GC$, porque $GA = GI$. *O Q. S. Q. D.* Figura 9.

COROLLARIO I.

996 Segue-se daqui que se se levanta sobre a linha de projecção GE huma perpendicular EM, que se vá encontrar á altura GC continuada para M, será MG o parametro do diametro GK; porque sendo semelhantes os triangulos GCD, GME, será $GD : GE :: GC : GM$; logo sendo GE quadruplo de GD, será tambem GM quadruplo de GC.

Co-

Corollario II.

997 Segue-ſe tambem daqui que conhecido o parametro de huma parabola deſcripta por hum movel, ſe conhecerá facilmente de que altura ha de cahir o movel para ter huma força capaz de lhe fazer deſcrever a parabola, á qual pertence o parametro, porque eſta altura ſerá ſempre a quarta parte do parametro.

Corollario III.

998 Como com o meſmo parametro ſe podem deſcrever huma infinidade de parabolas differentes, quando o angulo das ordenadas com o diametro não he determinado, ſegue-ſe que hum corpo impellido com a meſma violencia póde deſcrever huma infinidade de differentes parabolas, e eſtas curvas varião, conforme a inclinação da linha de projecção com o horizonte.

Corollario IV.

999 Segue-ſe tambem daqui que as
Figura 9. trez linhas, o parametro MG, a linha

da

da posição GE, e a linha da gravidade EF estão em progressão geometrica; porque por serem semelhantes os triangulos MGE, EGF, teremos MG : GE :: GE : EF; logo conhecidas quaesquer duas linhas, se póde achar a terceira.

COROLLARIO V.

1000 Sendo as linhas da gravidade perpendiculares ao horizonte, formarão com as linhas de projecção GE triangulos rectangulos GEF, que serão Figura 10.
semelhantes aos triangulos GME, os quaes todos terão por hypothenusa o parametro MG; do que se segue que todas as linhas de projecção possiveis a huma potencia são comprehendidas no semicirculo GEM.

OBSERVAÇÃO.

1001 Deve-se cuidar em comprehender bem a razão, por que se suppoz que a força da projecção he tal, que faz correr o movel com hum movimento uniforme á linha GD em me- Figura 9.
tade do tempo, que o corpo gastaria em andar a linha AG. Para o que he de

no-

notar que no tempo que o movel corre GB, a gravidade, que obra continuamente, o faz correr o efpaço BH =AG: tambem no tempo, que a força da projecção lhe teria feito andar a linha BE=BG, a gravidade lhe faria correr EF quadrupla de AG, e por confequencia fe achará no ponto F fobre a horizontal GF.

COROLLARIO.

1002 Segue-fe daqui que em hum tempo duplo da defcida por AG, o corpo impellido pela linha GD com a velocidade adquirida por GC defcreverá a parabola GHF, e que a velocidade que tem, quando eftá em F, he igual á que teria adquirido por AG, porque he claro que o vertice H da parabola defcripta eftá no meio da linha BL dupla de AG.

PROPOSIÇÃO X.

PROBLEMA.

1003 Dada a linha da terminação GF, e o angulo MGE formado pelo parametro MG, e a direcção GE do mor-

Figura 10. e 11.

morteiro, e o angulo EGF formado pela direcção do morteiro, e a linha da terminação GF, achar o parametro MG, a linha de projecção GE, e a linha da gravidade EF.

SOLUÇÃO.

Sendo as linhas MG, EF parallelas, os angulos alternos MGE, e GEF são iguaes; e conhecendo-se hum, se conhecerá tambem o outro; e assim se se conhece no triangulo GEF o lado GF com os angulos EGF, e GEF, se achará pela Trigonometria a linha da projecção GE, e a linha da queda EF; mas EF : EG : : EG : GM *: logo buscando-se huma terceira proporcional, a linha da queda, e a linha da projecção será o parametro.

* Numer. 999.

COROLLARIO.

1004 Segue-se daqui que se se lança huma bomba com hum morteiro com qualquer inclinação para achar o parametro de todas as parabolas descriptas pelo mesmo movel, impellido sempre com a mesma força, basta observar o an-

angulo da inclinação do morteiro, e medir a diſtancia, em que a bomba cahir, porque o reſto ſe acha depois facilmente.

Supponhamos por exemplo que temos medido o angulo EGF da inclinação do morteiro com a linha da terminação GF, que nós ſupporemos de 500 braças, e que ſe tem tambem medido
Figura 12. e 13. o angulo MGE, que faz a meſma linha de direcção com a vertical MG, ou o parametro: logo conhecer-ſe-hão trez couſas no triangulo EGF, a ſaber, a linha GF, o angulo EGF, e o angulo GEF igual ao ſeu alterno MGE: logo conhecer-ſe-hão as linhas EF, que he a linha da gravidade, e EG, que he a da direcção, e por conſequencia acharſe-ha o parametro com eſta proporção EF : EG :: EG : MG; aſſim ſaber-ſe-ha, tomando o quarto do parametro, de que altura deve cahir o corpo para adquirir huma força igual á que lhe communicou a polvora, de que ſe trata *; além diſſo com o meſmo parametro ſe podem deſcrever infinidade de parabolas, conforme o angulo das ordenadas

* Numer. 995.

ao

ao diametro : logo eſtas obſervações baſtão para determinar o parametro.

ADVERTENCIA.

Vamos dar ſoluções Geometricas, e Analyticas de muitos Problemas, que dizem reſpeito ao modo de lançar as bombas, para podermos fazer o meſmo na pratica com hum inſtrumento univerſal, cuja conſtrucção, e uſo depende do que vamos tratar; e aſſim os que eſtudão eſte Tratado não devem inquietar-ſe por lhes não enſinarem logo a pratica, porque no que ſe ſegue encontrarão com que ſatisfação o ſeu goſto.

PROPOSIÇÃO XI.

PROBLEMA.

1005 Achar a elevação, que ſe deve dar ao morteiro, para lançar huma bomba em hum certo ſitio, com a condição que ſeja no nivel da bateria. Figura 13.

SOLUÇÃO.

Suppondo o morteiro no ponto G, e ſendo o ponto F o a que ſe quer lançar Figura 14.

çar a bomba, ſupponhamos que a linha GM, levantada perpendicularmente ſobre GF, he o parametro de projecção. Iſto ſuppoſto, divida-ſe em dous igualmente no ponto A, e deſte ponto como centro ſe deſcreva hum ſemicirculo, e ſobre o ponto F da linha horizontal GH ſe levante a perpendicular FE, que cortará o ſemicirculo nos pontos E. Ora ſe ſe tira do ponto G aos pontos E as linhas GE, digo que apontado o morteiro por huma, ou outra deſtas duas direcções, lançará a bomba no ponto F.

Demonstração.

* Numer. 999. Já moſtrámos * que o parametro, a linha da projecção, a linha da queda erão trez proporcionaes; aſſim para provar que a linha GE he a linha da projecção, baſta provar que he meia proporcional entre o parametro MG, e a linha da queda correſpondente EF. Ora ſe ſe tirão as linhas ME, ſerão ſemelhantes os triangulos MGE, GEF, porque tem cada hum hum angulo recto, e os angulos GME, e EGF tem

por

por medida cada hum metade do arco GIE, e conſequentemente ſerá MG: GE::GE:EF.

Porém ſe a perpendicular levantada ſobre o ponto F em vez de cortar o circulo o tocaſſe ſómente no ponto E, digo que ainda a linha GE ſerá a inclinação do morteiro; porque por ſerem ſemelhantes os triangulos MGE, e GEF, teremos MG:GE::GE:EF. Figura 15.

Se ſe ſuppõe finalmente que o ponto dado ſeja em C, e que a perpendicular CD não encontra o circulo, digo que o Problema he impoſſivel; porque GD, que ſe ſuppõe a linha da projecção, não póde ſer meia proporcional entre o parametro MG, e a linha da gravidade DC, porque para iſto ſeria preciſo que foſſe hum lado commum aos dous triangulos ſemelhantes MGE, e GDC, o que não póde ſucceder em quanto o ponto D eſtiver fóra do circulo.

COROLLARIO I.

1006 Segue-ſe daqui que quando a perpendicular EF córta o circulo, o Pro-

Problema tem duas ſoluções, e conſequentemente ſe póde lançar huma bomba a hum meſmo lugar por dous differentes caminhos; porque ſendo os arcos ME, e GE iguaes, quando o morteiro ſe apontou com hum gráo de elevação por hum angulo, que ſeja igualmente maior, ou menor que o quarto do circulo, a bomba irá ſempre igualmente longe; mas como os angulos MGE não tem por medida mais que as metades dos arcos ME, e a elevação do morteiro ſe conſidera ſempre com a vertical MG, e as linhas da projecção GE, vê-ſe que eſte angulo ſerá ſempre menor que recto, e que ſe poderá apontar o morteiro igualmente para ſima, como para baixo de 45 gráos, para lançar a bomba no meſmo lugar.

Corollario II.

1007 Como o Problema he ſempre poſſivel, ou a linha EF córte, ou toque o circulo, vê-ſe que quando elle tocar o circulo, a bomba ſerá lançada o mais longe que he poſſivel com a meſma carga, porque a linha da termina-

ção

ção GF he a maior de todas as que ſe podem comprehender entre o parametro, e a linha da queda. Ora como o angulo MGE tem por medida metade do arco ME, póde-ſe dizer que todas as bombas, que ſe atirarem com a meſma carga, a que irá mais longe ſerá a que ſe atirar com angulo de 45 gráos.

PROPOSIÇÃO XII.

PROBLEMA.

1008 Achar a elevação, que ſe deve dar a hum morteiro, para lançar a bomba a huma diſtancia dada, ſuppondo que a bateria não he de nivel com o ſitio, que ſe quer bombear, iſto he, ſuppondo que eſte lugar he muito mais elevado, ou mais baixo que a bateria.

SOLUÇÃO.

Sendo o ponto G o lugar do morteiro, e o ponto F o a que ſe quer deitar a bomba, o qual he mais elevado que a bateria, como na Figura 16, ou mais baixo que a bateria, como na Figura 17, levante-ſe ſobre a linha horizontal GH a perpendicular GM igual ao parametro da carga do morteiro, porque ſupponho que ſe tem feito prova para ſe achar eſte parametro, como ſe diſſe no Artigo 999: depois levante-ſe a perpendicular GA ſobre a linha do plano GL, e far-ſe-ha o angulo AMG igual ao angulo AGM, e do ponto A como centro ſe deſcreverá a porção de circulo MEG, do ponto dado F ſe tire FE parallela ao parametro MG; e cortando eſta linha o circulo nos pontos E, digo que ſe ſe tirão as linhas GE determinarão a elevação, que ſe deve dar ao morteiro para lançar a bomba no ponto F em hum, e outro caſo.

Demonstração.

Sendo MG o parametro, GE a linha da projecção, e EF a linha da gravidade, devemos provar, como antes, que he MG:GE::GE:EF. Os triangulos MGE, GEF são ſemelhantes; porque como GF he perpendicular ao raio AG, o angulo EGF ſerá igual ao angulo GME, pois tem cada hum por me-

medida metade do arco GIE: além disſo por ſerem MG, e EF parallelas, ſerão os angulos alternos MGE, GEF iguaes: logo ſerá MG:GE::GE:EF, o que moſtra que o angulo MGE he o que deve fazer o morteiro com a vertical para lançar a bomba ao ponto F. *O Q. S. Q. D.*

COROLLARIO.

1009 Nos dous caſos do Problema precedente ſuccederá o meſmo que notámos * a reſpeito das bombas lançadas a hum ſitio de nivel com a bateria, e he, que ſe a parallela EF toca o circulo em lugar de o cortar, o alcance da bomba ſerá o maior de todos os que póde ter com a meſma carga; e ſe a parallela EF não toca, nem córta o circulo, ſeria o Problema impoſſivel, o que fica baſtantemente explicado *, e não ſe neceſſita moſtrar aqui a razão.

* Numer. 1006.

* Numer. 1005.

REFLEXÃO.

1010 Devo advertir que na pratica ordinaria de lançar as bombas ſe aponta ſempre o morteiro com o angulo, que dá a maior linha da gravidade EF, para que a bomba cahindo de mais alto adquira com o ſeu pezo hum gráo de força capaz de fazer maior ruina nos edificios, onde cahe; mas quando eſtamos perto de alguma obra de fortificação, que ſe quer bombear, para ſe poder melhor atacar, ſe aponta o morteiro com o angulo da menor linha da gravidade EF, para que indo a bomba pelo caminho mais curto, não dê tempo áquelles, que eſtão na obra de ſe livrarem dos ſeus eſtilhaſſos.

PROPOSIÇÃO XIII.

Problema.

1011 Dada a linha da terminação GF, e o angulo, que ella faz com a vertical GM, e a carga do morteiro, achar o angulo da elevação, por que ſe deve apontar o morteiro, para que Figura 17. a bala vá ao ponto F.

Solução.

Chame-ſe *a* a linha da terminação GF: como a carga do morteiro tambem

bem he conhecida, e além diſſo ſe ſuppõe determinada pela experiencia a força, que huma ſemelhante carga póde dar á bomba, fica conhecido o parametro da parabola, que deve deſcrever, porque eſte meſmo parametro he quadruplo da altura, de que deve cahir o movel, para adquirir huma força igual á que recebe de polvora. Seja p eſte parametro: como o angulo MGF da vertical com a linha da terminação GF he conhecido, conhecer-ſe-ha tambem o angulo deſta linha com a horizontal: logo no triangulo rectangulo GHF conhecer-ſe-hão os lados HF, GH: chamemos HF d, ſerá GH $\sqrt{aa-dd}$; em fim chame-ſe x a linha EH, que determina o angulo da inclinação: iſto ſuppoſto, he claro que por ſer o triangulo GHE rectangulo, a linha da projecção GE he $\sqrt{aa-dd+xx}$: além diſſo a linha da queda EF $= d+x$; e como eſtas duas linhas eſtão em progreſsão, como parametro *, teremos EF : GE :: GE : GM, ou $d+x : \sqrt{aa-dd+xx} :: \sqrt{aa-dd+xx} : p$, do que ſe tira $px+pd=aa-dd+xx$; e reſolvendo

* Num. 999.

do eſta equação conforme as regras ordinarias, teremos logo $xx - px = dd + pd - aa$, e depois $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{dd + pd + \frac{1}{4}pp - aa}$. Vamos moſtrar que eſtes dous valores de x na formula Algebraica são preciſamente os meſmos que os que havemos determinado geometricamente.

Nas conſtrucções precedentes ſe levantou logo ſobre a linha GF huma perpendicular indefinita GA: no ponto B meio do parametro MG ſe levantou outra perpendicular BA, que córta a primeira em A: do ponto A, como centro, com o intervallo AG ſe deſcreveo huma porção de circulo, que determinou na vertical FE os pontos E, e E, que dão duas differentes inclinações para lançar a bomba a F; aſſim devemos moſtrar que das duas linhas EF, EF a menor he $\frac{1}{2}p - \sqrt{dd + pd + \frac{1}{4}pp - aa}$, e a maior $\frac{1}{2}p + \sqrt{dd + pd + \frac{1}{4}pp - aa}$ pela conſtrucção os triangulos GHF, GBA são ſemelhantes: logo

go

go GH:HF::GB:BA, ou analyticamente $\sqrt{aa-dd}:d::\frac{p}{2}:\frac{pd}{2\sqrt{aa-dd}}$: logo o raio AG será igual $\sqrt{\frac{p^2d^2}{4a^2-4d^2}+\frac{pp}{4}}$. Para achar depois EH x, determine-se AO parallela a GB, e terminada em O na linha DE parallela a GH: OE = DE − DO = GH − GN, ou GH − AB, e analyticamente OE $=\sqrt{aa-dd}-\frac{pd}{2\sqrt{aa-dd}}$; e por ser o triangulo AOE rectangulo, será AO $=\sqrt{AE^2 \cdot OE^2}$: logo a expressão Algebraica de AO será $\sqrt{\frac{p^2d^2}{4aa-4dd}+\frac{pp}{4}-aa+dd-\frac{p^2d^2}{4aa-4dd}+pd}$, o que se reduz a $\sqrt{dd+pd+\frac{pp}{4}-aa}$: logo EH x, ou BG − BD $=\frac{1}{2}p-\sqrt{dd+pd+\frac{1}{4}pp-aa}$, do que evidentemente se segue que a construcção geometrica he perfeitamente a mesma que a analytica, e que nos dá as mesmas soluções.

Co-

COROLLARIO I.

1012 Segue-ſe daqui, como já notámos, que o Problema terá ſempre duas ſoluções, em quanto a radical $\sqrt{dd+pd+\frac{1}{4}pp-aa}$ for poſitiva. 2°. He evidente que no caſo, em que $\frac{1}{4}pp+pd+dd=aa$, o Problema não póde ter mais que huma ſolução; e não he menos evidente que ſendo então a linha EF, FI toca o circulo unicamente no ponto I, porque a expreſsão $dd+pd+\frac{1}{4}pp$ he o quadrado de $\frac{1}{2}p+d$, que he igual a FI, e que ſó no caſo, em que $\frac{1}{2}p+d=a$ eſta linha ſerá tangente. Em fim ſe $\frac{1}{4}pp+pd+dd$ he maior que aa, o Problema he impoſſivel, e ſe concluirá que ſe deve augmentar a carga do morteiro.

COROLLARIO II.

1013 Se a linha da terminação GF em lugar de ſer por baixo o horizonte foſſe por ſima, a formula ſempre daria

a coa conhecer os angulos das inclinações, que ſe pedem, e baſtaria fazer FH $= d$, e a formula ſeria $x = \frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{1}{4} pp - dp + dd - aa}$, com a qual ſe deſcorreria do meſmo modo que com a primeira: a conſtrucção he a da Figura 16.

COROLLARIO III.

1014 Em fim ſe a linha da terminação he horizontal, tirar-ſe-ha tambem deſta formula a conſtrucção da primeira figura, fazendo $d = 0$, de que ſe tira $x = \frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{1}{4} pp - aa}$, aſſim a formula, que enſinamos, ſerve para todos os caſos poſſiveis.

COROLLARIO IV.

1015 Notar-ſe-ha tambem que em todas as poſições poſſiveis da linha da terminação com a linha horizontal a maior força do impulſo ſerá ſempre o que he determinado por $\frac{1}{4} pp = aa$, ou por $\frac{1}{4} pp + dd = aa + pd$, ou por $aa = \frac{1}{4} pp + pd + dd$, porque em todos eſ- Figura 15. 16. e 17.

tes

tes casos a linha da gravidade he tangente á porção de circulo GIM, e esta tangente determina o maior alcance.

PROPOSIÇÃO XIV.

Problema.

1016 Construir hum instrumento universal para lançar as bombas em toda a casta de planos.

Faça-se hum circulo de cobre, ou de outra qualquer materia solida, e liza, e a sua circumferencia se divida em 360 partes iguaes, ou gráos: applique-se a hum dos seus pontos G huma regoa fi-
Figura 18. xa GN, que seja igual ao seu diametro GB, e que o toque no ponto G: divida-se esta regoa em grande numero de partes iguaes, como v. gr. em 200: prenda-se hum prumo D em hum fio, de sorte com tudo que o fio possa mover-se pela regoa, chegando-se, ou affastando-se do ponto G. O uso deste instrumento se explicará nos Problemas seguintes.

Uso

Uso do instrumento universal para lançar as bombas.

PROPOSIÇÃO XV.

PROBLEMA.

1017 Achar por meio do instrumento que altura se deve dar a hum morteiro para lançar huma bomba em qualquer distancia dada, supposondo que o lugar, em que se quer lançar esteja de nivel com a bateria.

Para resolver este Problema he preciso fazer primeiro huma prova, lançando huma bomba com a carga, que se quer atirar, que será por exemplo de dous arrateis de polvora; e supponda que a bomba cahio distante 400 braças com qualquer angulo por exemplo de 30 gráos, busque-se o parametro; assim sendo o angulo MGE de 30 gráos, Figura II.
o angulo GEF será tambem de 30 gráos, porque a linha da gravidade he parallela ao parametro MG; e como o angulo EGF he de 60 gráos, e se conhece a linha FG de 400 braças, achar-se-ha pela Trigonometria que a linha da gra-

gravidade EF he de 693 braças, e a linha da projecção GE de 800 braças, e o valor do parametro GM ſe achará de 923 braças, buſcando huma terceira proporcional a 693, e 800 braças. Iſto ſuppoſto, ſe ſe quer ſaber a que gráos de elevação ſe deve apontar o morteiro para lançar huma bomba a 250 braças com huma carga de dous arrateis de polvora, faça-ſe huma regra de 3, dizendo: ſe 923 braças, valor do parametro, dão 250, diſtancia
Figura 19. dada, quanto darão 200, valor do diametro do inſtrumento? iſto he, valor da linha NG, por numero das partes, que ſe buſca, e ſe acha ſer 54.

Preſentemente ponha-ſe a regoa NG perfeitamente a nivel, e mova-ſe o fio KD até o numero 54, e cortará a circumferencia do circulo nos dous pontos C, e C, o que denota que o Problema tem duas ſoluções, e que ſe deve apontar por hum angulo, que tenha metade do numero dos gráos comprehendidos nos arcos GC. Ora como o maior he de 148 gráos, e o menor de 32, tomando ſuas metades,

que

que são 74, e 16, o morteiro apontado por qualquer destas elevações lançará a bomba na distancia proposta.

DEMONSTRAÇÃO.

Para facilitar a demonstração da pratica precedente supponhamos que a linha GF he a distancia dada, isto he, que vale 250 braças, e que a perpendicular GM he o parametro, que se achou. Ora se se descreve o semicirculo MEG, e se tira FE parallela a GM, e as linhas GE aos pontos, em que esta parallela córta o circulo, teremos os angulos MGE da elevação do morteiro para lançar a bomba no ponto F, como já demonstrámos. * Figura 19.

* Numer. 1000.

Presentemente imagine-se a regoa do instrumento alinhada com a linha da terminação GF, e que os diametros MG, GB estejão tambem na mesma linha, e que o fio KD seja tambem no lugar, que se suppoz, isto he em 54, teremos, conforme a pratica do Problema, GM : GF :: GB : GK, porque o diametro GB se póde aqui tomar pelo comprimento da regoa GN, porque es-

tas

tas duas linhas são iguaes. Isto supposto, por causa da proporção a perpendicular KD cortará o semicirculo GCB do mesmo modo que a perpendicular FE córta o semicirculo MEG; assim as linhas EG, e CG fazem huma só linha EC, assim como as linhas MG, e BG, e os arcos ME serão do mesmo numero de gráos, que os arcos CB, ou CG, que são os mesmos, e serão estes arcos de 32 gráos; e como os angulos MGE tem por medida metade dos arcos ME, valerão só 16 gráos, que he a elevação, que se deve dar ao morteiro, se se quer apontar por baixo de 45 gráos; assim se vê que com este instrumento se acha o mesmo que se achou antes * com o semicirculo MEG. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 1008.

COROLLARIO.

Figura 20. 1018 Segue-se daqui que se o fio K D em lugar de cortar o semicirculo GCB o tocasse só no ponto C, o morteiro apontado por metade do arco GC, que he de 45 gráos, lançaria a bomba o mais longe que he possivel com a mesma carga, porque neste caso a linha EF to-

tocaria tambem o ſemicirculo MEG; em fim ſe o fio KD não tocaſſe, nem cortaſſe o circulo, o Problema ſeria impoſſivel, porque neſte caſo a linha EF não póde tocar, nem menos cortar o ſemicirculo MEG.

PROPOSIÇÃO XVI.

PROBLEMA.

1019 Achar a elevação, que ſe deve dar ao morteiro, para lançar huma bomba em huma diſtancia dada, ſuppondo o lugar, em que ſe quer lançar a bomba, mais alto, ou mais baixo que a bateria, ſervindo-nos para iſto do inſtrumento univerſal.

Suppondo que do lugar G, em que ſe ſuppõe eſtar huma bateria de morteiros, ſe quer bombear o lugar F, mais elevado, ou mais baixo que o plano da bateria, buſque-ſe primeiro pela Trigonometria a diſtancia GH, que he a amplitude da parabola; e conhecendo o parametro da carga, de que ſe quer uſar, e ſuppondo ſer o meſmo do antecedente Problema, iſto he de 923, ſen- Figura 21. e 22.

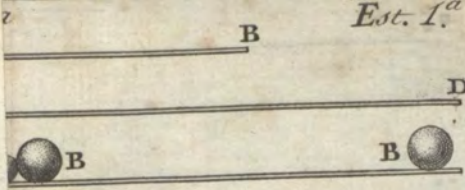
ſendo a carga a meſma de dous arrateis, diremos: o parametro he para a diſtancia GH, como o comprimento GN da regoa, dividida em 200 partes, ao comprimento GK, que dará o numero deſtas partes. Ora ſuppondo que ſe acharão 60 partes, ſe fará mover o fio KD para o numero 60, em que ſe fará firme: depois ſe porá o circulo do inſtrumento ſobre hum lugar, em que poſſa ficar quieto; e poſto bem verticalmente, ſe olhará pela regoa NG o lugar F, e o fio KD do inſtrumento cortará o circulo nos pontos C, em que determinará os arcos CG; e tomando metade do numero dos gráos conteúdos em hum, ou outro deſtes arcos, teremos o valor do angulo, que deve fazer o morteiro com a vertical para lançar a bomba ao ponto F.

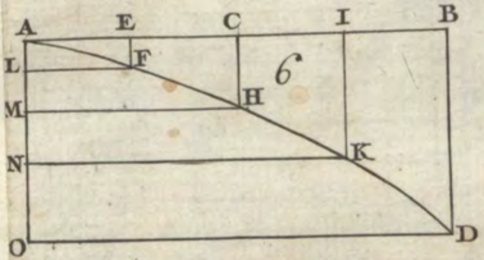
Demonstração.

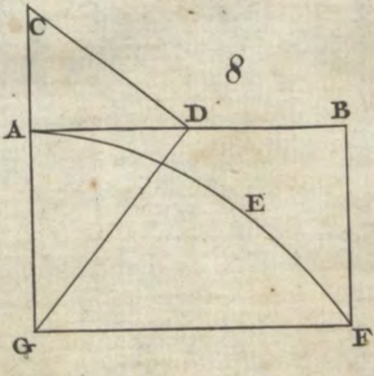
Tendo levantado ſobre a linha horizontal GH a perpendicular GM igual ao parametro, e ſobre o plano GF a perpendicular GA, far-ſe-ha o angulo AMG igual ao angulo AGM, e do ponto

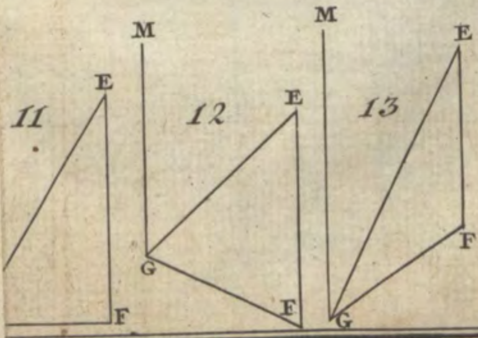
Figura 23. e 24.

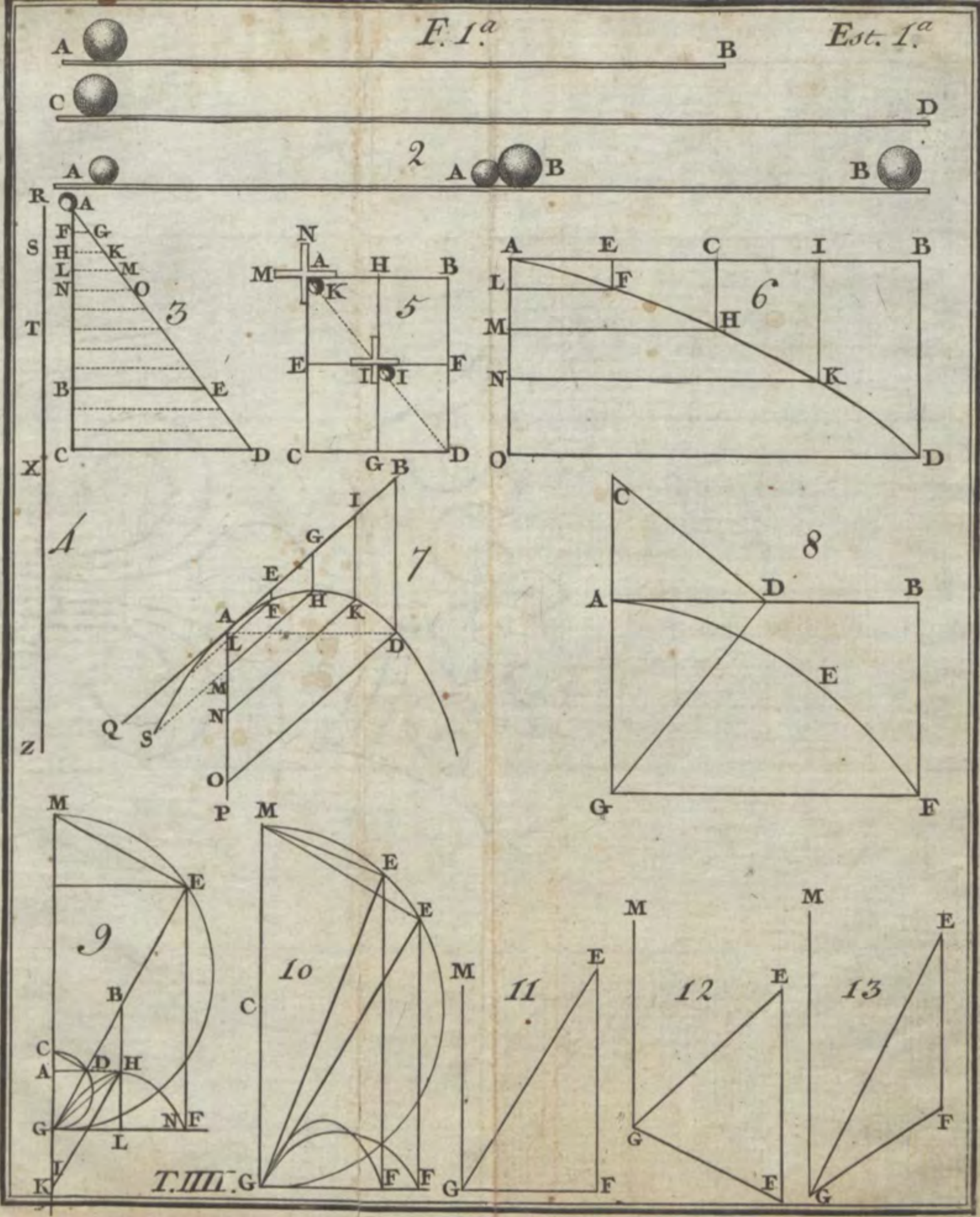
to

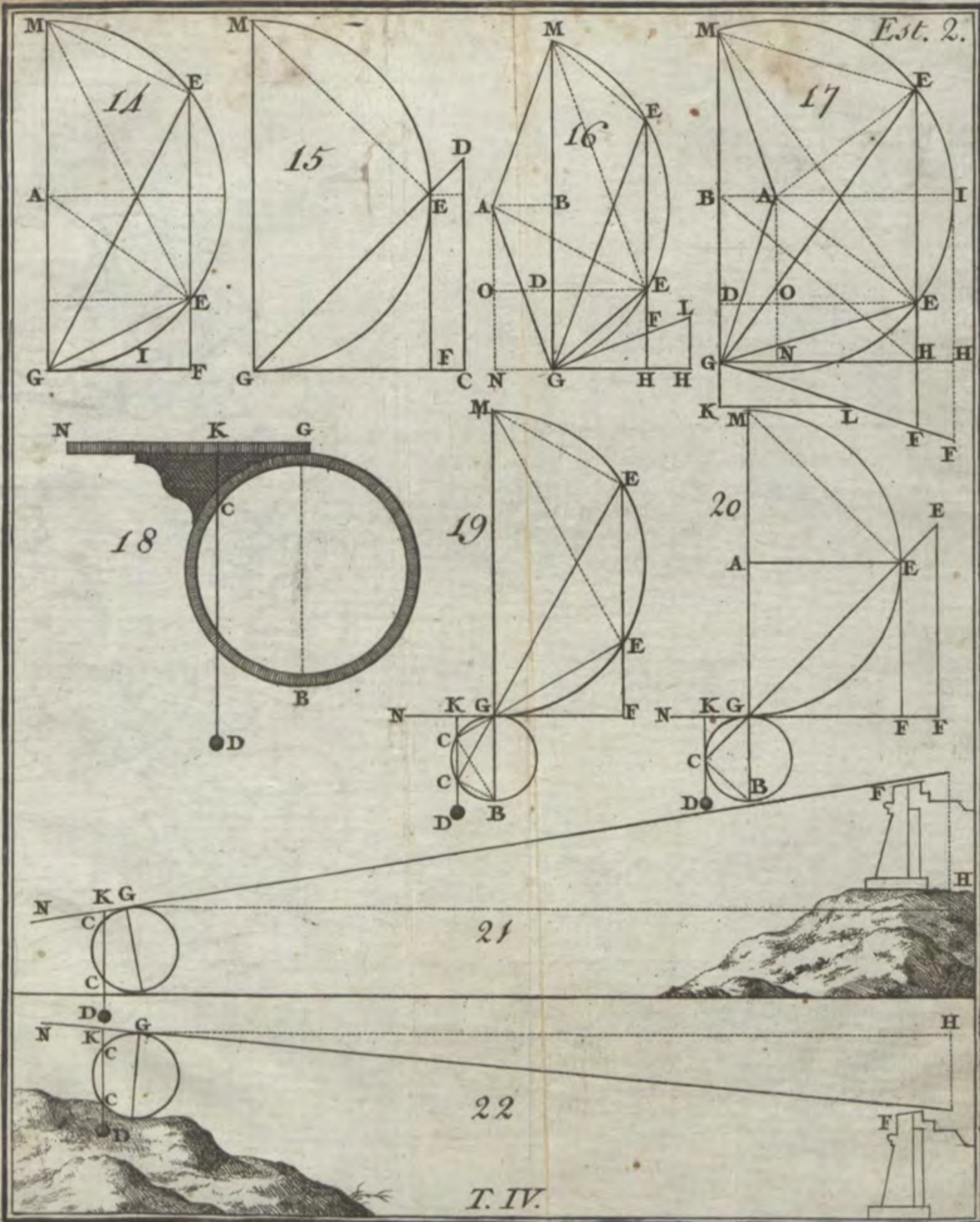

B
D
B
B


A
E
C
I
B
L
F
6
M
H
N
K
O
D


C
8
A
D
B
E
G
F


11
E
F
M
12
E
G
F
M
13
E
F
G


F. 1.ª
Est. 1.ª
T. IIII.


Est. 2.
14
15
16
17
18
19
20
21
22
T. IV.

to A ſe deſcreverá huma porção de circulo MEG, e do ponto F ſe tirará EF parallela a GM, que cortará o circulo nos pontos E, E, aos quaes tirando as linhas GE, teremos as direcções GE, que ſe devem dar ao morteiro, para lançar huma bomba no lugar F *. Ora ſe ſe ſuppõe o inſtrumento de modo que a regoa NG ſeja alinhada com a linha GF, e o diametro GB com o diametro GO, e que o fio KD ſeja ſempre no lugar, em que ſe poz na operação, ver-ſe-ha que o ſemicirculo GCB he cortado pela perpendicular KD do meſmo modo que o ſemicirculo OEG pela perpendicular EF, o que ſe prova baſtantemente, ſem que ſeja preciſo repetir o que ſe diſſe em outra parte a eſte reſpeito.

* Numer. 1008.

ADVERTENCIA.

Como a Trigonometria póde ſervir para lançar as bombas por outro methodo differente do que acabamos de enſinar, darei duas propoſições, de que ſe póde uſar nas occaſiões, em que não houverem os inſtrumentos, de que acabamos de fallar. He verdade que tudo o que vamos enſinar não póde ter lugar, ſenão quando as bombas ſe querem lançar a hum ſitio, que fica de nivel com a bateria; mas como iſto he o mais ordinario, não me cancei em dar hum methodo para as lançar em ſitio, que foſſe mais alto, ou mais baixo que a bateria, porque eſtas operações por Trigonometria me parecêrão demaziadamente compridas. Deve-ſe notar que nas propoſições ſeguintes ſuppomos que o morteiro faz o ſeu angulo de elevação com a linha horizontal, ainda que na pratica, ſe ſe quizer, o póde formar com a vertical.

PROPOSIÇÃO XVII.

Theorema.

1020 Se ſe lanção duas bombas com a meſma carga, e differentes elevações de morteiro, digo que o alcance da primeira bomba ſerá ao alcance da ſegunda, como o ſeno de hum angulo duplo do da elevação do morteiro para a primeira bomba he ao ſeno do angulo duplo do da elevação para a ſegunda.

Ten-

Tendo levantado ſobre o extremo B da linha horizontal BP a perpendicular BN, ſe dividirá em duas igualmente no ponto M para deſcrever o ſemicirculo NGB: depois tirando as linhas BG, e BK para marcar as duas inclinações differentes do morteiro, ſe continuarão de modo que KA ſeja igual a KB, e que GD ſeja igual a BG: dos extremos A, e D ſe abaixarão as perpendiculares AC, e DE ſobre a linha horizontal BP; ſe pelo ponto K ſe tira a linha IL parallela a BC, teremos IK igual a KL, e AL igual a LC, por ſerem IB, e AC parallelas, aſſim IK ſerá metade de BC; e tirando tambem pelo ponto G a linha FH parallela a BE, teremos ainda FG igual a GH, e por conſequencia a linha FG ſerá metade de BE. Figura 25.

DEMONSTRAÇÃO.

Tendo o angulo DBE por medida metade do arco GOB, ſendo a linha GF ſeno do angulo GMB, ſerá o ſeno do angulo duplo do angulo DBE; e tendo o meſmo angulo ABC por medida metade do arco KGB, e ſendo a linha

KI o ſeno deſte arco, ou do ſeu complemento, que he o meſmo, ſerá o ſeno de hum angulo duplo do angulo ABC: logo ſendo a linha BC dupla de IK, e a linha BE dupla de FG, teremos BC:BE::IK:FG; porém ſe em lugar das meias amplitudes BC a BE ſe tomão as inteiras BQ, e BP, iſto he o inteiro alcance de ambas as bombas, teremos BQ alcance da primeira a BP alcance da ſegunda, como IK ſeno do angulo duplo da elevação da primeira a FG, ſeno do duplo da elevação da ſegunda. *O Q. S. Q. D.*

APPLICAÇÃO.

1021 Para atirar as bombas com huma meſma carga á diſtancia, que queremos, devemos primeiro fazer a prova, e eſta prova ſe fará por exemplo carregando o morteiro com 2 arrateis de polvora, e apontando por 45 gráos, que he a elevação, em que o morteiro lançará o mais longe com eſta carga, como já temos dito. Depois de ter atirado a bomba, ſe medirá exactamente a diſtancia do morteiro ao lugar, em

que

que cahio, e ſupponho que ſe acharão 800 braças. Feito iſto, ſe ſe quer ſaber a elevação, que ſe deve dar ao morteiro, para lançar huma bomba a 500 braças, ſe fará huma regra de 3, da qual o primeiro termo ſeja 800 braças, que he a diſtancia conhecida, o ſegundo 500 braças, que he a diſtancia, a que ſe quer lançar a bomba, o terceiro o ſeno de hum angulo duplo de 45 gráos, que he 100000: feita a regra, ſe achará 62500, que he o ſeno do angulo duplo do que ſe buſca; e depois de ter achado na taboada, ſe verá que correſponde a 38 gráos, e 40 minutos, cuja metade he 19 gráos, e 20 minutos, que he o valor do angulo, que deve fazer o morteiro com o horizonte para lançar huma bomba a 500 braças.

PROPOSIÇÃO XVIII.

THEOREMA.

1022 Se ſe atirão duas bombas com differentes gráos de elevação com a meſma carga, haverá a meſma razão do ſeno do angulo duplo da primeira elevação, ao ſeno do duplo da ſegunda, que

que tem o alcance da primeira elevação ao alcance da ſegunda.

DEMONSTRAÇÃO.

Figura 25. Sendo A B C o angulo da primeira elevação do morteiro, e o angulo DBE o da ſegunda, teremos IK : FG : : BC : BE, ou tambem IK : FG : : BQ : BP, o que moſtra que IK, ſeno de hum angulo duplo do angulo ABC, he para a linha F G ſeno do angulo duplo do angulo DBC, como o primeiro alcance BQ he para o ſegundo BP.

APPLICAÇÃO.

1023 Por meio deſta propoſição ſe póde ſaber a que diſtancia do morteiro irá cahir huma bomba, tendo feito primeiro a prova, como já diſſemos.

Supponhamos logo que huma bomba ſe atirou por hum angulo de 40 gráos, e que foi lançada a 1000 braças com huma certa carga, pergunta-ſe a que diſtancia irá a bomba com a meſma carga, apontando o morteiro com a elevação de 25 gráos? para o que ſe faça huma regra de 3, da qual o primeiro ter-

termo ſeja o ſeno do duplo do angulo de 40 gráos, iſto he, o ſeno de 80 gráos, que he 98480; o ſegundo o ſeno de hum angulo duplo de 25 gráos, iſto he, o ſeno do angulo de 50 gráos, que he 76604; e o terceiro termo a diſtancia, em que a bomba foi lançada com elevação de 40 gráos, que ſuppuzemos de 1000 braças. Feita a regra, ſe achará por quarto termo 777 braças, que he a diſtancia do morteiro ao lugar, em que ha de cahir a bomba, ſendo atirada por hum angulo de 25 gráos.

PROPOSIÇÃO XIX.

PROBLEMA.

1024 Conhecendo a amplitude de huma parabola deſcripta por huma bomba, ſaber qual he a altura, a que ſubio a bomba ſobre o horizonte.

Servindo-nos da figura precedente, em que ſe ſuppoz que a linha BA denotava a elevação do morteiro, póde-ſe dizer que eſta linha he tangente da parabola BLQ, e que a ſubtangente AC ſerá dupla da abſciſa LC *, que aqui

* Numer. 614.

aqui he altura, a que ſubio a bomba com o angulo ABC: ſuppondo eſte angulo de 70 gráos, a amplitude BQ de 300 braças, a ſemiamplitude BC ſerá 150 braças: aſſim no triangulo ABC ſe conhece o angulo ABC de 70 gráos, o lado BC de 150 braças, e o angulo recto BCA, e pelo calculo ordinario da Trigonometria ſe achará o lado AC de 412 braças, cuja metade 206 braças ſerá o valor da linha LC, que he a altura, a que ſe levantou a bomba.

PROPOSIÇÃO XX.

Problema.

1025 Conhecida a altura, a que ſe elevou a bomba, ſaber o pezo, ou o gráo de movimento, que adquirio na deſcida pelo movimento accelerado.

Suppondo que huma bomba de 12 pollegadas cahe de 206 braças de altura, a ſua velocidade ſe expreſſará pela raiz quadrada da deſcida *, iſto he, pela raiz quadrada de 206, que he $14\frac{1}{3}$; iſto ſuppoſto, ſabe-ſe que a força, ou quan-

* Numer. 959.

quantidade de movimento de hum corpo he o producto da maſſa pela velocidade *. Ora como as bombas de 12 pol- * Numer. 931.
legadas pezão quaſi 140 arrateis, eſta quantidade póde conſiderar-ſe como valor da ſua maſſa, que multiplicando-ſe pela velocidade, que he $14 \frac{1}{3}$, dará a quantidade de movimento, ou força da bomba 2006.

REFLEXÃO.

1026 Pelos dous Problemas precedentes ſe vê que he facil ſaber a força das bombas, que ſe lanção por diverſos gráos de elevação; porque conhecendo as ſuas amplitudes, ſe conhecerão as alturas, a que ſe elevão, e por conſequencia a ſua velocidade, que baſta multiplicar pelo pezo das bombas do meſmo, ou de differentes calibres para ter os productos, cujas razões são as meſmas, que a das forças, que as bombas adquirem na quéda: aſſim póde-ſe ſaber que gráo de elevação ſe deve dar ao morteiro de 8 pollegadas, para que a bomba do ſeu calibre, cahindo ſobre hum

hum edificio, como por exemplo ſobre hum armazem de polvora, faça tanta ruina, como huma bomba de 12 pollegadas, que ſe lançaſſe por hum angulo de direcção menor, que o da bomba de 8 pollegadas, pois eſta deve adquirir pela maior altura, de que deſce o que tem de menos no pezo que a de 12 pollegadas. Iſto não ſó he curioſo, mas póde ſer util no ataque das Praças.

FIM DO DECIMOQUARTO LIVRO.

NOVO CURSO DE MATHEMATICA.

LIVRO XV.

TRATA DA MECANICA ESTATICA.

DEpois dos elementos de Geometria não ha na Mathematica couſa, que ſeja mais neceſſaria a hum Engenheiro, que a que vamos tratar. Chama-ſe Mecanica Eſtatica, porque conſidera as maquinas em quietação, ou para melhor dizer em equilibrio com os volumes, ou pezos, que ſe querem levantar com ellas. Facilmente ſe póde conhecer a grande ventagem, que ha em imaginar deſte mo-

modo as maquinas ſimplices, ou compoſtas; porque ſe ſe conhece a força, que he capaz de fazer equilibrio com as potencias, que ſe lhes applicão, ſabe-ſe logo a que ſe preciſa para as exceder, em caſo que ſeja preciſo vencer o equilibrio: em huma palavra, podem-ſe julgar as forças pelas reſiſtencias, que tem que vencer, e determinar as direcções, e ſituações mais ventajoſas, pelas quaes ſe devem applicar as forças motrizes ás maquinas, de que ſe uſa.

Tudo iſto nos convida a deſcubrir os principios dos effeitos, que vemos executar todos os dias. A curioſidade não póde deixar de admirar-ſe de ver hum homem, cuja força he muito pequena, fazer equilibrio, ajudado de huma ſimples maquina, com pezos milhares de vezes maiores, e muitas vezes movellos; mas logo que ſe conhecem as cauſas de effeitos tão admiraveis, ſe faz huma peſſoa (por fallar deſte modo) ſenhor dos movimentos ajudado da theorica eſtabelecida ſobre eſtes meſmos principios, e a ſua combinação nos deſcobre infinidade de outras ventagens par-

particulares applicaveis ás artes, e differentes caſos, em que nos podemos achar. Ainda que o genio para a Mecanica, como tambem os outros talentos, ſeja hum dom particular, que parece ao principio depender muito mais de huma feliz diſpoſição dos orgãos, que nos faz inventadores, que das regras geraes, he com tudo preciſo ter por verdade inconteſtavel, que havendo iguaes diſpoſições, o que he ſenhor dos principios de movimento, e da Eſtatica, he muito mais capaz da execução de hum grande numero de manobras, que algumas vezes parecem impraticaveis: ſaberá combinar com certeza, e calcular a força das maquinas, que ſe lhe apreſentarem, e poupará mil averiguações inuteis, mas inevitaveis, para os que não tem eſta inſtrucção.

He bom prevenir aqui, e combater dous erros craſſos, nos quaes cahem a maior parte dos que ſe applicão á Mecanica, ſem lhes conhecer as leis: tendo obſervado o prodigioſo augmento de forças em certas maquinas, imaginão que as podem augmentar á ſua vontatade, ou augmentando as bimbarras, ou as rodas. Isto que seria verdade em hum estado perfeito, e na metafysica da Mecanica, se falsifica pelo augmento das fricções, que são inevitaveis nas maquinas, de que precisão usar. Outras pessoas cahem em hum erro quasi semelhante, que nasce da ignorancia, e he, que tendo executado huma maquina em pequeno, concluem com toda a segurança que deve produzir os mesmos effeitos em grande. Não attendem que os corpos semelhantes, augmentando de pezo na razão dos cubos das dimensões homologas, as fricções crescem na mesma razão, o que causa que em certas maquinas a força, com que entendem produziria o effeito, que prognosticão, se emprega toda inteira, e muitas vezes não he bastante para vencer a fricção. He bem verdade que huma maquina, que produz certo effeito em grande, produzirá em pequeno hum proporcional; mas não he verdade o reciproco: assim he preciso fazer com hum excesso consideravel de forças as maquinas, que se executão. As melhores

são

são aquellas, em que este augmento he muito maior que a proporção do modelo, com que a maquina em grande se acha ser a respeito da mais pequena, tendo todas as mais cousas iguaes. Ainda ha outro defeito nos que ignorão a Estatica, e que tem hum gosto declarado para esta parte, e he, buscarem o movimento contínuo, pois senão são teimosos nestas idéas, ao menos se persuadem facilmente que tem achado cousas mais dignas de nossa attenção, depois de inuteis esforços dos que tem querido achar a solução deste Problema, que he ordinariamente o baixo, em que perigão os máos mecanicos, assim como na quadratura do circulo os mediocres Geometras.

CAPITULO I.

Introducção á Mecanica.

DEFINIÇÕES.

I.

1027 A Mecanica he huma sciencia, que considera as razões, que tem as potencias, ou as forças applica-

das

das aos corpos para os mover por meio das maquinas: aſſim a Mecanica tomada geralmente he a ſciencia dos movimentos, e por conſequencia a comparação das maſſas, e velocidades dos corpos he neceſſariamente huma parte da Mecanica conſiderada deſte modo.

II.

1028 Se ſe determinão as razões, que ſe devem achar entre hum certo numero de potencias por ſuas forças abſolutas, e direcções para produzir o equilibrio, he huma parte determinada da Mecanica, e ſe chama Mecanica Eſtatica: o ſeu objecto he pôr as forças em equilibrio; e ſe o eſtão, determinar as razões, que concorrem em eſtabelecello.

III.

1029 Temos já dito que toda a força movente, ou potencia he a que póde mover hum corpo, e por conſequencia os corpos em movimento são forças motrizes, porque a experiencia moſtra que elles podem mover os outros. Não examinaremos aqui ſe eſta propriedade he eſſencialmente intrinſeſeca ao corpo em movimento, ou ſe depende da vontade de Deos, que eſtabeleceo a communicação do movimento por meio da colliſão.

IV.

1030 O *equilibrio* he o eſtado de hum corpo em quietação, quando muitas forças o pertendem mover: hum corpo ſuſpenſo por huma corda eſtá em equilibrio, e puxa tanto pela corda de ſima para baixo, quanto elle he puxado pela meſma corda de baixo para ſima. Iſto nos repreſenta o modo, com que ſe faz o equilibrio, e nos moſtra que geralmente não póde haver equilibrio, ſenão entre duas forças iguaes, e directamente oppoſtas: logo ſe ha mais de duas forças em equilibrio applicadas ao meſmo corpo, o que ſe deve fazer he determinar por huma força conhecida, como todas as outras, de que ſe dão as direcções, compõem huma ſó igual, e directamente oppoſta á primeira para produzir o equilibrio.

V.

1031 Chama-se pezo o esforço, que pertende levar o corpo para o centro da terra. Nos corpos da mesma materia os pezos são proporcionaes aos volumes, e por consequencia se determinão pelas regras da Geometria: como as medidas devem ser homologas com as cousas, de que são medidas, os pezos naturalmente se devem medir por outros pezos; aquelle, a que os outros se comparão, se considera como a unidade, ainda que possa ter hum numero infinito de partes iguaes; assim o arratel, que he a ordinaria medida do pezo, se considera como a unidade, ainda que contenha dez, e seis partes iguaes, que servem para medir os corpos de menos pezo, e assim das mais medidas menores.

1032 De dous modos se póde representar a força: a primeira, e a mais natural he expressar o esforço, de que ella he capaz, pelo pezo, com que se póde equilibrar; assim huma força capaz de sustentar hum pezo de 20 arrateis, he huma força de 20 arrateis.

Mas

Mas como se trata menos das forças absolutas, do que da razão, que tem entre si, sentárão os Geometras servirem-se das linhas para expressarem as forças: assim representando huma força de 4 arrateis por huma linha de hum determinado comprimento, huma força tripla, ou quadrupla, isto he, de 12, ou 16 arrateis, se representará por huma linha tripla, ou quadrupla da primeira. Na theorica dos movimentos determinámos as forças pelos espaços, que ellas fazião correr aos corpos iguaes em tempos iguaes; assim as linhas, que representavão as forças motrizes, são expressões naturaes destas forças. Aqui as linhas denotão as razões, que se achão entre os pezos das forças applicadas aos corpos. Ver-se-ha finalmente que de qualquer modo que se considerem, vem a ser o mesmo.

VI.

1033. A linha da direcção de huma potencia he aquella, por que ella pertende mover o corpo, no caso que fosse só, e que o corpo cedesse á sua impressão. Huma mesma força não póde obrar ao meſmo tempo por diverſas direcções; aſſim huma ſó força, que impelle hum corpo, não o póde mover mais que por huma linha recta. Deve-ſe tambem notar que o esforço de huma força applicada a hum corpo ſe deve medir pela reſiſtencia, que eſte corpo lhe faz; porque ſe o corpo tem huma maſſa de 10 arrateis, não deſtroe mais que huma força de 10 arrateis na potencia, que obra nelle, ainda no caſo que pudeſſe vencer huma força de 100 arrateis, e he como os mecanicos entendem o principio geral, que *a acção he igual á reacção.*

VII.

1034 Chamão-ſe *maquinas* todos os inſtrumentos proprios para fazer mover, ou deter o movimento dos corpos, humas são ſimplices, outras compoſtas.

1035 As maquinas ſimplices são ſeis, a ſaber: a labanca, o cabreſtante, ou guindaſte, a roldana, ou moitão, o plano inclinado, a cunha, a roſca, ou paraſuſo.

1036 As maquinas compoſtas são ſem numero, e dependem de differen-

tes

tes combinações destas, tomando o numero dellas, que se julga conveniente.

VIII.

1037 Chama-se *centro da gravidade* de hum corpo hum ponto, pelo qual, suspenso elle, fica em equilibrio de qualquer modo que se imagine. Daqui se segue que a potencia applicada a este ponto suspende todos os esforços do pezo das partes, que compõem este corpo: logo póde-se imaginar que o pezo está reunido neste ponto. Depois veremos o modo de determinar os centros da gravidade das principaes figuras, e dos principaes corpos, que são mais communs, e este exame não póde deixar de ser mui util na Mecanica.

AXIOMA.

1038 O pezo de hum corpo obra com a mesma força em todos os pontos da sua direcção: concebamos hum corpo prezo a huma corda flexivel, e prescindamos do pezo desta corda, he evidente que este pezo puxa sempre do mesmo modo pelo ponto, a que está prezo na corda, qualquer que seja o

seu

ſeu comprimento: iſto ſuppõe que a força, que impelle o corpo para o centro da terra, ſempre he a meſma. Eſta falſa ſuppoſição não póde ſer ſenſivel nas maiores diſtancias, relativamente as maquinas.

ADVERTENCIA.

Depois de haver examinado no Tratado do movimento o parallelogramo das forças, iſto he, a compoſição das forças para determinar a velocidade, que as forças componentes dão ao movel, vamos repetir a meſma queſtão a reſpeito da Mecanica Eſtatica, iſto he, conſiderar qual he a força capaz de fazer equilibrio com as forças componentes.

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

Figura 26. 1039 Se hum corpo K he impellido ao meſmo tempo por duas potencias iguaes repreſentadas pelos lados AB, e AC de hum quadrado ABDC, e dirigidas por eſſes meſmos lados, digo que deſcreverá a diagonal AD do meſ-

mesmo quadrado no tempo, que andaria o lado A C, senão fosse impellido senão por huma só potencia.

DEMONSTRAÇÃO.

He evidente que o corpo se deve mover pela diagonal AD, porque não podendo ir mais que por hum só caminho, e achando-se entre duas forças motrizes inteiramente iguaes, não se dá maior razão para se aproximar mais a huma que a outra, como succederia se se movesse por outra linha diversa da diagonal. Para saber agora se a força, que resulta he representada pela mesma diagonal, chamo x a esta força resultante, cuja extensão se não conhece, e faço attenção, que das duas forças iguaes A C, e A B resulta huma só x: estas duas forças podem semelhantemente ser consideradas, como resultantes cada huma, de duas forças iguaes dispostas do modo que ellas estão a respeito da resultante x, e proporcionaes a estas mesmas forças; mas estas forças fazem hum angulo de 45 gráos com a diagonal: logo as suas componentes devem

vem tomar-ſe duas ſobre a linha EAF perpendicular á diagonal, e as outras duas na meſma diagonal: teremos logo eſta proporção, a reſultante x he á ſua componente AB, que chamarei a, como a meſma componente a, tomada como reſultante das forças AE, e AG, he a ſua componente AE, de que ſe tira eſta analogia $x:a::a:\frac{aa}{x}=$AE. Do meſmo modo ſe demonſtrará que a força AF he tambem igual a $\frac{aa}{x}$: logo em lugar das duas forças iguaes AB, e AC teremos quatro novas forças iguaes, das quaes duas AE, AF são directamente oppoſtas, e conſequentemente ſe deſtroem; e as outras duas são ambas dirigidas pela linha AD, e cada huma fica repreſentada por $\frac{aa}{x}$; mas eſtas duas forças para a meſma parte são as que formão ſós a reſultante incognita x, á qual são iguaes: logo teremos eſta equação $\frac{2aa}{x}=x$; e multiplicando por x, teremos $2aa=xx$, de que

ſe

ſe ſegue evidentemente que a reſultante não ſó he dirigida pela diagonal, mas tambem igual á meſma diagonal. *O Q. S. Q. D.*

Corollario I.

1040 Como qualquer linha ſe póde conſiderar como diagonal de hum quadrado, ſegue-ſe que em lugar de huma ſó força ſe podem tomar duas forças componentes, repreſentadas pelos lados do quadrado, do qual a primeira expreſſa a diagonal, porque eſtas duas forças novas não produzirão outro effeito ſobre o movel mais que o que reſultaſſe da primeira.

Corollario II.

1041 Segue-ſe daqui que ſe hum corpo he puchado, ou impellido ao meſmo tempo por duas potencias motrizes repreſentadas, e dirigidas pelos lados AB, e AC do parallelogramo re- Figura 27.
ctangulo, deſcreverá pela velocidade compoſta das duas potencias a diagonal AD do meſmo parallelogramo, no tempo que deſcreveria hum, ou outro dos

dos lados AB, AC, ſenão foſſe impellido mais que por huma ſó potencia M, ou N.

Demonstração.

Pelo precedente Corollario cada huma das duas forças AC, e AB ſe podem deſmanchar em outras duas, que ſejão lados do quadrado, de que eſtas linhas são diagonaes: além diſſo he evidente que a linha AE, que divide o angulo recto em dous iguaes, deve reunir eſtas quatro forças, nas quaes deſmanchámos as primeiras componentes AB, e AC; mas he facil de ver que o corpo não póde ſeguir a linha AE, porque para iſto ſeria preciſo que as forças AH, AI directamente oppoſtas foſſem iguaes, o que he impoſſivel, porque as linhas, ou as forças, que ellas repreſentão, eſtão na razão das linhas, ou forças AC, AB, que são deſiguaes pela hypotheſi: logo em quanto o corpo he impellido pela ſomma das forças AF, AG dirigidas pela meſma linha, terá tambem huma força repreſentada por AK, differença das forças directa-

Figura 27.

men-

mente oppoſtas AH, AI. Para determinar todas eſtas forças, chamemos AB a, AC b, teremos AF, ou AH $= \sqrt{\frac{1}{2} b^2}$, do meſmo modo AI, ou AG $= \sqrt{\frac{1}{2} aa}$: logo AE, ou AF + AG $= \sqrt{\frac{1}{2} a^2} + \sqrt{\frac{1}{2} b^2}$, e AK, ou AI $-$ AH $= \sqrt{\frac{1}{2} a^2} - \sqrt{\frac{1}{2} b^2}$. Vejamos agora ſe a força AK, applicada perpendicularmente em E, he capaz de trazer o corpo ao extremo D da diagonal AD. Para iſto he preciſo que ſendo o triangulo AED rectangulo, ſeja $AD^2 = AK^2 + AF^2 + AG^2$: quadro pois DE, ou AK, e tenho $\frac{1}{2} a^2 - 2\sqrt{\frac{1}{4} a^2 b^2} + \frac{1}{2} b^2$, que he o quadrado de $\sqrt{\frac{1}{2} a^2} - \sqrt{\frac{1}{2} b^2}$: quadro tambem AE, ou AF+AG $= \sqrt{\frac{1}{2} a^2} + \sqrt{\frac{1}{2} b^2}$, e terei $\frac{1}{2} a^2 + 2\sqrt{\frac{1}{4} a^2 b^2} + \frac{1}{2} b^2$, ajuntando eſtes dous quadrados,

ſerá

ſerá a ſomma a^2+b^2; do que ſe ſegue que em quanto as forças unidas AF, AG fazem deſcrever ao movel a linha AE igual á ſua ſomma, a força AK, ou DE traz o movel ao extremo da diagonal: logo neſtes caſos, dirigidas as forças deſiguaes pelos lados do parallelogramo rectangulo, e repreſentadas pelos ſeus lados, deſcreve o movel a diagonal. *O Q. S. Q. D.*

OBSERVAÇÃO.

1042 Poder-ſe-hia recear ter cahido em hum paralogiſmo, porque demonſtramos que o corpo entre as forças AE, e AK, que são lados do parallelogramo rectangulo, e que repreſentão as forças, que obrão ſobre elle, deſcreve a diagonal AD do novo parallelogramo, o que pareceſſe ſer o meſmo eſtado da queſtão; mas facilmente ſe convence que quaeſquer que ſejão as forças, em que ſe dividem as primeiras AB, AC, a reſultante he neceſſariamente igual á diagonal, e he o que vamos moſtrar em poucas palavras. Seja x a reſultante dirigida por AE, que

faz

faz qualquer angulo com a linha AC, e faça-ſe AB $= a$, AC $= b$: como as forças a, e b fazem correr x, duas forças proporcionaes a a, e b farão correr AB, com tanto que ſejão diſpoſtas do meſmo modo que as linhas AB, e AC o são a reſpeito de AE, o que ſuccederá ſe ſobre AE ſe toma huma AG, e outra ſobre a linha AI perpendicular á diagonal, porque AB faz com AE o meſmo angulo que AI com AB, e AC faz com AE o meſmo angulo que AI com AB: logo as forças dirigidas por eſtas linhas são diſpoſtas a reſpeito de AB, como AB, e AC o são a reſpeito de AE: do meſmo modo como as forças a, e b fazem correr AE, ou x, duas forças proporcionaes, e diſpoſtas do meſmo modo a reſpeito de AE farão correr AC, o que ſuccederá ſe ſe tomar huma ſobre AE, e outra em AH tambem perpendicular a AE: logo teremos eſta quatro proporções, AE : AB :: AB : AG, ou $x : a :: a : \frac{aa}{x} =$ AG; AE : AC :: AB:AI, ou $x : b :: a : \frac{ab}{x} =$ AI; tambem

bem AE:AC::AC:AF, ou $x:b::b:\frac{bb}{x}=$AF; e finalmente AE:AB::AC:AL, ou $x:a::b:\frac{ab}{x}=$AL: logo em lugar das duas forças AB, e AC temos quatro AF, AG, AL, AI, das quaes as ultimas duas são iguaes, e diametralmente oppoſtas, porque achamos por AL, e por AI $\frac{ab}{x}$, e de que as duas primeiras são dirigidas pela meſma linha AE, e por conſequencia concorrem ſós a produzir AE, o que dá $\frac{aa}{x}+\frac{bb}{x}=x$, de que ſe tira $aa+bb=xx$, o que prova invencivelmente que a reſultante das quatro novas forças, ou das duas componentes he neceſſariamente igual á diagonal; mas eſtas quatro forças, em que ſe deſmanchão as duas primeiras AB, e AC, fazem juſtamente o meſmo effeito que as forças AH, AF, AI, AG, nas quaes tinhamos deſmanchado as forças M, e N, tomando as linhas AB, AC como diagonaes dos quadrados GI, FH: logo eſtá inconteſtavelmente demonſtrado

que

que a força DE, ou AK deve levar o corpo K pela diagonal AD.

COROLLARIO III.

1043 Logo se tivermos qualquer força, poder-se-ha, sendo preciso, desmanchar em outras duas forças perpendiculares entre si, e tomalla como resultante, ou diagonal de hum parallelogramo rectangulo, do qual os lados expressão as forças resultantes, que a produzírão. Sómente se deve notar bem, que como huma mesma linha póde ser diagonal de infinitos parallelogramos rectangulos differentes, não se deve desmanchar em quaesquer, mas examinar a que tiver mais analogia com o estado da questão: vamos mostrar hum exemplo no seguinte Corollario.

COROLLARIO IV.

1044 Segue-se tambem daqui que se hum corpo he impellido por duas forças M, e N, representadas pelos lados AC, AB de hum parallelogramo, obliquangulo, ou obtusangulo, e dirigidas pelos mesmos lados, descreverá tam- Figura 28.

tambem a diagonal AD no tempo que teria andado huma, ou outra das linhas AB, AC, ſe obedeceſſe a huma ſó direcção M, ou N. Para ſe convencer, abaixe-ſe do ponto C ſobre a diagonal AD a perpendicular CF, e faça-ſe o parallelogramo AFCH. Semelhantemente do ponto B ſe abaixe a perpendicular BG á diagonal AD, e acabe-ſe o parallelogramo rectangulo AIBG: as linhas AH, AF, AI, AG farão o meſmo effeito que as potencias AC, AB *: além diſſo as forças repreſentadas por AH, AI são evidentemente iguaes, e directamente oppoſtas, porque medem as alturas dos triangulos iguaes ABD, ACD: logo o que reſta para mover o corpo são as forças, que concordão AF, AG dirigidas pela diagonal: logo reſta provar que a ſua ſomma he igual á diagonal, o que he evidente por cauſa dos triangulos rectangulos iguaes, e ſemelhantes BGD, CFA, que dão GD = AF: logo ainda neſte caſo o movel deſcreve a diagonal AD do parallelogramo formado da direcção das forças componentes. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 1043.

Co-

COROLLARIO V.

1045 Logo qualquer que ſeja o angulo da direcção das forças componentes, o corpo impellido por duas forças deſcreverá ſempre a diagonal do parallelogramo formado deſtas duas direcções; mas ſe ſe oppõe ao corpo na direcção da diagonal huma força repreſentada por eſta meſma linha, eſta força fará equilibrio com as outras duas, porque deſtas duas forças reſulta huma igual á da diagonal, e á qual ſe ſuppõe a nova força directamente oppoſta.

COROLLARIO VI.

1046 Logo quanto mais agudo for o angulo da direcção das duas potencias, maior ſerá a linha, ou força reſultante, ſendo as meſmas potencias componentes, de modo que o corpo ſe moverá com a ſomma das componentes, no caſo, em que eſtas duas forças ſe dirijão, e componhão huma meſma linha, e reciprocamente quanto mais obtuſo for o angulo, menor ſerá a força reſultante; de ſorte, que no caſo, em que eſte angulo ſeja igual a dous rectos, as forças se destroem reciprocamente, e o corpo he levado na direcção da maior potencia, e fica quieto, se as forças componentes são iguaes.

Corollario VII.

1047 Segue-se mais daqui, que sendo representadas as trez forças pelas linhas AB, AC, AD, o são tambem pelas linhas AB, AD, BD, que formão o triangulo ABD: logo ellas são entre si como os senos dos angulos do triangulo ABD, porque em todo o triangulo os lados são entre si como os senos dos lados oppostos a estes angulos: logo BD : AB : AD :: o seno BAD : seno ADB : seno ABD; mas por causa das parallelas CD, AB, o angulo CAD = ao angulo ADB, o angulo BAD = ao angulo ADC, e o seno do angulo ABD he o mesmo que do angulo ACD: logo teremos esta proporção AB : AC : AD :: seno CAD : seno BAD : seno DCA, do que se segue que cada potencia he representada pelo seno do angulo, formado pelas direcções das duas potencias, que se não comparão.

COROLLARIO VIII.

1048 Segue-ſe tambem daqui que ſe tivermos trez forças repreſentadas pelas linhas P, Q, R para equilibrar, baſta formar hum triangulo ABD com eſtas trez linhas, ou com as ſuas iguaes; e acabando depois o parallelogramo ABDC, as linhas AB, AC, AD, diſpoſtas como ſe achão na conſtrucção do parallelogramo, determinarão as ſituações reſpectivas das potencias dadas para o equilibrio. Figura 28.

COROLLARIO IX.

1049 Demais, como cada lado AB, AD, BD do triangulo ABD póde tomar-ſe por diagonal do parallelogramo, que ſe conſtruir, ſegue-ſe que trez forças podem ter trez differentes poſições, todas trez proprias para produzir o equilibrio.

COROLLARIO X.

1050 Segue-ſe tambem daqui que ſe nos derem qualquer numero de forças determinadas em grandeza, e poſição, que obrem em hum meſmo plano, e que ſe appliquem ao meſmo corpo, ſe póde ſempre determinar a reſultante de todas eſtas forças, ou ſeja pela direcção, ou pela quantidade da força. Para iſto ſe começará, buſcando a reſultante de quaeſquer duas forças: depois buſcar-ſe-ha a reſultante deſta nova força equivalente ás outras duas, e de huma terceira, que reduzirá trez forças a huma ſó: do meſmo modo ſe continuará até que não haja mais que huma ſó, e então a ultima reſultante ſerá a que ſe buſca.

Scholio.

1051 Deſta propoſição ſe podião ainda deduzir grande numero de Corollarios; e bem póde dizer-ſe que toda a theorica da Mecanica Eſtatica he huma ſerie de conſequencias deduzidas deſte principio: he logo de ſumma importancia demonſtrallo com todo o rigor poſſivel: póde ſer que a demonſtração, que eu dou, pareça muito extenſa, mas conhecer-ſe-ha logo que eſta extensão he eſcuſavel, ſe ſe averiguarem as demonſtrações de muitos

Au-

Authores. Não lhes he muito difficil demonſtrar que o corpo deſcreve a diagonal, quando tem combinado de tal ſorte as forças motrizes, ou tractivas, que o corpo he neceſſariamente obrigado a mover-ſe pela diagonal, eſte não he o eſtado da queſtão: he preciſo, como diz Mr. d'Alembert, deixar ao corpo a liberdade de eſcolher a direcção que quizer, e moſtrar que eſta direcção deve ſer abſolutamente pela diagonal, e que a força reſultante deve repreſentar-ſe por eſta meſma diagonal, e he o que julgo ter concluido. *. * Numer. 1041. e 1042.
Em hum deſtes Articulos a direcção ſe tomou livremente, e demonſtro que a força reſultante he expreſſada pela diagonal, qualquer que ſeja a direcção da reſultante; do que ſe ſegue, que pois as quatro forças, de que trata a queſtão neſte Articulo, produzem huma diagonal, as quatro, de que ſe tratou no Articulo precedente, que são tambem como as quatro primeiras equivalentes ás ſuas forças motrizes M, e N, devem Figura 27.
tambem produzir a diagonal; do que ſe ſegue que o corpo não póde deſcre-

ver

ver a linha AE, o que dá por consequencia a direcção do corpo pela diagonal. Tambem suppuz duas forças simplesmente motrizes; porque se a proposição neste caso he verdadeira, sello-ha tambem no caso das forças tractivas; porque a força, que move hum corpo, depois que a força motriz obrou nelle em hum instante, se póde imaginar como huma força tractiva.

CAPITULO II.

Trata da razão das potencias, que sustem os pezos com cordas.

1052 COmo no Tratado do movimento tratámos da collisão, e percussão dos corpos, e dos corpos projectos por direcções perpendiculares, obliquas, ou parallelas ao horizonte, parece que para seguir huma ordem na Mecanica, cujo objecto he considerar em equilibrio os corpos, que procurão naturalmente mover-se, he necessario explicar primeiro que tudo o que diz mais respeito ao que precede de immediatamente ; e isto deve sem dúvida ser a theorica dos corpos sustidos por potencias, que estão em equilibrio com estes corpos em todas as situações, que podem ter, e he o que proponho ensinar neste segundo Capitulo; porque depois disto mostraremos no terceiro os pezos, que se movem sobre os planos inclinados, e a razão do seu pezo com as potencias, que os sustem quietos.

PROPOSIÇÃO.

THEOREMA.

1053 Se duas potencias P, e Q sustem hum pezo R, que pertende seguir a direcção RB, digo, que estas duas potencias ficarão em equilibrio entre si, se estão em razão reciproca das perpendiculares BC, e BG, tiradas de hum dos pontos B da direcção BR sobre as direcções FP, e FQ, isto he, se P : Q : : BG : BC. Figura 29.

DEMONSTRAÇÃO.

Para que estas duas potencias fação equilibrio entre si, he preciso que se-

jão

jão como os lados FE, FD de hum parallelogramo, cuja diagonal BF expressará a força, ou a gravidade do pezo R; porque sendo o pezo R considerado como potencia resistente, estará em equilibrio com as duas potencias operantes, porque de huma, e outra parte se acharão forças iguaes; mas tomando BD em lugar de EF, teremos os lados BD, e DF do triangulo BDF, que serão na razão das potencias P, e Q; e como os lados BD, e DF estão na razão dos senos dos seus angulos oppostos, que não são outra cousa mais que as perpendiculares BC, e BG: será P : Q : : BC : BG. *O. Q. S. Q. D.*

Figura 30. Do mesmo modo, se do ponto D da direcção FQ se tirão as perpendiculares DG, e DC sobre as direcções BR, e FP, teremos a razão da potencia P ao pezo Q na razão reciproca das perpendiculares DC, e DG; porque como estas perpendiculares são os senos dos angulos oppostos aos lados BF, e BD do triangulo BDF, será BD : BF : : DG : DC, ou tambem P : R : : DG : DC.

Fi-

Finalmente ſe do ponto E, tomado na direcção da potencia P, ſe abaixão as perpendiculares EG, EC ſobre as direcções das potencias R, e Q, teremos tambem Q : R :: EG : EC. Figura 31.

COROLLARIO I.

1054 Segue-ſe daqui que ſe ſe ſuppõe que o pezo SR diminue continuamente, ficando as duas potencias P, e Q as meſmas, a diagonal BF do parallelogramo ED diminuirá á proporção do corpo R. Ora como os lados FD, e FE ficão os meſmos, o angulo EFD augmentará, porque as potencias P, e Q deſcêrão, e o pezo R ſubirá; mas em quanto o pezo R for de huma finita grandeza, a diagonal BF ſerá ſempre huma linha finita, e póde ſempre formar hum parallelogramo ED, e por conſequencia as direcções FP, e FQ formarão ſempre hum angulo em F. Figura 32.

COROLLARIO II.

1055 Segue-ſe daqui que huma corda nunca póde ſer eſtendida em linha recta, ſenão por huma potencia infinita, porque o ſeu pezo, por pequeno

que

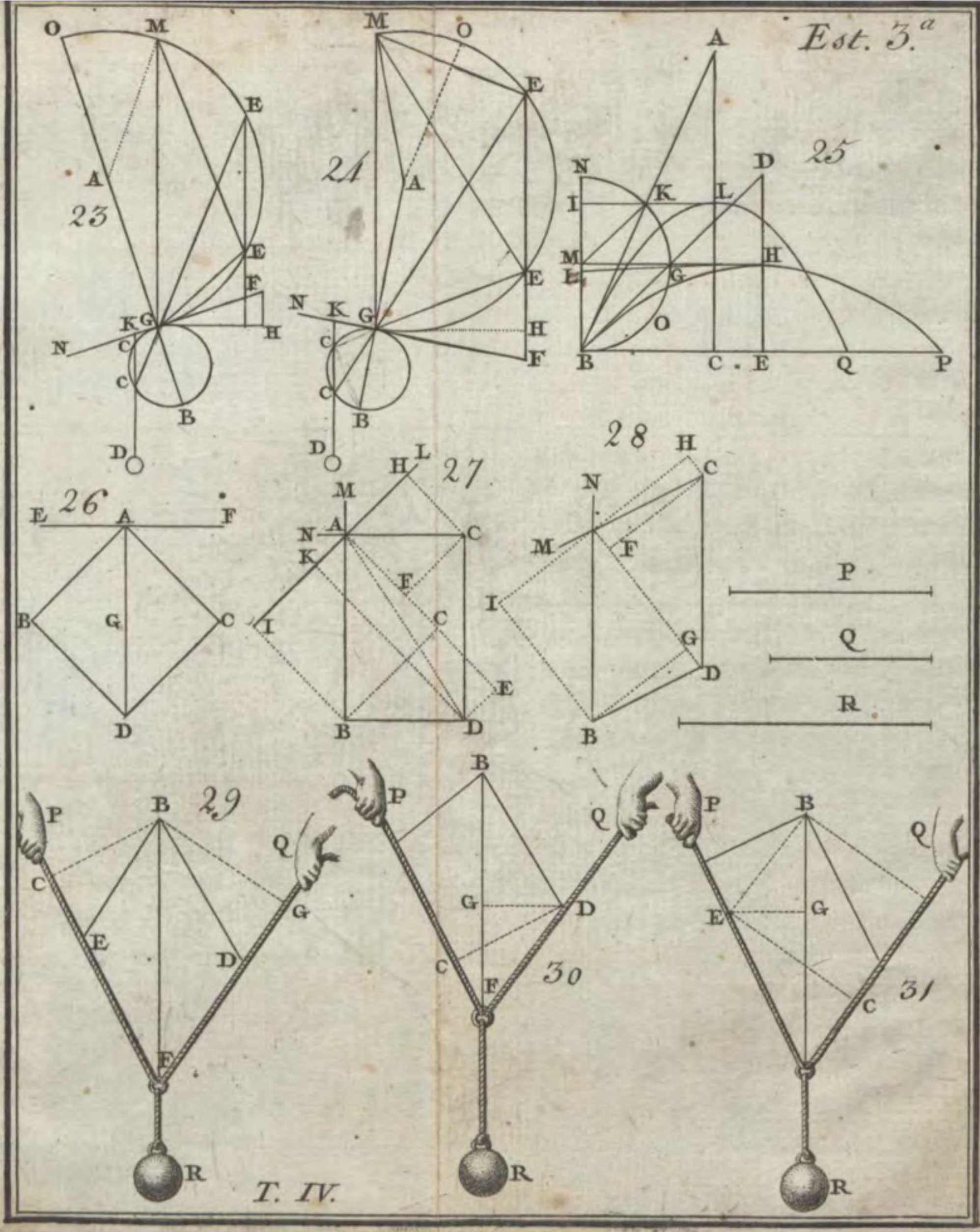
que se supponha, será sempre de huma grandeza finita, e póde tomar-se como reunido em hum só ponto, como o pezo R prezo a qualquer dos pontos F da mesma corda.

Corollario III.

Figura 33. 1056 Se dos pontos E, e D se abaixão as perpendiculares EG, e DH sobre a direcção BR, e se acabão os parallelogramos rectangulos GI, e HK, teremos os lados EI, e IF, que representarão duas forças iguaes á força EF, e os dous lados FK, e KD, que expressarão tambem duas forças iguaes a DF; * mas IF, e FK são duas forças, que não sustentão parte do pezo R: assim a parte do pezo, que sustem a potencia Q, se expressará por DK; e a parte do pezo, que sustem a potencia P, será expressada por EI: segue-se logo que as partes do pezo R, que sustem as potencias P, e Q, são huma a outra, como EI a DK, ou como GF a HF; mas como BH he igual a GF, BF expressará toda a gravidade do pezo, e será logo P:R::EI, ou GF:BF, e da outra parte Q:R::DK, ou HF:BF.

* Numer. 1045.

Co-


Est. 3.ª
23
21
25
26
27
28
29
30
31
T. IV.

COROLLARIO IV.

1057 Mas se a potencia Q estivesse na linha horizontal ED, e a potencia P sobre a horizontal, esta potencia sustentaria só todo o pezo R; porque acabando o parallelogramo rectangulo BE, a perpendicular HE expressará a parte do pezo R, que sustenta a potencia P; mas HE he igual á diagonal BF, que expressa toda a gravidade do pezo: logo a potencia P sustentará todo o pezo. Figura 34.

COROLLARIO V.

1058 Porém se a potencia Q estivesse de baixo do horizonte HL, e a potencia P por sima, succederia que a potencia P sustentaria não sómente todo o pezo R, mas tambem a parte do pezo, que sustentaria a potencia Q, se estivesse tanto sobre a horizontal HL, como está de baixo; porque formados os parallelogramos rectangulos IH, e GK, a linha EH expressará o esforço, que faz a potencia P, e a linha FK expressará o esforço, que faz a potencia Q. Ora como FK he igual Figura 35.

a IB,

a IB, ſegue-ſe que EH, ou IF he compoſta de BF, e de BI, iſto he, de BF, que exprime a gravidade do pezo, e BI, que he a parte do pezo R, que ſuſtentaria a potencia Q, ſe eſtiveſſe tanto ſobre a horizontal HL, quanto eſtá debaixo, o que moſtra que a potencia P ſuſtem mais que o pezo de R.

Corollario VI.

1059 Segue-ſe finalmente daqui, que ſe temos hum corpo grave HI ſuſtentado por duas potencias P, e Q, eſtas duas potencias eſtarão em equilibrio, ſe eſtão na razão reciproca das perpendiculares FG, e FC, tiradas de hum dos pontos da direcção BF ſobre as das potencias P, e Q; porque ſe ſe ſuppõe que todo o pezo do corpo eſteja reunido á roda do ſeu centro da gravidade F para formar o pezo R, para ſuſtentar eſte pezo he preciſo que P ſeja para Q, como BE a BD, ou como FD he a BD. Ora como os ſenos dos angulos no triangulo FBD são na meſma razão que os ſeus lados oppoſtos, ſendo FG ſeno do angulo FBG, e

Figura 36.

FC

FC ſeno do angulo BFD, porque o he do ſeu alterno CBF, teremos FD : BD :: FG : FC, ou tambem BE : BD :: FG : FC, e por conſequencia P : Q :: FG : FC.

Porém ſe o corpo grave HI deſcançaſſe em huma das ſuas extremidades H, e ſe ſuſtentaſſe ſómente da extremidade I pela potencia Q, eſta potencia Q ſeria para o pezo R, como BD he a BF; e como eſtas linhas são lados do triangulo BFD, eſtarão na razão dos ſenos dos angulos BFD, e BDF, que são as perpendiculares EG, e EC, o que moſtra que a potencia Q he para o pezo R na razão reciproca das perpendiculares EC, e EG, tiradas de hum dos pontos E da direcção da potencia P ſobre as das potencias Q, e R.

CA-

CAPITULO III.

Do plano inclinado.

Definições.

1060 Chama-se *plano inclinado* toda a superficie inclinada ao horizonte, pelo qual se faz mover hum grave. Este plano póde sempre representar-se pela hypothenusa de hum triangulo rectangulo.

Proposição.

Theorema.

Figura 38. Se qualquer potencia Q sustenta hum pezo esferico P por huma direcção DE parallela ao plano inclinado AB, digo 1.º que a potencia será para o pezo, como a altura do plano inclinado para o seu comprimento, isto he, que Q : P
Figura 39. :: BC : BA. 2.º Que se o pezo he sustentado por huma potencia Q pela direcção DE parallela á base AC do plano, a potencia será para o pezo, como a altura do plano para o comprimento da sua base, isto he, que Q:P ::BC :AC.

De-

Demonstração do primeiro caso.

1061 Tire-se a linha DF perpendicular ao plano inclinado AB, esta linha será a direcção da potencia resistente; e fazendo o parallelogramo IG, o lado DG expressará huma das potencias agentes, o lado DI a outra potencia agente, e ambas juntas estarão em equilibrio com a potencia resistente DF; mas estas duas potencias são entre si, como DG para DI: logo serão como os lados IF, ID do triangulo rectangulo DIF; e como este triangulo he semelhante ao do ABC, teremos IF, ou DG: ID :: BC : BA, ou P : Q :: BC : BA. Figura 38.

Demonstração do segundo caso.

1062 Se a direcção DE da potencia he parallela á base AC do plano inclinado, prova-se facilmente que Q : P :: BC : BA; porque se a linha DF he perpendicular sobre AB, expressará a potencia resistente; e fazendo-se o parallelogramo rectangulo IG, teremos Q : P :: DG : DI; e se em lugar de DG se toma FI, teremos os lados IF, ID do triangulo rectangulo DIF, que serão Figura 39.

rão

rão como Q a P; e como eſte triangulo he ſemelhante ao triangulo ACB, ſerá FI : ID : : BC : CA, ou tambem Q : P : : BC : CA.

1063 Porém ſe a linha da direcção
Figura 40. DE da potencia Q não foſſe parallela ao plano inclinado AB, nem á ſua baſe AC, e a potencia, e pezo eſtiveſſem em equilibrio, neſte caſo a potencia ſerá para o pezo na razão reciproca das perpendiculares FI, e FL; porque tendo feito o parallelogramo KG, teremos ſempre Q : P : : DG : DK, ou GF; mas os lados DG, e GF do triangulo GDF são como os ſenos dos ſeus angulos oppoſtos, que são as perpendiculares FI, e FL, ſerá DG : GF, ou DK : : FI : FL, ou tambem Q : P : : FI : FL. Achar-ſe-ha do meſmo modo que nas Propoſições precedentes a razão de cada huma das potencias agentes P, e Q á reſiſtencia R, que he o esforço, que faz o pezo contra o plano AB.

Corollario I.

1064 Segue-ſe daqui que ſe dous
Figura 40. corpos P, e Q ſe ſuſtem mutuamente

lo-ſobre planos diverſamente inclinados pelas linhas RP, e RQ parallelas a eſtes planos, ſerão entre ſi como os comprimentos dos planos, iſto he, que P :Q::BA:BC; porque como BD he a altura commua dos dous planos, a potencia, que eſtiver em R, não fará maior esforço para ſuſtentar o pezo P, do que para ſuſtentar o pezo Q, iſto he, póde ſer commua; e aſſim como a razão da potencia R á altura DB he a meſma em ambos os planos inclinados, ſerá a meſma a razão dos planos, e dos pezos. Figura 41.

COROLLARIO II.

1065 Do meſmo modo, ſe dous pezos P, e Q ſe ſuſtentão mutuamente ſobre planos diverſamente inclinados por linhas de direcções parallelas ás baſes, eſtes dous pezos ſerão entre ſi como os comprimentos das baſes, iſto he, que P:Q::DA:DC; porque como BD he a altura commua dos dous planos, a potencia R poderá ſer commua aos dous pezos; e aſſim como a razão da altura BD á potencia he a meſ- Figura 42.

ma de ambas as partes, a razão dos pezos, e das bases será tambem a mesma.

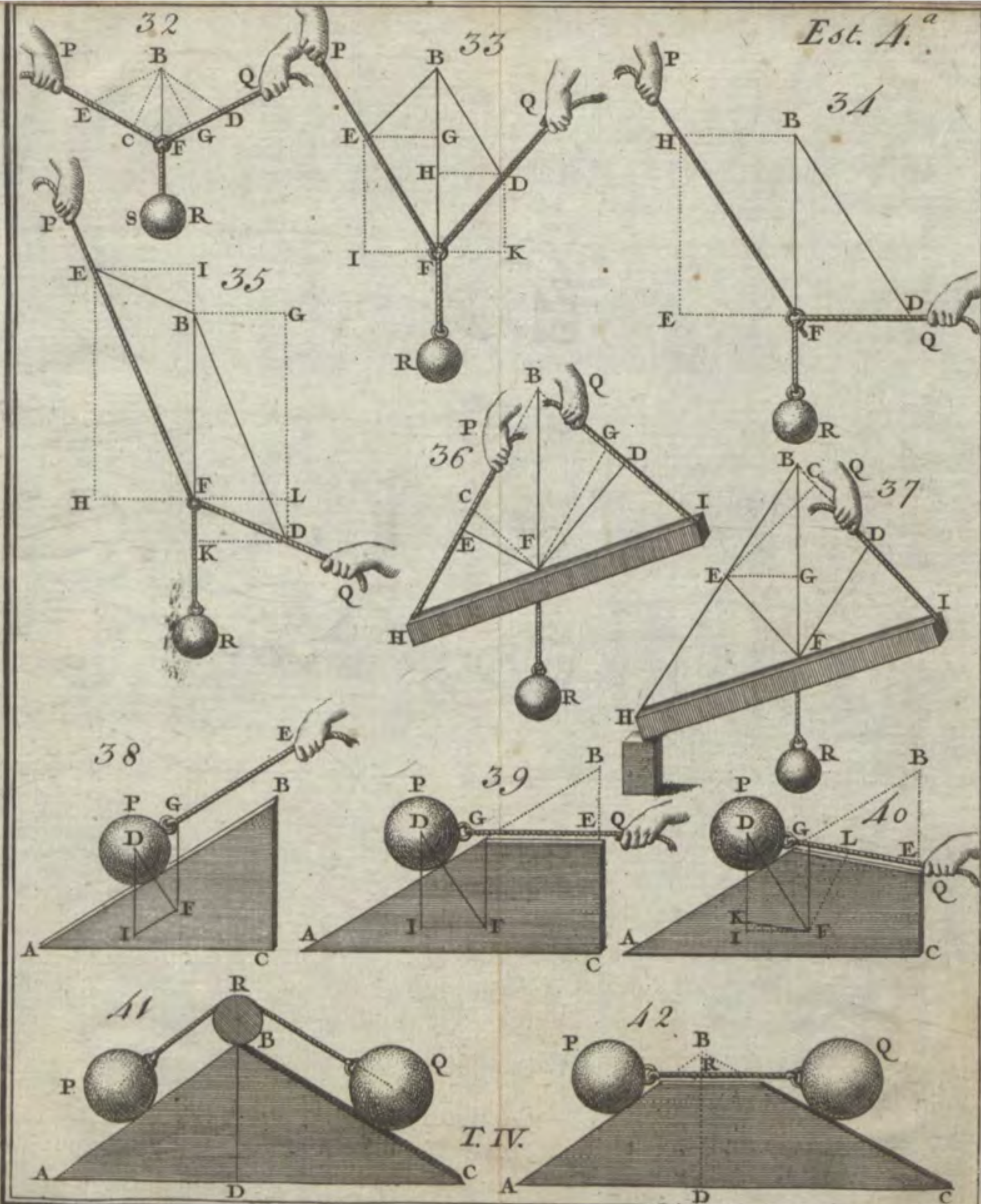
COROLLARIO III.

1066 Segue-se tambem daqui que Figura 38. quando huma potencia Q puxa, ou impelle hum pezo P por huma linha de direcção parallela ao plano, a potencia he para o pezo, como o seno BC do angulo da inclinação BAC do plano he para o seno total AB, e por consequencia a potencia he sempre menor que o pezo.

COROLLARIO IV.

1067 Em fim póde-se tambem dizer, Figura 39. que quando huma potencia Q puxa, ou impelle hum pezo P por huma linha de direcção parallela á base AC do plano inclinado, a potencia he para o pezo, como o seno BC do angulo da inclinação BAC he para o seno AC do seu complemento ABC; o que mostra que a potencia he igual ao pezo, quando o angulo da inclinação he de 45 gráos, e que he maior que o pezo, quando o angulo de inclinação he maior que 45 gráos.

CA-


Est. 4.ª
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
T. IV.

CAPITULO IV.

Da Alavanca.

1068 PAra fazermos a applicação dos principios a esta maquina a imaginamos como huma vara inflexivel considerada sem pezo, em trez pontos da qual tem applicadas trez potencias, duas das quaes, que são agentes, tem as direcções no mesmo plano; e a terceira, que he a resistente, obra directamente opposta ás duas outras, entre as quaes está sempre.

PROPOSIÇÃO.

THEOREMA.

1069 Comparadas duas potencias P, e Q, estarão em equilibrio, se estão na razão reciproca das perpendiculares DG, e DH, tiradas do ponto firme D sobre as linhas da direcção CA, CB das potencias P, e Q, assim devemos provar que P : Q :: DH : DG. Figura 43.

CAPITULO IV.

Da Alavanca.

1068 PAra fazermos a applicação dos principios a esta maquina a imaginamos como huma vara inflexivel considerada sem pezo, em trez pontos da qual tem applicadas trez potencias, duas das quaes, que são agentes, tem as direcções no mesmo plano; e a terceira, que he a resistente, obra directamente opposta ás duas outras, entre as quaes está sempre.

PROPOSIÇÃO.

THEOREMA.

1069 Comparadas duas potencias P, e Q, estarão em equilibrio, se estão na razão reciproca das perpendiculares DG, e DH, tiradas do ponto firme D sobre as linhas da direcção CA, CB das potencias P, e Q, assim devemos provar que P : Q :: DH : DG. Figura 43.

Demonstração.

Se do ponto D ſe tirão as linhas DE, DF parallelas ás linhas da direcção CA, CB, teremos o parallelogramo EF, cuja diagonal CD expreſſará a força da potencia, que reſiſte ás duas potencias P, e Q: o lado CE expreſſará a força da potencia P, e o lado CF a da potencia Q, aſſim ſerá P : Q : : EC, ou DF : FC; mas no triangulo DCF os ſenos dos angulos eſtão na meſma razão que os ſeus lados oppoſtos: logo o lado DF he para o lado CF, como o ſeno do angulo DCF he para o ſeno do angulo CDF; e como DH he o ſeno do angulo DCF, e DG o ſeno do angulo CDF, pois o he do ſeu alterno ECD, ſe em lugar de DF tomarmos EC, teremos EC : FC : : HD : DG; e ſe em lugar de EC, e FC ſe tomarem as potencias P, e Q, teremos tambem P : Q : : DH : DG. *O Q. S. Q. D.*

Corollario I.

1070 He evidente que ſe o ponto C ſe affaſtaſſe mais, e mais dos trez pontos A, D, B, de ſorte que as direc-

Figura 43. e 44.

recções AC, DC, BC das trez potencias P, R, Q ficassem em fim parallelas, ou serião perpendiculares, ou obliquas: se são obliquas, teremos ainda P : Q :: DH : DG, porque as linhas DH, e DG são perpendiculares, tiradas sobre as linhas das direcções das potencias P, e Q: além disso por causa dos triangulos semelhantes DAG, e DHB poder-se-ha em lugar das linhas DH, e DG tomar as linhas BD, e DA, de que se tira P : Q : : DB : DA, isto he, que duas potencias applicadas ás extremidades das partes de huma alavanca estão em equilibrio, quando, tendo as suas direcções parallelas, estão na razão reciproca das partes da alavanca, isto he, se P : Q : : DB : DA.

REFLEXÃO.

1071 Póde-se aqui notar de passagem que se duas potencias levão hum pezo E applicado ao meio da alavanca, irão igualmente carregadas, porque ha a mesma razão de P a Q, que de CB a CA; mas como CB he igual a CA, a potencia P será igual á po- Figura 45.
ten-

tencia Q; e ſe pelo contrario o pezo F eſtá mais perto de A que de B, como eſtá em F, a potencia P eſtará mais carregada que a potencia P, porque P : Q :: DB : DA; e aſſim quanto a parte DB for maior que DA, tanto a potencia P eſtará mais carregada que a potencia Q.

Corollario II.

1072 Mas ſe tivermos huma alavanca, cujo fulcro * ſeja em hum dos ſeus extremos A, e as duas potencias ſe applicão aos pontos D, e B, das quaes huma puxa pela direcção DQ, e a outra pela direcção BP para partes contrarias, eſtarão eſtas duas potencias em equilibrio, ſe eſtão na razão reciproca das perpendiculares AG, e AH, tiradas do ponto do fulcro ſobre as ſuas linhas de direcção; porque fazendo o parallelogramo EF, o lado CF expreſſará a força da potencia P, e a diagonal

Figura 46.

* Chame-ſe fulcro, ou centro do movimento o ponto fixo á roda de que ſe movem os braços da balança, e nas alavancas aquelle ponto, em que ſe faz firme.

nal CD a da potencia Q, para que eftas duas potencias eftejão em equilibrio; e como no triangulo CFD os lados CF, e CD eftão na razão dos fenos dos feus angulos oppoftos, teremos CF : CD :: AH : AG, ou tambem P : Q :: AH : AG.

COROLLARIO III.

1073 Póde-fe ainda dizer, como no Corollario I, que fe o ponto C fe affaftaffe mais, e mais infinitamente dos pontos D, e B, de forte que as linhas de direcção BP, e DQ ficaffem parallelas, e perpendiculares á alavanca AB, as potencias P, e Q ficarião fempre em equilibrio, porque nefte cafo a perpendicular AG feria igual ao comprimento da alavanca AB, e a perpendicular AH igual á parte AD, e teremos ainda P : Q :: AD : AB. Figura 46. e 47.

COROLLARIO IV.

1074 Por confequencia fe huma potencia P fuftenta hum pezo Q, ajudada da alavanca AB, de forte que o pezo efteja no meio D, o fulcro no extre- Figura 48.

tremo A, e a potencia no extremo B, esta potencia sustem só metade do pezo Q, porque teremos P:Q::AD:AB; assim sendo AD metade de AB, P será metade de Q.

Corollario V.

1075 Logo se o pezo em lugar de estar no meio da alavanca estivesse no ponto C mais perto de A que de B, a potencia estaria menos carregada do que estava antes, porque sempre será P:Q::AC:AB; e como AC he menor que CB, será P menos de metade de Q.

Corollario VI.

1076 Segue-se daqui que se a potencia se applicasse a qualquer ponto D da alavanca AB, e que o pezo estivesse na extremidade B, a potencia, e o pezo estariāo em equilibrio, se houvesse a mesma razão da potencia ao pezo, que da alavanca AB á parte AD.

Figura 49.

COROLLARIO VII.

1077 Se tivermos huma alavanca AB, cujo fulcro efteja em E, os dous pezos P, e Q nos extremos A, e B eftarão em equilibrio, fe eftão na razão reciproca das partes da alavanca, ifto he, fe P : Q : : EB : EA, porque já demonftrámos que duas potencias defte modo ficão em equilibrio; e fe em lugar das potencias fe põem os pezos, que lhes fejão equivalentes, farão o mefmo effeito, e por confequencia eftarão em equilibrio. Figura 50.

COROLLARIO VIII.

1078 Segue-fe tambem daqui que fe temos dous pezos applicados aos extremos de huma alavanca, ou de huma balança, fe póde fempre achar o ponto do fulcro, á roda do qual os dous pezos ficão em equilibrio, dizendo: a fomma dos dous pezos P, e Q Figura 50. he a todo o comprimento da balança AB, como o pezo P ao comprimento do braço BE, que dará o ponto E como ponto do fulcro. Pela mefma razão conhecendo o braço AE, e EB com hum

hum pezo P, ſe achará ſempre o outro pezo Q, dizendo: o pezo P para o braço EB, como o braço AE para o pezo Q.

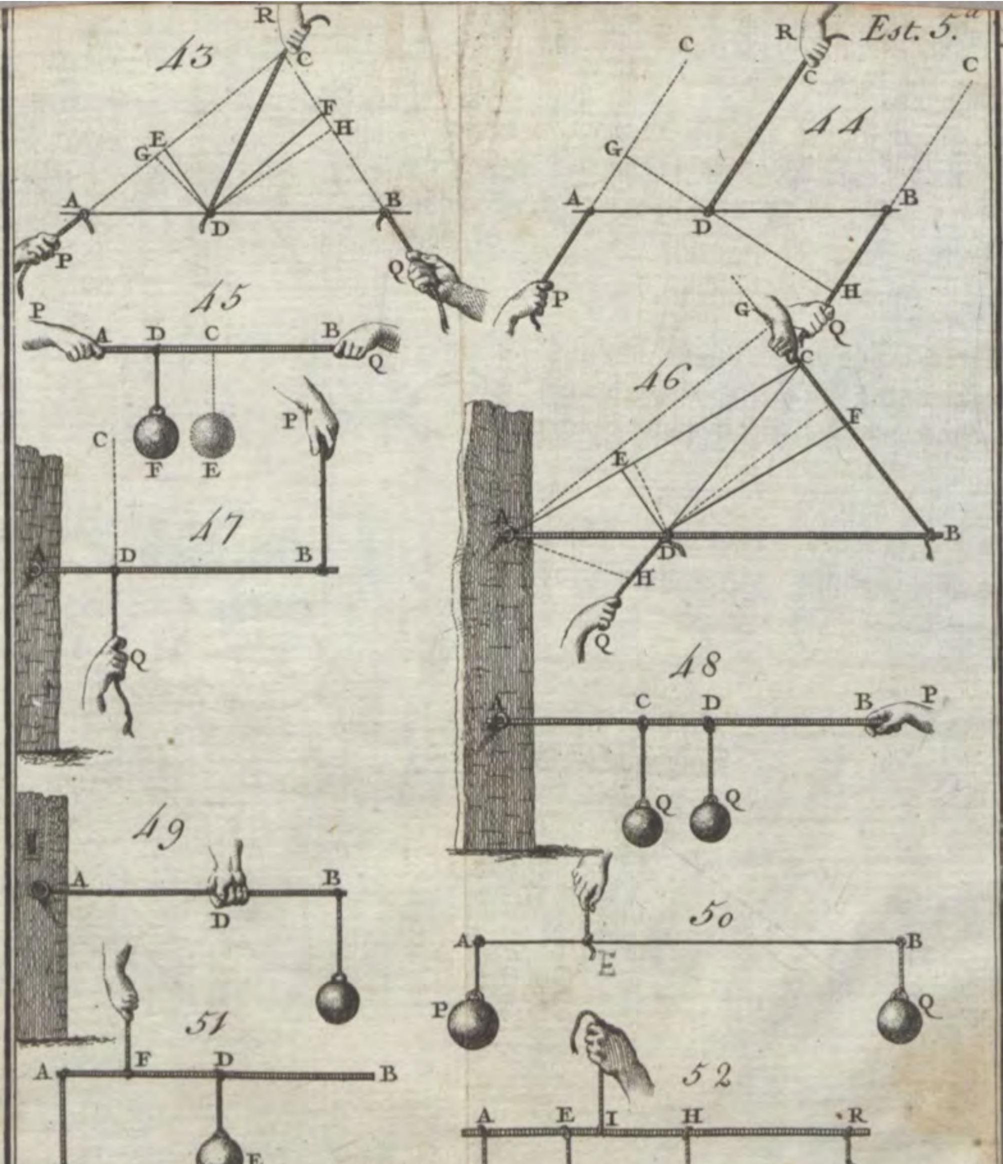
COROLLARIO IX.

1079 Segue-ſe tambem daqui que tendo huma vara AB de qualquer pezo que ſeja, poder-ſe-ha achar hum ponto como F, pelo qual ſuſpenſa a vara eſteja
Figura 51. em equilibrio com o pezo C, porque baſta dividir a vara em duas partes iguaes no ponto D, e ſuppôr que o pezo eſtá todo á roda do centro da gravidade para ter o pezo E; depois buſcar na vara AD, que já não tem pezo, hum ponto F, dizendo: a ſomma dos dous pezos C, e E para o ſeu comprimento AD, como o pezo E para o braço AF.

COROLLARIO X.

1080 Póde-ſe finalmente dizer, que
Figura 52. havendo dous pezos C, e D applicados nos extremos de huma balança AB, á qual ſe ſuppõe hum pezo, para achar o ponto do fulcro, á roda do qual o pe-

zo


Est. 5.ª
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
T. IV.

zo da balança, e o dos pezos estejão em equilibrio, deve-se primeiro buscar hum fulcro tal como E, á roda do qual os pezos C, e D se unem em hum só pezo G no centro da gravidade E, e que o pezo da balança está tambem reunido no pezo F á roda do seu centro da gravidade H; e tomando o comprimento EH como se fosse o da balança, nos extremos da qual estão os pezos G, e F, buscar-se-ha o ponto do fulcro, dizendo: a somma dos dous pezos G, e F he para o comprimento EH, como o pezo F para o braço EI, que dará o ponto I, que será aquelle, á roda do qual o pezo da balança, e o dos pezos C, e D estarão em equilibrio.

COROLLARIO XI.

1081 Se tivermos huma vara, ou balança AB de determinado pezo, e hum pezo I suspenso no extremo A, e se tomar o ponto C por fulcro, e se queira achar no braço CB hum lugar, no qual hum pezo como H, ajudado com o pezo da balança, fique em equilibrio com o pezo I, divida-se a balan- Figura 53.

ça

ça AB em duas partes iguaes no ponto E, e ſupponho que o pezo fique reunido no ponto F: depois buſque-ſe a parte do pezo I, que fará equilibrio com o pezo F, ou com a balança, dizendo: o braço AC he para o pezo F, como o braço CE para a parte do pezo I, que deve fazer o equilibrio, que ſerá por exemplo a parte K. Preſentemente para achar o ponto G, em que deve ſuſpender-ſe o pezo H para ficar em equilibrio com o que reſta do pezo I, que he a parte L, devo dizer: como o pezo H he para o braço AC, aſſim o pezo L he para o braço CG, que ſe achará depois que eſtiver determinado o pezo da balança AB, e o dos pezos I, e H. Deſte Corollario ſe tira o modo de fazer a balança Romana.

REFLEXÃO.

Figura 54. 1082 Ha ainda outro modo de demonſtrar o equilibrio nas maquinas, de que ainda não temos fallado, mas que ſe entenderá facilmente, ſe nos lembrarmos do que fica enſinado no Tratado do movimento.

Por

Por exemplo. Para provar que dous pezos P, e Q, prezos nos extremos da balança Romana AB, eſtão em equilibrio, ſe eſtão em razão reciproca dos braços EB, e EA, iſto he, que ſe P: Q: : EB : EA.

Imagine-ſe que o pezo P não póde mover-ſe, ſem obrigar a mover tambem o pezo Q. Ora ſuppondo que o pezo P póde vencer o pezo Q no tempo que o pezo P deſcrever o arco AF, o pezo Q deſcreverá o arco GB, aſſim o arco AF ſerá a velocidade do pezo P, e o arco GB a velocidade do pezo Q em tempos iguaes; mas já moſtrámos * que dous corpos tinhão huma meſma quantidade de força, quando tinhão as maças, e velocidades reciprocas; aſſim eſtes dous pezos terão forças iguaes, ſe P : Q : : GB : AF. Ora pela ſuppoſição P : Q : : EB : EA, aſſim tomando EB, e EA em lugar de GB, e AF, que eſtão na meſma razão, teremos P : Q :: EB : EA; e por conſequencia tendo eſtes dous pezos huma meſma força, quando eſtão em razão reciproca dos braços da balança, ficarão em

* Numer. 933.

em equilibrio, porque hum não fará maior esforço para se mover do que o outro.

Corollario.

1083 Segue-se daqui que se em lugar do pezo Q se suppõe huma potencia, esta potencia estará em equilibrio com o pezo P, se são em razão reciproca de seus caminhos, ou das velocidades, que tem em tempos iguaes, isto he, se a potencia Q he para o pezo, como o caminho, ou a velocidade AF do pezo para o caminho, ou velocidade GB da potencia; e por esta razão, quando se mostrar nas maquinas que o caminho da potencia, e o do pezo estão em razão reciproca de potencia ao pezo, se provará que a potencia, e o pezo estão em equilibrio.

Figura 54.

Por exemplo. Para provar que se huma potencia Q, applicada ao extremo da alavanca, sustem hum pezo P, que a potencia, e o pezo estão em equilibrio, se Q : P :: A F : A B, imagine-se moverem-se a potencia, e o pezo, de sorte que a alavanca AB passe para a si-

Figura 55.

ſituação AD, a velocidade da potencia ſerá o arco DB, e a velocidade do pezo o arco EF, e no eſtado do equilibrio ſerá Q : B :: EF : DB; e ſe em lugar dos arcos ſe tomão os raios, ſerá Q : P : : AF : AB.

DEFINIÇÕES.

1084 Como não temos dado differença entre as alavancas, de que acabamos de fazer menção, e o fulcro, ou a potencia reſiſtente muda a natureza da alavanca, conforme a differente poſição, chamaremos alavanca do primeiro genero a que tem a potencia em hum dos extremos, o pezo no outro, e o fulcro entre elles: Chamaremos alavanca do ſegundo genero áquelle, que tem o fulcro em hum dos extremos, a potencia no outro, e o pezo entre os dous. Finalmente chamaremos alavanca do terceiro genero áquelle, que tem o pezo em hum dos extremos, o fulcro no outro, e a potencia entre elles.

Ha outro genero de alavanca, que ſe chama encurvada; e chama-ſe aſſim, por-

porque faz hum angulo no fulcro, por cuja causa tem tambem o nome de angular. Esta alavanca se reduz sempre ao primeiro genero, porque tem a potencia em hum dos extremos, o pezo no outro, e o fulcro entre os dous.

CAPITULO V.

Do Guindaste.

DEFINIÇÕES.

1085 O Guindaste he huma maquina composta de huma roda segura a hum cylindro, que se chama tambor: a potencia se applica ordinariamente á circumferencia da roda, que faz voltar por meio de manivelas perpendiculares ao seu plano, e o pezo anda sempre suspendido em huma corda, que se enrola ao redor do tambor.

PROPOSIÇÃO.

THEOREMA.

1086 Se huma potencia, ajudada de huma roda, sustem hum pezo, e esta ta potencia obra por huma linha de direcção tangente á roda, digo que a potencia será para o pezo, como o raio do tambor ao raio da roda.

DEMONSTRAÇÃO.

Para provar que se a potencia Q sustem o pezo P em equilibrio, haverá a mesma razão de Q a P, que do raio CB do tambor ao raio CA da roda. Note-se que a linha recta AB póde imaginar-se como huma alavanca, cujo fulcro he o centro C do tambor; e estando a potencia Q em hum dos extremos, e o pezo no outro, teremos em caso de equilibrio Q : P :: CB : CA. Figura 56.

Porém se a potencia em vez de obrar pela direcção AQ, obrasse pela direcção DF, sempre tangente á roda, a potencia seria para o pezo, como o raio do tambor ao raio da roda, porque o angulo DCB faz huma alavanca encurvada, cujos braços são CB, e CD. Ora se a potencia obra por huma linha de direcção DF perpendicular ao braço CD, fará o mesmo effeito no lugar D que em A; assim sendo a alavanca encurvada do primeiro genero *, será sempre Q:P::CB:CA, ou tambem Q:P::CB:CD. *O Q.S.Q.D.*

* Numer. 1084.

Póde-se tambem demonstrar pelo movimento, advertindo que em quanto a potencia faz huma volta da roda, o pezo faz huma volta do tambor; mas nós sabemos que a potencia, e pezo estão em equilibrio, quando estão na razão reciproca das suas velocidades: logo denotando a circumferencia da roda a velocidade da potencia, e a circumferencia do tambor a do pezo, será a potencia ao pezo, como a circumferencia do tambor á circumferencia da roda; mas tomando os raios pelas circumferencias, por estarem na mesma razão, será a potencia ao pezo, como o raio do tambor ao raio da roda.

CAPITULO VI.

Dos Moitões, ou Roldanas.

Definições.

1087 A Roldana he huma roda de páo, ou metal segura a huma cinta, ou chapa de ferro, que a cin-

cinge. Quando a rolďana eſtá fixa em huma maquina, de que ſe não affaſta, chama-ſe roldana fixa ; e quando eſtá ſegura a hum pezo, que ſe quer levantar, chama-ſe roldana movel. Quando muitas roldanas eſtão na meſma chapa, ou eſtejão humas de baixo da outra, ou ao lado humas de outras, chamão-ſe polés, ou cadernaes, as quaes podem ſer todas fixas, ou móveis.

REFLEXÃO.

1088 Na theorica dos moitões, como na de todas as outras maquinas, não ſe attende ao roſſado das cordas, nem ao da roldana ſobre o ſeu eixo; póde-ſe com tudo dizer, que quanto maior for a roldana, e menor o eixo, menos roſſado terá.

PROPOSIÇÃO.

THEOREMA.

1089 Se huma potencia ſuſtem hum pezo ajudada de huma roldana, cuja chapa eſteja immovel, digo 1.º que a potencia ſerá igual ao pezo: 2.º que ſe a chapa he movel, de ſorte que ſe levante, e o pezo eſtá ſeguro ao moitão, a potencia ſerá metade do pezo, quando a direcção da potencia, e do pezo são parallelas.

Demonſtração do primeiro caſo.

Figura 57. Se ſe conſidera o diametro A B do moitão como huma alavanca do primeiro genero, por eſtar o pezo em huma extremidade, e a potencia na outra, e o fulcro entre elles, que he aqui o ponto C, para que a potencia eſteja em equilibrio com o pezo, he preciſo haver eſta proporção Q:P :: CA:CB; mas C A = C B, por ſerem raios do meſmo circulo: logo Q=B.

Para demonſtrar iſto meſmo pelo movimento, deve-ſe fazer reflexão, que para a potencia Q puxar para baixo a corda Q B do comprimento v. gr. de dous palmos, he preciſo que o pezo P ſuba tanto quanto deſce a potencia, iſto he, dous palmos; mas em caſo de equilibrio deve a potencia ſer para o pezo em razão reciproca da velocidade, ou do eſpaço da potencia, e do pezo; e co-

como a velocidade de huma he igual á velocidade da outra, a força de huma será igual á força da outra.

COROLLARIO.

1090 Segue-se daqui que os moitões fixos não augmentão a força da potencia, e só servem a mudar as direcções, e diminuir o rossado, que seria muito consideravel, se a corda não voltasse com a roldana, e fosse obrigada a passar, ou escorregar sobre hum cylindro immovel em lugar, que aqui quasi não he mais que o rossado da roldana no seu eixo, que he tanto menor que o que faria a corda á roda de hum cylindro immovel, quanto o raio do eixo he menor que o do moitão; o que tambem mostra, como já dissemos, que quanto maior he o moitão, e menor o eixo, menos rossado haverá.

Demonstração do segundo caso.

Supponhamos huma roldana AB, por baixo da qual passe huma corda, que tenha hum dos seus extremos fixos em G, e ao outro extremo AE se Figura 58.

ap-

applique a potencia Q, ou tambem que o outro extremo da corda passe por sima de huma roldana DE, para que estando a potencia em Q, lhe seja mais commodo puxar para baixo, e finalmente que o pezo P esteja fixo á chapa CI. Devemos provar que a potencia sustem só metade do pezo.

Para isto deve fazer-se reflexão que o diametro AB da roldana póde considerar-se como huma alavanca do segundo genero, cujo fulcro está no extremo B, a potencia no extremo A, e o pezo no meio; mas a potencia está em equilibrio com o pezo, quando for Q:P::CB:AB, e o raio CB he metade de AB: logo a potencia Q será metade do pezo P.

Deve-se notar, que pelo que fica demonstrado no primeiro caso, a roldana DE não faz aqui mais que facilitar a acção da potencia, pois não tem mais força applicada á parte EA da corda, que á parte DQ: não attendo ao rossado tanto na roldana DE, como na roldana AB.

Demonstraremos tambem isto pelo

mo-

movimento, conſiderando que ſe a potencia levantou o pezo P dous palmos, cada pedaço de corda diminue dous palmos, e aſſim deſceo a potencia Q quatro palmos, ou para melhor dizer, o pedaço DQ augmentou-ſe quatro palmos, aſſim o movimento da potencia ſerá duplo do do pezo, e conſequentemente o pezo ſerá duplo da potencia; porque eſtando em equilibrio, a potencia, e o pezo eſtão em razão reciproca das ſuas velocidades.

REFLEXÃO.

1091 Deve-ſe notar que ſe os cabos AQ, e BG não são parallelos, a analogia precedente não ſerá a meſma, iſto he, que não ſerá Q : P : : BC : AB; mas a razão da potencia ao pezo ſerá na razão reciproca das perpendiculares, tiradas do ponto fixo B ſobre as linhas das direcções do pezo, e da potencia. Ora tomando a linha AH pela direcção da potencia, e a linha CI pela do pezo, ſerá BC huma perpendicular tirada á direcção CI do pezo, e BF ſerá perpendicular ſobre a direcção

ção AH da potencia, assim será Q : P :: BC : BF, o que he facil de entender, se se comprehende bem o que fica dito, quando tratámos da alavanca.

Mas como quanto maior he a linha BA a respeito da linha BC, maior he a potencia a respeito do pezo na alavanca do segundo genero, segue-se que sendo a linha BF menor que BA, quando os cabos não são parallelos, a potencia não tem tanta força neste caso que no outro, e por consequencia he preciso que os cabos sejão parallelos, para que a potencia trabalhe com toda a sua força.

CAPITULO VII.

Da Cunha.

1092 A Cunha he huma maquina de ferro, ou de madeira, que serve de levantar os corpos a huma pequena altura, ou a abrir madeiros, que he o seu uso principal, a sua figura he ordinariamente *Isoceles*, quando serve para rachar madeiros; mas suppõe-se

que

que he rectangular, quando ſerve de levantar hum corpo pezado.

Suppõe-ſe em primeiro lugar que as faces AO, e BO da cunha são iguaes, e que o madeiro he flexivel, de modo que começando a rachar, e introduzida a cunha pela força, que a obriga a entrar, as faces da fenda cedem em linha curva, e as faces da cunha fazem força nos dous pontos I, e K, em que ha duas potencias iguaes, que reſiſtem pelas direcções EC, e FC perpendiculares ás faces da cunha, e ás da fenda, que impellem a cunha tanto quanto são opprimidas pela cunha, porque a acção he igual á reacção; e ſupponado que a cunha he batida em G com hum malho, ou outra potencia, cuja direcção he perpendicular a AB, paſſa pelo angulo AOB da cunha, que divide em dous iguaes, por ſer a cunha *Iſoceles*. Ora o objecto diſto he provar primeiramente que no inſtante do equilibrio, que a cunha he encaixada, como ſe acaba de dizer, o páo não ſe racha, mas abrir-ſe-hia, por pouco maior que foſſe a força da cunha: pare- Figura 59.

ce-

ce-me que devemos provar que no inſtante do equilibrio as faces da cunha, impellindo as da fenda, são igualmente reſiſtidas, que vem a ſer o meſmo que as duas forças, que eſtão em I, e K são iguaes.

Para iſto tomando ſobre GO da direcção da potencia R qualquer ponto D, e acabado o parallelogramo CEDF, digo que tem todos os lados iguaes, porque os triangulos CIO, CKO reƈtangulos em I, e K são iguaes, e ſemelhantes, porque os angulos COI, COK são iguaes, e por conſequencia tambem os angulos OCI, OCK; mas o angulo OCF he igual ao angulo CDE por ſerem alternos: logo o angulo OCI igual a OCK he igual ao angulo CDE, e por conſequencia CE, e DE são iguaes entre ſi, e o parallelogramo EF tem os quatro lados iguaes; mas no eſtado do equilibrio a acção da cunha, ou a reſiſtencia do madeiro I he á acção da cunha, ou a reſiſtencia do madeiro K, como CE a CF: logo ſendo CE igual a CF, a força da cunha em I he igual ao esforço da cunha em K.

Cha-

Chamando pois a força, que carrega a cunha, R, e o esforço da cunha em I, P, o esforço em K será tambem P.

PROPOSIÇÃO.

Theorema.

1093 A força, que carrega a cunha, he á resistencia do madeiro, como metade da base da cunha ao comprimento de hum dos seus lados; assim devemos provar 1.º que R : 2P :: AG : AO; 2.º que se huma potencia sustem hum pezo ajudada de huma cunha, a potencia será para o pezo, como a altura da cunha para o seu comprimento. Figura 59.

Demonstração do primeiro caso.

He evidente que as trez potencias P, P, R podem considerar-se como operantes contra o ponto C, em que concorrem as suas direcções, e por isso teremos R : P :: CD : CE + CF, ou CE + ED; mas os triangulos ABO, CED são semelhantes, porque os triangulos AGO, CIO o são, tendo cada hum

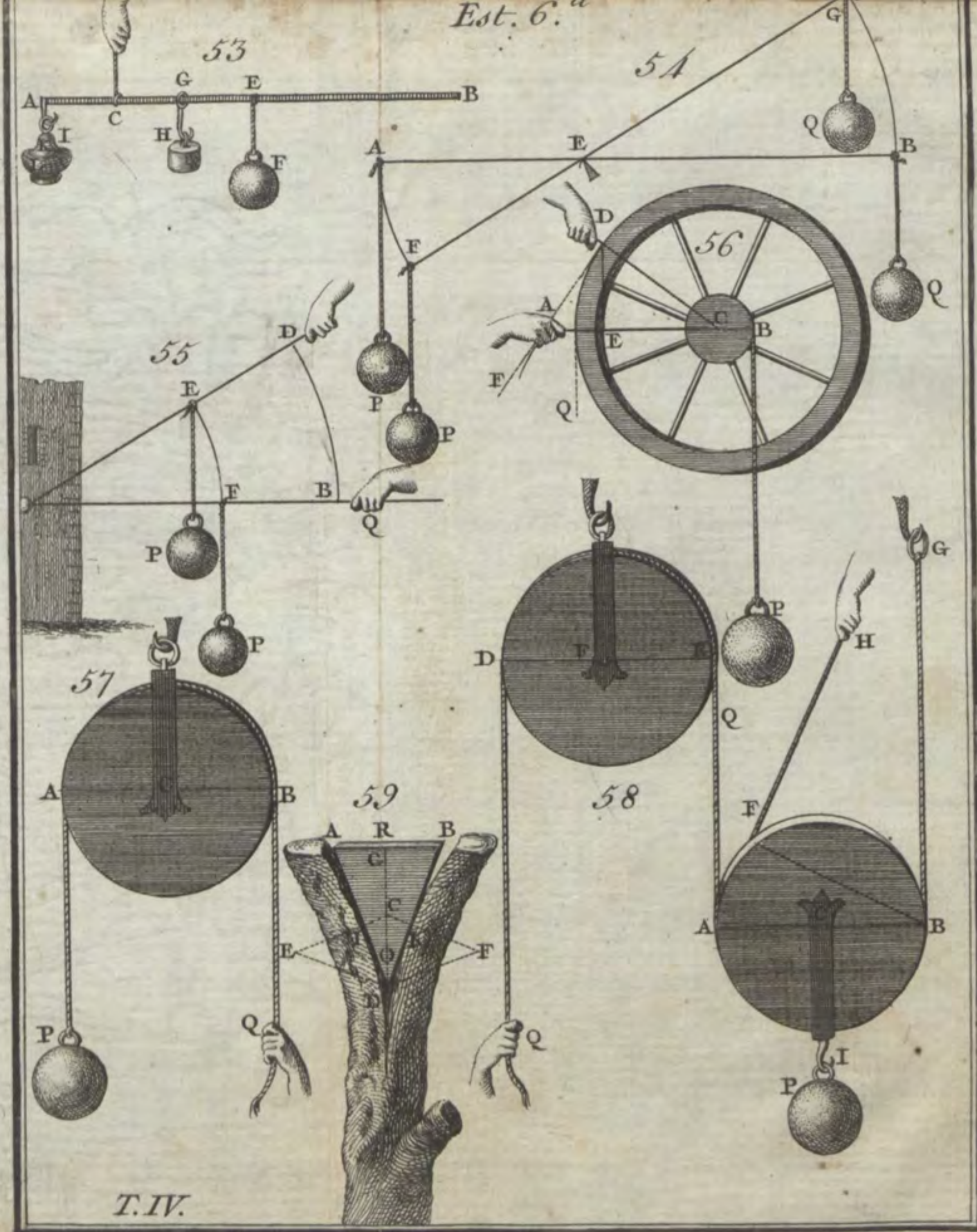
hum

hum angulo recto nos pontos G, e I, e o angulo em O commum, e por isso CD : CE + DE, ou 2CE :: AB : AO + BO, ou 2AO, logo R : 2P :: AB : 2AO, ou dividindo por 2 os dous termos da segunda comparação R : 2P :: AG : AO.

Demonstração do segundo caso.

Para demonstrar agora que se huma potencia Q sustem hum pezo ajudada
Figura 60. da cunha ABC, a potencia he ao pezo, como a altura BC he para o comprimento CA, supponhamos que o pezo P se sustente por huma corda GD segura a hum ponto fixo D, e que huma potencia Q impurre a cunha, de sorte que do sitio, em que estava, chegue a FA, então o pezo P subirá ao alto B da cunha, ou ao ponto E, que he o mesmo, e o caminho da potencia se expressará pela linha AC, e o do pezo pela linha CB, porque a potencia passou de A para F, ou, o que he o mesmo, de C para A, no mesmo tempo que o pezo subio á altura BC, ou EA; mas estando em equilibrio, a potencia, e o pezo são na razão reci-

pro-


53
54
55
56
57
58
59
T. IV.

proca de ſuas velocidades: logo ſerá Q:P::BC:CA. *O Q.S.Q.D.*

COROLLARIO.

1094 Segue-ſe daqui que quanto menor he a altura da cunha, mais força tem a potencia.

CAPITULO VIII.

Da Roſca, ou Parafuſo.

1095 A Roſca he de todas as maquinas a que augmenta mais a força da potencia para elevar, ou apertar os corpos, quando a potencia ſe ſerve de huma manivela para a pôr em movimento; e ainda que todo o mundo conheça eſta maquina, deve-ſe conceber deſte modo para ſe entender melhor a analogia, que vamos fazer.

Seja hum cylindro ABCD, imaginemos que a ſua altura BD eſtá dividida em hum numero de partes iguaes, e que por cada ponto da diviſão com F, e H ſe tirarão perpendiculares FE, e HG á linha BD, igual cada huma Figura 61.

das

das perpendiculares á circumferencia do circulo do cylindro, cujo diametro fosse AB. Se se tirão as linhas EB, e GF, haverão tantos triangulos rectangulos EBF, e GFH, quantas partes iguaes ha na altura BO; e se estes triangulos se enrolão todos no cylindro, o ponto E virá terminar-se em F, e o ponto G em H; e enroladas assim todas as hypothenusas, formarão juntas huma espiral sobre o cylindro, que começará em B, e acabará em D, ou tambem todas as hypothenusas formarão os dentes da rosca, e as alturas BF, e FH farão os intervallos, a que se chama passos da rosca; assim se póde dizer que a rosca he hum cylindro embrulhado em triangulos rectangulos, cujas hypothenusas EB, e GF formão os dentes, e as alturas BF, e FH os passos da rosca, e as bases EF, e GH o contorno do cylindro.

A porca, em que entra a rosca, he outro cylindro cavado, cujo diametro he igual ao da rosca, e cuja superficie interior he composta de triangulos rectangulos iguaes, e semelhantes aos

que

que eſtão á roda do cylindro, que formão a roſca; e aſſim he que os Geometras conſiderão a roſca, e ſua porca.

Mas para tirar deſta maquina toda a utilidade poſſivel, he preciſo cavar o cylindro entre os dentes, formados pelas hypothenuſas dos triangulos rectangulos hum pouco, e diminuir o diametro da porca huma quantidade igual á profundidade dos paſſos da roſca, e fazer tambem entalhes no cavado da porca, para que a roſca poſſa entrar, e voltar livremente: ſe a porca he fixa, voltando a roſca, ſe faz andar; e ſe a roſca he immovel, faz andar a porca.

Ha tambem outra caſta de roſca, que ſe chama *ſem fim*, e não entra em porca, e ſe move por huma manivela, ou huma roda dentada, cujos dentes ſe movem pelos paſſos da roſca, como veremos nas maquinas compoſtas.

PROPOSIÇÃO.

Theorema.

1096 Se huma potencia empurra, ou levanta hum pezo ajudada de huma

ma

ma rosca, a potencia será para o pezo, como a altura de hum dos passos da rosca he para a circumferencia do circulo, que descreveria a potencia applicada á manivela, com que se move a rosca.

Demonstração.

Se se suppõe que a porca CD da rosca he immovel no plano G H, posta a rosca EF em movimento, fará subir o pezo P, que está seguro em huma das suas extremidades F; e se a potencia Q se applica ao extremo B de huma manivela AB, para voltar a rosca deve tambem elle voltar. Ora no tempo que ella descrever huma porção de circulo, cujo raio seja A B, fará a rosca huma volta, e subirá a altura de hum passo; assim o caminho, ou velocidade da potencia será expressada pela circumferencia I B, e o caminho, ou velocidade do pezo pela altura de hum passo da rosca; mas no estado do equilibrio a potencia he para o pezo na razão reciproca da velocidade de huma á de outra: logo a potencia Q he

pa-

para o pezo P, como a altura de hum passo da rosca á circumferencia descripta pela potencia. *O Q. S. Q. D.*

COROLLARIO.

1097 Segue-se daqui que quanto mais juntos são os dentes, e mais comprida a manivela, maior força tem a potencia; assim supondo que os dentes da rosca distem só 2 pollegadas, e a manivela de 9 palmos, ou 72 pollegadas, a circumferencia do circulo, de que ella for raio, será de 452 pollegadas; assim a potencia será para o pezo, como 2 he a 452, ou como 1 a 226, e consequentemente huma potencia de hum arratel ficará em equilibrio com hum pezo de 226 arrates. Não fazemos aqui caso, como tambem nas outras maquinas, da fricção, ainda que seja consideravel.

CAPITULO IX.

Das Maquinas compostas.

1098 JA' dissemos que quando muitas maquinas simplices, da mesma, ou differente especie, fazem mover hum corpo, a maquina, que resulta de todas estas, se chama *Maquina composta*; e como estas maquinas mostrão perfeitamente a grande utilidade das maquinas na pratica, vamos mostrar as propriedades das que estão em mais uso.

1099 Mas primeiro que tudo devemos saber, que a força de hum homem, que impelle, ou puxa, como os que voltão hum cabrestante, ou puxão pelos carrinhos, he quasi 25 arrates, e a de hum cavallo vale 175 arrates, ou igual á de sete homens, como tem mostrado a experiencia.

1100 Que a força de hum homem, que puxa de sima para baixo, póde ser quasi 50, ou 60 arrates, e ainda mais, mas não póde continuar tanto tempo: póde tambem ser igual ao seu pezo, e então não póde operar.

1101 Que a força de hum homem, que anda em huma roda, he igual ao seu pezo.

1102 Que na pratica se deve attender aos roçados, que são tanto maiores, quanto a maquina he mais composta; á grossura das cordas, que alon-

gão

gão os raios, ou ſemidiametros do cylindro, em que ſe enrolão em cada volta, a groſſura da corda, e á inflexibilidade da meſma corda.

Analogia dos Moitões.

1103 Se huma potencia ſuſtenta hum pezo ajudada de muitas roldanas, ou moitões, que he o meſmo, digo que a potencia he para o pezo, como a unidade para o dobro do numero dos moitões de baixo, que são ſempre móveis.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejão HG os moitões de ſima, que são os que são fixos, e DK os de baixo, que levantão, e abaixão o pezo. Seja hum dos extremos da corda prezo no extremo G, e depois ſe paſſe por ſima das roldanas A, B, C, e por baixo das roldanas D, E, F, de ſorte que a potencia puxe pelo outro cabo da corda. Iſto ſuppoſto, quando a potencia puxa pela corda para fazer ſubir o pezo, todas as partes da corda puxão com huma força igual á da potencia Q, e

Figura 63.

por isso cada huma das roldanas de baixo D, E, F leva huma parte igual do pezo P, isto he, hum terço, porque são trez roldanas. Imaginando pois a roldana F como huma alavanca do segundo genero, que tem o seu fulcro em M, a potencia em N, ou na direcção NO, ou RQ, que he o mesmo, e o pezo no meio F, teremos a potencia primeira para o pezo, como MN a MF, isto he, que a potencia será metade do pezo; mas como a roldana sustem aqui a terça parte do pezo, a potencia susterá só a terça parte, porque P : R :: 1 : 6; o que mostra que a razão da potencia ao pezo he como a unidade ao duplo do numero das roldanas D, E, F.

1104 Porém se tivermos huma po-
Figura 64. lé immovel EF, em que as roldanas A, B, C, D estivessem humas aos lados das outras, e outra immovel LM, em que as roldanas H, G, I, K estivessem na mesma disposição que as de sima; e que huma corda, que tivesse hum dos seus extremos fixo em I, passasse por baixo das roldanas inferiores, e por sima das superiores, de sorte que o ou-

tro

tro cabo chegando á ultima roldana A fosse retido por huma potencia Q, veriamos que esta potencia era para o pezo, como a unidade para o duplo do numero das roldanas de baixo; e como são quatro G, H, I, K, teremos Q : P :: 1 : 8.

Outra demonstração pelo movimento.

1105 Para provar que Q : P :: 1 : 6 na Figura 63, ou que Q : P :: 1 : 8 na Figura 64, se deve advertir, que para a potencia Q levantar o pezo P á altura de hum palmo, he preciso que cada huma das cordas, que sustem o pezo, encurte tambem hum palmo, e assim a potencia deve descer tantos palmos, quantos pedaços da corda se encurtão; mas ha duas vezes tantos pedaços de corda, quantas roldanas móveis ha: logo a velocidade do pezo he á da potencia, como a unidade ao dobro dos numeros das roldanas inferiores; e por consequencia a potencia, e o pezo estão em equilibrio, porque estão em razão reciproca das suas velocidades.

Ap-

Applicação do effeito dos Moitões ás Manobras da artilheria.

1106 De todas as maquinas compostas nenhumas estão em mais uso na manobra da artilheria, e nas que geralmente se praticão para levantar facilmente pezos muito pezados, como as cabrilhas. Ora para mostrar o effeito
Figura 65. da cabrilha ABCD, que he composta de duas polés immoveis E, F, e outras duas móveis G, H, a que se prende huma peça de artilheria, que peza 4800 arrates, se a potencia se applica á corda EQ, será Q : P :: 1 : 4, e assim susterá a potencia só a quarta parte do pezo, isto he, 1200 arrates; mas a potencia quando usa da cabrilha não se applica á corda, mas sim á bimbarra MO, que entra no tambor KL. Ora se o cylindro tem hum palmo de diametro, e a bimbarra do eixo do tambor até o lugar, em que se applicou a potencia for de 17 palmos e meio, ou 60 pollegadas, o raio do cylindro, e o comprimento da bimbarra farão huma alavanca do segundo genero, cujo fulcro se-

ſerá no centro do tambor, a potencia no extremo O, e o pezo no lugar I da circumferencia do tambor. Se a potencia ſuſtem o pezo em equilibrio, haverá a meſma razão da potencia ao pezo, como do raio do tambor ao comprimento da bimbarra, iſto he, como 6 pollegadas a 60, ou tambem 1 a 10; mas no lugar I o pezo de 4800 ficou reduzido a 1200: logo a potencia applicada á bimbarra ſuſtentará ſó a decima parte de 1200 arrates, que são 120, e aſſim veremos que huma potencia de 120 arrates ſuſtem por meio deſta maquina hum pezo de 4800 arrates, e que poderia levantar outro mais pezado com huma força menor da que ſe ſuppõe aqui, augmentando o numero das roldanas, e o comprimento da bimbarra.

DEFINIÇÕES.

1107 A maquina ſimples, a que a potencia eſtá immediatamente applicada, e que dá movimento a todas as outras, ſe chama *primeira*; e aquella, ſobre que opera a primeira, ſe chama *ſegunda*; e a ſobre que opera a ſegunda *terceira*, e aſſim as mais.

Co-

COROLLARIO I.

1108 Segue-ſe daqui que o effeito da primeira maquina he a cauſa, que faz mover a ſegunda, como o effeito da ſegunda a cauſa, que faz mover a terceira, e aſſim até á ultima.

COROLLARIO II.

1109 Segue-ſe tambem daqui que nas maquinas compoſtas a razão da potencia ao pezo he compoſta do effeito da primeira maquina á cauſa, que faz mover a ſegunda; do effeito da ſegunda á cauſa, que move a terceira; e aſſim das mais até á cauſa, que faz mover o pezo: por exemplo, na cabrilha, de que acabamos de fallar, a razão da potencia Q ao pezo P he compoſta da razão 1 a 10, da de 1 a 4; aſſim multiplicando os antecedentes deſtas razões huns por outros, e os conſequentes tambem huns por outros, teremos $\frac{1}{40}$ razão compoſta, que ha da potencia ao pezo, o que moſtra que a potencia, e a quadrageſima parte do pezo, porque $\frac{1}{40}$ he o meſmo que $\frac{12}{4800}$, que he a razão, que achamos.

Das

Das rodas dentadas.

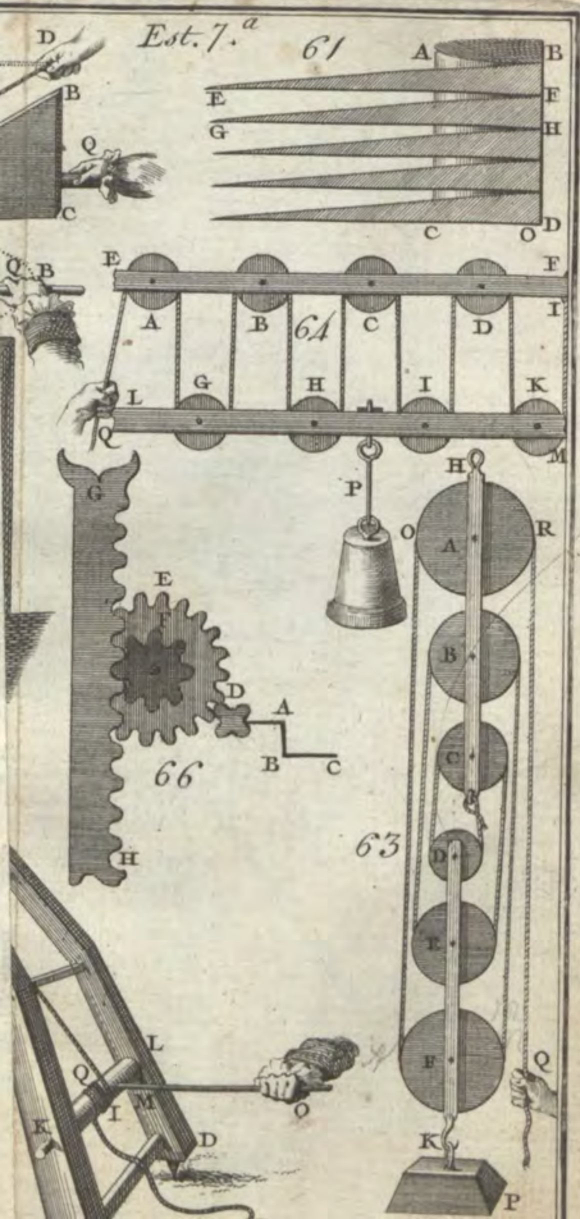
1110 Quando huma maquina he composta de muitas rodas, he preciso que todas sejão dentadas, excepto a primeira, e que todas as lanternas o sejão tambem, excepto a ultima, que deve ser rèdonda, para que a corda, que levanta o pezo, se enrole á roda. As rodas, e as lanternas se dispõem humas a respeito das outras, de modo que a lanterna, ou pião do eixo da primeira roda encaxe nos dentes da segunda; a lanterna, ou pião da segunda nos dentes da terceira, e assim das mais até á ultima. Composta assim esta maquina, se chama *Maquina de rodas dentadas*, que he propria para levantar grandes pezos, tanto maiores, e mais pezados, quantas mais rodas tem.

Analogia das rodas dentadas.

1111 Chamando f o raio da primeira roda, á circumferencia da qual está applicada a potencia, a o raio do seu pião, g o raio da segunda roda, b o do seu pião, h o raio da terceira roda, Figura 66. Fig 67 da, c o do ſeu pião, k o raio da quarta roda, d o do ſeu pião, l o raio da quinta roda, e o do ſeu pião, (que não he dentado) devemos moſtrar que a razão da potencia P ao pezo Q he como o producto dos raios dos eixos ao producto dos raios das rodas.

Se a primeira roda foſſe ſó, e a potencia com ella levantaſſe o pezo Q, que deveria para iſto eſtar ſuſpenſo ao pião, ou tambor deſta roda, ſeria Q : P :: $a:f$; mas o effeito da primeira roda em vez de levantar o pezo, ſe emprega em fazer voltar a ſegunda com os dentes do ſeu pião, que encaixão nos dentes da ſegunda roda: ſegue-ſe que o effeito da primeira roda he que faz mover a ſegunda, porque o effeito dos dentes do ſeu pião, contra os dentes da ſegunda roda, he igual ao pezo, que poderia elevar; o meſmo ſuccede nas outras. Ora ſe ſe chama o effeito da primeira roda r, o effeito da ſegunda $ſ$, o da terceira t, o da quarta u, teremos por primeira razão $q:r::a:f$, por ſegunda $r:ſ::b:g$, por terceira $ſ:t::c:h$, por quarto $t:u::d:k$, e em

Est. 7.ª



em fim por quinto, e ultima razão $u:p::e:l$.

Presentemente se se multiplicão estas sinco proporções termos por termos, isto he, antecedentes por antecedentes, e consequentes por consequentes, teremos esta proporção $qrstu:rstup::abcde:fghkl$. Se se dividem os dous primeiros termos por $rstu$, teremos $q:p::abcde:fghkl$, de que se tira esta analogia para todas as maquinas compostas de rodas dentadas. Se huma potencia sustem hum pezo ajudada de muitas rodas, a potencia he ao pezo, como o producto dos raios das lanternas ao producto dos raios das rodas.

$$\begin{array}{l} q:r::a:f \\ r:s::b:g \\ s:t::c:h \\ t:u::d:k \\ u:p::e:l \end{array}$$

APPLICAÇÃO.

1112 Para mostrar a força immensa, que se póde dar a huma potencia por meio das rodas dentadas, supponhamos que a força da potencia se aplique á primeira roda de huma maquina composta de 5 rodas, e cada huma tenha o raio de 12 pollegadas, porque

as

as ſuppomos iguaes, como tambem os piões, que tenhão por exemplo o raio de huma pollegada. Iſto ſuppoſto, a razão do raio de cada pião ao raio de cada roda ſerá como 1 a 12, aſſim o producto de todos os piões ſerá 1, e o de todos os raios das rodas ſerão 248832; e ſe quizermos ſaber qual he a gravidade do pezo, que huma potencia de 50 arrates, que ſupponho ſer a de hum homem, póde levantar com eſta maquina, lembrar-me-hei que, conforme o que acabamos de demonſtrar, a potencia he para o pezo, como o producto dos raios dos piões ao producto dos raios das rodas; e conſequentemente o producto dos raios dos piões he ao producto dos raios das rodas, como a potencia ao pezo; aſſim para achar o pezo, digo: ſe 1, producto dos raios das carretas, dá 248832 por producto dos raios das rodas, que dará a potencia de 50 libras por pezo, que ſeria capaz de levantar? e achar-ſe-ha 12441600, que he o numero dos arrates, que hum homem póde levantar com huma mediana força, ajudada de hu-

huma maquina, composta de sinco rodas dentadas.

Do Macaco, ou Carlequim.

1113 O macaco, cujo uso he mui frequente na artilheria, mostra bem quanto as rodas dentadas augmentão a potencia; e para se calcular a sua força imagine-se a Figura 67, que representa quasi as partes, de que se põe o seu interior, que se põe em movimento pela manivela ABC, a que se applica a potencia. Quando se volta esta manivela, faz voltar o pequeno carrete D, o qual estando engastado na roda E, a faz tambem voltar. No centro desta roda está outro carrete F, que faz subir o carlequim GH para levantar o pezo. Presentemente se suppõe que a manivela AB (que aqui consideramos como raio de huma roda) seja de 15 pollegadas, e que o raio do carrete D tenha huma pollegada, e o raio da roda E 12 pollegadas, o carrete F 2, conhecer-se-ha a razão da potencia ao pezo, que póde levantar, considerando a razão do producto dos raios dos carretes

ao

Fig. 66

ao producto dos raios das rodas; assim o producto dos carretes será 2, e o producto das rodas 180, o que mostra que a potencia será ao pezo, como 2 a 180, ou como a unidade a 90; e se suppõe que a potencia vale 50, multiplicando 50 por 90, teremos 4500, que he quasi o pezo, que hum homem póde levantar com hum macaco, como o que acabamos de explicar; e se em lugar de duas rodas tivesse mais, vê-se que poderia com esta maquina levantar hum immenso pezo.

Da rosca sem fim applicada ás rodas dentadas.

Figura 68. 1114 A rosca *sem fim* he tambem huma maquina propria a augmentar extremamente a força da potencia, sobre tudo quando faz mover muitas rodas dentadas. Suppondo pois que temos huma maquina composta de hum destes parafusos, e de trez rodas, como na Figura 68, para saber a razão da potencia Q ao pezo P, considero que a potencia applicada a huma manivela, ou a huma alavanca AB, fará vol-

voltar a roſca, que porá em movimento a primeira roda, por cauſa que os paſſos da roſca eſtão encaixados nos dentes da primeira roda, cujos carretes, que eſtão encaixados com os dentes da ſegunda, a farão tambem mover, e o carrete deſta a terceira roda, em cujo carrete eſtá o pezo.

Preſentemente ſe chamarmos n a circumferencia do circulo, cujo raio foſſe a manivela AC, a o intervallo entre os dentes da roſca, f o effeito dos dentes contra os dentes da roda, g o raio da primeira roda, b o do ſeu carrete, h o da ſegunda roda, d o raio do ſeu carrete, k o raio da terceira roda, c o do ſeu carrete, t o effeito da primeira roda, e u o effeito da ſegunda, devemos diſcorrer deſte modo: ſabe-ſe que a potencia, que eſtá applicada á manivela de huma roſca, he para o effeito da roſca, como o intervallo entre os dentes á circumferencia do circulo, que deſcreve a potencia: logo teremos eſta proporção $q:f::a:n$, e o effeito da primeira roda dará tambem $f:t::b:g$, o effeito da ſegunda $t:u::d:h$, e o da ter-

terceira $u : p :: c : k$. Ora multiplicando estas quatro proporções termos por termos, teremos $qstu : stup :: abcd : hgnk$; e dividindo os dous

$$\begin{array}{l} q : s :: a : n \\ s : t :: b : g \\ t : u :: d : h \\ u : p :: c : k \end{array}$$

primeiros termos por stu, teremos Q : P :: $acdh : hgnk$, de que se tira esta analogia: se huma potencia levanta hum pezo ajudada de huma rosca, e de muitas rodas dentadas, a potencia será ao pezo, como o producto do intervallo entre os dentes da rosca, pelos raios dos carretes das rodas, he para o producto da circumferencia, que descreve a potencia pelos raios das rodas.

APPLICAÇÃO.

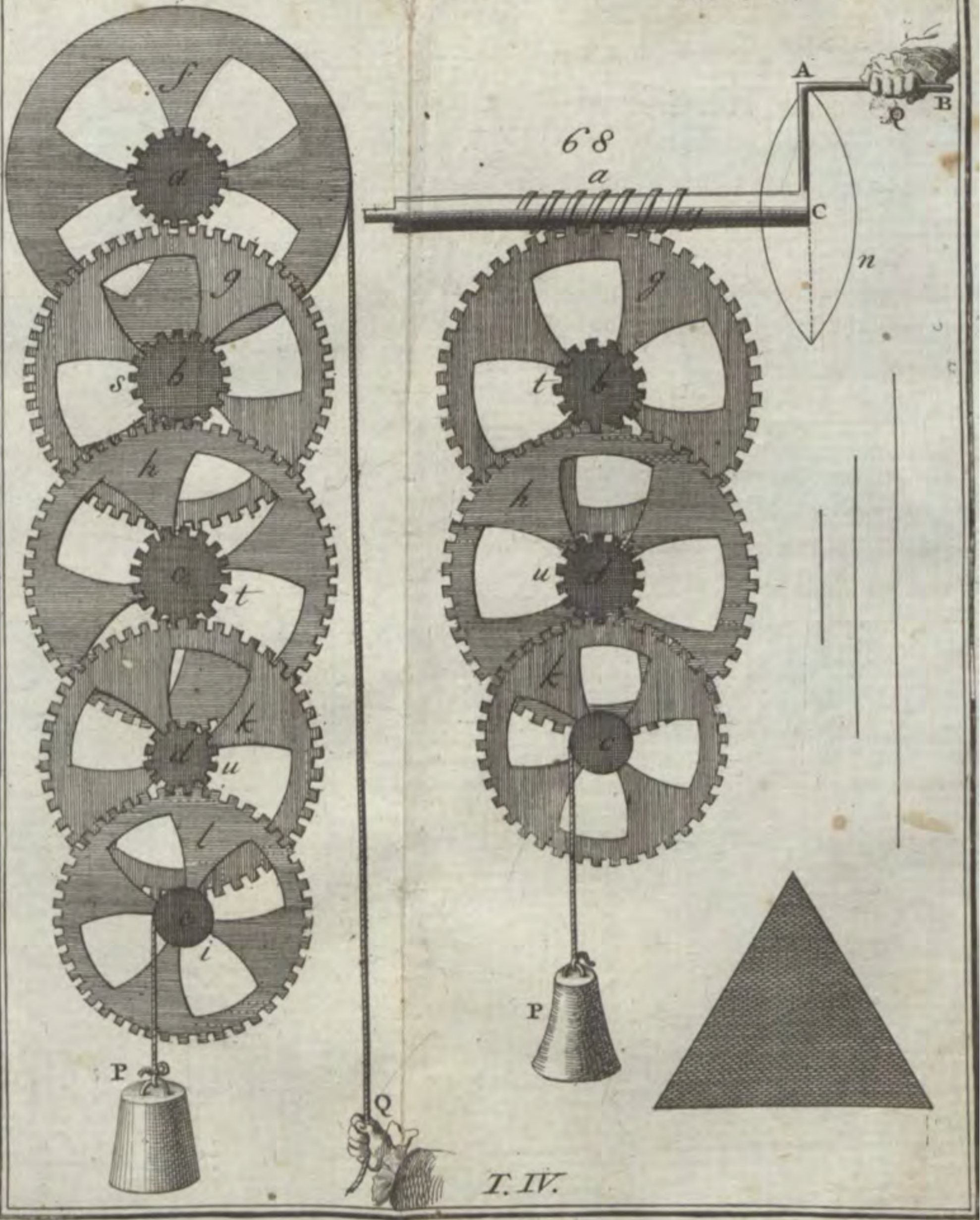
1115 Para saber qual he o pezo, que póde levantar huma potencia de 50 arrates com a maquina precedente, supponhamos que o raio CA do circulo, que descreve a potencia, he 10 e $\frac{1}{2}$ pollegadas, por consequencia será a circumferencia 66 pollegadas, e que a distancia entre os dentes da rosca he de 2 pollegadas, e que o raio da pri-

Figura 68.

mei-

67

68



meira roda he de 24 pollegadas, e o do ſeu carrete de 3, que o raio da ſegunda roda he de 20 pollegadas, o do ſeu carrete de 2, e finalmente que o raio da terceira he de 18, e o de ſeu carrete de 1 e $\frac{1}{2}$. Iſto ſuppoſto, ſe ſe multiplicão os raios dos carretes huns por outros, teremos o producto 9, que multiplicados por hum dos paſſos da roſca, que he de 2 pollegadas, teremos hum dos termos da proporção 18; e multiplicando tambem entre ſi os raios das rodas, e o ſeu producto pela circumferencia, que deſcreve a potencia, teremos 570240 por outro termo da proporção; aſſim ſerá a potencia para o pezo, como 18 a 570240, ou como 1 a 31680; poderemos logo dizer: como 1 he a 31680, que he a razão do producto dos carretes por hum paſſo da roſca ao producto dos raios das rodas pela circumferencia deſcripta pela potencia, aſſim 50, que he a força da potencia, para o pezo, que eſta potencia he capaz de levantar, e ſe achará que eſte pezo he de 158400 arrates.

REFLEXÃO.

Se hum pezo tamanho, como o que acabamos de achar, se póde levantar com a força mediana de hum homem com huma rosca, e trez rodas sómente, não deixou de ter razão Arquimedes em dizer, para mostrar quanto se podia augmentar a força da potencia, que se lhe dessem hum ponto fixo, em que sustentasse a sua maquina, elle se atrevia a levantar toda a terra a pezar do seu pezo enorme: *Da punctum, & movebo.*

Maquina composta de huma roda, e hum plano inclinado.

1116 Tendo hum plano inclinado Figura 69. GH, cuja altura he GI, e hum pezo P sobre este plano, sustentado por huma corda BP parallela a GH, que tem hum dos extremos seguro ao tambor de hum molinete, que se move com a potencia Q applicada a huma das bimbarras AQ, AD, ou AC, que servem de fazer voltar o tambor para levantar o pezo P para sima G, pergunta-se qual he a razão da potencia ao pezo?

Cha-

Chamando GH a, GI b, o raio do tambor c, e o comprimento da bimbarra AC, AQ, ou AD d, a força, que faz a potencia applicada na direcção PB para ſuſter o pezo $ſ$, teremos pela propriedade do plano inclinado $ſ$:P::b:a, e pela propriedade da roda, ſuſtentando a potencia Q ſó o esforço $ſ$ da outra potencia q, teremos Q:$ſ$::c:d; e multiplicando os termos deſtas duas potencias, teremos Q×$ſ$: P$ſ$ :: bc : ad; e dividindo os dous primeiros termos deſta proporção por $ſ$, teremos Q:P::bc:ad, o que moſtra que a potencia he para o pezo, como o producto do raio do eixo pela altura do plano inclinado ao producto do raio da roda, ou do comprimento da bimbarra pelo comprimento do plano inclinado.

APPLICAÇÃO.

1117 Succede muitas vezes para puxar grandes pezos de huma cova, como são por exemplo os toneis de vinho, ou agua ardente, ſervirem-ſe de hum molinete para facilitar o tranſporte; aſſim ſendo o plano da cava horizontal, a eſcada ſe póde conſiderar como hum plano inclinado. Se logo a altura deſte plano inclinado he para o ſeu comprimento, como 16 a 9, havendo na boca da eſcada hum molinete, cujo raio do tambor ſeja por exemplo 6 pollegadas, e o da bimbarra de 36, contados do centro do tambor até ao lugar, em que eſtá a potencia, e quizermos ſaber o pezo do corpo, que huma potencia de 50 arrates tem para ſuſter, ou puxar com ſemelhante maquina, devemos começar, multiplicando o raio do tambor, que são 6 pollegadas, pela altura do plano inclinado, que são 6 palmos, ou ſe póde tomar por iſſo, e o producto ſerão 36 pollegadas; e multiplicando o comprimento da vara 36 pollegadas por 9 palmos, o producto ſerá 2592; aſſim a potencia ſerá para o pezo, que he capaz de ſuſtentar, como 36 para 2592, ou como 1 a 70 e meio; e para achar o pezo baſta dizer: ſe 1 dá 70 e meio, quanto darão 50? e acharei 3525, que he o pezo, que ſe buſca.

Do

Do Macaco, ou Pinaſſa.

1118 Todas as maquinas compoſtas augmentão a força da potencia, excepto aquella, que ſe chama *Macaco*, ou *Pinaſſa*, de que ſe uſa para cravar as eſtacas por meio de hum grande cepo A. Eſte eſtá prezo por duas Figura 70. argolas de ferro B ſuſpenſo em duas cordas, que paſsão pelas roldanas G, e eſtas cordas tem varios cabos O, N, por onde puxão homens, que levantão o cepo para G, e o deixão de repente cahir ſobre a eſtaca CE, que ſe quer encravar; mas como ſuccede que á proporção que a eſtaca ſe enterra, cahe o cepo de mais alto, e adquire com a ſua acceleração maior gráo de força, póde-ſe medir a força do cepo em cada golpe, e tambem ſaber quantos ſerão preciſos para enterrar a eſtaca do modo ſeguinte.

Supponhamos que o terreno, no qual ſe quer enterrar a eſtaca, he homogeneo em todas as ſuas partes, e que logo que a eſtaca ſe encrava hum pouco mais que a parte, que eſtá aguda, o terreno, em que ſe enterra reſiſte ſempre

pre igualmente, porque se não faz caso do rossado da terra, que cérca a superficie da estaca, que se acha cada vez maior á proporção que se enterra a estaca.

Isto supposto, supponhamos que levantando-se o cepo A até sima se acha apartado da cabeça da estaca 4 palmos e meio, e que deixando-se cahir se enterra a estaca 13 pollegadas, de sorte que a cabeça desceo de C para D: para saber quanto se enterra a estaca no segundo golpe, que será mais forte que o primeiro, porque o cepo em lugar de cahir de H para C cahirá de H para D, considero que a força, ou quantidade de movimento de hum corpo he o producto da sua maça pela sua velocidade, e que assim a força do cepo A, cahindo de H para C, será para a força do mesmo cepo, cahindo de H para D, como o producto do pezo do corpo A, pela velocidade adquirida de H para C, para o producto do pezo do mesmo corpo pela velocidade adquirida de H para D; mas nós sabemos que as velocidades de hum corpo, que cahe

de

de differentes alturas, podem exprimir-se pelas raizes quadradas dos espaços corridos; logo chamando a á maça do corpo A, b o espaço corrido HC, e d o espaço corrido HD, teremos $\sqrt{b}$ por velocidade adquirida de H para C, e $\sqrt{d}$ por velocidade adquirida de H para D, assim a força do corpo A, cahindo de C para D, será como $a\sqrt{b}$ para $a\sqrt{d}$, ou tambem como $\sqrt{b}$ para $\sqrt{d}$; mas os effeitos são como as causas: logo o espaço, que se enterra a estaca no primeiro golpe, he para o espaço, que se enterra no segundo, como a raiz quadrada do espaço corrido pelo cepo no primeiro golpe será á raiz quadrada do espaço andado no segundo; mas na supposição o espaço corrido no primeiro he de 4 palmos e meio, ou 36 pollegadas, cuja raiz são 6; e como a estaca se enterrou 13 pollegadas, o espaço KD será de 49 pollegadas, cuja raiz quadrada são 7; digo pois: para achar quanto se enterrou a estaca no segundo golpe, se a velocidade 6 me deo 13, que he o espaço, que entrou a estaca no primeiro gol-

golpe, quanto me dará 7? e acharei 15 e $\frac{1}{6}$, que he quanto a estaca entrou na segunda pancada, que são 15 pollegadas, e 2 linhas, que he a distancia DE.

Para saber quanto se enterrou na terceira pancada, considero que o espaço HE he de 64 pollegadas e $\frac{1}{6}$, cuja raiz são 8, digo pois: se a velocidade 6 me dá 13, que he quanto se enterrou a estaca na primeira pancada, quanto me dará 8? e acharei 17 pollegadas, e 4 linhas; e fazendo sempre o mesmo, acharei quanto se enterrou na quarta pancada, que he 19 pollegadas, e 6 linhas: na quinta 21, e 8 linhas, na sexta 23, e 10 linhas, e assim teremos que se enterra a estaca em cada pancada os seis termos seguintes 13 pollegadas, 15 pollegadas, e 2 linhas, $17+4$, $19+6$, $21+8$, $23+10$, que todos estão em progressão arithmetica, pois se excedem 2 pollegadas, e 2 linhas, e tambem de algumas pequenas partes do ponto, que se desprezão.

Se

Se tivermos huma progreſsão arithmetica $\div a, b, c, d, e, f$, da qual cada hum dos termos note o tempo, em que hum corpo, cahindo de differentes alturas, gaſtou em correr differentes eſpaços, e eſtes eſpaços ſejão por exemplo g, h, i, k, l, m, eſtes eſpaços eſtão na razão dos quadrados dos tempos, iſto he, como aa, bb, cc, dd, ee, ff. Ora ſe ſe extrahe a raiz quadrada de huma, e outra deſtas progreſsões, teremos $\div a, b, c, d, e, f$ por tempos, e $\sqrt{g}, \sqrt{h}, \sqrt{i}, \sqrt{k}, \sqrt{l}, \sqrt{m}$ pelos eſpaços corridos. Ora ſe os tempos a, b, c, d, e, f eſtão em progreſsão arithmetica, as raizes dos eſpaços eſtarão tambem; aſſim não he de admirar que ſe os tempos, que o cepo gaſta em cahir, eſtão em progreſsão arithmetica, o eſtejão tambem as raizes dos eſpaços, que são as velocidades adquiridas; mas eſtas podem conſiderar-ſe como cauſas de ſe enterrar a eſtaca em cada pancada; e como os effeitos são proporcionaes ás cauſas, ſendo as cauſas em progreſsão arithmetica, o ſerão tambem os effeitos, o que faz que a eſtataca ſe deve enterrar na ſegunda pancada mais que na primeira, e mais na terceira, que na ſegunda na razão de huma progreſsão arithmetica.

Do que acabamos de dizer ſe póde tirar o modo de conhecer os golpes, que são neceſſarios em huma eſtaca para a cravar, porque baſta examinar quanto ſe cravou na primeira pancada, e eſta quantidade ſerá o primeiro termo de huma progreſsão arithmetica. Suppondo pois que ſe enterra 12 pollegadas, e que na ſegunda ficou enterrada 14, eſte numero tómo como o ſegundo termo de progreſsão, e como a differença são 2, ſerá o terceiro termo 16, o quarto 18, e o quinto 20; e ſe a eſtaca tiver por exemplo 18 palmos, eſte comprimento expreſſará a ſomma de todos os termos de progreſsão: aſſim ſommo todos os termos para ver ſe fazem 144 pollegadas; e como me falta muito, buſco alguns termos por exemplo 22, 24, 26, que fazem com os outros 152 pollegadas, que excedem 8 o comprimento da eſtaca; e como tenho 8 termos, que me derão eſ-

ta

ta quantidade, vejo que são precisas 8 pancadas. Esta materia se achará tratada melhor no primeiro volume da segunda Parte da nossa Arquitectura Hydraulica, pag. 188.

Applicação da Mecanica á construcção dos armazens da polvora.

1119 Não ha edificio militar, que seja de mais consequencia que os armazens de polvora, nem que peção mais reflexão na sua construcção; porque como sempre se fazem de abobeda, precisa-se saber quaes são as melhores, se as em volta inteira, se as abatidas, ou em terço de ponto, para resistir ás bombas; depois necessita saber-se proporcionar a grossura das paredes ao pezo, e grandeza das mesmas abobedas.

A maior parte dos Engenheiros se achão discordes sobre o modo de fazer as abobedas dos arcenaes: huns querem que seja melhor a abobeda em volta inteira, e outros a de terço de ponto; o certo he que esta ultima tem menos carrego que a de volta inteira, e este menos que a abatida, o que se póde de demonſtrar geometricamente, ſem entrar em grande theorica.

Conſideremos a Figura 71, que he do perfil de hum armazem de polvora, cuja abobeda he de volta inteira, e a Figura 72, que he outro perfil de huma abobeda em terço de ponto: neſtas figuras dividão-ſe pelo meio os arcos ED, e FD por linhas tiradas dos ſeus centros. Se ſe conſidera a parte ſuperior BAGC da abobeda como huma cunha, que carrega contra os pés direitos, e mais partes das abobedas para as ſeparar, ver-ſe-ha que quanto mais agudo for o angulo ABC, maior força terá a cunha, conforme as leis da Mecanica; ou tambem ſe a linha AB ſe conſidera como hum plano inclinado, ver-ſe-ha que quanto mais inclinado for, maior força terá o corpo GAB para deſcer, pois o pezo relativo ſerá menor, quanto menos inclinado he o plano. Se na Figura 72 ſe conſidera QTRS como huma cunha, ver-ſe-ha que ſendo o angulo QSR obtuſo, fará a cunha menos effeito para ſeparar as partes RZ, e QN, do que na Figura

71, em que o angulo he recto; e se se considera tambem a linha PQ como hum plano inclinado, ver-se-ha que sendo muito menos inclinado que o plano AB, a parte TQS não fará tanta força para descer como a parte GAB; e sendo consequentemente considerados todos os eleitamentos, que compõem a abobeda como cunhas, ou corpos, que fazem força para descer successivamente por planos inclinados, farão menos força na abobeda em terço de ponto do que de volta inteira; e por hum semelhante discurso se mostrará o mesmo de abatida a respeito da de volta inteira.

O outro defeito da abobeda em volta inteira he obrigar a que o tecto seja muito chato, o que a faz menos capaz de resistir ao impulso das bombas, que não fazem tanta força, quando o plano sobre que cahem he mais inclinado, porque então escorregão sem fazer tanto damno. Se se quer evitar este defeito, em lugar de fazer o tecto como na Figura 71, se deve fazer como na Figura 73, isto he, mais elevado, o que obriga a carregar o fecho

da

da abobeda com alvenaria, e fazer as paredes mais groſſas. Além diſſo outra ventagem das abobedas em terço de ponto he, que ſe o armazem ſe não quer fazer muito alto, ſe póde começar a abobeda 6, ou 8 palmos do pavimento, e fica o armazem com baſtante altura; e fazendo-ſe em volta inteira, precisão os pés direitos terem ao menos 12, ou 14 palmos de altura, o que obriga a fazellos mais groſſos; porque não ha duvida que á medida que ſe fazem mais levantados, ſe lhes deve dar mais groſſura. Outras muitas razões podia allegar a favor das abobedas em terço de ponto, mas julgo que o que tenho dito he baſtante para moſtrar que ellas ſe devem preferir ás outras.

Ainda que ſeja quaſi impoſſivel determinar a groſſura, que deve ter a abobeda a prova de bomba, pois nem todas as bombas tem o meſmo pezo, e cahem de diverſas alturas, iſto não embaraça que ſe lhe determinaſſem 4 palmos e meio no fim dos terços, e me parece baſtante groſſura, quando o tecto não for muito chato.

Pa-

Pareceo-me conveniente determinar o angulo do eſpigão do tecto de hum armazem de polvora, para que não fique demaziado agudo, nem obtuſo: eis-aqui o methodo, de que me ſirvo.

Suppondo que ſe quer fazer hum armazem, cuja abobeda ſeja em volta inteira, determinarei primeiro a larguera do armazem, que ſerá por exemplo a linha A C, que deve ſervir de diametro ao ſemicirculo da abobeda: ſobre o centro B levanto a perpendicular BG, e divido em dous cada quarto de circulo AN, e NC pelas linhas BM, e BE, e a cada huma das linhas DE, e LM dou 4 palmos e meio, que determinão a groſſura no fim dos terços da abobeda: do centro B deſcrevo o meio circulo, que ſe acha dividido em dous igualmente pela perpendicular no ponto G, cujo diametro he a linha FI: tiro tambem as cordas FG, e GI, e pelo ponto E, e M tiro OH, e HK parallelas ás cordas do ſemicirculo, e eſtas parallelas me dão o tecto OHK, que forme hum angulo recto em H, porque o angulo H he igual ao angulo G, G, e assim se achará por este methodo que o angulo sempre he recto, o que me parece o mais conveniente, porque o angulo obtuso faz o tecto muito chato, e o agudo carrega muito o feixo da abobeda pelo grande vasio, que deixa sobre elle, que he preciso encher de alvanaria.

Figura 72. Para descrever a abobeda em terço de ponto, supponho que os pontos V, e X denotem o nascimento da abobeda: tiro a linha V X, que divido em quatro partes iguaes, e do ponto P, como centro, com o intervallo PV descrevo o arco VY: do ponto O, e intervallo OX o arco XY, que fórma com o antecedente a altura VYX da abobeda: depois divido cada hum destes arcos em dous igualmente, e tiro as linhas OR, e PQ, e dou a cada huma das linhas AQ, e BR 4 palmos, e 7 pollegadas: depois divido a perpendicular LY em trez partes iguaes, e do extremo M da primeira parte descrevo o semicirculo KTD, e tiro, como na Figura precedente, as cordas KN, e ND, e pelos pontos Q, e R

duas

duas parallelas a estas cordas, que formão o tecto da abobeda, que fica em angulo recto.

Dei ás linhas AQ, e BR 4 palmos, e 7 pollegadas, porque ficão maiores que os fins dos terços da abobeda, que seguindo o que acabamos de dizer, vem a ficar no mais fraco, da grossura de 4 palmos e meio. Aqui se póde fazer reflexão na differença da alvenaria, que se acha sobre o feixo da abobeda em terço ponto, ou em volta inteira, isto he, quanto he huma mais carregada que a outra, porque sobre a abobeda em terço ponto ha 9 palmos de altura de alvenaria, e na em volta inteira mais de 15, e he a razão, por que os pés direitos nesta abobeda são menos grossos do que na de volta inteira, além de que são tambem menos altos.

Mas para regular a grossura dos pés direitos, tanto em humas, como em outras, julguei conveniente pôr aqui huma taboada, que eu calculei, para proporcionar a grossura dos pés direitos das abobedas nos armazens á largura da obra, e á elevação dos mesmos pés direitos, isto he, bûscando hum justo equilibrio entre a resistencia, e força das abobedas: depois do que augmento hum quarto o carrego para fazer os pés direitos capazes de resistencia superior ao equilibrio. Não fiz caso dos contrafortes, que se fazem ordinariamente aos pés direitos, porque se podem de algum modo evitar; e como isto pareceria que era querer mudar a pratica ordinaria, deixo o uso delles á discrição dos que forem encarregados de semelhantes obras, como tambem dar-lhes as medidas, que julgarem convenientes; pois ainda que parece que depois de ter dado aos pés direitos as grossuras sufficientes para resistir ao carrego da abobeda sejão escusados os contrafortes, não embaraça que seja util o seu uso, pois muitas vezes he conveniente fazellos ainda nas muralhas, que não tem abobedas.

Resta-me dar o uso da taboada seguinte, que calculei para quatro castas de armazens de polvora. Na primeira columna está escrita a largura dos armazens, que tem de 30 até 54 pal-

palmos, e a columna ao ſeu lado he a eſpeſſura dos pés direitos para as abobedas em volta inteira, ſuppondo que em todo ſeja a ſua altura do pavimento até ao naſcimento da abobeda 13 palmos e meio: aſſim querendo ſaber qual deve ſer a largura do pé direito para hum armazem, cuja largura foſſem 45 palmos, vejo que correſponde a 11 palmos e 3 pollegadas, que he a largura, que deve ter, para que a reſiſtencia fique ſuperior ao carrego da abobeda, feita a prova de bomba.

A ſegunda taboa moſtra a groſſura, que ſe deve dar aos pés direitos das abobedas dos armazens de polvora, que ſe fizerem em terceiro ponto, ſuppondo o naſcimento da abobeda a 7 palmos e meio do pavimento, como moſtra o ſegundo perfil, e iſto em todas as larguras notadas na primeira columna; e aſſim para ſaber a groſſura, que deve ter o pé direito de huma abobeda em terceiro ponto de hum armazem, cuja largura foſſem 36 palmos, e os pés direitos dentro tem ſó 7 palmos e meio, he preciſo buſcar na primeira columna o numero 36, e ver-ſe-ha que lhe correſponde 8 palmos, e 6 pollegadas.

A terceira taboa ſerve para regular a groſſura dos pés direitos nos armazens, que tem hum ſubterraneo, e ſuppuz, calculando-o, que a altura dos pés direitos devia ſer de 18 palmos, contados do ſubterraneo até o naſcimento da abobeda, que deve ſer em terço de ponto.

A quarta finalmente he calculada para os pés direitos dos armazens de polvora, que tem hum andar na abobeda ſobre a altura dos pés direitos, e deve ſer de 13 palmos e meio, quando a largura for de 30 até 54 palmos, e as abobedas em terço de ponto.

O principio, de que me ſervi no calculo deſtas taboadas, foi huma conſequencia de hum dos mais bellos Problemas da arquitectura, que raras peſſoas ſabem, nem ainda os mais famoſos Arquitectos, que he ſaber dar ao pé direito de huma abobeda huma groſſura, em que fique em equilibrio a reſiſtencia com o carrego da abobeda, ou, o que he o meſmo, ſaber dar aos pi-

pilares das pontes a groſſura para ſuſtentar o pezo dos arcos. O Padre Derano no ſeu Tratado do córte das pedras, Mr. Blondel no ſeu Curſo de Arquitectura, e muitos outros tem pertendido dar regras ſobre iſto; mas o ſeu principio ſe falſifica em que não attendem á altura dos pés direitos, nem á groſſura da abobeda. Mr. de la Hire deo huma perfeita ſolução nas memorias da Academia das Sciencias anno 1712: podia trazer aqui eſta memoria, e explicar os lugares, que me parecêrão eſcuros, mas contentei-me com pôr aqui a taboada, que ſe acha explicada com miudeza na Sciencia de Engenheiros.

Ta-

Taboa para determinar a groſſura dos pés direitos nos armazens de polvora.

Largura dos armazens.	Groſſura dos pés direitos nas abobedas em volta inteira nos armazens de hum andar.			Groſſura dos pés direitos para as abobedas em terço de ponto para os armazens de 1 andar.		
Palmos.	*Palm.*	*Poll.*	*Linh.*	*Palm.*	*Poll.*	*Linh.*
30	8	6		7	6	
31 $\frac{1}{2}$	8	4	8	7	7	
33	9	2	2	8	1	6
34 $\frac{1}{2}$	9	4	6	8	3	4
36	9	6	0	8	6	0
37 $\frac{1}{2}$	10	0	3	9	0	4
39	10	2	0	9	2	0
40 $\frac{1}{2}$	10	3	9	9	5	0
42	10	6	6	10	0	0
43 $\frac{1}{2}$	11	0	9	10	2	6
45	11	3	0	10	3	0
46 $\frac{1}{2}$	11	5	4	10	6	4
48	11	7	10	11	0	9
49 $\frac{1}{2}$	12	2	8	11	3	0
51	12	3	11	11	5	4
52 $\frac{1}{2}$	12	5	9	11	7	0
54	13	0	0	12	0	0

Taboa para determinar a grossura dos pés direitos nos armazens de polvora.

Largura dos armazens.	Grossura dos pés direitos para as abobedas dos armazens, que tem hum subterraneo.			Grossura dos pés direitos para as abobedas dos armazens, que tem dous andares.		
Palmos.	*Palm.*	*Poll.*	*Linh.*	*Palm.*	*Poll.*	*Linh.*
30	10	4		8	1	6
$31\frac{1}{2}$	10	6	5	8	4	6
33	11	0	10	8	6	6
$34\frac{1}{2}$	11	3	3	9	0	10
36	11	5	9	9	2	6
$37\frac{1}{2}$	12	0	1	9	4	6
39	12	2	6	9	5	11
$40\frac{1}{2}$	12	4	10	10	0	0
42	12	7	3	10	2	3
$43\frac{1}{2}$	13	1	8	10	4	0
45	13	4	1	10	6	9
$46\frac{1}{2}$	13	6	6	11	1	6
48	14	1	11	11	4	0
$49\frac{1}{2}$	14	4	4	11	6	6
51	14	6	9	12	2	0
$52\frac{1}{2}$	15	1	2	12	4	2
54	15	3	7	12	6	0

Depois de ter fallado dos armazens de polvora, julgo que com gosto se verá a força, com que as bombas cahem sobre as suas abobedas, para que se veja a differença que ha em considerar as cousas como ellas nos parecem, de como são em si mesmo, e que as Mathematicas nos dão nesta materia conhecimento de muitas cousas, que a pratica dos bombeiros mais expertos nunca lhe deo a conhecer.

Applicação dos principios da Mecanica á arte de lançar as bombas.

1120 Já mostrámos * que para achar a força, com que cahia huma bomba sobre hum plano, era preciso multiplicar o seu pezo pela raiz quadrada da altura, a que se tinha elevado, e trabalhamos como se a bomba cahisse por huma direcção perpendicular ao horizonte, e como se o plano fosse de nivel com a bateria; mas como as bombas raras vezes cahem por direcções perpendiculares aos planos, que encontrão, e pela maior parte cahem em superficies, que são mais elevadas que a ba-

* Numer. 1118.

a bateria, o Problema, de que acabo de fallar, não he abſolutamente exacto, porque ſe preſcinde das duas circumſtancias precedentes; e ſe ſenão fez caſo della, foi porque ainda não eſtava eſtabelecido o principio da Mecanica pouco antes explicado; e como não reſta que deſejar neſta materia, eis-aqui como ſe deve diſcorrer.

Se a linha AB moſtra a elevação do morteiro ſobre o plano horizontal AC, e a parabola AHD, a que deſcreveo a bomba, a linha AB, que vai encontrar o eixo prolongado da parabola, ſerá a tangente deſta curva tirada do ponto A, a linha BD outra tangente tirada do ponto D; mais quando o corpo he impellido por huma direcção, que não he perpendicular ao horizonte, a direcção, por que o corpo fere o corpo, he denotada pela tangente, tirada pelo ponto da parabola, em que o corpo encontra o plano: aſſim a bomba, que deſcreveo a parabola AHD, ferirá o plano AC pela direcção BD; mas como eſta linha he obliqua ao plano AC, ſe a força da bomba he expreſſada por Figura 74.

FD,

FD, não ferirá o plano com toda a força FD; porque se se abaixa FE perpendicular sobre AC, e se acaba o parallelogramo EG, a força FD será igual
* Numer. 1039. ás forças FG, e FE *, que obrão juntas; mas a força FG, parallela ao horizonte, não obra sobre o plano AC: logo só a força expressada por FE he que fere o plano, o que mostra que a percussão da bomba pela direcção BD he á percussão da mesma bomba pela direcção perpendicular BI, como FE a FD, ou como BI a BD, isto he, como a subtangente á tangente, ou tambem como a tangente do angulo da elevação do morteiro á secante do mesmo angulo, ou ainda como o seno do angulo da elevação ao seno total: assim supposndo que o angulo BAI seja de 50 gráos, póde dizer-se que a percussão da bomba, que cahe pela direcção perpendicular BI, he para a percussão pela direcção BD, como 100000 a 76604.

Considerando só as percussões das bombas, que cahem sobre hum plano horizontal, parece que o que se acaba de dizer não he de grande utilidade; por-

porque as bombas, que ſe lanção nas obras, ou ſeja da parte dos ſitiados, ou dos ſitiadores, ſempre fazem maior effeito com os eſtilhaços, quando rebentão, que com o pezo; e ſe o pezo neſte caſo tiveſſe lugar, não ſeria mais que em arruinar os ſubterraneos, que ſe praticão nas praças de baixo dos reparos para diverſos uſos, a que ſe deſtinão; mas como a percuſsão de huma bomba merece mais attenção, quando cahe em hum edificio, que os ſitiadores pertendem deſtruir, como hum armazem de polvora, cuja abobeda pertendem arruinar, que he hum plano inclinado ao horizonte, devemos neſte caſo examinar com particularidade a quéda das bombas.

Se tivermos hum morteiro no ponto A para lançar huma bomba ſobre o plano inclinado KL, e ſe queira ſaber Figura 75. qual he a força da percuſsão da bomba, que tendo deſcripto a parabola AHD, vem a cahir no ponto D do plano inclinado, conſidero que ferindo o ponto D, obra pela direcção BD, que he huma tangente tirada pelo ponto to D da parabola. Ora ſe ſe toma a linha FD para exprimir a força da bomba, quando eſtá para cahir ſobre o plano inclinado, ſendo eſta força obliqua ao plano, não expreſſará a força, com que a bomba ferirá eſte plano, mas ſómente a força da bomba em ſi meſma; e ſe do ponto F ſe tira a linha FE perpendicular ſobre KL, expreſſará a força, com que a bomba ha de ferir o plano inclinado; porque fazendo o parallelogramo GE, teremos os lados FE, e FG, que expreſſarão duas forças, as quaes obrando juntas, ſerão iguaes a FD; mas a força FG, ſendo parallela ao plano KL, não obra abſolutamente ſobre o plano: logo ſó a linha FE exprime a percuſsão da bomba; aſſim póde dizer-ſe que a percuſsão de huma bomba, que cahe obliquamente ſobre hum plano inclinado, he á percuſsão pela direcção perpendicular, como FE a FD, ou como o ſeno do angulo FDE ao ſeno total, cahindo da meſma altura.

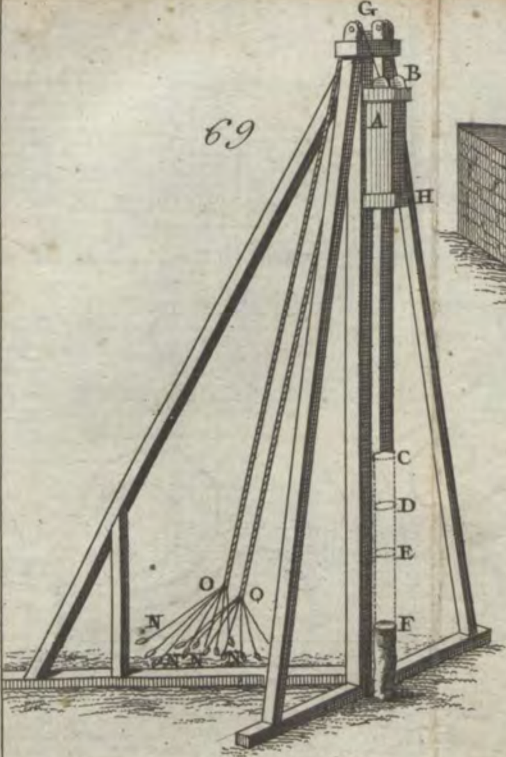
Se quizermos ſaber qual he eſta razão, buſcaremos o angulo FDE, que ſe ſe achará, conhecendo o valor do angulo KDC formado pelo horizonte, e plano inclinado, e o angulo da inclinação BAD igual a BDA: aſſim ſuppondo o angulo BDA de 50 gráos, o angulo KCD de 70, ſommados fazem 120 gráos, que diminuidos de dous rectos, a differença ſerá 60 gráos, valor do angulo FDE, cujo ſeno he 86602, e conſequentemente a razão da percuſsão da bomba pela direcção perpendicular he á da direcção obliqua FD, como 100000 a 86602.

Todos julgão (e em certo modo tem razão) que o effeito das bombas ſerá tanto maior, quanto de mais alto ellas cahem: com tudo iſto não he verdade, ſenão quando o plano, que a bomba encontra, he de nivel com a bateria, porque cahindo de muito alto deſcreve huma curva, que ſe aproxima muito á vertical; mas quando o plano he inclinado ao horizonte, a quéda pela vertical he a que fere o plano inclinado com menos violencia, que por nenhuma das direcções poſſiveis entre a horizontal, e a vertical, cahindo as bom-

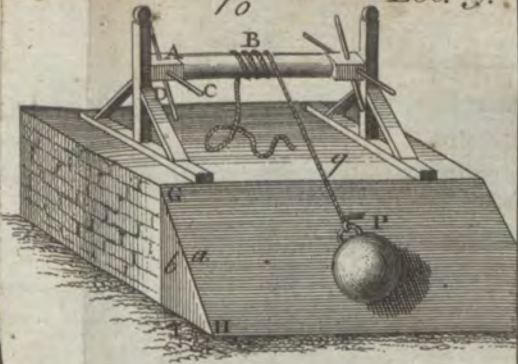
bombas de igual altura; e só quando a tangente, tirada ao ponto da parabola, que encontra o plano inclinado, he perpendicular ao mesmo plano, he que a fere com toda a sua força absoluta. Ora para fazer que huma bomba caia sobre hum plano inclinado por huma direcção perpendicular, he preciso conhecer o angulo de inclinação, que

Figura 76. fórma o plano com o horizonte, e apontar o morteiro por hum angulo igual ao do complemento do do plano inclinado. Por exemplo: se sobre o plano inclinado KL se levanta a perpendicular BD ao ponto D, que vá encontrar a perpendicular BE levantada no meio da amplitude AD da parabola; e se se tira a linha AB, o angulo BAD será o que se deve dar ao morteiro para lançar a bomba ao ponto D; mas este angulo he igual ao angulo BDE, que he o complemento do angulo KDC, por ser BDK recto: logo o angulo BAE, complemento do angulo da inclinação, he o que se deve dar ao morteiro, para que a bomba fira o plano inclinado por huma direcção

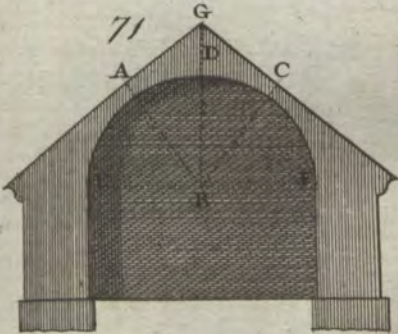
69



70

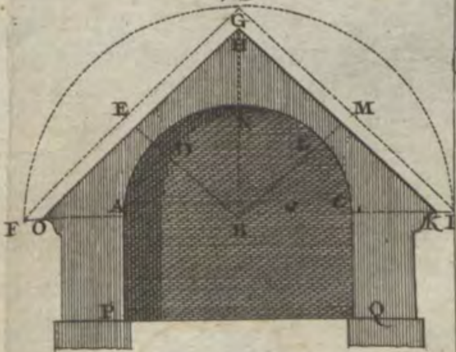


71



72

73



ção perpendicular ao meſmo plano, a que ſe atira.

Por eſta theorica ſe póde determinar a carga, e gráos de força, que deve ter hum morteiro, o angulo, que ſe lhe deve dar para lançar huma bomba em hum plano inclinado, de ſorte que fira eſte plano com a maior força poſſivel: e tambem demonſtrar, que quando as raizes quadradas de differentes alturas, de que cahir huma bomba ſobre hum plano inclinado, forem reciprocamente proporcionaes aos ſenos dos angulos da incidencia, formados pelas differentes direcções das bombas, ſempre o effeito ſerá igual, e quantidade de couſas, que na verdade são mais para exercitar o engenho, que para ſervirem na pratica, e por iſſo ſó fallarei de dous caſos, que me reſtão por explicar, a ſaber: qual he a força da bomba, que ſe atira de hum lugar mais baixo, ou mais elevado que o plano, a que ſe lança; e como ſabido hum deſtes caſos, facilmente ſe concebe o outro, eis-aqui o que reſpeita o plano inclinado mais elevado que a bateria.

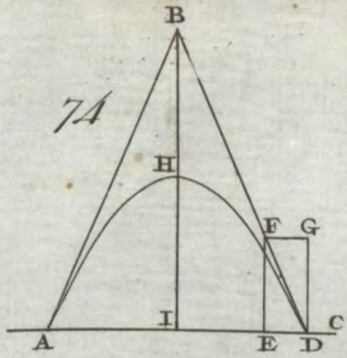
Se

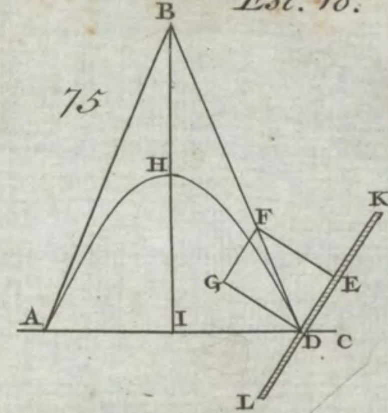
Se ſe achou pela regra de lançar as bombas que o angulo B A I he o mais proprio para a elevação do morteiro, Figura 77. a fim de lançar a bomba ao ponto D de hum plano inclinado KL, mais elevado que o horizonte AP, conhecer-ſe-ha a amplitude AP da parabola AHP, e conſequentemente o ſeu eixo HI: primeiro ſe deve ſaber a elevação DQ do ponto D ſobre o horizonte A P; mas ſe a bomba em lugar de cahir em P cahe em D, tirando DO parallela a PA, a velocidade da bomba ſerá expreſſada pela raiz quadrada de HN. Se para expreſſar eſta força ſe toma a linha FD, e ſe tira FE perpendicular ao plano KL, o effeito da bomba no ponto D ſerá expreſſado pela linha FE, e não pela linha FD, como acabamos de ver. Ora ſendo a razão da força perpendicular á obliqua, como F D a F E, ou como o ſeno total ao ſeno do angulo FDE, ſe ſe quer ter eſte ſeno para conhecer em numeros a razão da linha AD á linha FE, deve buſcar-ſe o valor do angulo MON formado pela ordenada ON, e a tangente O M, que he o angulo, que

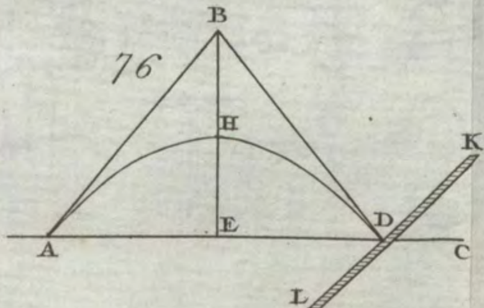
que ſe deverá dar ao morteiro, ſe a bomba ſe tiveſſe tirado do lugar O de nivel com o ponto D. Para o achar conſidere-ſe que conhecida a abciſa HN, que he a differença de HI a HD, ſe conhecerá tambem a ſubtangente MN, que he hum dos lados do triangulo rectangulo MNO; e como para achar o angulo, que buſcamos, neceſſitamos do lado ON, diremos para o achar: a abciſa HI he á abciſa HN, como o quadrado da ordenada AI ao quadrado da ordenada ON, que ſe achará pela regra da proporção; e extrahindo a raiz quadrada, teremos o lado MN4, o angulo NON, ou MDN ſeu igual; e ſe a eſte angulo ſe accreſcenta o valor do angulo EDC, formado pelo plano inclinado, ao horizonte, e da ſomma deſtes dous angulos ſe tira o valor de dous rectos, teremos por differença o angulo FDE, cujo ſeno determinará a força da bomba no ponto D a reſpeito do ſeno total, que expreſſa a força abſoluta.

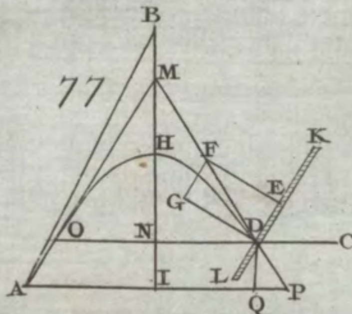
Do que temos dito ſe podem deduzir regras para determinar a força de centro da terra, em huma palavra, ſe pudeſſe mover-ſe ſempre em linha recta, a ſua força ſeria ſempre a meſma em qualquer diſtancia que foſſe, porque conſervaria ſempre o movimento adquirido, que ſe perde, á proporção que o communica aos corpos, que encontra, não havendo razão para o contrario.

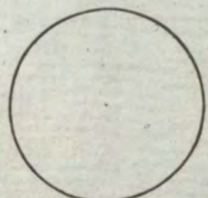
FIM DO DECIMOQUINTO LIVRO.

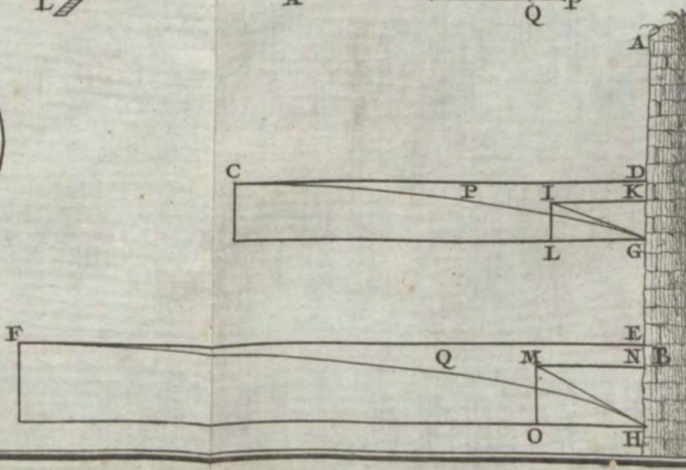

74
B
H
F G
I
A E D C


75
B
H
K
F
G E
A I D C
L


76
B
H
K
D
A E C
L


77
B
M
H F K
E
G
O N D C
A I L P
Q




A
C D
P I K
L G
F E
Q M N B
O H

NOVO CURSO
DE
MATHEMATICA.

LIVRO XVI.
DA HYDROSTATICA.

NESTE livro trataremos as propriedades dos fluidos consideradas a respeito do seu equilibrio, e he o que se entende pela palavra Hydrostatica. He evidente que esta parte se segue da Mecanica, e póde ter-se por huma das mais importantes. Seria para desejar se se pudesse estabelecer huma theorica tão simples ácerca dos fluidos, como a dos corpos solilidos, que examinámos no livro antecedente; mas bem se conhece que esta parte não he tão facil de tratar, como a precedente, ainda que a gravidade seja a que faz descer para o centro da terra tanto os corpos solidos, como os fluidos: póde-se dizer que este he o unico fenomeno commum a huns, e outros, ao qual se póde accrescentar o da força da inercia, que he sempre proporcional ás massas. Parece que quanto mais interessantes são as partes, que dependem da Mathematica, tanto são mais escuras, e embaraçadas. Na Estatica só o pezo dos corpos reconhecido como huma força constante, qualquer que seja a causa, de que provém, bastou para demonstrar geometricamente as propriedades das maquinas, e a razão necessaria entre quantas forças quizerem, cujas direcções sejão determinadas, prescindindo das fricções. O mesmo pezo nos conduzio semelhantemente a descubrir as curvas, que os projectos descrevem, qualquer que seja a força de projecção. Huma só experiencia determinou entre todas

as

as curvas poſſiveis, as que elles deſcrevem realmente em virtude da acção da gravidade ao pé do noſſo globo. Não ſuccede o meſmo na Hydroſtatica, a gravidade ſó não nos póde fazer conhecer tudo o que diz reſpeito á collisão dos fluidos, e ao modo, com que elles fazem equilibrio entre ſi, ou com os corpos ſolidos. Para huma theorica completa dos ſolidos preciſava conhecer-ſe ao menos qual era o principio geral da fluidez, e depois a eſſencia das partes de cada hum em particular; mas a natureza não deixa averiguar tanto os ſeus ſegredos. A propriedade commua a todos os fluidos de ſe porem ſempre de nivel, e pezarem igualmente para toda a parte, he certamente huma conſequencia do principio da Hydroſtatica, e daqui he que devemos caminhar para deſcubrir do modo mais natural as outras propriedades dos fluidos relativamente ao equilibrio, porque facilmente ſe vê que eſta meſma propriedade não dá a conhecer couſa alguma ácerca das figuras das partes elementares de cada hum em

par-

particular. Depois de termos deduzido desta propriedade todas as consequencias, que nos der a Analyse, devemos recorrer ás experiencias ácerca de cada hum dos fluidos, para reconhecer o que os distingue huns de outros, e os seus pezos especificos. Na Hydrostatica devemos considerar geralmente trez partes, primeira o equilibrio de hum liquido homogeneo, depois o dos fluidos heterogeneos, e finalmente o dos solidos com os mesmos fluidos. Seria inutil entrar aqui a averiguar todas as ventagens, que se podem tirar desta theorica, e melhor se reconhecerão depois de ter estudado este Tratado. Não he menos essencial examinar a percussão dos fluidos, as leis das suas collisões contra os solidos á proporção das velocidades, e das massas, ou densidades. Ainda que nos tenhamos servido dos fluidos para infinitas commodidades, ou ventagens, sem conhecer a fundo tudo o que se tem descuberto ha quasi seculo e meio, não se segue que seja inutil multiplicar continuamente as averiguações ácerca desta ta parte. Quanto mais experiencias houver bem averiguadas, mais caminhos se abrem uteis ás Artes, ao bem público, que dellas dependem, e mais capazes ficamos de conhecer, e remediar os defeitos das maquinas, que se tem executado neste genero. Como aqui só damos os elementos da Hydrostatica, e da Hydraulica, póde se recorrer ao que tratámos desta materia no primeiro volume da Arquitectura Hydraulica; e os que tiverem principios bastantes para adiantarem mais as suas averiguações, não podem estudar cousa melhor que a Hydraudinamique de Mr. Bernoville, e d'Alembert.

CAPITULO I.

Do equilibrio, e movimento dos liquidos.

DEFINIÇÕES.

I.

1121 CHamão-se fluidos os corpos, cujas partes se separão, e cedem ao menor impulso, e se tornão depois a unir com a mesma facilidade, co-

como por exemplo o ar, a chamma, a agua, o azougue, e outros liquidos, que são fluidos.

Reflexão I.

1122 He preciso notar que todo o liquido he fluido. Para conhecer a differença, deve-se saber que se chama liquido todo aquelle fluido, cuja superficie se põe de nivel no vaso que o contém. Ora he claro que esta propriedade não convem á chamma, entende-se por superficie de nivel aquella, que tem todos os pontos igualmente distantes do centro da terra. Deve-se notar bem, que entre os fluidos huns tem elasterio, e outros não: por exemplo, sabemos que o ar se dilata, e comprime de sorte, que a compressão he maior á proporção dos pezos, e ninguem até agora pode fazer que huma porção de agua occupasse menos volume, o que seria possivel se a agua tivesse elasterio.

Reflexão II.

1123 A maior parte dos Authores, que tem escrito ácerca da natureza dos flui-

fluidos, fazem consistir a essencia da fluidez em hum movimento contínuo, e reciproco de todas as partes do fluido em todas as direcções possiveis. Este movimento lhes parece necessario para explicar a dissolução de certos corpos mergulhados em hum fluido, do qual todas as partes ficão impregnadas do corpo, que se dissolveo. Parece-me que este movimento contínuo se póde tomar como huma supposição de conveniencia, ainda admittindo a materia subtil de Mr. Descartes, que os traspassa continuamente, pois julgo que seria preciso demonstrar primeiro que esta materia subtil não póde tambem passar pelos fluidos, sem os pôr em movimento, o que he precisamente o estado da questão. Além disso parece-me que para explicar igualmente bem os mesmos effeitos, não se precisa mais que de huma propensão para o movimento commum a todas as partes, que estão sujeitas ao pezo da athmosfera. Quanto ás differentes dissoluções não se podem explicar pela differença das partes de cada fluido do em particular; e quanto ao mais este systema, que não he novo, poder-nos-hia obrigar a disputas extensas, e estranhas do nosso objecto: basta-nos explicar o que entendemos por fluido, sem querer definir a natureza de todas as partes de cada fluido em particular, o que pertence mais á Quimica que á Hydraulica, ou á Hydrostatica.

Definição II.

1124 Chama-se gravidade especifica de dous, ou mais fluidos, ou corpos em geral, o pezo de cada hum destes corpos medida no mesmo volume; assim se a pollegada cubica de hum corpo péza 3 arrates, e a de outro 2 arrates, as gravidades especificas destes dous corpos são como 3 a 2.

Quando os volumes são desiguaes, para se conhecerem as gravidades especificas he preciso reduzillos ao mesmo volume. Por exemplo: se o volume de 3 pollegadas de hum corpo péza 12 arrates, e o volume de 2 pollegadas de outro corpo péza 16 arrates, para achar as gravidades especificas destes mesmos cor-

corpos deve-ſe buſcar o pezo de huma pollegada cubica de cada hum, a pollegada cubica do primeiro ſerão 4 arrates, e a do ſegundo 8; mas eſtes numeros são os que ſahem, dividindo os pezos pelos volumes: logo póde-ſe dizer geralmente que as gravidades eſpecificas de muitos corpos são como os pezos divididos pelos volumes, ou na razão compoſta da razão directa dos pezos, e da inverſa dos volumes, o que he mais facil de conhecer; porque he evidente que quanto maior he o pezo do corpo, ſuppoſto o meſmo volume, maior ſerá a ſua gravidade; e quanto maior for o volume, ſuppoſto o meſmo pezo, ſerá menor gravidade eſpecifica.

DEFINIÇÃO III.

1125 O mais, ou menos pezo do meſmo volume chama-ſe denſidade, aſſim póde-ſe dizer geralmente que as denſidades são como as gravidades eſpecificas. Para evitar longos diſcurſos ácerca das razões das denſidades dos corpos, ou fluidos, ſeja o pezo do primeimeiro corpo P, o ſeu volume V, a ſua denſidade D, ſemelhantemente ſeja p o pezo do ſegundo corpo, u o ſeu volume, e d a ſua denſidade, teremos $D:d::\frac{P}{V}:\frac{p}{u}$; logo $D:d::Pu:pV$, de que ſe tira $DpV=dPu$, logo ſe ſuppõe que as denſidades são iguaes entre ſi, ſerá $pV=Pu$, logo $P:p::V:u$, iſto he, que os pezos são proporcionaes aos volumes.

1126 Se os pezos ſe ſuppõem iguaes, ou, o que he o meſmo, ſe as maſſas são iguaes, ſerá $DV=du$: logo $D:d::u:V$, iſto he, que as denſidades eſtão na razão inverſa dos volumes, ou reciprocamente os volumes na razão inverſa das denſidades. Deduz-ſe tambem da formula $DpV=dPu$, $V:u::Pd:pD$, iſto he, que os volumes de dous corpos eſtão na razão compoſta da directa dos pezos, e da inverſa das denſidades, o que he bem evidente, porque quanto maiores são os pezos, maior he o volume; e quanto mais denſo he, menor he o volume.

1127 Póde-ſe tambem concluir da meſma formula que $p:P::du:DV$, iſto to he, que os pezos eſtão na razão composta da directa das denſidades, e dos volumes, o que tambem he evidente, porque os pezos augmentão a proporção dos volumes, e da maſſa comprehendida em cada volume: deſta igualmente ſe podem deduzir outras muitas proporções, mas baſta conhecellas para recorrer a ella em caſo que ſe faça preciſo.

DEFINIÇÃO IV.

1128 Os fluidos podem ſer elaſticos, ou não elaſticos: hum fluido he elaſtico, quando a meſma maſſa ſe póde reduzir a menor volume pela compreſsão, e que depois que ceſſa a compreſsão, torna a occupar o meſmo volume. De todos os fluidos, que conhecemos, ſó o ar tem eſta propriedade, e pelo menos nos mais não ſe faz ſenſivel.

DEFINIÇÃO V.

1129 Diz-ſe que a ſuperficie de hum fluido eſtá de nivel, quando todos os ſeus pontos eſtão igualmente diſtantes do centro da terra.

PRO-

PROPOSIÇÃO I.

Theorema.

1130 Se hum liquido ſe lança em hum vaſo, a ſuperficie ficará de nivel, e todas as ſuas partes em equilibrio.

Demonstração.

Se algum ponto do fluido ficar mais elevado que outro, como não ha couſa, que o embarace a eſcorregar ſobre as outras, cederá neceſſariamente á força do pezo, que o obriga a deſcer para o centro da terra: de que ſe ſegue evidentemente que a ſuperficie do fluido eſtará a nivel, porque o meſmo ſe provará de qualquer outra parte da ſuperficie do meſmo fluido: logo, &c. 2.º Digo que todas as partes ficão em equilibrio. Para iſto concebemos o liquido dividido em huma infinidade de columnas verticaes do meſmo diametro, e façamos reflexão que todas eſtas columnas ſe contrabalanceão mutuamente, porque cada huma dellas deve ſuſtentar o pezo de todo o fluido, que o cérca; porque ſe ſuppõe que huma ma destas columnas he mais fraca que as outras, que as cércão, o pezo destas a obrigarião a subir, para ceder a força, com que a opprimem até que todas se reunissem; e não sendo já sustentada pelas outras, distribuir-se-ha uniformemente por toda a superficie, accrescentando igual pezo a cada columna em particular: logo haverá equilibrio; e como sempre ha a mesma massa no liquido, e o vaso não mudou de figura, segue-se que o lugar desta foi preenxido por outra, que lhe he perfeitamente igual, e faz o equilibrio com as mais: logo esta estava tambem em equilibrio com as que as cercavão; e como o mesmo se póde demonstrar das outras columnas colateraes, segue-se que todas as partes estão em equilibrio.

Corollario I.

1131 Segue-se daqui que qualquer Figura 78. que seja a figura do vaso, que contém o liquido, a superficie estará sempre de nivel, e todas as partes em equilibrio. Demais, como o esforço de todas as columnas verticaes he igual, segue-ſe que a preſsão de todas no fundo do vaſo he igual ao producto da meſma baſe pela altura da maior columna vertical. Para ſe convencer, imaginemos hum vaſo compoſto de dous cylindros ABCD, e EFGH, e que ſe encheo de agua até a altura GH, he evidente que todas as columnas, como LM, que correſpondem aos lados AE, FD, fazem huma força contínua contra os meſmos lados, para ſe levantarem até o nivel GH do liquido; porque ſendo a columna IK maior que LM, faz força contra o liquido, que procura ceder pelo lado FD, e eſte esforço he igual ao que faria a columna IN ſobre a baſe do cylindro EGFH, ſe eſtiveſſe ſeparado do outro ABCD.

COROLLARIO II.

1132 Do meſmo modo ſe tivermos hum vaſo de figura conica, cujos lados ſejão inclinados ao horizonte, como Figura 79. as linhas BE, CF, e eſte vaſo ſe encher de liquido, a força do liquido ſobre a baſe EF ſerá igual á do pezo do liquido da meſma gravidade eſpecifica,

que

que tiveſſe a meſma baſe, cujo volume foſſe igual ao ſolido feito deſta baſe pela altura EQ, porque no vaſo EBADCF ha tantas columnas, quantos pontos tem a baſe; além diſſo cada columna carrega para a baſe com huma força igual á da columna GH: logo o pezo das columnas ſobre a baſe he igual ao producto da meſma baſe pela altura GH.

1133 A experiencia moſtra tambem que qualquer direcção, que ſe dê á agua, que ſe faz ſahir de hum vaſo por buracos feitos nos ſeus lados, a força he ſempre a meſma, ou ſejão horizontaes, ou verticaes, com tanto que a altura do nivel d' agua ſobre elles ſeja igual.

COROLLARIO III.

1134 Segue-ſe tambem daqui que as forças ſe podem multiplicar conſideravelmente por meio dos liquidos. Supponhamos por exemplo que por meio de hum canudo IN, e de hum embulo poſto em I ſe opprime a ſuperficie d' agua com huma força de 10 arrates, digo Figura 79.

que esta pressão he capaz de fazer equilibrio com hum pezo de 100 arrates posto no buraco R, cujo diametro seja 10 vezes maior que o buraco N; pois como o buraco he 10 vezes maior, terá 10 vezes mais fiadas de agua, que fazem força contra o fundo; e sendo cada hum destes fios igual ao numero de fios, que se achão em N, tem a força de 10 arrates: logo todos juntos fazem equilibrio com 100 arrates.

COROLLARIO IV.

1135 Se a superficie AD do vaso cylindrico he cem vezes maior que a abertura do buraco, que supponho em N, e está opprimida por hum pezo de 10 arrates, a superficie d' agua fará hum esforço de mil arrates para apartar esta superficie do fundo ABCD. Esta propriedade commua a todos os liquidos servirá para demonstrar certos effeitos, que parecem muito admiraveis, e que poderião enganar a todos aquelles, que não estivessem instruidos do que acabamos de dizer. O sopro de hum menino basta para levantar consiſideraveis pezos por meio de huma, ou muitas bexigas, ſobre que ſe põem, em que ſe introduz o ar por meio de hum pequeno canudo. Quanto mais pequeno he o diametro, com mais facilidade ſe levanta o pezo. Iſto ſe póde moſtrar pelo principio das velocidades.

Reflexão.

1136 Tudo o que acabamos de ver he de ſumma importancia na Hydroſtatica; aſſim he de ultima conſequencia fazer-ſe bem ſenhor da verdade deſta meſma propoſição, que ſe expreſſa ordinariamente por eſte modo. As preſsões dos liquidos ſobre as baſes dos vaſos, que as contém, são na razão das baſes multiplicadas pelas alturas. Iſto poderia ter huma objecção, e he, que ſe ſeguiria que havendo dous vaſos, hum conico, outro cylindrico cheios do meſmo licor, tendo ambos a meſma baſe, e a meſma altura, o pezo de hum ſeria igual ao pezo do outro, porque parece que as preſsões occaſionão o pezo. Mas vamos moſtrar que ainda que as preſsões ſobre as baſes ſejão

iguaes,

iguaes, não se segue que devão mudar os pezos absolutos. Para se convencer basta fazer reflexão que ainda que no tambor de hum relogio a força do elasterio, que puxa a cadeia, seja muito consideravel, não se sente nada desta força, que he destruida pela resistencia da cadeia. O mesmo he de cada columna de liquido: ainda que faça hum esforço consideravel contra a base inferior do vaso, como este esforço se destroe pela resistencia, que fazem para sima, não deve conhecer-se mais que o pezo da somma das columnas, isto he, o pezo do volume do liquido conteúdo no vaso. Assim se se destroe esta reciproca resistencia das columnas do liquido, fazendo hum fundo amovel, então a experiencia concorda com a theorica, e nos mostra que he precisa huma força igual á de hum solido, que tivesse a base igual á do vaso, e huma altura igual á de mais alta columna. Veja-se o primeiro volume da nossa Arquitectura Hydraulica, Artigo 352.

PRO-

PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

1137 Se hum liquido, a agua por exemplo, se deita em hum tubo curvo, ou scifão, digo que a superficie deste liquido se porá de nivel nos dous braços do scifão.

DEMONSTRAÇÃO.

Se os dous braços do scifão são igualmente grossos, facilmente se prova que a superficie do liquido em cada canudo se achará na mesma linha horizontal AB; porque as columnas do liquido conteúdo em cada canudo se acharão no mesmo caso que se estivessem comprehendidas em hum vaso, isto he, contrabalancear-se-hão igualmente, sem que huma faça maior esforço que a outra para se levantar, ou abaixar, porque os lados LM, NO do canudo fazem o mesmo effeito para conter o liquido, que farião as columnas LM PQ, e RNQO, se as duas columnas LH, e NK estivessem como as precedentes em hum só vaso AHKB; mas nes-

Figura 80.

nesta supposição as columnas LH, NH
* Numer. 1130. estarião em equilibrio *, e terião a sua
superficie de nivel: logo se se supprimem todas as columnas de agua, que estarião entre estas, e em seu lugar se substituem os lados LM, e NO do scifão, a agua ficará de nivel. *O Q.S.Q.D.*

Outra Demonstração.

Para demonstrar isto pelas velocidades, supponhamos que a superficie AL desce de A para C, por exemplo 4 pollegadas: isto supposto, a superficie NB subirá de N para E tambem 4 pollegadas, porque os canudos são de igual grossura; assim a quantidade de movimento do liquido no segundo canudo he igual á do primeiro, e por consequencia estão em equilibrio, e a sua superficie de nivel.

Corollario I.

1138 Segue-se daqui que se tivermos hum scifão, que tenha os braços de desigual grossura, o licor, que se lançar nelle, se porá de nivel em ambos os braços; porque se por exemplo o brao braço IK he trez vezes mais groſſo que GH, haverá trez vezes mais licor no braço mais groſſo que no outro. Ora ſe agora deſte braço ſe imaginar dividida em trez columnas iguaes, haverá huma v. g. OLMP, que eſtará em equilibrio com a do pequeno tubo, porque ſe ſuppõe que tem baſes iguaes; e eſtando em equilibrio, ficarão as ſuperficies de nivel; mas a columna OLMP eſtá em equilibrio com a columna NLMF, ou NFBK: logo ficão todas de nivel entre ſi, e conſequentemente com a columna do pequeno tubo.

Para provar iſto pelas velocidades, imagine-ſe que ſe a ſuperficie d' agua do pequeno tubo deſceo de A para C 3 pollegadas por exemplo, ſubio de B para C huma pollegada no grande tubo, porque a baſe he tripla da do pequeno; mas são reciprocas as velocidades com as ſuas maſſas: logo a agua ficará em equilibrio de huma, e outra parte, e as ſuperficies de nivel.

Co-

Corollario II.

1139 Porém ſe o canudo tiveſſe hum braço perpendicular ao horizonte, e Figura 82. outro inclinado, como no ſcifão ABC, o licor, que ſe lançar em hum dos canudos, ſe porá de nivel no outro; porque ſe os dous braços deſte ſcifão são de igual groſſura, e a linha EG paſſa pela ſuperficie do licor em ambos os canudos, a agua do braço perpendicular ſerá para a do obliquo, como EB a BG; mas a agua do braço inclinado não obra ſobre a baſe B com todo o ſeu pezo abſoluto; e conſiderando eſte licor como ſuſtentado ſobre hum plano inclinado, póde-ſe dizer que o pezo relativo do liquido he para o ſeu pezo abſoluto, como a altura GD do plano inclinado para o ſeu comprimento GB; e como já vimos que os liquidos de cada canudo erão como EB a BG, ſegue-ſe que ſendo as alturas EB a GD iguaes, a agua do ſcifão eſtá em equilibrio, e conſequentemente de nivel, o que ſe demonſtraria ainda no caſo, em que os braços do ſcifão foſſem deſiguaes na groſſura.

Co-

COROLLARIO III.

1140 Segue-se tambem daqui que a agua, que está no canal HSTP, faz tanta força contra os lados do mesmo canal para sahir, como a agua de cada hum dos tubos faz sobre a base TV, que seria a do cylindro, e porque a agua das pequenas columnas QTPR procura pôr-se de nivel com a superficie do liquido de cada braço; assim mostra a experiencia que se se abre hum pequeno orificio vertical no canal de hum scifão, sobe a agua quasi á altura d'agua dos braços. Figura 82.

PROPOSIÇÃO III.

THEOREMA.

1141 Se nos dous braços de hum scifão se põem liquidos de diversa gravidade, digo que as alturas dos liquidos nos tubos serão entre si na razão reciproca do seu pezo especifico.

DEMONSTRAÇÃO.

Encha-se o scifão ABCH de azougue, pôr-se-ha de nivel nos dous braços, Figura 83.

ços, como os mais liquidos. Ora supponha-se que a linha horizontal D E marca o nivel do azougue, e que depois se enche de agua o tubo A B até a altura G, he evidente que o azougue deste braço perderá o nivel com o do outro, logo que se lhe deitar a agua, e que se desceo no primeiro tubo de D para I 2 pollegadas, subirá de E para F 2 pollegadas: tire-se a linha horizontal IL, he evidente que o azougue IB do primeiro tubo está em equilibrio com o azougue LC do segundo. Ora se a agua fica quieta na altura G, e o azougue na altura F, segue-se que a agua GI está em equilibrio com o azougue FL, se os braços do scifão são de igual grossura; e tanto he a columna GI mais alta que FL, tanto maior he o pezo especifico do mercurio que o da agua, e consequentemente o pezo especifico destes liquidos está em razão reciproca das suas alturas.

COROLLARIO.

Figura 84. 1142 Segue-se daqui que se hum dos braços A B do scifão fosse mais grosso

que

que o outro DC, o azougue, que estivesse no tubo mais grosso, estaria ainda em equilibrio com a agua do pequeno, se depois de tirada a horizontal FG, a altura EF do azougue he para a altura KH da agua na razão reciproca do pezo especifico destes dous liquores; porque se se imagina huma columna LF de azougue, cuja base seja igual á do tubo DC, esta columna estará em equilibrio com a columna da agua HK. Ora se o tubo AB he sinco vezes mais grosso que o CD, a quantidade de azougue EI conterá sinco columnas LF, que todas terão equilibrio entre si, e com a columna HK: logo na proposição antecedente será o mesmo a respeito do equilibrio dos liquidos differentes em tubos de desigual grossura *, ou o liquido mais pezado esteja no maior cubo, ou no menor. * Numer. 1137.

PROPOSIÇÃO IV.

Theorema.

1143 1.° Se hum corpo duro se mergulha em hum liquido do mesmo pezo

es-

especifico, ficará inteiramente mergulhado em qualquer parte que se achar.

2.º Se tem maior pezo especifico que o do liquido, irá ao fundo do vaso.

3.º Se tem menor pezo especifico que o do liquido, parte do pezo ficará mergulhada, e a outra parte ficará sobre a superficie do liquido.

DEMONSTRAÇÃO DO I. CASO.

Figura 84. Se tivermos hum vaso ABCD cheio de qualquer liquido, por exemplo de agua, e se lhe mergulha o corpo E, cujo pezo he igual ao do volume de agua, o qual lugar occupa, he constante que este corpo ficará em equilibrio, isto he, quieto, sem subir, nem descer, em qualquer lugar que se ponha, porque faz tanta força para baixo, como o volume de agua, que seria preciso levantar; mas as partes d' agua estão em equilibrio com todas as da mesma agua, que as cércão: logo valendo o corpo C o mesmo que huma certa quantidade de agua, cujo lugar occupa, estará em equilibrio com toda a do vaso, e ficará inteiramente mergugulhado, e quieto em qualquer altura que ſe ponha. *O Q. S. Q. D.*

Demonstração do II. Caso.

Se o corpo F mergulhado no meſmo vaſo péza mais que o volume d'agua, cujo lugar occupa, facilmente ſe vê que deſcerá ao fundo do vaſo, porque carrega com mais força ao centro da terra que hum volume igual de agua; aſſim não eſtará em equilibrio com as mais partes d'agua, que o cércão, e por conſequencia irá ao fundo do vaſo. *O Q. S. Q. D.*

Demonstração do III. Caso.

Se o corpo G he mais leve que hum igual volume de agua, vê-ſe evidentemente que tudo deve ſucceder pelo contrario do caſo precedente, iſto he, que em vez de ir ao fundo, deve nadar á ſuperficie, e não ſe mergulhar mais que em parte, que ſerá por exemplo a parte IKMN, que occupa hum volume d'agua, que péza tanto, como todo o corpo G; porque ſe por exemplo eſte corpo péza ſó metade de hum

hum igual volume d'agua, a parte mergulhada ſerá metade do corpo; e tendo a agua, que occupa eſta metade, igual pezo ao de todo o corpo, carregarão igualmente para o centro da terra, e conſequentemente eſtarão em equilibrio, ainda que o corpo não eſteja inteiramente mergulhado. *O Q. S. Q. D.*

COROLLARIO I.

1144 Segue-ſe do primeiro caſo, que ſe huma potencia Q quizeſſe tirar d'agua hum corpo E prezo a huma corda, ſe a gravidade he igual ao pezo eſpecifico d'agua, a potencia não ſentirá a gravidade do pezo, ſenão quando começar a ſahir d'agua, porque em quanto eſtiver mergulhado nella não ſuſtentará parte alguma do pezo; e por eſta razão quando ſe tira a agua de hum poço quaſi ſe não preciſa força para ſuſtentar o balde cheio de agua, em quanto eſtá mergulhado, porque não ſe ſuſtem parte alguma d'agua, que eſtá no balde, e ainda o balde ſe he de páo he quaſi igual ao pezo eſpecifico d'agua; e quando eſtá inteiramente fóra, a for-

ça

ça da potencia he igual ao pezo d' agua, e do balde.

COROLLARIO II.

1145 Segue-ſe do ſegundo caſo, que ſe huma potencia Q ſuſtenta hum corpo O mergulhado n' agua, e o pezo eſpecifico do corpo he maior que o da agua, a potencia ſuſtentará ſó parte do pezo do corpo, que ſerá a differença do ſeu pezo eſpecifico ao do volume d' agua, de que occupa o lugar, porque eſte corpo péza na agua tanto menos que no ar, quanto he o pezo de hum ſemelhante volume de agua; aſſim póde-ſe dizer geralmente que os corpos mais pezados que a agua perdem do ſeu pezo, quando eſtão mergulhados, e iſto na razão da gravidade eſpecifica do corpo á da agua, que he hum principio, de que já fallámos. *

* Numer. 901.

COROLLARIO III.

1146 Segue-ſe do terceiro caſo, que quando hum corpo he mais leve que hum ſemelhante volume de agua, o pezo eſpecifico d' agua he para o do corpo, como o volume de todo o corpo para a ſua parte mergulhada; aſſim ſuppondo que o corpo G ſeja hum cubo, ou hum parallelipipedo, o pezo eſpecifico d'agua ſerá para o deſte corpo, como HK para IK.

Corollario IV.

1147 Segue-ſe tambem que hum corpo ſe mergulha differentemente em liquidos, que tem diverſas gravidades eſpecificas, e que mergulhará mais em hum liquido de huma certa gravidade eſpecifica, do que em outro, que ſeja mais pezado: por exemplo, huma embarcação mergulha mais em hum rio, do que no mar, porque a agua dos rios péza menos que a do mar; aſſim não nos devemos admirar, quando algumas vezes ſuccede, que hum navio, depois de ter navegado com felicidade no mar largo, ſe perca, e vá ao fundo, chegando a embocar em algum rio de agua doce.

Corollario V.

1148 Póde-ſe tambem notar, que ainda que os metaes ſejão mais peza-

dos

dos que a agua, isto não embaraça que possão nadar sobre a agua; porque se delles se fazem corpos cavados, cujo pezo especifico seja menor que o do volume d' agua, cujo lugar occupão, nadarão sem ir ao fundo.

Reflexão.

1149 Já dissemos * que os metaes perdião do seu pezo, quando estavão mergulhados n'agua; e como neste lugar se deve dar a razão, he de notar que he a mesma, que faz com que hum corpo mergulhado seja mais leve do que era no ar todo o pezo especifico da agua, cujo lugar occupa. Assim poder-se-ha achar sempre a razão do pezo especifico de hum metal com o da agua, ou outro licor, pezando no ar em balanças bem justas hum pedaço de metal, e prendendo-o depois a hum dos braços da balança com hum fio de seda para ver quanto péza menos o metal, depois de mergulhado na agua, e a differença será o pezo especifico deste metal ao da agua.

* Numer. 901.

Deste modo se achou que o ouro perde na agua quaſi a decima nona parte do ſeu pezo, o azougue a decima quinta parte, o chumbo a duodecima, a prata a decima, o cobre a nona, o ferro a oitava, e o eſtanho a ſetima.

E por eſte principio ſe póde tambem ſaber a razão dos pezos eſpecificos dos liquidos entre ſi, e por conſequencia dos liquidos com os metaes: por exemplo, a razão do pezo de huma pollegada cubica de ouro com o de huma pollegada cubica de azougue, e aſſim ſe achou o pezo de huma pollegada cubica dos metaes, e liquidos conteúdos na taboada ſeguinte.

Taboa dos pezos de huma pollegada cubica.

	Onç.	*oit.*	*gr.*		*Onç.*	*oit.*	*gr.*
Ouro - -	12	2	17	Marmore branco	1.	6	0
Azougue	8	6	8	Pedra baſtarda	1	2	24
Chumbo	7	5	30	Agua doce - - -		5	12
				Vinho - - - - - -		5	5
Prata - -	5	5	26	Cera - - - - - -		4	65
Cobre - -	5	6	36	Azeite - - - - - -		4	43
Ferro - -	5	1	27	Carvalho ſecco - -		4	22
Eſtanho -	4	6	14				

Por

Por este principio se póde tambem medir a solidez de hum corpo irregular; porque se este corpo no ar péza 90 libras, e n'agua só 80, he sinal que o volume d'agua, cujo lugar occupa, péza 10 libras, assim he preciso saber quantas pollegadas cubicas fazem 10 libras de agua, o que se achará, dizendo: se 70 libras fazem hum pé cubico de agua, ou 1728 pollegadas, quantas farão 10 libras? e se acharão 246 pollegadas, e $\frac{6}{7}$, que he o solido do corpo.

Applicação dos principios precedentes á navegação.

1150 Quando as munições de guerra se transportão em barcas, como succede frequentemente, quando se encontrão ribeiras, ou canaes, e as munições podem ser de grandes pezos, como são canhões, carretas, e em huma palavra tudo o que acompanha o trem d'artilheria, e que hum Official, que tem huma pouca de curiosidade, não ignora o pezo das munições, que lhe estão encarregadas, devemos mostrar

trar como ſe deve avaliar a carga, que podem levar as barcas, para ſaber quantas lhe ſerião preciſas, ſe ſe attender ſó ao pezo das munições, ſem fazer caſo do volume.

Como o palmo cubico de agua doce péza quaſi 70 libras, e hum pé cubico de madeira de carvalho quaſi 58, vê-ſe que huma barca podia encher-ſe de agua ſem ſe affundar, porque a agua, que eſtiveſſe dentro, eſtaria em equilibrio com a de fóra, e a gravidade eſpecifica da madeira, de que a barca he feita, he menor que a d' agua: póde logo metter-ſe na barca hum pezo equivalente ao d'agua, que póde conter o que ſe ſabe, medindo-ſe o vão da barca; e ſupponhamos que ſe achou por exemplo de 4000 palmos cubicos, eſta barca poderá levar 4000 vezes 70 libras, porque já diſſemos que hum pé cubico péza 70 libras, aſſim eſta barca levará 280000 libras; mas como o uſo nos portos do mar he avaliar a carga dos navios por toneladas, e a carga das barcas nas ribeiras por quintaes, devemos ſaber que o tonel he hum pe-

zo

zo de 2000 libras, e o quintal hum pezo de 100 libras; assim quando nos termos da marinha se diz que hum navio carrega 100 toneis, ou de 100 toneladas, quer dizer que póde levar 200000 libras, ou 2000 quintaes.

Já dissemos que a agua salgada era mais pezada que a das ribeiras; e como seria preciso conhecer o seu pezo, saber-se-ha que o pé cubico péza 73 libras, que he 3 libras mais que o pé cubico d' agua doce.

Vamos mostrar na Proposição seguinte hum principio do equilibrio dos liquidos, que he mais curioso que util na prática, e por isso não tenho já fallado delle; mas como não seria conveniente passallo em silencio, o tratarei na Proposição seguinte.

PROPOSIÇÃO V.

THEOREMA.

1151 Se tivermos hum vaso mais largo em hum extremo que em outro cheio de qualquer liquido, este liquido fará tanta força para sahir por huma ma abertura igual á ſua baſe, como ſe eſta abertura foſſe igual á de ſima.

Demonstração.

Se temos hum vaſo, como o da Figura 79, mais largo na baſe B C que em GH, he facil entender que a agua, que carrega ſobre a baſe BC, faz tanta força, como ſe eſtiveſſe carregada com todo o volume da agua B O P C, porque já moſtrámos que todas as columnas d' agua, como LM *, pertendião ſubir á altura HG, ou OP, que he o meſmo, e que o esforço, que ella faz, ſe expreſſava pelo pezo da pequena columna IN; mas a força de IN ſe faz igualmente no lugar M da baſe que no lugar L, por cauſa da mobilidade reſpectiva das partes, que compõem as columnas d' agua; e todas as columnas, como LM, independentemente do esforço expreſſado por IN fazem a força de todo o pezo da ſua altura LM: logo a columna LM péza tanto ſobre a baſe, como a columna IK, e por conſequencia a baſe he tão opprimida pela agua, que eſtá no vaſo, como ſe eſtiveſ-

* Numer. 1137.

vesse carregada com todo o volume BOPC. *O Q. S. Q. D.*

Se o vaso tem os lados inclinados, como na Figura 80, demonstrar-se-ha do mesmo modo que a agua faz tanta força sobre a base EF, como se carregasse sobre ella toda a que podia haver no volume cylindrico EQRT, que tem a altura do vaso.

A experiencia ainda prova melhor que a razão, porque em hum vaso mais largo em baixo que em sima, cujo fundo esteja fechado com hum embulo movediço, sem se entornar a agua, se vê que a potencia, que sustem o embulo, precisa huma força igual ao pezo d' agua, que se conteria no vaso, caso que fosse tão largo em sima, como em baixo, por causa da força, que as pequenas columnas d' agua fazem por se porem no mesmo livel das maiores; mas quando a agua se gella, e as partes não tem movimento algum, não fazem força contra os lados do vaso, e a potencia não precisa tamanha força, porque então não sustem mais que o pezo absoluto d' agua gellada.

Mas

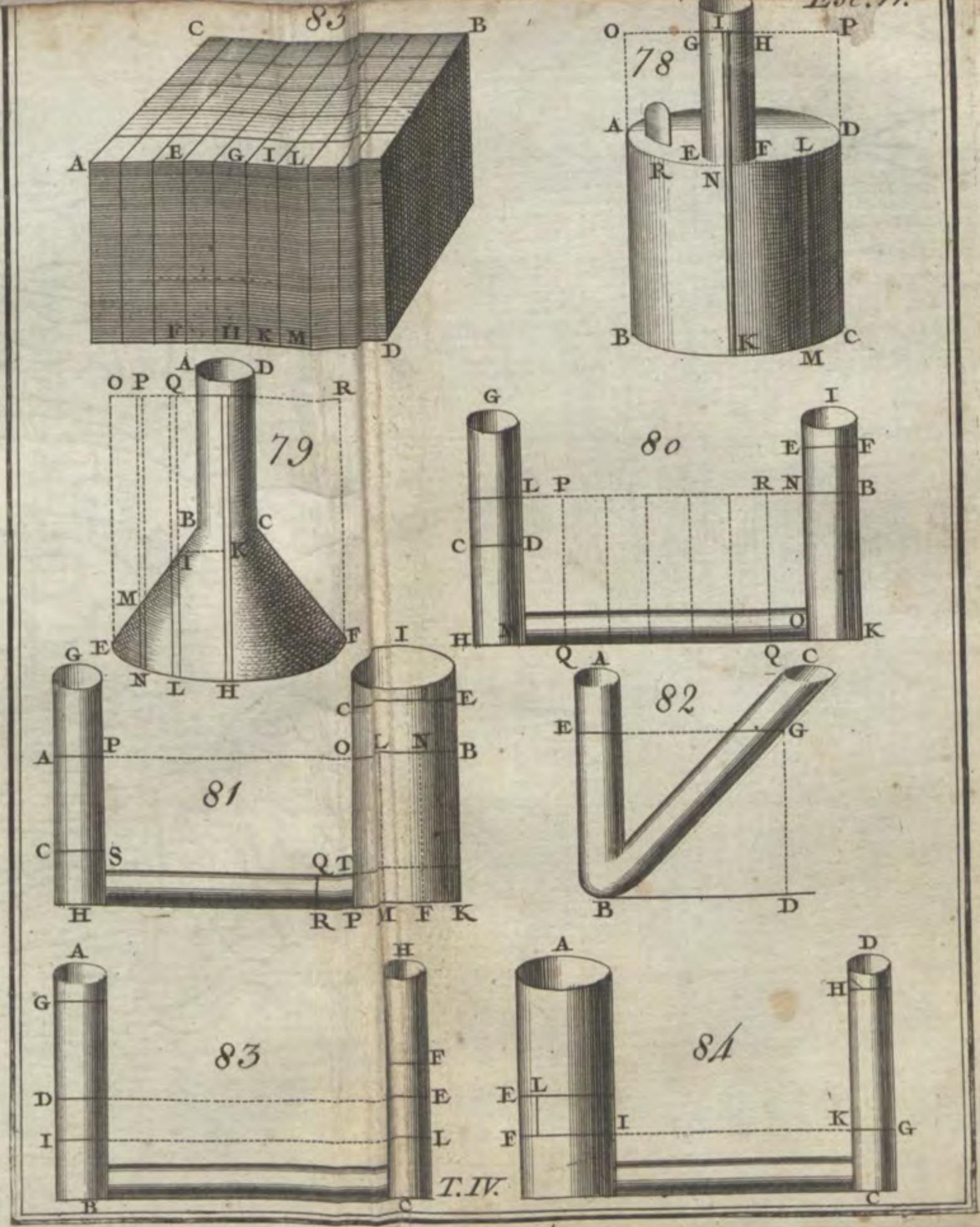
1152 Mas se o vaso fosse mais largo em sima do que em baixo, como he
Figura 87. o vaso ABCD, se se enche de liquido, não fará mais esforço contra a base BD, que se a largura de sima fosse igual á de baixo; porque se se examina o cylindro d'agua BDEF, facilmente se vê que como a agua péza perpendicularmente, só a que he conteúda no cylindro he que carrega contra a base BD, porque a que se contém á roda do cylindro não péza no fundo, mas sómente para os lados inclinados do vaso.

COROLLARIO.

1153 Desta proposição se segue, que qualquer que seja a figura de diversos vasos perpendiculares ao horizonte de iguaes alturas, se estes vasos tem bases iguaes, e estão cheios de agua, as bases estarão igualmente opprimidas.

REFLEXÃO.

Figura 88. 1154 A força dos liquidos se mede por arrates, como a dos pezos na Mecanica; e como podemos saber o pezo de hum palmo cubico de qualquer liqui-


83
78
79
80
81
82
83
84
T. IV.

quido, particularmente o d' agua, que péza 70 arrates, achar-se-ha sempre a força d' agua no fundo do vaso, multiplicando a capacidade do fundo pela altura perpendicular d' agua do vaso; mas tendo hum vaso ABC perpendicular ao horizonte, e cheio de agua até a abertura A, querendo saber a força d' agua sobre a base BC, supponhamos que esta boca tem 4 palmos quadrados, e que a altura perpendicular he de 4 palmos, assim multiplicando 4 por 4, teremos 16 palmos cubicos, que sendo multiplicados por 70 arrates, que he o pezo de 1 palmo cubico de agua, dará 1120 arrates, que he a força, que a agua do vaso ABC faz sobre a base BC. O mais admiravel he, que ainda que o vaso não tenha mais que 1 palmo cubico de agua, que he equivalente ao pezo de 70 arrates, seria precisso que a potencia Q, que quizesse suster o fundo CD, (supponds que fosse movel) tivesse huma força de 1120 arrates para ficar em equilibrio com a força d' agua sobre a base BC.

CA-

CAPITULO II.

Da velocidade dos fluidos, que ſahem por aberturas feitas nos vaſos, que os contém.

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

Figura 89. 1155 SE tivermos hum tubo ABCD perpendicular ao horizonte, e cheio de qualquer liquido, a velocidade deſte liquido pela abertura CD da baſe ſerá expreſſada pela raiz quadrada da altura.

DEMONSTRAÇÃO.

Supponha-ſe que a abertura da baſe he igual á meſma baſe do cylindro: he claro que não ſe oppondo nada á paſſagem do fluido conteúdo no vaſo, todas as partes da ſuperficie inferior CD devem partir com a meſma velocidade. Toda a difficuldade conſiſte em ſaber qual deve ſer a velocidade no primeiro inſtante do movimento: digo que eſ-

eſta velocidade he igual á que teria adquirido a primeira ſerie de particulas ſuperiores AB, cahindo da altura BD. Para iſto faça-ſe reflexão que a velocidade de hum corpo, que cahe, ſe augmenta em cada inſtante na razão dos momentos, que ſe vão paſſando, e conſequentemente a força deſte corpo, que ſe póde ſempre expreſſar por pezos, augmenta na meſma razão. Iſto ſuppoſto, ſe imaginamos que o tempo ſe repreſenta pela altura AC, haverá tantas ſeries iguaes á primeira, que opprimem a ultima, quantos inſtantes tem para deſcer a primeira ſerie ABEG: logo eſta ultima recebe da parte do pezo da columna, que a opprime, huma força igual á que teria adquirido, cahindo de B para D; mas eſta força ſeria expreſſada pela raiz quadrada da altura: logo, &c. *O Q. S. Q. D.*

PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

1156 Se a abertura D feita na baſe do vaſo, que encerra o liquido, não he he igual á baſe, digo que a velocidade para ſahir deſta abertura ſerá ainda expreſſada pela raiz quadrada da altura: ſuppõe-ſe que o vaſo conſerva ſempre a meſma altura do liquido.

Demonstração.

As quantidades dos fluidos, que ſahem, ſão na razão das velocidades da meſma abertura, ſendo evidente que huma velocidade dupla dá huma maça dupla, e aſſim das mais. Iſto ſuppoſto, imaginemos dous vaſos ABC, EFG furados ambos nas ſuas baſes com huma ſemelhante abertura, e de que as alturas ſejão differentes, he claro que as velocidades ſão differentes, qualquer que ſeja a ſua razão, e por conſequencia as maças, ou quantidade de fluido, ſerão tambem na meſma razão. Seja V a velocidade do primeiro vaſo, e u a velocidade do ſegundo; M a maça do fluido, que correo em hum certo tempo, e m a maça, que correo do ſegundo vaſo no meſmo tempo, teremos $M : m :: V : u$; logo $m = \frac{Mu}{V}$. Seja F o pezo

da

da columna AD, e f o pezo da columna EH, eſtes pezos, ou columnas eſtarão na razão das alturas, porque tem baſes iguaes, e o fluido he o meſmo em ambos os vaſos: logo ſerá $F:f::AD:GE$; além diſſo ſendo as forças como as quantidades do movimento, que produzem, iſto he, como os productos das maças, ou quantidades, que tem ſahido pelas velocidades, teremos $F:f::MV:\frac{Mu^2}{V}$; logo $F:f::MV^2\,Mu^2::V^2:u^2$; logo $AD:EG::V^2:u^2$; logo finalmente $V:u::\sqrt{AD}:\sqrt{EG}$. *O Q. S. Q. D.*

REFLEXÃO.

1157 Daqui ſe vê que o principio, que eſtabelecemos antecedentemente, he geral, iſto he, que as velocidades ſerão ſempre expreſſadas pelas raizes quadradas das alturas, qualquer que ſeja a abertura, igual, ou mais pequena que a baſe do vaſo, em que eſtá o fluido, e além diſſo qualquer que ſeja a figura do vaſo, direito, ou inclinado, com tanto que ſe conſerve ſempre cheio na meſma altura. Em vão ſe tem ten-

tentado explicar este principio pela acceleração das velocidades causadas pelo pezo. Chegando a primeira superficie ao fundo do vaso, não póde ter adquirido maior velocidade que a ultima, porque não póde passar senão depois della, e assim todas as mais successivamente. Devemos recorrer a outras demonstrações tiradas do modo, com que os fluidos obrão sobre as suas partes. Devemos a Mr. Varignon a completa demonstração, que acabamos de dar, e este principio antes delle se suppunha duvidoso, porque se não tinha ainda demonstrado com razão conveniente á natureza dos fluidos, e recorrião pelo contrario a cousas, que não podião ter lugar.

1158 No caso em que a abertura he igual ao diametro da base, provão
Figura 89. alguns Authores que a velocidade da agua ao sahir desta base deve ser igual á raiz quadrada da altura, considerando o fluido, que cahe todo junto ao mesmo tempo, como hum pedaço de neve. Vejo bem que nesta hypothesi, quando a serie AB chega a CD, terá

ad-

adquirido huma velocidade expressada pela raiz desta altura; mas não vejo como a ultima superficie CD no primeiro instante do movimento tenha a mesma velocidade, que he puramente o estado da questão. Assim esta prova não póde admittir-se, tanto mais que se não póde fazer comparação entre hum corpo cylindrico de neve, e huma columna de fluido da mesma base, e da mesma altura: a razão he, que no cylindro de neve, estando a superficie DE fortemente unida com toda a maça, não póde fazer nella effeito a impressão das partes superiores, sendo certo que esta impressão, que não ha no solido, he effectiva no liquido. Figura 89.

COROLLARIO I.

1159 Segue-se daqui que a velocidade de hum liquido, quando sahe do vaso, que o contém, he igual á que hum corpo adquiriria, cahindo de huma altura igual á da superficie do liquido sobre o fundo do vaso, porque esta velocidade tambem se expressa pela raiz quadrada da altura.

Corollario II.

1160 Acabamos de ver que se hum liquido sahe por huma abertura igual á base, a velocidade que tem he igual á de hum corpo, que cahisse livremente da altura desta columna do liquido. Além disso o corpo com esta velocidade corre em metade do tempo da quéda por BD o mesmo espaço BD: logo com a velocidade, que tem o liquido, quando sahe do vaso, ser-lhe-ha preciso, para se despejar o vaso inteiramente, hum tempo igual á metade do tempo que hum corpo grave gastaria em correr a mesma altura BD.

Corollario III.

1161 Como a velocidade he a mesma, quando o orificio he menor que a base, segue-se que em metade do tempo, que gastaria hum corpo em andar Figura 90. AG, correrá huma quantidade de agua igual á columna AD: por consequencia no tempo da quéda por AD sahirá huma columna dupla da mesma columna AD, com tanto que o vaso se conserve cheio na mesma altura para conserſervar a igualdade de velocidade. Póde-ſe logo geralmente dizer, que a ſáhida d' agua de huma arca, no tempo que gaſtaria hum corpo em cahir da altura do nivel de agua ſobre o fundo, he igual a huma columna, que tiveſſe por baſe o orificio, e por altura huma linha igual á que o corpo correria uniformemente no meſmo tempo com a velocidade adquirida, iſto he, a huma columna dupla.

COROLLARIO IV.

1162 Segue-ſe tambem daqui que ſe póde conhecer quanta he a ſahida d' agua de hum tubo em hum certo tempo, ſe ſe conhece o diametro do orificio, e a altura d' agua ſobre o fundo, que ſuppomos ſempre o meſmo. Para iſto buſque-ſe o tempo da deſcida de hum corpo pela altura d' agua ſobre a baſe, e depois buſque-ſe quanto eſte tempo he conteúdo no que ſe propõe, e multiplique-ſe o quociente por huma columna dupla da que tiveſſe por baſe o orificio, e por altura a que tem a agua ſobre o orificio. Iſto ſe ſegue evidentemente do Corollario precedente; porque pois no tempo da quéda pela altura d' agua ſahe huma columna dupla da meſma altura, ſe o tempo dado he decuplo do tempo da deſcida por eſta altura, ſahirá huma columna dez vezes dupla, ou vinte vezes maior que a propoſta, com tanto que, como ſe ſuppõe, ſe conſerve a meſma altura.

COROLLARIO V.

1163 Se tivermos vaſos, que tenhão alturas deſiguaes, e tambem differentes orificios, porém ſemelhantes, como circulares, ou quadrados, as quantidades de agua, que correm, ou ſahem, ſerão na razão compoſta das raizes quadradas das alturas, e dos quadrados dos diametros, com tanto que neſtes meſmos vaſos ſe lhes conſerve ſempre a meſma altura d' agua: logo ſe ſe chamão D, e d as ſahidas d' agua, e H, e h as alturas, L, e l as larguras, ou diametros dos orificios, teremos $D : d :: \sqrt{H} \times L^2 : \sqrt{h} \times l^2$; logo $D \times \sqrt{h} \times l^2 = d \times \sqrt{H} \times L^2$. Se as ſahidas são iguaes, teremos $\sqrt{h} \times l^2 = \sqrt{H} \times L^2$; logo $\sqrt{H} :$
$\sqrt{h} ::$

$\sqrt{h}::l^2:L^2$, iſto he, que os orificios eſtão na razão reciproca das raizes quadradas das alturas, ou das velocidades, que são expreſſadas por eſtas raizes. Se em lugar das ſahidas ſe põem os productos das baſes pelas velocidades, que lhes são iguaes, ſerá $V \times L^2 \times \sqrt{h} \times l^2 = u \times l^2 \times \sqrt{H} \times L^2$, ou $V \times \sqrt{h} = u\sqrt{H}$, de que ſe tira $V:u::\sqrt{H}:\sqrt{h}$.

COROLLARIO VI.

1164 Como a agua em todos os vaſos faz força igual para todos os lados para ſahir, ſegue-ſe que ſe tivermos hum vaſo como AD cheio de agua conſervada ſempre na meſma altura, e ſe lhe abrem dous furos em B, e C, as velocidades d' agua ſahindo ſerão como as raizes quadradas das alturas AB, e AC, ou a agua ſeja impellida com direcção horizontal, ou vertical, ou inclinada ao horizonte: he com tudo de notar, que iſto não ſe acha exactamente verdadeiro, iſto he, que a velocidade d' agua, quando ſahe por huma direcção obliqua, não he tão grande, como por huma direcção hori- Figura 92.

ri-

rizontal, ou vertical, quando corre de ſima para baixo, e eſta differença provem de que as partes d'agua não correm tão facilmente pelas direcções obliquas, como nas horizontaes, nem tão facilmente pelas horizontaes, como nas verticaes.

Corollario VII.

1165 Segue-ſe daqui mais que ſe a agua ſahe por huma direcção horizontal, deſcreverá huma parabola, cujo vertice eſtará em B; porque já demonſtrámos no tratado do movimento, que ſe tivermos hum meio circulo AFC, cujo diametro AC ſeja vertical, e ſe impelle qualquer corpo por huma direcção BD com huma força expreſſada pela raiz de AB, que he a que teria adquirido, cahindo de A para B, eſte corpo deſcreverá huma parabola BGE, cuja amplitude EC ſeria dupla da perpendicular BF: logo ſe as partes d'agua ſe conſiderão como huma infinidade de pequenos corpos impellidos pela direcção BD com huma força expreſſada pela raiz quadrada de AB,

Figura 93.

ver-

ver-se-ha que descrevem semelhantemente a parabola BGE.

Do mesmo modo, se a agua sahe pela direcção CG com huma velocidade Figura 94. expressada pela raiz quadrada da altura AC, que supponho ser de nivel com a agua sobre a base, descreverá a parabola CEF, cujo vertice será o ponto E, pois já mostrámos que todo o corpo impellido pela direcção CG obliqua ao horizonte por huma força expressada por $\sqrt{AC}$, que he a força d' agua, que sahe, deve descrever huma parabola.

COROLLARIO VIII.

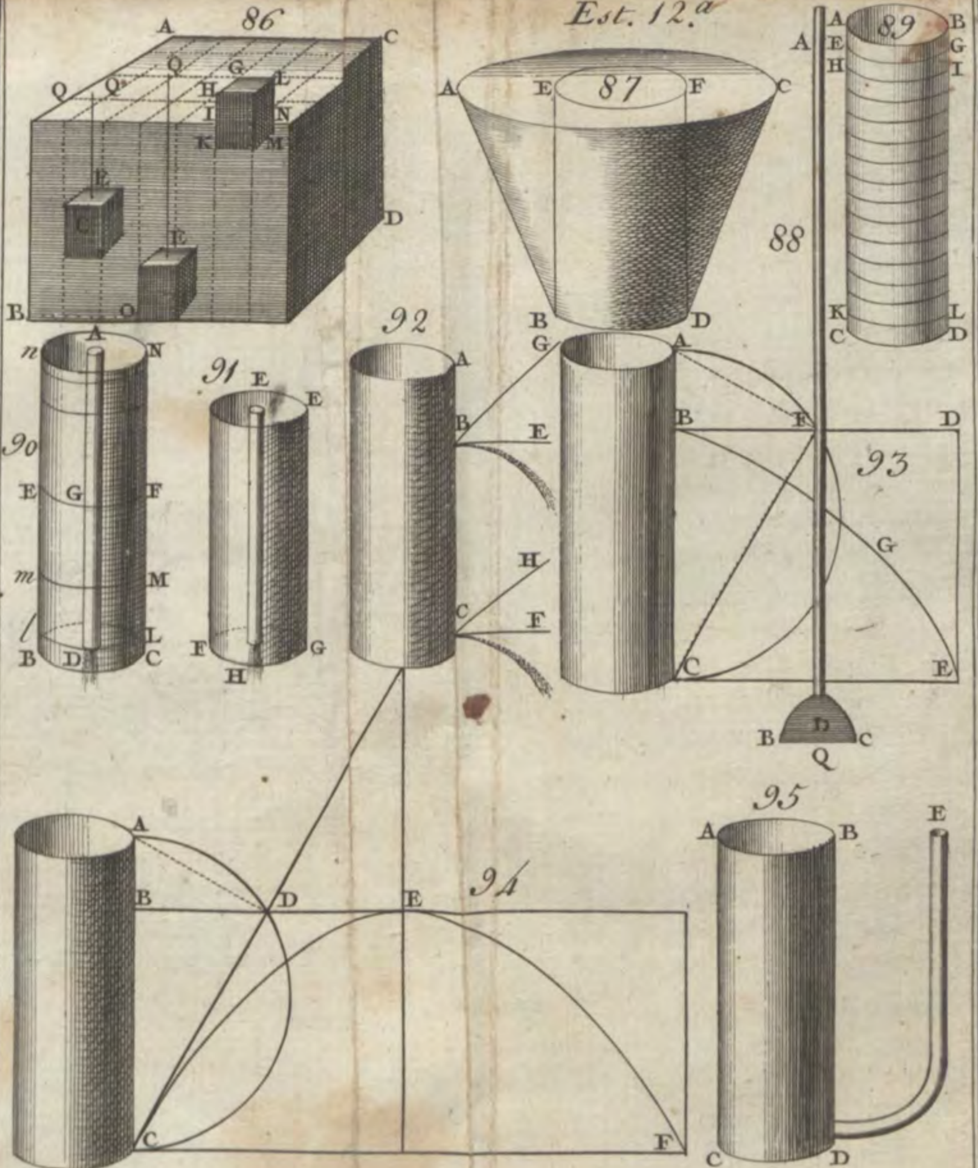
1166 Segue-se tambem daqui que se houver huma arca ABCD na base, Figura 95. da qual haja hum orificio D, e hum tubo encurvado da abertura D para E, a agua subirá neste canudo DE com a mesma velocidade adquirida até a altura que desceo; porque temos visto que se hum corpo he impellido com a força, que adquirio, cahindo de huma altura determinada, deve tornar a subir á mesma altura. Este principio he

de

de grande uſo nos aqueductos, e differentes diſtribuições. Quando ſe quer ſaber ſe ſe póde levar a agua de hum lugar a outro, deve primeiro certificar-ſe ſe aquelle, em que ſe acha o naſcimento, he mais elevado que o lugar, a que ſe quer conduzir, o que ſe reconhecerá com hum exacto nivelamento. Se a fonte he alguma couſa mais elevada que o ſitio, a que ſe quer conduzir a agua, então póde conduzir-ſe por canaes feitos entre os dous ſitios; ſobre o que he de notar, que quando he preciſo que a agua ſuba para chegar ao lugar deſtinado, depois de ter deſcido, como póde ſucceder, achando-ſe deſigualdade no terreno entre os dous ſitios, he preciſo que a fonte ſeja alguma couſa mais elevada que o lugar, a que ſe conduzem as aguas, ſem o que ſe exporiaõ a hum trabalho, e deſpeza inutil, porque concorrem muitas couſas, que podem alterar a velocidade d'agua no cano, e por conſequencia diminuem a força para ſubir.

Co-

Est. 12.ª



T. IV.

COROLLARIO IX.

1167 Quasi por esta mesma razão nos repuchos não sobe a agua exactamente á mesma altura da arca, que faz o repucho, pois resistindo o ar, as partes d'agua á proporção, que sahem do repucho, que está em C, lhe diminue a velocidade, e lhe embaraça levantar-se até o nivel da superficie d'agua da arca. Mr. Mariotte no seu tratado do movimento das aguas faz muitas observações para saber em que razão se diminuem as alturas, ás quaes se elevão differentes jogos, que sahem dos mesmos orificios, e arcas desiguaes, e achou que esta diminuição seguia a razão das raizes quadradas das alturas: do que se vê, que sabendo-se a altura da arca, de que vem a agua, se podia conhecer com huma só proporção a altura, a que se póde elevar hum jogo de agua de huma arca de conhecida altura por hum orificio do mesmo diametro; e além disso sendo sempre as sahidas á proporção das velocidades, segue-se que se se conhece a sahida de huma arca por hum orificio dado, se conhecerá tambem a Figura 96.

sa-

ſahida da outra de outra altura por qualquer abertura que ſe dê.

Mr. Mariotte achou que tendo huma arca ſempre cheia d' agua, cuja altura foſſe ſempre 20 palmos e meio, o diametro da fenda 13 linhas, ſahe em hum minuto pelo orificio 14 pintas, medida de París, que péza cada huma 2 libras; aſſim he o que baſta para reſolver o Problema ſeguinte.

PROPOSIÇÃO III.

Theorema.

1168 Achar quanta agua ſahe de hum repucho em hum minuto por hum canudo de 4 linhas de diametro de huma arca de 60 palmos de altura.

Solução.

Sabemos que quando as aberturas são iguaes, a agua que ſahe he na razão das raizes quadradas das differentes alturas de agua; e que quando são differentes, as ſahidas eſtão na razão compoſta das raizes quadradas das alturas, e quadrados dos diametros dos orificios; aſſim fazendo uſo da experiencia

cia de Mr. Mariotte, diremos: ſe o producto do quadrado de 3 linhas, que he 9, pela raiz de 20 e meio dá 14 pintas, ſahida d'agua por hum minuto, quanto dará o producto do quadrado do diametro 4 do orificio, que he 16, pela raiz quadrada de 60, por ſahida, que ſe pede no meſmo tempo? e o quarto termo deſta regra de 3 ſerá o numero, que ſe buſca.

COROLLARIO.

1169 Se os tempos não foſſem iguaes, podiamos ſempre achar por huma ſó regra de 3 a ſahida em hum tempo determinado, porque as ſahidas são ſempre na razão compoſta das raizes quadradas das alturas, dos quadrados dos diametros, e da razão ſimples dos tempos; de ſorte que ſe temos huma arca, cuja altura ſeja H, a ſahida D por hum cano, cujo diametro ſeja F, em hum tempo T, e outra, cuja altura ſeja h, a ſahida d por hum cano, cujo diametro ſeja f, em hum tempo t, teremos eſta proporção $D : d :: FFT\sqrt{H} : fft\sqrt{h}$, do que ſe tira $Dfft\sqrt{h} = dFFT\sqrt{H}$, e

pó-

póde usar-se desta formula para determinar todos os casos, que dizem respeito a differentes questões, que se podem propôr sobre a sahida das arcas, conforme as diversas combinações dos tempos, alturas, e diametros.

PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

1170 Se hum vaso cylindrico cheio de agua se despeja por hum orificio D muito mais pequeno que o fundo da base, as quantidades de agua, que correm em tempos iguaes, serão como os numeros impares tomados na ordem inversa, isto he, como a serie dos numeros 11. 9. 7. 5. &c.

DEMONSTRAÇÃO.

fig. 90.

Imaginemos o vaso cortado por planos parallelos, cujas alturas CL, CM, CF, ON sejão como os quadrados 1. 4. 9. 16. &c. dos numeros naturaes 1.2.3.4. &c. Quando a agua começar a correr, sendo a velocidade expressada pela raiz quadrada da altura, será como 4; e quando o nivel d'agua descer para EF,

a ve-a velocidade ſerá como a raiz de 9, que he 3. Semelhantemente quando o nivel eſtiver em Mm, a velocidade ſerá como 2; e finalmente quando eſtiver em Ll, a velocidade ſerá expreſſada por 1. Reflectamos agora que os cylindros, cujas alturas são CL, CM, CF, CN, tendo baſes iguaes, são entre ſi como as meſmas alturas, iſto he, como 1. 4. 9. 16. e ſe ſe ſuppõe por hum pouco que a velocidade de N até F foi uniforme, e que a de F até M o foi tambem, as quantidades NF, FM, ML, LC, que corrêrão em tempos iguaes, que não são outra couſa mais que os cylindros 7. 5. 3. 1., são preciſamente na razão inverſa dos numeros impares 1. 3. 5. 7. &c. Preſentemente ſe deve advertir que ainda que a velocidade de N para F tenha continuamente diminuido, com tudo póde achar-ſe huma velocidade media, que tida, e ſuppoſta conſtante, dá a meſma ſahida de agua, e aſſim das outras; e ſegue-ſe neceſſariamente que as quantidades de agua, que tem corrido em tempos iguaes, são como os numeros impares 7. 5. 3. 1.

Co-

COROLLARIO I.

1171 He claro que neste caso o diametro da abertura deve ser muito menor que o da base, porque então a agua cahiria como hum corpo só, de modo que as partes inferiores não terião maior velocidade do que as superiores, e he o que faz com que se veja a grande cavidade, que se fórma de repente á roda da superficie d'agua, o que prova incontestavelmente que a agua do meio sahe com maior velocidade neste caso que nos outros.

COROLLARIO II.

1172 Segue-se tambem daqui que se póde conhecer a quantidade de agua, que tem corrido em hum tempo determinado, se se conhece o tempo total, que gasta o vaso em despejar-se. Supponhamos, por exemplo, que o vaso gaste 6 horas em despejar-se por hum orificio muito mais pequeno que a base, imagino o vaso cortado em 36 partes iguaes entre si: isto supposto, divido ainda o numero 36 em outras 6 partes, de que a primeira contenha 11 destas

Figura 89.

tas partes, a ſegunda 9, e a terceira 7, e aſſim em diante. Deſte modo ſe verá que na primeira hora ſahio do vaſo hum cylindro igual a 11 partes iguaes, iſto he, os $\frac{11}{16}$ da agua conteúda no meſmo vaſo; na ſegunda hora ſahio $\frac{9}{16}$, ou $\frac{1}{4}$, e aſſim das outras, o que he evidente, porque a ſomma dos numeros 11. 9. 7. 5. 3. 1. faz exactamente 36; e pelo theorema preſente as quantidades, que ſahírão em tempos iguaes, ſeguem a razão dos meſmos numeros.

Corollario III.

1173 Segue-ſe daqui que como a velocidade d' agua, que ſahe do vaſo, que ſe deſpeja, he continuamente retardada, ſe o vaſo ſe conſervaſſe ſempre com a meſma altura de agua, ſeria a velocidade uniforme. Aſſim, conforme a lei de Galileo, a quantidade de agua, que correo uniformemente no meſmo tempo que o vaſo ſe deſpejou, ſeria dupla da agua, que continha o vaſo.

Co-

COROLLARIO IV.

1174 Segue-ſe daqui mais que ſe os vaſos, que ſe deſpejão, tem alturas, e orificios iguaes com baſes deſiguaes, os tempos, que gaſtárão em deſpejar-ſe inteiramente, eſtarão na razão das baſes; porque os tempos, que os vaſos gaſtão em deſpejar-ſe, são iguaes ao tempo, que era preciſo para correr por hum movimento uniforme huma quantidade de agua, que eſtá em cada vaſo, ſuppondo-os conſervarem-ſe na meſma altura ſempre *, e neſte ultimo caſo os tempos das ſahidas são proporcionaes ás baſes: logo tambem quando os vaſos ſe deſpejão totalmente, os tempos devem ſeguir a meſma razão.

* Numer. 1173.

COROLLARIO V.

1175 Se os vaſos tem ſempre a meſma altura, e as baſes com orificios deſiguaes, he evidente que os tempos, que gaſtão em deſpejar-ſe, eſtarão na razão compoſta da directa das baſes, e da inverſa dos orificios, ou quadrados dos ſeus diametros, ſe são figuras ſemelhantes.

Co-

COROLLARIO VI.

1176 Não he menos evidente que os tempos eſtarão tambem na razão compoſta da directa das raizes quadradas das alturas, ſe eſtas alturas são deſiguaes, da directa das baſes, e da inverſa dos quadrados dos diametros dos orificios, de ſorte que chamando H á altura da agua de hum vaſo, B á ſua baſe, D o diametro do orificio, e T o tempo, que gaſta em deſpejar-ſe, ſemelhantemente h a altura d' agua do outro vaſo, b a ſua baſe, d o diametro do orificio, e t o tempo, que gaſta em deſpejar-ſe, teremos $T : t :: \frac{B\sqrt{H}}{DD} : \frac{b\sqrt{h}}{dd}$ ou $T : t :: B\,dd\sqrt{H} : b\,DD\sqrt{h}$, de que ſe tira $T\,b\,DD\sqrt{h} : t\,B\,dd\sqrt{H}$, e nos ſerviremos deſta formula, como das precedentes.

CAPITULO III.

Da corrente dos rios, e da percussão dos fluidos em movimento contra as superficies dos corpos, que encontrão.

Definições.

I.

1177 O leito de hum rio, ou ribeira he o canal, por que elle corre.

II.

1178 Se se imagina hum plano vertical, que córta toda a largura da ribeira, e perpendicularmente a sua corrente, a figura que resulta será o perfil, ou secção do rio; como a linha do terreno, que termina esta figura, he mui irregular, se reduz a rectangulo para ter huma medida facil de determinar.

PROPOSIÇÃO I.

Theorema.

1179 Toda a ribeira, ou rio, a que não se embaraça o movimento, corre com velocidade accelerada.

De-

DEMONSTRAÇÃO.

Ou o fundo do leito do rio he horizontal, ou obliquo. No primeiro caſo ſe conceba o leito de hum rio, cuja altura he BC repreſentado pela linha Figura 97. CD, e o rio dividido em huma infinidade de ſuperficies parallelas. He viſivel que cada huma deſtas ſuperficies corre com huma velocidade igual á que teria adquirido, cahindo da altura correſpondente; porque ſendo cada huma opprimida com o pezo das ſuperiores, ſe acha no caſo do Artigo 1155. Além diſſo como ella eſtá ſempre ſujeita á acção das ſuperficies ſuperiores, ſegue-ſe que adquire novos gráos de velocidade: logo move-ſe com movimento accelerado. No ſegundo caſo, iſto he, quando o leito he inclinado ao horizonte, independentemente deſta primeira acceleração, cauſada pela preſsão de cada ſuperficie ſobre a que tem de baixo, e modificada pela inclinação do leito da ribeira, cahindo a maſſa toda ſobre o plano inclinado, adquire em cada inſtante novos gráos de velocidade, como os corpos, que descem por planos inclinados. *O Q. S. Q. D.*

Corollario I.

1180 Segue-se daqui que qualquer que seja a posição do leito de hum rio a velocidade será tanto maior, quanto mais distante estiver o rio da sua fonte; porque se o leito he horizontal, cada superficie obrará tanto mais, quanto maior distancia ha entre o ponto, em que se examina a velocidade do rio, e a sua origem; e quando o leito he inclinado ao horizonte, será tanto maior a altura da fonte sobre o mesmo ponto, quanto mais distante se acha della.

Corollario II.

1181 Segue-se daqui que as velocidades de duas ribeiras differentes nas suas embocaduras, supondo o declive igual, são tanto maiores, quanto as embocaduras estão mais distantes das suas fontes, e geralmente as velocidades dos rios dependem da inclinação do seu leito, da altura das suas aguas, e das distancias destas mesmas aguas ás suas fontes.

Corollario III.

1182 Segue-se tambem daqui que as velocidades de differentes superficies são tanto maiores, quanto mais perto do fundo estão. Se a experiencia não confirma inteiramente esta verdade, he porque o fundo das ribeiras sempre está cheio de corpos desiguaes, cujo roßado com as ultimas partes demora necessariamente o movimento das partes. Além disso he claro, que sendo as velocidades de cada superficie expressadas pelas raizes quadradas das alturas, estas velocidades podem ser representadas pelas ordenadas de huma parabola AMOP, porque temos Figura 97.
$LM:NO:DP::\sqrt{AL}:\sqrt{AN}:\sqrt{AD}$.

Definição.

1183 Se concebermos huma velocidade uniforme, que seja tal que corra no mesmo tempo a mesma quantidade de agua, que a que corre pela somma das velocidades desiguaes, esta velocidade se chama velocidade media.

Co-

COROLLARIO I.

1184 Segue-se daqui que a velocidade media he os dous terços da velocidade da ultima superficie, no caso em que a cessão do rio he hum parallelogramo; porque he evidente que as quantidades de agua, que sahem por cada superficie, ou elemento da secção, são proporcionaes á largura destes elementos, e á velocidade, mas na hypothesi presente todas as larguras são iguaes: logo as quantidades de agua, que correm em cada superficie, seguem a razão das velocidades, isto he, vão diminuindo como as ordenadas de huma parabola, que tivesse por altura AD: logo se PD expressa a velocidade da ultima superficie, a quantidade de agua, que corre pela superficie do parallelogramo, será os dous terços da que teria corrido, no caso que as superficies fossem iguaes: logo para ter a velocidade media basta tomar os dous terços da maior velocidade DP; porque multiplicando a altura AD por esta velocidade, teremos a quantidade de agua, que tem corrido.

Figura 97.

Co-

COROLLARIO II.

1185 Segue-ſe tambem daqui que a velocidade media varía conforme as differentes figuras da ſecção da ribeira; e a regra geral para a achar he dividir a quantidade de agua, que correr, pela altura: eſta operação he a mais facil, o que preciſa mais habilidade he applicar eſte principio, que as quantidades de agua, que correm, eſtão na razão compoſta da directa das raizes quadradas das alturas, e da directa dos elementos da ſecção para achar a quantidade de agua, que correo em tempo determinado. Os que tiverem conhecimento do calculo differencial poderão ver na Arquitectura Hydraulica differentes ſoluções deſte Problema, e poderão por meio deſte principio, que explico, achar a velocidade media correſpondente.

COROLLARIO III.

1186 Segue-ſe daqui que a velocidade media correſpondente he $\frac{4}{9}$ da altura AD; porque ſuppondo NO eſta

ve-

velocidade, teremos NO $= \frac{2}{3}$ DP; logo DP$^2 : \frac{4}{9}$ DP^2 :: AD : $\frac{4}{9} \frac{AD \times DP^2}{DP^2} = \frac{4}{9}$ AD; logo ſe ſe conhece a altura AD, e a largura da ſecção, que nós ſuppomos parallelogramo, com a quantidade de agua, que correo em hum certo tempo, conhecer-ſe-ha a velocidade da ultima ſuperficie do modo que ſe ſegue.

Seja q a quantidade de agua, que corre por eſta ſecção em hum minuto, a a altura AD, ſerá $\frac{2}{3}\sqrt{a}$ a velocidade media *: logo a velocidade da ultima ſuperficie he conhecida, porque eſta he os dous terços: ſerá logo $\frac{2}{3} : 1 :: \frac{q}{a} : \frac{3}{2} \frac{q}{a}$, iſto he, conhecer-ſe-ha a velocidade da ultima ſuperficie, dividindo o triplo da quantidade da agua, que correo, pelo duplo da altura.

* Numer 1184.

COROLLARIO IV.

1187 Segue-ſe daqui que ſe ſe conhece a velocidade da ultima ſuperficie, e a media, com a quantidade de agua que correo, conhecer-ſe-ha tambem

bem a altura da cefsão ; e tanto nefte cafo, como no precedente fe determinará facilmente o parametro da parabola.

Da collisão dos fluidos com corpos quietos, e percufsão com os que fe movem.

1188 Para calcular as forças na collisão, e percufsão dos fluidos fe deve attender, como nos folidos, á denfidade, e velocidade do fluido, de que depende; mas como os fluidos obrão de diverfo modo que os folidos, tambem as leis da fua collisão não são as mefmas: a principal differença confifte em que quando hum corpo folido fere o outro, fó a fuperficie anterior o fere, e nos fluidos todas as fuperficies elementares vem ferir com a mefma velocidade.

PROP SIÇÃO II.

THEOREMA.

1189 As forças da collisão de hum fluido com differentes velocidades contra planos iguaes, expoftos perpendicularmente á fua corrente, ferão como os quadrados das velocidades.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

Sendo os planos iguaes, e todos perpendiculares á corrente, ou direcção do fluido, o numero dos fios, que operão contra elles, he o mesmo: logo he evidente que a collisão da corrente contra estes planos seria igual, se as velocidades fossem iguaes, e a differença he por causa da desigualdade das velocidades: logo devemos mostrar que a razão das forças he a dos quadrados das velocidades. Para isto supponhamos que a primeira velocidade seja 1, a segunda 3: logo no mesmo tempo o plano opposto á maior velocidade he ferido trez vezes mais, porque a massa da agua he trez vezes maior. Além disso como cada parte desta massa he igual á que tem hum gráo de velocidade, tem pela hypothesi huma velocidade tripla: logo a superficie, que lhe he opposta, receberá trez vezes mais movimento que cada huma das suas partes: logo a quantidade de movimento recebido, ou a força da collisão se expressará por 9 quadrado de 3, e a collisão com a primeira superficie se expressará por 1 qua-

quadrado da primeira velocidade: logo as forças da collisão de hum fluido da mesma densidade são como os quadrados das velocidades contra superficies iguaes expostas perpendicularmente á sua corrente.

SCHOLIO.

1190 Deve-se notar que aqui se suppõe que todas as superficies horizontaes do fluido tem a mesma velocidade, e a não succeder assim, precisaria conhecer-se a razão, com que se augmentão, e diminuem para determinar as velocidades medias; e as forças da corrente contra estes planos serião entre si como os quadrados destas velocidades medias.

COROLLARIO I.

1191 Se sendo as velocidades dos fluidos desiguaes, se suppõe demais, que os fluidos tem densidades desiguaes, e que encontrão perpendicularmente com planos desiguaes, he evidente que a força da collisão contra estes planos está na razão composta das superficies

seferidas, densidades dos fluidos, e quadrados das velocidades: logo chamando F á força do primeiro fluido, V á sua velocidade, D á sua densidade, e S á superficie, que encontra, e semelhantemente *f* á força do segundo fluido, cuja densidade he *d*, a velocidade *u*, e que encontra huma superficie *s*, haverá esta analogia $F : f :: SV^2D : su^2d$, que póde servir para determinar as differentes razões das forças da collisão, conforme a razão das densidades, das velocidades, e dos planos; sempre no caso, em que as superficies horizontaes do fluido tenhão a mesma velocidade, como aqui suppomos, e advertiremos, quando mudarmos de supposição.

COROLLARIO II.

1192 Se os planos expostos a differentes fluidos tem velocidades particulares, he evidente que no caso, em que estas velocidades sejão para o mesmo ponto, devem ser menores que as dos fluidos, e então as forças dos fluidos contra estes planos estarão na razão composta da densidade dos mesmos fluidos,

dos, das ſuperficies, e dos quadrados das differenças das velocidades de cada fluido ao plano, com que encontrão. Se os planos, que encontrão, tem velocidades particulares, e directamente oppoſtas á dos fluidos, as forças da percuſsão com eſtes planos eſtarão na razão compoſta dos quadrados da ſomma das velocidades do fluido, da ſuperficie dos fluidos, e da ſuperficie do plano, contra que bate, e das denſidades deſtes meſmos fluidos.

Corollario III.

1193 Se o fluido ſe ſuppõe quieto, e o plano ſe move no meſmo fluido com huma certa velocidade, as reſiſtencias, que encontrará ſerão como os quadrados das velocidades; porque he evidente que he inteiramente o meſmo ſuppôr o fluido quieto, e o plano em movimento, ou ſuppôr o plano quieto, e o fluido encontrar-ſe contra elle com a meſma velocidade.

PRO-

PROPOSIÇÃO III.

THEOREMA.

1194 Se dous planos iguaes estão expostos á corrente, da qual todas as superficies horizontaes se suppõem ter a mesma velocidade, hum perpendicular, e outro obliquo ao mesmo fluido, as collisões com estes planos serão como o quadrado do seno total ao quadrado do seno do angulo da inclinação.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja o plano TV exposto á corrente representada nesta figura, e perpendicular á mesma corrente, e o outro plano TM inclinado á direcção do fluido, que se suppõe igual á precedente: tendo descripto o arco MV, e abaixado a perpendicular MQ sobre TV, he visivel que TQ será o seno do angulo da inclinação TMQ: devemos logo mostrar que a collisão do fluido contra TV he á collisão do fluido contra TM, como o quadrado TV^2 do seno total ao quadrado TQ^2 do seno do angulo da inclinação.

Figura 98.

O

O liquido ſe póde conceber como compoſto de huma infinidade de ſuperficies horizontaes, que batem todas com a meſma força: iſto ſuppoſto, he evidente que a força da collisão depende do modo, com que cada huma bate direita, ou obliquamente, e numero de ſuperficies; não he menos claro, que o numero das ſuperficies, que batem no plano TV, he ao numero das que batem no plano TM, como TV a TQ; mas as que ferem o plano TM não o ferem direitamente, porque eſte plano fica obliquo á corrente, aſſim a força da collisão contra eſte plano deve diminuir-ſe na razão do ſeno total ao ſeno do angulo da inclinação; porque ſe ſuppõe que a força abſoluta de huma das ſuperficies ſe repreſenta por PF igual ao ſeno total, eſta força he compoſta de outras duas, huma PH parallela ao plano TM, e outra perpendicular FH; mas he evidente que PF : FH :: TM : TQ :: TV : TQ por ſerem os triangulos PHF, TMQ ſemelhantes: logo a força da collisão contra TV he á da collisão contra TM, co-

mo

mo $TV^2 : QT^2$, iſto he, como o quadrado do ſeno total ao quadrado do ſeno do angulo da inclinação. *O Q.S.Q.D.*

COROLLARIO I.

1195 Se o numero dos fios de agua foſſe igual de huma, e outra parte, como ſuccederia ſe o plano TM ſe continuaſſe para N até a linha horizontal NV, então a deſigualdade da colliſão ſó procede da obliquidade do fluido, e conſequentemente a colliſão contra TV he para a colliſão contra TN, como o ſeno total ao ſeno do angulo da inclinação, porque a velocidade he a meſma; e como a altura tambem he a meſma, ha o meſmo numero de elementos, que encontrão os planos TV, TN, que ſe ſuppõem ter huma igual largura.

COROLLARIO II.

1196 Segue-ſe tambem daqui que as percuſsões de dous fluidos de diverſa denſidade em planos deſiguaes, e deſigualmente inclinados, são na razão compoſta dos quadrados dos ſenos dos angulos das inclinações, das denſida-

des,

des, e das ſuperficies dos planos expoſtas aos differentes fluidos, e dos quadrados das velocidades, porque os ſenos de cada hum dos angulos da inclinação medem o numero das fiadas horizontaes, que batem nos planos propoſtos: medem tambem o intenſo da percuſsão, conforme a maior, ou menor inclinação dos planos: logo as percuſsões dos corpos são 1.º como os quadrados dos ſenos dos angulos das inclinações: 2.º he evidente que quanto forem maiores, mais fiadas lhes fazem impreſsão: 3.º he tambem claro que com velocidade igual quanto mais denſos são os fluidos, maior ſerá a percuſsão por cauſa da maſſa, que he proporcional ás denſidades: 4.º as percuſsões ſerão como os quadrados das velocidades, porque temos demonſtrado * que as percuſsões ſeguem a razão dos fluidos: logo ſe ſe chama D á denſidade do fluido, V á velocidade commua a todas as fiadas, S o ſeno do angulo da inclinação do plano, cuja ſuperficie he repreſentada por E, e F a força do fluido contra eſte plano. Se-

* Numer. 1118.

melhantemente ſe chamarmos *d* á denſidade do outro fluido, cuja velocidade he *u*, e que bata em hum plano, cujo ſeno de inclinação he *s*, e a ſuperficie *e*, chame-ſe *f* á percuſsão contra eſte plano, teremos $F:f::DV^2S^2E:du^2s^2e$, de que ſe tira $F\,du^2s^2e=f\,DV^2S^2E$. Deſta propoſição, e da formula, que démos, ſe póde deduzir o que preciſamos nas diverſas circumſtancias, que podem occorrer ſobre a collisão dos fluidos contra ſuperficies quietas. Tambem ſe póde applicar á percuſsão dos fluidos contra os planos em movimento, e expoſtos obliquamente ás correntes, tomando pelas velocidades V, e *u* a differença, ou ſomma das velocidades do plano, e do fluido, conforme as direcções, que eſtas velocidades tem para a meſma parte, ou para partes oppoſtas.

Corollario III.

1197 Para moſtrar algumas applicações deſta formula, ſupponhamos que as velocidades são proporcionaes ás denſidades, e aos planos, que encontrão, iſto he, que $V:u::D:d$, e que

V:

$V : u :: E : e$; logo multiplicando orde-
nadamente, ſerá $V^2 : u^2 :: DE : de$; logo
ſubſtituindo-ſe eſtas razões na propor-
ção $F : f :: DV^2 S^2E : du^2s^2e$, teremos eſ-
ta $F : f :: D^2E^2S^2 : d^2s^2e^2$, ou $F : f :: V^4S^2 :$
u^4s^2 , iſto he , que as forças são como os
productos dos quadrados das denſida-
des dos planos , e dos ſenos dos angu-
los da inclinação , ou na razão compoſ-
ta das quartas potencias das velocida-
des , e dos quadrados dos ſenos dos an-
gulos da inclinação.

COROLLARIO IV.

1198 Se as velocidades são recipro-
cas ás raizes quadradas dos eſpaços , e
as denſidades reciprocas aos quadrados
dos ſenos dos angulos da inclinação ás
forças da colliſão , ſerão iguaes , por-
que $V : u :: \sqrt{e} : \sqrt{E}$ ſerá $V^2 : u^2 :: e : E$;
logo $V^2E = u^2e$; logo $F : f :: DS^2 : ds^2$;
mas $D : d :: s^2 : S^2$; logo $DS^2 = ds^2$;
logo $F = f$, e aſſim nos mais caſos , que
he inutil repetir aqui. Os principian-
tes he que devem exercitar-ſe para co-
nhecerem por eſtas formulas o que de-
ve ſucceder nas circumſtancias ; mas o

que devem eſtudar com mais applicação são as razões metafyſicas do que reſulta na formula, ſem o que ſe eſquecerão logo do que achárão no pernicioſo coſtume de diſcorrer ſó pelas formulas, quando eſtão em eſtado de poder formar juizo.

SCHOLIO.

1199 No que precede ſuppuzemos que todas as fiadas do fluido, que bate hum plano perpendicular, ou obliquo á ſua corrente, ſe movião com igual velocidade; mas como ha hum grande numero de caſos, em que as velocidades das ſuperficies são deſiguaes, e ſeguem diverſas razões, vamos examinar na Propoſição ſeguinte quaes devem ſer as forças da collisão, quando as velocidades de cada ſuperficie são como as raizes quadradas das alturas, como ſuccede nas ribeiras, e outras correntes, que tem certa profundidade.

PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

1200 Se dous planos iguaes são oppoſtos á corrente de hum fluido, de que

to-

todas as ſuperficies tem differentes velocidades, que ſeguem a progreſsão das raizes das alturas, e hum deſtes planos for expoſto perpendicularmente, e outro obliquamente ao meſmo fluido, a collisão contra o primeiro he para a collisão contra o ſegundo, como o cubo do ſeno total he para o cubo do do angulo da inclinação.

DEMONSTRAÇÃO.

Supponhamos que as linhas iguaes AB, AF repreſentão o perfil de cada hum deſtes planos huma AB perpendicular á direcção do fluido, e outra AF obliqua ao meſmo fluido, AB ſerá o ſeno total, e AG o ſeno do angulo da inclinação. Além diſſo como ſe ſuppõem que as velocidades ſe augmentão, como as raizes quadradas das alturas, he evidente que a maior velocidade das ſuperficies, que correſpondem ao plano obliquo AF, ſe expreſsão por $\sqrt{AG}$; e a maior velocidade, que correſponde ao plano vertical AB, ſe expreſſará por $\sqrt{AB}$. Ora ſabe-ſe do que fica dito que a collisão deſtas dif- Figur. 100.

fe-

ferentes fiadas contra os planos, que encontrão perpendicularmente, he como o producto destes planos pelos quadrados das velocidades medias, que são como as raizes quadradas das alturas correspondentes A B, e A G, de que são $\frac{2}{3}$ *. Assim chamando F á collisão do fluido contra AB, f á do mesmo fluido contra AG, será $F:f::AB \times AB:AG \times AG$; porque tendo as superficies a mesma largura, são como as alturas AB, e AG: e demais os quadrados das velocidades medias correspondentes são como A B, e A G, porque AB he o quadrado de $\sqrt{AB}$, e AG o de $\sqrt{AG}$.

* Numer. 1184.

Presentemente para ter a collisão das fiadas medidas por A G contra a superficie obliqua A F, devemos fazer attenção, que a collisão directa he á obliqua, como o seno total ao seno do angulo da inclinação, ou como AB he a AG: logo chamando $ʃ$ á força da collisão obliqua, teremos $f:ʃ::AB:AG$, mas antes tinhamos $F:f::AB^2:AG^2$; logo multiplicando ordenadamente, e dividindo os primei-

ros

ros dous termos por f, teremos $F:f::AB^3:AG^3$, de que se segue evidentemente que nesta hypothesi as forças da corrente contra planos iguaes AB, e AF são como os cubos do seno total, e o do seno do angulo da inclinação. *O Q. S. Q. D.*

Corollario I.

1201 Se tivermos outra inclinação ao mesmo plano, como AK, teremos ainda $F:\phi::AB^3:AL^3$; logo as forças contra o mesmo plano differentemente inclinado em hum fluido homogeneo são como os cubos dos senos dos angulos da inclinação, porque he evidente que por ser $F:f::AB^3:AG^3$, e os antecedentes destas duas proporções são os mesmos, os consequentes devem tambem formar huma proporção: logo $f:\phi::AG^3:AL^3$.

Corollario II.

1202 Se os planos são desiguaes, e differentemente inclinados em hum fluido da mesma densidade, as forças do fluido contra estes mesmos planos

são

são como os productos destes mesmos planos pelos productos dos cubos dos senos dos angulos da inclinação pelos quadrados das velocidades medias, que lhes correspondem.

Figur. 100. e 101. Para demonstrar este Corollario sejão representadas as superficies desiguaes por linhas AF, *af*, e tomem-se as linhas AB = AF, e *ab* = *af*, cada huma perpendicular á corrente: seja F a força, que obra perpendicularmente contra a superficie AB, V a velocidade media, e *aa* a superficie representada por AB, ou AF. Seja semelhantemente *f* a força da corrente contra a superficie *ab*, *u* a velocidade media correspondente, e *bb* a superficie representada por *ab*, ou *af*, que lhe he igual. Seja R o seno total, e S o seno da inclinação do plano *af*, e *s* o seno da inclinação do plano *af*, teremos pela presente proposição $R^3 : S^3 :: F$, ou $aa \times V^2 : \frac{aa \times V^2 \times S^3}{R^3}$, e este quarto termo he a força, que obra contra o plano obliquo AF; porque a força, que obra contra AB, he representada pelo do producto do pla-

plano pelo quadrado da velocidade. Do meſmo modo teremos $R^3 : ſ^3 :: f$, ou $bb \times uu : \frac{bb \times uu \times ſ^3}{R^3}$: logo as forças, que operão contra as ſuperficies deſiguaes, e differentemente inclinadas, ſerão como os dous ultimos termos deſtas duas proporções, com que são expreſſadas: logo chamando a eſtas forças f, e ϕ, teremos $f : \phi :: \frac{aa \times V^2 \times S^3}{R^3} : \frac{bb \times uu \times ſ^3}{R^3} :: aa \times V^2 \times S^3 : bb \times uu \times ſ^3$. *O Q. S. Q. D.*

COROLLARIO III.

1203 Se as denſidades D, e *d* são deſiguaes, dever-ſe-hião multiplicar os dous ultimos termos das proporções precedentes pelas meſmas denſidades para ter a razão das forças, que ellas expreſsão. Deſta proporção ſe podia deduzir a formula geral para determinar todos os caſos, que dizem reſpeito ás differentes ſuppoſições, que ſe podem fazer na preſente hypotheſi; mas ſeria inutil entrar na averiguação de todos os caſos particulares, que ſe devem buſcar, quando for preciſo.

RE-

Reflexão I.

1204 Devemos notar que nesta Proposição, e em todos os seus Corollarios se suppoz que os planos, a respeito dos quaes se estimavão as collisões dos fluidos, em que estavão mergulhados, correspondião todos á mesma fiada superior, que se suppõe ser a primeira do fluido, sem o que o Theorema não seria verdadeiro, e então se determinaria facilmente a força da collisão, determinando a velocidade media, como já mostrámos *. Notaremos tambem que a força da collisão dos fluidos da mesma, ou differentes densidades contra as superficies, que tem diversas inclinações, se achará, suppondo que as velocidades das fiadas de agua crescem como as alturas: fiquei na primeira hypothesi, que he a que tem lugar, supposta a natureza dos fluidos.

* Numer. 1184.

Reflexão II.

1205 Mr. Mariotte tendo feito muitas experiencias para medir a força da collisão, e percussão d'agua, achou que a agua, tendo palmo e meio de veloci-

da-

dade em cada ſegundo, faz a força de huma libra e meia contra hum plano de 144 pollegadas quadradas, ou 2 palmos e hum quarto. Para nos ſervirmos deſta experiencia para a collisão, que a agua faz contra huma ſuperficie, he preciſo ter hum pendulo de relogio, que note exactamente os minutos, depois prender em hum fio de ſeda hum corpo muito leve, como por exemplo hum pedaço de cortiça, que ſe fará nadar no meio da corrente d'agua, e pôr hum ſinal no ſitio, em que começou a ſeguir a corrente, e acompanhallo pela borda d'agua; e depois de andar baſtante eſpaço, ſe notarão os minutos, que tem paſſado deſde que partio até o em que ſe deixou ſeguir; e ſuppondo que são trez minutos, ſe medirá com toda a exacção o caminho, que o corpo andou neſte tempo, que ſupponho ſer por exemplo 108 braças. Ora para ſaber o caminho, que o corpo andou em hum ſegundo, multiplico 60 por 3, e terei 180 ſegundos, porque cada minuto tem 60 ſegundos; e querendo conhecer a velocidade d'agua em em hum ſegundo, reduzo as braças a palmos para ter 1080 palmos, que divididos por 180 ſegundos, me dão 6 no quociente, e aſſim ſerá a velocidade d'agua em cada ſegundo 6 palmos.

PROPOSIÇÃO V.

Theorema.

1206 Achar a força da colliſão d'agua contra qualquer plano dado, dada a ſua velocidade.

Servindo-nos da experiencia de Mr. Mariotte, que ſe referio antecedentemente, pergunta-ſe qual he a força da colliſão d'agua contra huma ſuperficie de 45 palmos quadrados, ſuppondo que a agua tem 6 palmos de velocidade cada ſegundo. Para iſto he preciſo trazer á memoria que as colliſões d'agua com diverſas velocidades contra ſuperficies deſiguaes, e perpendiculares á corrente são como os productos dos quadrados das velocidades pelas ſuperficies oppoſtas: logo poderemos dizer: ſe o quadrado de hum ſegundo, que he 1, multiplicado pela ſuperficie de 2 palmos

e hum

e hum quarto, me dá libra e meia, força d'agua contra a ſuperficie de hum pé quadrado, que dará o producto 36 do quadrado da velocidade de 6 pela ſuperficie de 45 palmos quadrados, que he 1620 por força da colliſão d'agua contra a ſuperficie de 45 palmos? e acharei 1080, o que moſtra que a ſuperficie faz a força de 1080 libras para ſer em equilibrio com a colliſão d'agua.

APPLICAÇÃO.

1207 Se ſe quizeſſe achar a força d'agua contra as abas do moinho, expoſtas perpendicularmente á ſua corrente, he preciſo conhecer primeiro a velocidade d'agua, e a grandeza das abas; aſſim ſuppondo que a velocidade d'agua ſeja de 5 pés, e as abas de 6 pés quadrados, diremos: ſe o producto do quadrado da velocidade de hum pé por hum pé quadrado da velocidade faz a força de libra e meia em hum ſegundo, quanto fará o producto do quadrado da velocidade de 5 pés pela ſuperficie de 6 pés, e acharei ſer a força 225 libras.

PRO-

PROPOSIÇÃO VI.

Theorema.

1208 Se tivermos hum vaſo cheio de agua, que ſe conſerve ſempre na meſma altura, digo que as forças das collisões d'agua, ſahindo de dous orificios iguaes, ſerão na meſma razão das alturas d'agua ſobre o centro das duas aberturas.

Demonstração.

Figur. 102. Se o vaſo ABCD eſtá cheio de agua, que ſahe pelos dous orificios E, e F, as velocidades d'agua ſerão como $\sqrt{BE}$ a $\sqrt{BF}$; e ſe os orificios são iguaes, as quantidades de agua, que ſahem no meſmo tempo, ſerão tambem como $\sqrt{BE}$ a $\sqrt{BF}$; mas eſtas quantidades de agua podem conſiderar-ſe como as maças, e as raizes de BE, e BF como as ſuas velocidades: logo a força da collisão, de que a agua he capaz, ſahindo ſerá igual ao producto de $\sqrt{BE} \times \sqrt{BE}$ a $\sqrt{BF}$ por $\sqrt{BF}$, iſto he, como os quadrados das raizes das alturas d'agua ſobre o centro das fendas; mas eſtes dous

dous productos não são outra cousa mais que BE, e BF: logo a força da collisão d'agua, sahindo por estes iguaes orificios, são como as alturas d'agua sobre os seus centros.

COROLLARIO.

1209 Segue-se daqui que se os orificios são differentes, as forças das collisões d' agua, quando sahem, serão como os productos dos quadrados dos diametros dos orificios pela altura d'agua, que corresponde ao seu centro, se são circulares; mas se tem outra figura, he preciso multiplicar a sua capacidade pela altura d'agua, que corresponde ao centro.

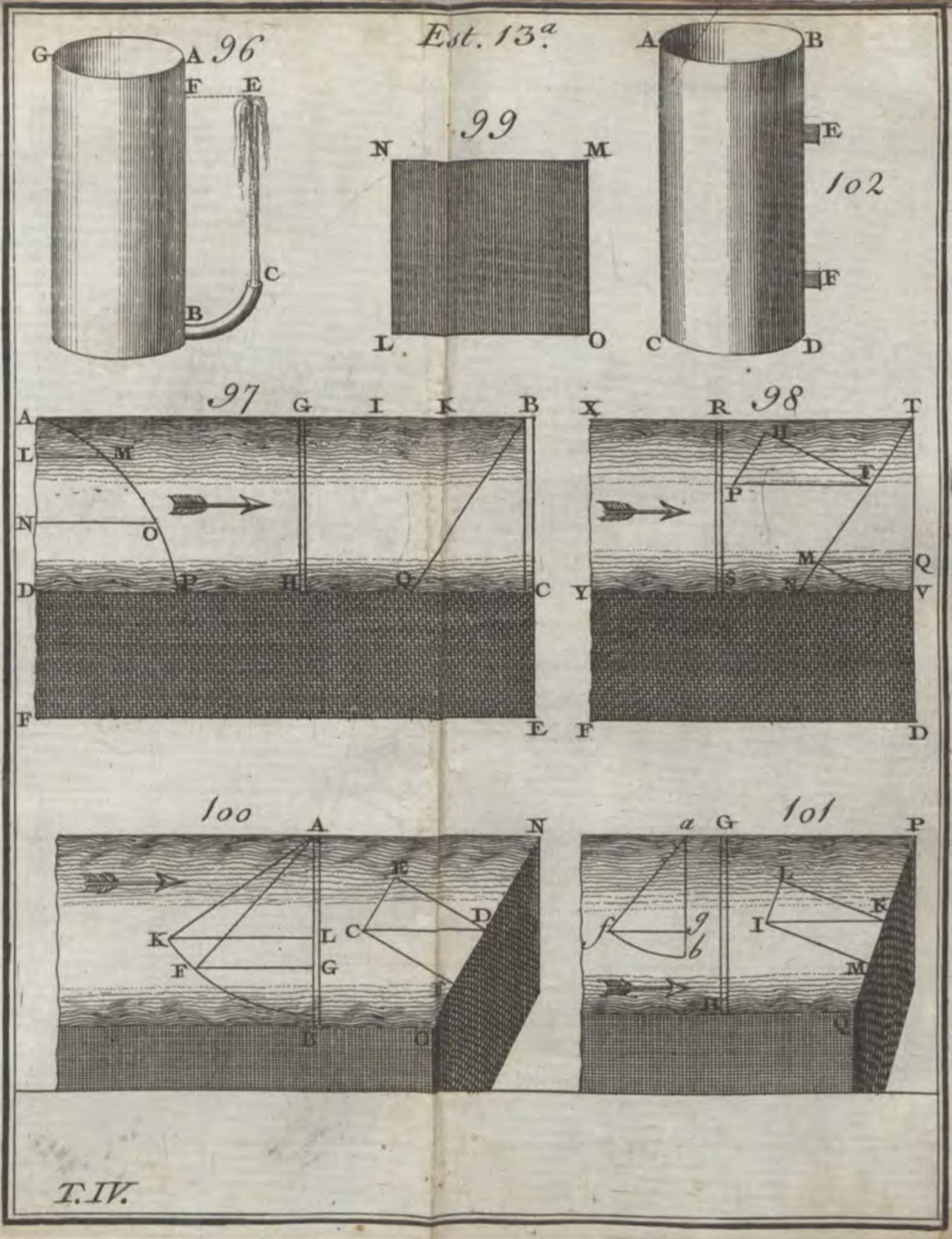
******
*****
****
*

DISCURSO

Sobre a natureza, e propriedades do ar, para ſervir de introducção á Fyſica, e para explicar o effeito das maquinas Hydraulicas.

AInda que os Antigos nos tenhão deixado bellas noticias, parecem com tudo dignos de reprehensão em não terem feito baſtante eſtudo da natureza, principalmente ſe fizermos reflexão nas falſas idéas, que tinhão ácerca do ar; nem eſta falta procede de não terem tido baſtante tempo para deſcubrirem as propriedades; mas parece que niſto ſuccedeo o meſmo que em infinitas outras couſas, cujo deſcubrimento ficou reſervado para o noſſo tempo; e não fallando mais que do ar, vamos moſtrar que tem pezo, e elaſterio capaz de ſe comprimir, e dilatar.

Antes de Mr. Deſcartes, e Mr. Paſcal perguntava-ſe aos Fyſicos a razão, por que puchando o embulo de huma ſeringa, ou de huma bomba, ſubia a agua,


Est. 13.ª
96
G A F E C B
99
N M L O
A B E F C D
102
97
A G I K B L M N O D P H Q C F E
98
X R T H I P M Q Y S N V F D
100
A N E D C K L F G I B O
101
a G P L K f g b I M H Q
T.IV.

[illegible] mesmo a alguma couza, porque ne-
[illegible] fallavam, como de antiga-
[illegible]
[illegible]
[illegible] que não lhe conhecião [illegible]
ra o estar, nem para o [illegible]
que lhe he muito indifferente [illegible]
ou o [illegible]

[illegible]
[illegible] ar [illegible]
por cada quarto, e que haveria vão,
[illegible] do, e que
[illegible] tendas, por
[illegible] se lhe fez hum
[illegible] em dia do [illegible],
[illegible] por

agua, e o ſeguia, como ſe lhe foſſe pegada. Tambem porque quando hum ſcifão ſe enche de agua, e ſe lhe mettem ambos os braços em vaſos cheios de agua, ſe hum delles he mais elevado que o outro ſobre a agua, e ſahe do vaſo, que eſtá mais alto, e deſce para o que fica mais baixo, até que toda a agua do mais alto paſſa ao mais baixo; e reſpondião que a natureza tinha horror ao vacuo, ou que a natureza aborrecia o vacuo, como ſe ella tiveſſe conhecimento para ter horror a alguma couſa, porque no ſeu entender fallavão, como ſe a natureza fizeſſe baſtantes esforços para evitar o vacuo, ainda que ſe veja perfeitamente que não faz couſa alguma para o evitar, nem para o procurar, e que lhe he muito indifferente o vão, ou o cheio.

He bem verdade que a agua ſobe em huma bomba, quando o ar não tem por onde entrar, e que haveria vão, ſe a agua não ſeguiſſe o embulo, e que não ſobe, quando tem fendas, por onde entre ar. Tambem ſe ſe faz hum pequeno orificio em ſima do ſcifão, por onde ſe poſſa introduzir o ar, a agua de ambos os braços cahe nos vaſos, e fica tudo quieto; de que ſe concluia que a natureza tinha horror ao vacuo, pois logo que não havia ar no tubo, ſubia a agua de ſi meſma; e que tornando a entrar o ar, tornava a agua ao ſeu antigo eſtado, o que fez julgar que a agua ſubia para embaraçar o vacuo.

Mas ſe moſtrarmos que eſtes effeitos (como muitos outros, que explicaremos depois) são cauſados pelo pezo do ar, não fica lugar de duvidar que a natureza não tem horror ao vacuo, e que ſegue as leis da Mecanica, tanto a reſpeito do ar, como a reſpeito dos liquidos de differentes gravidades, e o que ſe póde dizer do ar não he mais que huma conſequencia dos principios, que ſe tem demonſtrado nos precedentes tratados.

Para ſe convencerem do pezo do ar por huma experiencia, que capacita facilmente, tome-ſe hum canudo de vidro de 20, ou 24 pollegadas bem tapado em huma das ſuas extremidades, e

de-

depois de cheio de azougue, tape-ſe com o dedo a outra extremidade, que fica aberta, e ſuſtentar-ſe-ha aſſim perpendicularmente voltada para baixo a parte, que eſtá aberta. Se ſe mergulha em hum vaſo, que tenha azougue a extremidade, que eſtá tapada com o dedo, e depois diſſo ſe tira o dedo, deixando ao azougue a liberdade de poder deſcer, ver-ſe-ha que em lugar de cahir no vaſo para ſe miſturar com o outro azougue, ficará ſuſpenſo de ſi meſmo. A razão deſte effeito procede do pezo do ar, que opprime o azougue, que eſtá no vaſo, e não carrega ſobre o que eſtá no canudo, que péza menos que huma columna de ar da meſma baſe, aſſim o pezo do ar he o que obriga o azougue a ficar no canudo; e para ſe certificar diſto, baſta abrir o fim do canudo, que eſtá fechado, e ver-ſe-ha deſcer o azougue para ſe miſturar com o que eſtá no vaſo.

Tome-ſe hum canudo de 20, ou 24 pollegadas cheio de azougue, e fechado de huma parte, e que a outra ſeja encurvada, e ver-ſe-ha que o azougue, ainda que não se mergulhe no vaso, se conserva suspenso, sem sahir pelo extremo recurvado; porque o ar, que carrega sobre o azougue do extremo encurvado, tem mais pezo que o azougue, que está no canudo.

Se em lugar de hum canudo de 20, ou 24 pollegadas fizermos a experiencia com outro, que tenha 25, ou 26 palmos, e em lugar de o encher de azougue se enchesse de agua, veriamos que a agua se conservaria suspensa como o azougue, ainda que o tubo fosse maior; porque como a agua he muito mais leve que o azougue, conservará muito maior altura no tubo, do que o azougue, porque as alturas dos differentes liquidos são reciprocos com os pezos dos mesmos liquidos.

Com tudo ainda que o pezo do ar sustenha o azougue, e a agua nos tubos, que acabamos de dizer, não devemos crer que se se enchesse de agua hum tubo, que tivesse muito mais de 36, ou 38 palmos, como por exemplo de 60 palmos, a agua fique toda suspensa, porque o ar não póde suster maior pe-

zo

zo que o ſeu, e por meio dos tubos cheios de azougue, ou de agua he que ſe mede o pezo do ar, como vamos moſtrar.

Se tivermos hum tubo de vidro de 40 pollegadas, e ſe encher de azougue, de ſorte que huma das ſuas extremidades eſteja fechada, e o outro extremo tapado com o dedo, ſe ſe mergulha em hum vaſo, em que haja azougue, ou for eſte extremo encurvado, ou ſe conſerve no ar, ou mergulhado no azougue, porque neſte caſo tudo faz o meſmo effeito, ver-ſe-ha que logo que ſe tirar o dedo, com que ſe tinha tapado o extremo aberto, o azougue abaixará até que chegue á altura de 28 pollegadas, que he a altura, em que huma columna de azougue eſtá em equilibrio com a columna do ar, que lhe correſponde.

Se ſe toma hum tubo de 60 palmos com as meſmas condições, de que fallamos, veremos que enchendo-o de agua, deſcerá até ficar na altura de 46 palmos e meio, porque huma ſemelhante columna de agua fica em equilibrio

com

com a de ar, que lhe correſponde, ou tambem com huma columna de azougue de 28 pollegadas. E para ſaber o pezo da athmosfera * baſta ſaber o de hum palmo cubico de agua, e multiplicallo por 46 palmos e meio, que he a altura da columna de agua, que fica em equilibrio com o ar.

Iſto ſe confirma com o que ſuccede nas bombas, e ſeringas, porque logo que ſe pucha o embulo de huma bomba, a agua ſegue o embulo; e ſe ſe continúa a levantar, a agua o ſeguirá ſempre, mas não a toda a altura, que ſe quer, pois não paſſa de 46 palmos e meio: ainda que ſe puche mais para ſima o embulo, fica immovel, e ſuſpenſa neſta altura em equilibrio com o pezo do ar, que péza fóra do tubo ſobre a agua, que o cérca. Póde-ſe aqui notar para tirar o abuſo daquelles, que julgão que a agua ſóbe nas bombas, porque a natureza tem horror ao vacuo, que quando ſe levanta o embulo mais de 46 palmos e meio, a agua

* Chama-ſe athmosfera a extensão, que tem a altura do ar á roda da terra.

agua fica neſta altura, e hum intervallo entre a agua, e o embulo, em que ou não ha, ou ha muito pouco ar, que a agua não póde encher, porque não póde ſer elevada mais alto pelo ar exterior. Se os noſſos Filoſofos tiveſſem feito eſta reflexão, ficarião ſem duvida ſuſpenſos de ver que a natureza ceſſa de ter horror ao vacuo em paſſando de 46 palmos e meio de altura, e podella-hião accuſar de ter o capricho de evitar o vacuo até huma certa altura, e depois ſer-lhe indifferente dahi para ſima.

Se uſarmos de huma ſeringa de 4, ou 6 palmos de comprido, veremos que pondo o fim do gargalo em hum vaſo cheio de azougue, e puchando o embulo, o azougue ſobe até á altura de 28 pollegadas, e que he fruſtrado o puchar mais para fazer ſubir o azougue, que ficará ſempre neſta meſma altura, que o põe em equilibrio com o pezo do ar; aſſim a agua, o azougue, e o ar ficão em equilibrio, quando as alturas são entre ſi reciprocamente como os ſeus pezos, e iſto de qualquer groſſura que ſejão os tubos, porque os

li-

liquidos não pezão conforme a grandeza das bases, mas das alturas.

Para explicar o modo, com que o pezo do ar faz subir a agua nos scifões, supporemos hum scifão, cujas pernas sejão huma de quasi hum palmo de alto, e outra hum palmo e huma pollegada, se se enche de agua, e se fechão bem os dous extremos, para que não possa sahir, e depois disso houverem dous vasos, dos quaes hum seja hum pouco mais elevado que outro, e o mais alto estiver cheio de agua, mettendo a perna mais curta do scifão no vaso mais alto, e a menor no mais baixo, mergulhando o menor na agua, logo que se destapão as aberturas, a agua, que tem dentro, em vez de descer, fará força por subir; porque sendo a agua, que está nos dous vasos, opprimida pelo ar, e não o sendo a que está dentro do scifão, a obrigará a entrar para subir muito mais alto, se pudesse, porque só sobe hum palmo, quando o pezo do ar he capaz de a fazer subir 46 palmos e meio.

Do que succede que sendo a agua de am-

ambas as pernas opprimida no alto do ſcifão, ſe combate neſte lugar de forte, que a que tem maior força leva o exceſſo ſobre a que tem menos; mas como o ar tem huma pollegada mais de altura ſobre o vaſo mais baixo que ſobre o mais elevado, impelle a agua na perna maior com mais força que a que eſtá na outra, de que ſe vê que a agua deve paſſar da perna maior para a menor; porque ainda que o pezo da agua de ambas as pernas reſiſte ao ar, não reſiſte igualmente; porque como a agua da perna maior tem mais huma pollegada de altura que a da pequena, reſiſte mais a força, que lhe dá a altura de huma pollegada de agua. Ora ella he impellida mais para ſima que a da outra perna ſó pela altura de huma pollegada de ar; mas a pollegada de agua, que eſtá na maior perna, tem mais força para deſcer, do que a pollegada de ar para a fazer ſubir: logo a agua da menor perna he impellida para ſima com maior força, do que a da maior, o que a faz ſubir para paſſar ao outro vaſo, e continuará a ſubir

em

em quanto houver agua no vaſo, que lhe correſponde.

Deſte modo toda a agua do vaſo mais elevado ſubirá, e paſſará ao mais baixo, em quanto a perna do ſcifão, que eſtiver mergulhada, tiver menos de 46 palmos e meio de alto, porque já diſſemos que o pezo do ar póde levantar, e ter ſuſpenſa a agua neſta altura; mas logo que a perna, que eſtá mergulhada, exceder eſta altura, não fará o ſeu effeito, iſto he, a agua do vaſo mais elevado não ſubirá ao alto do ſcifão para paſſar ao outro, porque o pezo do ar não a póde elevar mais, de ſorte que a agua ſe dividirá no alto do ſcifão, e cahirá de cada perna no ſeu vaſo até ficar na altura de 46 palmos meio ſobre cada hum dos vaſos, e ficará quieta, e ſuſpenſa neſta altura pelo pezo do ar, que a ſuſtem.

Muitas outras couſas ſuccedem na natureza, que os Antigos attribuírão ſempre ao horror do vacuo, e com tudo não tem outra cauſa que o pezo do ar: por exemplo, ſe dous corpos muito lizos ſe apertão hum com outro,

fa-

fazem grande resistencia em separar-se; e esta resistencia he ás vezes tão grande, que não ha força humana, que os possa desunir: se com tudo se faz reflexão, não ha ar entre estes dous corpos; e se se suspende o de sima, deve tambem o de baixo ficar suspenso, pois está opprimido de todo o pezo do ar, que o toca por baixo, e faz que para se separar precisa força maior que o pezo do ar, de tal sorte que se cada hum destes corpos tem hum pé cubico, e tem a sua figura, apertar-se-hão hum contra o outro com huma força de 2232 libras, que he o pezo de huma columna de ar, que tenha hum pé quadrado na base: assim para vencer a força do ar para separar estes dous corpos se precisa huma força maior de 2232 libras, e então se separarão estes dous corpos sem difficuldade, pois importa pouco á natureza se separem, ou não.

A experiencia mostra tambem que hum fole, que tenha todos os buracos bem tapados, he difficultoso de abrir, fazendo a mesma resistencia, como se

as

as azas estivessem pegadas. A causa deste effeito não póde ser outra mais que o pezo do ar, porque como opprime as azas do fole, sem se poder introduzir, não se podem levantar as azas, sem se levantar tambem toda a maça, que tem em sima, que resistirá tanto mais, quanto maiores forem as azas do fole, de sorte que se tiverem hum pé e meio de superficie, será precisa huma força maior que 3384 libras, que he igual ao pezo do ar, que corresponde ao plano de hum pé e meio de superficie; mas logo que se abre hum orificio no fole, o ar que entra faz equilibrio com o de fóra.

Do mesmo modo se se pergunta a razão, por que mettendo a boca dentro n' agua sobe esta, quando se toma a respiração, o que tambem se faz com hum canudinho de palha, basta attender que a agua está por toda a parte opprimida com o pezo do ar, excepto no lugar da boca, ou no que se applicou o canudinho; porque quando se respira, os musculos da respiração fazem maior a cavidade do peito, o que

faz

faz que o ar de dentro tenha mais espaço do que tinha antes, e fica com menos força para embaraçar que entre a agua na boca, do que tem o ar de fóra para a fazer subir, o que he o mesmo que o que faz que a agua suba nas bombas, e seringas.

Como o pezo do ar não he sempre o mesmo, e varía, conforme está mais, ou menos cheio de vapores, os seus effeitos varião tambem continuamente no mesmo lugar, e he o que denota o barometro, em que o azougue se eleva mais de 28 pollegadas, e algumas vezes desce para baixo pouco tempo, e depois torna a subir, e neste continuo movimento segue o ar. O mesmo succede consequentemente nas bombas, em que a agua sóbe algumas vezes 47 palmos, e depois torna a 46 e $\frac{1}{2}$: algumas vezes desce, e não tem mais de 45 palmos de alto, e algumas pollegadas, estando sujeitas, como o barometro, aos differentes pezos do ar.

Como o ar nas montanhas muito elevadas não péza tanto, como á borda

do

do mar, que tomaremos pelo lugar mais baixo da terra, moſtra a experiencia que as bombas em ſitios muito elevados não fazem ſubir a agua tão alta. Tem-ſe notado que ſobre huma montanha elevada 540 braças a agua em vez de ſubir a 46 palmos e meio, como temos moſtrado, ſóbe ſó a 39, e algumas pollegadas: a meſma mudança ſuccede nos lugares muito baixos, em que a agua ſóbe algumas vezes até 48, ou 50 palmos, o que póde ſervir não ſó para conhecer o pezo do ar em differentes lugares de diverſa elevação, mas tambem para medir a altura das montanhas, e ainda a da athmosfera.

Porque ſe nos acharmos na falda de alguma montanha, e o azougue neſte ſitio ſubir 28 pollegadas, veremos que á proporção que ſe ſóbe ao cume, o azougue em vez de conſervar-ſe na altura de 28 pollegadas, deſcerá; porque ſendo ſuſtentado por huma columna menor de ar, deve deſcer neceſſariamente para ſe equilibrar com eſta columna, aſſim fica ſuſpenſo em huma altura tanto menor, quanto o ſitio, em que eſtá

he

he mais elevado; de ſorte que ſe foſſe poſſivel ſubir até o extremo da athmoſ-fera, e ſahir inteiramente fóra, o azougue cahiria ſem ficar nada, pois não tinha ar, com que ſe contrapezar.

Tem-ſe feito muitas experiencias galantes ácerca do pezo do ar. A primeira fez-ſe ſobre huma das mais altas montanhas do Auverne perto de Clermont, que ſe chama a montanha do Pis de Dome, e vio-ſe que tendo-ſe hum tubo cheio de azougue tapado por huma parte, e encurvado pela outra, eſtando o azougue na altura de 26 pollegadas, e 5 linhas na falda do monte, ſubindo para ir ao cume, paſſadas 9 braças deſcia o azougue huma linha, a 18 braças deſcia 2 linhas, e a 9 braças deſcia 9 linhas; e ſubindo 450 braças, deſcia 3 pollegadas, e 10 linhas, achou-ſe que deſcendo pela montanha abaixo em cada lugar, em que o azougue tinha deſcido, tornava a ſubir á meſma altura, e ſe achou em 26 pollegadas, e 5 linhas ao pé da montanha no ſitio, de que tinha partido.

Iſ-

Isto oão deve causar admiração, se depois de termos dito que a altura do azougue era ordinariamente 28 pollegadas para ficar em equilibrio com o ar, se acha aqui só de 26 pollegadas, e 5 linhas no sitio mais baixo da montanha do Rus Dome, pois he prova de que este lugar he muito mais elevado que a borda do mar, em que effectivamente o azougue sóbe a 28 pollegadas; mas quando o barometro se acha em hum sitio mais elevado que a borda do mar, o azougue sempre está em menos altura de 28 pollegadas á proporção que he menor a columna do ar, que lhe corresponde.

Os que não discorrem custa-lhes muito a capacitar-se que o ar tenha pezo, porque o não sentem; mas se lhes fizermos notar que hum animal, que está dentro n'agua, tem a liberdade de se mover, sem sentir o pezo d'agua, porque o opprime igualmente por toda a parte, não se admirarão de não sentirem o pezo do ar, que nos opprime igualmente por toda a parte, e que está em equilibrio com o que temos nos

bo-

bofes, ſangue, e geralmente eſpalhado por todo o corpo.

Se por muito tempo ſe julgou que o ar era leve, he porque o diſſerão os Authores antigos, e os que fizerão voto de os crer os ſeguião cegamente a pezar da verdade, e da razão, e eſtiverão tão longe de julgar que o pezo do ar foſſe a cauſa da elevação d'agua nas bombas, que julgavão baſtava tirar o ar com hum embolo para fazer ſubir a agua á altura que quizeſſem, e que a agua de hum rio ſe podia fazer paſſar ſobre huma montanha para a levar ao valle oppoſto, com tanto que foſſe hum pouco mais baixo que o rio por meio de hum ſcifão poſto ſobre a montanha, de que huma das pernas correſpondeſſe á altura, porque para iſto baſtava tirar o ar do ſcifão; e ainda não ha muito mais de 100 annos que conſervavão eſte erro.

O ar tem além diſſo a propriedade de poder condenſar-ſe, e dilatar-ſe extremamente, e conſervar ſempre a virtude elaſtica, com a qual faz força para levantar os corpos, que o opprimem, até tornar ao ſeu natural eſtado. O ar dilata-ſe muito facilmente com o calor, e condenſa-ſe com o frio, como ſe vê no thermometro, em que o ar, que eſtá no eſpirito do vinho, faz ſubir eſte liquido viſivelmente no tubo, quando ſe põe perto do fogo, ou quando lhe dá o Sol; e pelo contrario vê-ſe que deſce muito, quando faz muito frio, ou quando ſe mette o tubo em agua fria.

O ar, que eſtá ao pé da ſuperficie da terra, eſtá muito condenſado, e não tem a ſua extensão natural; porque como o que eſtá em ſima péza, e tem virtude elaſtica, eſtando o que nós reſpiramos carregado com o pezo de toda a athmosfera, eſtá mais denſo que o que eſtá em ſima, e por conſequencia o que eſtá entre as duas extremidades deve ſer menos condenſado que o que toca a terra, e menos dilatado que o que eſtá no alto da athmoſfera. Mas para ter huma idéa clara diſto ſupponhamos hum grande monte de lã cardada da altura de 80, ou 100 braças: he certo que a lã, que eſtá de baixo, xo, eſtando carregada com todo o pezo da que tem de ſima, não eſtará tão eſtendida como a que eſtá no alto do monte, e a que eſtá no meio não eſtará tão comprimida, como a que eſtá de baixo, nem tão dilatada, como a que eſtá em ſima. Ora ſe ſe toma huma pouca de lã da que eſtá em baixo, e ſe traz para ſima, tendo-a ſempre apertada na mão do meſmo modo que eſtava no ſitio, de que ſe tirou, ella ſe eſtenderá de ſi meſmo, e tomará a meſma extensão que a que eſtá em ſima; e pelo contrario ſe ſe tira hum pedaço da que eſtá em ſima, deixando-lhe a ſua extensão natural ſem a comprimir, ver-ſe-ha que mettendo-a de baixo da outra comprimir-ſe-ha do meſmo modo que a que eſtá em baixo. O meſmo ſe póde dizer do ar; porque ſe pegarmos em huma bexiga bem ſeca, e a enchermos de ar metade do volume que podia levar, ſe ſe encheſſe bem de ar, e depois ſe fechar muito bem, ſe ſe levar ao alto de hum monte, veremos que á proporção que ſe vai ſubindo, ſe vai a bexiga enchendo mais do que eſtava; e quando ſe chegar ao cume ficará redonda, e tão cheia, como fica ordinariamente em baixo, depois de ſe ter ſoprado quanto baſte para ficar esferica. He com tudo de notar que o ar, que eſtá na bexiga, he ſempre o meſmo que era ao pé da montanha, ſem ſe augmentar, ou diminuir; toda a mudança, que lhe ſuccedeo, foi o ter-ſe dilatado conſideravelmente, iſto he occupar muito maior eſpaço que antes: e he provavel que ſe a bexiga ſe levaſſe ao alto de hum monte muito mais elevado que eſte, o ar ſe dilataria até arrebentar a bexiga com a força do ſeu elaſterio. A razão deſta dilatação he ſem dúvida que o ar, que ſe intrometteo na bexiga na falda do monte, eſtando opprimido com o pezo de ar exterior, não tinha mais liberdade de ſe dilatar a maior extensão que o exterior, porque ambos eſtão igualmente opprimidos com o pezo da athmosfera; mas quando a bexiga eſtá no alto da montanha, como o ar, que eſtá neſta altura, não eſtá tão opprimido como o de baixo, não opprime tanto o corpo que cér-

cérca, o que faz que não achando aquelle, que está na bexiga, tão grande resistencia para se estender como antes, se dilata, e occupa espaço muito maior que o que occupava, quando estava no lugar, de que sahio.

Pelo contrario succede se se encher, o mais que puder ser, huma bexiga no cume de huma montanha elevada, porque descendo a hum lugar muito mais baixo, se vê que a bexiga de muito teza que estava se vai tornando branda, e mole á proporção que vai descendo; e tanto, que quasi parece não ter ar, o que não póde deixar de succeder, supposto o que acabamos de dizer; porque o ar, que está na bexiga, achando-se comprimido por toda a parte que o cérca, que he muito mais pezado do que em sima da montanha, o obriga a ajuntar-se, isto he, a condensar-se, para occupar menos espaço que o que tinha no lugar, de que se tirou.

A esta dilatação, e condensação, que tem o ar, quando se leva de hum sitio para outro, he que se deve attribuir o in-

incommodo, que ſentem aquelles, que precisão ſubir a montes mui elevados; porque como no boſe, e no ſangue tem hum ar mais denſo que o que ha no ſitio, em que ſe achão, e a carne não eſtá tão opprimida do ar, como eſtava coſtumada, deixa ao ar, que tem dentro, a liberdade de ſe dilatar, o que ſe não póde fazer ſem ſe offender o temperamento daquelles, a que iſto ſuccede. Por hum diſcurſo contrario ſe póde explicar a moleſtia, que experimentão os que de hum ſitio elevado ſe vem obrigados a habitar em hum lugar baixo.

A rarefacção do ar he muito attendivel pelas conſequencias, que ſe tem tirado de muitas experiencias. Mr. Mariotte, que as fez com mais exacção, moſtra que hum certo volume de ar, que nós reſpiramos, ſe póde rarefazer 4000 vezes para ficar na ſua natural extensão, iſto he, que ſe for poſſivel, levar hum palmo cubico de ar da ſuperficie da terra ao alto da athmosfera, occupará o eſpaço de 4000 palmos cubicos, e póde ſer ainda maior extensão: ſe eſte jui-

juizo ſe approxima á verdade, ſuccederá o meſmo na rarefacção do ar natural, iſto he, que o ar, que eſtá no alto da athmosfera ſobre a ſuperficie da terra, quando for opprimido do ar exterior, occupará volume 4000 vezes menor para ficar ſemelhante ao que reſpiramos; mas como a experiencia moſtra que eſte póde condenſar-ſe ainda muito mais, ſegue-ſe que ſe o que eſtá no alto da athmosfera, para ſer ſemelhante ao noſſo, neceſſita condenſar-ſe 4000 vezes, póde ſer muito mais denſo de 4000 para ficar tão denſo, como póde vir a ſer o que nós reſpiramos.

Já moſtrámos que quando hum barometro ſe leva da fälda de hum monte ao cume, á proporção que ſe ſubia deſcia o azougue para ſe pôr em equilibrio com a columna de ar, que he tanto menor, quanto mais alta he a montanha; e fallando da experiencia, que ſe fez ſobre Puy Dome, diſſemos que ſubindo 9 braças, deſcia huma linha, ſubindo 18, duas linhas, e que ſubindo 90, deſcia 9 linhas, e finalmente que na altura de 450 braças deſcerá 3 pollelegadas, e 10 linhas, ou 46 linhas. Póde-se notar que a diminuição do azougue não segue a razão das differentes alturas, a que se levou o barametro na montanha; porque para que assim fosse, desceria o barametro em 90 braças, 10 linhas, e em 450 braças, 50 linhas, e teriamos então duas progressões arithmeticas, huma para o barametro, e outra para as differentes alturas, a que subião: os termos da primeira progressão tinhão o excesso de huma unidade, e os termos da segunda tinhão o excesso de 9 braças, o que seria muito commodo para medir a altura das montanhas, ou da athmosfera; porque descendo huma linha o azougue de 9 em 9 braças, bastava observar quantas linhas tinha descido o azougue, indo da falda ao cume, e depois multiplicar esta quantidade de linhas por 9 braças, e o producto daria a altura da montanha sobre o valle, que lhe ficava ao pé. Do mesmo modo para saber a altura da athmosfera bastava multiplicar 336 linhas, que he a altura do azougue sobre a borda do mar, por 9 braças,

ças, e teriamos 3024 braças por altura da athmosfera; mas como o pezo do ar não ſegue huma ſemelhante progreſsão, e ſegue outra differente, eis-aqui o que fizerão Mr. Caſſini, e Maraldi para a achar, o que tirei das memorias da Real Academia das Sciencias anno de 1703.

Tomárão geometricamente a altura das montanhas, que encontrárão, indo para o Meridiano; e quando puderão ſubir ao cume, obſervárão quanto deſcia o barometro. No meſmo dia, quando podia ſer, tinhão obſervado o barometro á borda do mar, ou em hum ſitio, cuja elevação ſobre o nivel do mar já conhecião, onde em todo o caſo não deixavão de achar, quando volvavão, as obſervações perpetuas do barometro, que ſe fez no obſervatorio, que he mais alto que o mar 41 braças, e 4 palmos.

Comparando as diverſas alturas das montanhas com as differentes deſcidas do azougue ſobre as montanhas, julgárão que a progreſsão, que tem as columnas de ar, que correſpondem a hu-

huma linha de azougue, que vão augmentando de altura, quando se desce da montanha, podia ser tal, que tendo a primeira columna 91 palmos e meio, a segunda tivesse 93, a terceira 94 e meio, e assim as demais, ao menos até a altura de meia legua, pois não fizerão a observação em montanhas mais elevadas.

Observando esta progressão, achárão sempre com pouca differença pela descida do azougue sobre huma montanha a mesma altura desta montanha, que tinhão achado immediatamente com a operação geometrica.

Póde-se logo, admittindo esta progressão, medir com hum barometro, que se leve a huma montanha quanto ella he elevada sobre o nivel do mar, com tanto que se possa saber em que altura estava no mesmo tempo o barometro na borda do mar, ou no lugar, cuja elevação sobre o mar he conhecida; e este methodo terá bom exito quasi sempre, ainda quando a montanha fosse mais distante do mar; e que se houvesse esta mesma proporção em

to-

toda a athmosfera, ſeria bem facil achar a ſua altura; porque ſendo as 28 pollegadas do azougue o meſmo que 336 linhas, teriamos huma progreſsão arithmetica de 336 termos, que tiveſſem por differença a unidade, e o primeiro termo 91 e meio; mas como não he certo que o pezo do ar ſiga eſta progreſsão, he muito duvidoſo o principio, para que delle ſe poſſa concluir a altura da athmosfera, que ſe acharia, ſeguindo eſta progreſsão de 6 leguas, e $\frac{1}{2}$; e Mr. Mariotte moſtra por outro modo de calcular que a altura da athmosfera, que tem quaſi vinte e ſinco leguas, que he a altura, que lhe dão preſentemente todos os Fyſicos; mas a progreſsão precedente póde ſervir para medir a altura de huma montanha, que não paſſa de 1080 braças.

Academia do Regim.to d'Artil.a N 3

Fim do Curſo de Mathematica.

IN-

INDICE
DAS MATERIAS, QUE SE comprehendem neſte quarto Tomo.

LIVRO XIV.

da-

Prop.

Prop.

LIVRO XV.

Da Mecanica Estatica.

CAP.

Ap-

LIVRO XVI.

Da Hydrostatica.

Prop.

bo

TOMO II.

Pag.	*Linh.*	*Erro.*	*Emenda.*
31	17	de 18	de 180
109	16	ſemidiametro RF	BF
161	7	da ſoma dos trez lados	da ſemiſoma
172	18	logo ſe a linha FG	logo o lado FG
178	1	duas pyramides	quatro pyramides
186	9	o eixo	a terça parte do eixo
196	15	$\frac{2a^2b}{2}$	$\frac{2a^2b}{12}$
236	10	eixo MN	eixo ML
237	1	FI	MI
241	2	$4ax^2yy$	$4xxyy$
246	14	$ON \times ET$	$ON \times EF$
248	10	GK	GH
256	22	$AI \times IB : IC^2$	$AI \times IB : IL^2$
260	16	$xx - xz$	$xx + xz$
265	4	KM^2	HM^2
266	17	ES	EQ
269	10	$CG = CH^2$	$CG = CK^2$
	13	$\frac{a^2 + a^2b^2}{a^2}$	$\frac{a^4 + a^2b^2}{a^2}$
	16	$CD^2 + EF$	$CD^2 + EF^2$
270	15	$2aax$	$2aax^2$
274	27	$IH^2 : EF^2$	$GF^2 : IH^2$
275	2	$AG^2 : EF^2$	$AG^2 : GF^2$
277	17	$4ax \times \sqrt{cc}$ &c.	$4a \times \sqrt{cc}$ &c.
287	2	$AB : DE :^2$	$AB^2 : BE^2$
289	10	$QD \times QR$	$QL \times LR$
292	5	$CFI \times CK$	$CF \times CD$

TOMO III.

Pag.	*Linh.*	*Erro.*	*Emenda.*
56	19	angulos ACB	ACL
57	10	CF	GF
71	6	ACB	ACD
79	4	ACB, ABD, DBE	ABC, ABD, CBE
85	9	HI	KI
120	3	ponto M	ponto N
127	6	4 palmos	5 palmos
173	23	72 toezas	72 ſolivas
174	27	144 taboas	144 palmos
178	14	como KL	como HL
191	6	diametro AG	diametro HG
242	13	e 5 palmos	e 6 palmos
	14	2 palmos, e 5 polleg.	4 palmos
	25	4 palmos e meio.	6 palmos e meio
245	19	e 18 braças	e 9 braças.
247	4	POFO	POFC
267	14	ſemicircumferencia EBF	ſemicircumferencia de EBF
277	6	lado BE	lado BF
283	13	diagonal DD	DB
292	15	arco AC	AB
	21	corda AC	AB
305	17	$\frac{363}{7}$	$\frac{163}{7}$
307	23	huma linha	huma libra
312	5	raiz quadrada	raiz cubica
339	2	ADC	ABC
340	2	ſahe 24	ſahe 21

TOMO IV.

Pag.	Linh.	Erro.	Emenda.
23	18	hum quarto	hum terço
32	14	no ſegundo inſtante	no primeiro inſtante
36	27	no tempo AB	AC
49	11	$x = 562$ &c.	$xx = 562$
83	10	$\sqrt{AE2OE2}$	$\sqrt{AE2 - OE2}$
121	11	que AI com AB	que AG com AB
132	21	ao pezo Q	ao pezo R
146	4	que a potencia P	que a potencia Q
150	18	cnmprimento AD	comprimento AB
176	21	outra immovel LM	outra movel LM
217	6	angulo KCD	angulo KDC
220	24	da linha AD	da linha FD
221	5	HI a HD	HI a QD
223	2	o ponto G de G	o ponto G de D
227	10	dos ſolidos	dos fluidos
	29	conſequencia do principio	conſequencia da fluidez, e deve conſiderar-ſe como o primeiro principio
232	1	em particular;	em particular?
244	1	LH, NH	LH, NK
258	6	palmo cubico	pé cubico
261	8	EQRT	EQRF
284	11	quantidade de agua	quantidade dupla da agua
298	20	TMV	TMQ
299	24	TM:PQ	TM:TQ
308	20	plano af	plano Af
317	6	ſobre a agua	ſóbe a agua
324	15	a menor	a maior

As 13 Estampas deste Tomo se encadernarão na ordem seguinte.

Estampa 1, e 2 - - - - - - - - -	pag. 92.
Estampa 3 - - - - - - - - - - - -	pag. 134.
Estampa 4 - - - - - - - - - - - -	pag. 143.
Estampa 5 - - - - - - - - - - - -	pag. 150.
Estampa 6 - - - - - - - - - - - -	pag. 168.
Estampa 7 - - - - - - - - - - - -	pag. 182.
Estampa 8 - - - - - - - - - - - -	pag. 188.
Estampa 9 - - - - - - - - - - - -	pag. 218.
Estampa 10 - - - - - - - - - - -	pag. 224.
Estampa 11 - - - - - - - - - - -	pag. 262.
Estampa 12 - - - - - - - - - - -	pag. 276.
Estampa 13 - - - - - - - - - - -	pag. 316.