Mathematics

343

371 DAS

NOVO CURSO
DE
MATHEMATICA
PARA USO DOS OFFICIAES
Engenheiros, e Artilheria

POR

MONSIEUR BELLIDOR,

Coronel de Infanteria, Socio das Reaes Academias de França, Inglaterra, e Prussia,

Traduzido no idioma Portuguez

POR

MANOEL DE SOUSA,

Capitão de Infanteria, com exercicio de Engenheiro, e Socio da Arcadia de Lisboa.

TOMO III.

COMMANDO GERAL DE ARTILHERIA
BIBLIOTHECA

LISBOA,
Na Officina de Miguel Maneſcal da Coſta,
Impreſſor do Santo Officio. Anno 1765.

Academia
DIRECÇÃO DA ARMA DE ARTILHARIA
N.º 371
BIBLIOTECA

NOVO CURSO DE MATHEMATICA.

LIVRO X.

TRATA-SE DA TRIGONOMETRIA, Rectilinea, e Nivelamento.

DE todas as partes da Mathematica nenhuma eſtudão os principiantes de melhor vontade que a Trigonometria, porque repreſenta ao eſpirito problemas muito curioſos, e de huma facil reſolução, pois não preciſa mais que ſimplesmente do calculo arithmetico. He preciſo com tudo fazer bem familiares as analogias deſte calculo para diſpôr os termos em

ſeu lugar, porque a Trigonometria he de tanto uſo na guerra, que hum Official Engenheiro, ou de Artilheria, encarregado de couſas as mais ordinarias, não póde abſolutamente ignoralla; pois ſe quizer conduzir huma galaria de minas, lançar bombas com regra, calcular as partes de huma fortificação regular para a delinear ſobre o terreno, figurar hum campo, huma carta, ou o plano de huma trinxeira, horientar as baterias, deve neceſſariamente recorrer á Trigonometria.

Para fallar alguma couſa deſte tratado, deve ſaber-ſe que não trato mais que dos triangulos rectilineos, porque os que ſe chamão eſfericos, (que são os formados de circulos da eſfera) não ſervem a hum homem de guerra, a quem não he preciſo eſtudar mais que as couſas neceſſarias, para que não ſucceda enfaſtiar-ſe, fatigando a memoria com aquellas, que são puramente curioſas, e de quaſi nenhum uſo nas couſas do ſeu miniſterio. Procurei evitar eſte defeito, particularmente neſte pequeno tratado, que tratei fazer o mais cla-

claro, e intereſſante que me foi poſſivel, applicando a Trigonometria a quantidade de operações, que divirtão os que não goſtão de ſe applicar, ſem ver logo o fruto das propoſições que eſtudão. Além dos problemas geraes da Trigonometria juntei aqui alguns outros particulares muito intereſſantes a hum Engenheiro Militar; e como ſempre he arriſcado medir as baſes em hum terreno expoſto ao fogo do inimigo, dou o modo de conhecer a diſtancia do lugar, em que eſtou, ao que ſe quer atacar por huma unica operação, ſem ſahir do lugar, em que ſupponho o Engenheiro. Eſta operação ſe póde ſempre praticar, com tanto que de hum meſmo lugar ſe poſsão ver trez objectos dentro, ou fóra da Praça, cuja poſição foi determinada com toda a exacção geometrica poſſivel nos lugares, em que ſem riſco ſe podião fazer as preciſas operações. Dou as reſoluções numericas, e geometricas do meſmo problema, para que ſe poſsão ſervir de huma nos caſos, em que ſe preciſe maior exacção; e de outra, quando

do não he neceſſario tanta, o que em muitas occaſiões póde baſtar. O Engenheiro deve ſaber de qual deſtes dous methodos ſe deve ſervir, e eu lhe deixo applicar eſte problema a todas as circumſtancias, em que póde ter eſta ventagem.

Como v. gr. medindo a diſtancia de hum lugar a outro póde ſucceder vermo-nos obrigados a conhecer tambem as differentes alturas a reſpeito do centro da terra, parece ſer o nivelamento huma parte das Mathematicas, que ſe deve ſeguir immediatamente á Trigonometria, e por iſſo obſervei eſta meſma ordem, pondo depois da Trigonometria hum tratado de Nivelamento, em que moſtro o uſo do nivel d'agua, e o de outro nivel para nivelar grandes diſtancias. Eſtes inſtrumentos são de tão grande uſo na prática, que todos os que eſtão diſpoſtos a ſervir-ſe delles ſe devem inteiramente applicar ao que adiante diremos ſobre eſta materia. Todos ſabem que quando ſe quer fazer hum canal navegavel, juntar hum rio com outro, ou conduzir as

aguas

aguas para lugares, em que falta, eſtes projectos não podem ter lugar, ſem primeiro ter hum muito exacto nivelamento, e aqui he que a prática, e theorica devem obrar juntas. Quantas grandes obras ſe não tem executado, depois que ſe ſoube reduzir a principios a arte de nivelar? Atrever-ſe-hião em outro tempo tentar hum trabalho tão admiravel, como o de juntar dous mares? Toda a magnificencia dos antigos chegou nunca a deitar a agua em lugares muito diſtantes dos ſeus naſcimentos? E ſe iſto ſe fazia, hião ſeguros do ſeu effeito antes de executado? Quantas vezes ſuccedeo que depois de começado hum penoſo trabalho, ſe conheceo muito tarde, e depois de grandes deſpezas, a impoſſibilidade do projecto? Preſentemente acha-ſe com toda a poſſivel exacção a differença do nivel de differentes lugares, e ſabe-ſe ſe o projecto, que ſe intenta, he, ou não poſſivel. Em fim não ha que temer no exito da empreza, ſe depois de feito o nivelamento ſe achou ſer poſſivel o projecto.

Da

Da Trigonometria rectilinea.

DEFINIÇÕES.

I.

694 A Trigonometria he huma parte da Geometria, por meio da qual dadas, ou conhecidas em hum triangulo trez couſas, ſe conhecem todas as mais.

II.

695 Como o que ſe acha na Trigonometria he pelo calculo ordinario da Arithmetica, ſervimo-nos de certas taboas feitas para eſte intento, as quaes ſe chamão taboas dos Senos, Tangentes, e Secantes, de que enſinarei ſómente o uſo, ſem tratar da conſtrucção, que ſe acha em muitos livros, pois não quero fallar mais que do que he abſolutamente neceſſario ſaber.

III.

696 Seis couſas ſe devem conſiderar em hum triangulo, a ſaber, os trez lados, e os trez angulos, ſem fazer caſo da ſuperficie; e como ſe podem dar trez deſtes ſeis termos para conhecer os outros, he preciſo que ſejão ou dous lados, e hum angulo, ou dous angulos,

e hum

e hum lado, ou finalmente os trez lados, porque os trez angulos não baſtão para ſe conhecer o valor dos trez lados, porque podem haver dous triangulos, de que os trez angulos de hum ſejão iguaes aos do outro, ſem que por iſſo ſejão os lados de hum iguaes aos lados do outro. He verdade que ſe póde achar a proporção deſtes lados, mas não o ſeu valor.

IV.

697 Já diſſemos que a medida de hum angulo não era outra couſa mais que a quantidade de gráos, ou de gráos, e minutos, que póde conter o arco, terminado pelas linhas, que o formão; mas eſta medida he relativa na Trigonometria a certas linhas, que são o ſeu principal objecto, e tem os nomes ſeguintes.

V.

698 Seno recto de hum arco, ou de hum angulo, de que eſte arco he medida, he huma recta, tirada do extremo F do arco perpendicular ao lado, que paſſa pelo outro extremo B do meſmo arco FB: e aſſim a linha FH, Eſtamp. 1. Figura 1.

ti-

tirada do extremo F perpendicular ao lado BC, he o ſeno recto do angulo FCB.

COROLLARIO I.

699 Se ſe continúa a linha FH até G, o raio CB perpendicular á FG a dividirá em duas iguaes no ponto H *, como tambem o arco FBG; e como a linha FG he corda deſte arco, e a linha FH o ſeno do arco FB, ſegue-ſe que o ſeno de hum arco he metade da corda do arco duplo.

* Numer. 424.

COROLLARIO II.

700 Como o ſeno FH ſe augmenta á proporção que for maior o angulo FCB, ſegue-ſe que ſe o lado CF for perpendicular a AB, como he o lado CI, o ſeno FH, e o lado CF ſe juntarão a fazer huma ſó linha CI, e neſte caſo o ſeno do angulo ICH ſerá o meſmo raio do circulo, o que moſtra que o ſeno do angulo recto he o maior de todos os ſenos, e por eſta cauſa ſe chama ſeno total.

RE-

REFLEXÃO.

701 Como o ſeno do angulo recto não he outra couſa mais que o raio do circulo, de que o angulo tira a ſua medida, chamaremos no decurſo deſta obra ao raio CB ſeno total, do que procede que os ſenos dos angulos menores que hum recto creſcem de cifra até á grandeza do raio. Tambem ſe ſegue deſta definição que o ſeno de hum angulo maior que recto he igual ao ſeno do ſeu complemento, aſſim o ſeno de 120 he o meſmo que o de 60; e quanto mais obtuſos são os angulos, tanto menores são os ſeus ſenos, pois tem os meſmos ſenos que os angulos dos ſeus ſupplementos.

VI.

702 Seno, verſo de hum arco, ou de hum angulo, de que eſte arco he medida, he a parte do raio comprehendida entre o ſeno recto, e o extremo do arco, aſſim como a linha recta, ou a parte BH do raio CB, que he o ſeno, verſo do arco FB, ou do angulo FCB, de que eſte arco he medida.

VII.

VII.

703 Tangente de hum arco, ou de hum angulo, de que eſte arco he medida, he huma linha perpendicular ao extremo de hum dos lados do angulo, e terminada pelo outro lado continuado: como a linha BE perpendicular ao extremo B do lado CB, e terminada pelo encontro do lado CF produzido até E, he a tangente do angulo FCB. Deſta definição ſe vê que a tangente de hum angulo obtuſo he a meſma que a do angulo agudo, que he ſeu ſupplemento, porque a linha AB he o lado do angulo obtuſo ACF, e encontra o outro lado CF continuado; e quanto mais obtuſo for o angulo, menor ſerá a tangente.

VIII.

704 Chame-ſe coſeno de hum angulo, ou de hum arco, o ſeno do ſeu complemento, LF he o coſeno do angulo FCB, ou do arco BF. Daqui ſe vê que o coſeno de hum arco, ou de hum angulo he a parte do raio comprehendido entre o centro, e o encontro do ſeu ſeno, pois he claro que

LF

LF=CH: huma linha, como IK, tangente ao arco IF, complemento do arco DF, se chama cotangente, ou tangente do complemento do angulo BCF.

IX.

705 Secante de hum arco, ou de hum angulo, de que este arco he medida, não he outra cousa mais que o lado do angulo continuado, e terminado na tangente; assim a linha CE he secante do angulo FCB, a linha CK he secante do angulo do seu complemento, e se chama cosecante do arco BF. Póde-se notar que a secante de hum angulo obtuso he igual á secante do angulo agudo, que he seu supplemento: a secante de hum angulo recto he infinita, porque sendo parallela á tangente, que passa pelo extremo do outro lado do angulo recto, não o póde encontrar senão no infinito, assim as secantes se vão augmentando de nada até o infinito.

706 Para a constrúcção das taboas dos Senos se suppoz o raio CB, ou o seno total dividido em 10000000 partes, e se busca quantas partes do seno to-

total ſe contém no ſeno de qualquer angulo de hum minuto até 90 gráos, para conhecer em numeros eſte ſeno; e deſte modo he que ſe achou que o ſeno do angulo de 20 gráos, por exemplo, continha 34202020 deſtas partes; que o ſeno de 55 gráos, e 10 minutos continha 8208170, e aſſim dos outros, que contém mais, ou menos, conforme o angulo ſe approxima mais, ou menos ao valor de hum recto, e eſtes differentes ſenos são os que ſe achão na ſegunda columna das taboas em cada huma das paginas.

707 Como huma tangente, v. gr. BE, augmenta, ou diminue, conforme o angulo FCB, buſca-ſe tambem o valor das tangentes de todos os angulos de 1 minuto até o de 90 gráos, conſiderando quantas partes contém do ſeno total, iſto he, de 10000000, e faz a terceira columna das taboas, que ſe ſegue immediatamente á dos ſenos, de ſorte que ao lado dos ſenos de cada angulo ſe acha o valor da tangente do meſmo angulo; e aſſim veremos que a tangente de 20 gráos he 3639202, e

que

que a de 55 gráos, e 10 minutos he 14370267 partes do ſeno total dividido em 10000000.

708 Em fim buſcou-ſe o valor da ſecante de cada angulo, o que ſe achou por meio do ſeno total, e da tangente; porque como huma ſecante, como CE, não he outra couſa mais que a hypothenuſa de hum triangulo rectangulo CBE, do qual o angulo recto he comprehendido pelo ſeno total CB, e a tangente BE do angulo FCB, quadrando o ſeno total CB, e a tangente BE, a raiz quadrada da ſomma deſtes dous productos dá a ſecante, e deſte modo ſe achárão as ſecantes de todos os angulos de hum minuto até 90 gráos, de que ſe compoz a quarta columna, que ſe acha nas taboas.

709 Logo para ſe ſaber qual he o ſeno, tangente, e ſecante de hum angulo, deve-ſe averiguar de quantos gráos he a medida do meſmo angulo, ou quantos gráos, e minutos contém, e buſcar na taboa, em que eſtá marcada na pagina de alto a baixo, o numero de gráos deſte angulo, por exemplo: ſe o angulo

lo he de 15 gráos, buſco a pagina, em que eſtá em ſima o numero 15, e acho na primeira linha que o ſeno de 15 gráos he 2588190, que a ſua tangente he 2679492, e a ſecante he 10352762.

710 Mas como os gráos de cada pagina eſtão acompanhados de hum numero de minutos, que eſtão em progreſsão arithmetica de 1 até 60, que ſe achão em huma pequena columna, que tem ao principio eſta palavra *minutos*, ſe quizermos ſaber o ſeno de 15, e 24 minutos, buſco logo a pagina, que tem os 15 gráos, e vou deſcendo até o lugar da columna dos minutos, em que encontro 24, e tómo o ſeno, que lhe correſponde, que he de 2655561.

711 Como o ſeno total, ou o lado CB he lado commum a todos os angulos, pois baſta variar o outro lado CF para fazer o angulo maior, ou menor, deve-ſe notar que o ſeno total, a tangente, e a ſecante de hum angulo podem ſempre formar os angulos de hum triangulo rectangulo, cuja grandeza he indeterminada, porque não ſe trata mais que da proporção dos lados com

os

os do outro triangulo, que lhe foſſe ſemelhante.

Para moſtrar iſto mais claramente, conſidere-ſe que ſe do ponto C do triangulo rectangulo CEF ſe deſcreve o arco BD, que ſeja por exemplo de 35 gráos, e ſe levanta no ponto B a perpendicular BA, teremos o triangulo CBA, do qual o lado CB ſe póde tomar por ſeno total, o lado AB por tangente do angulo C, e o lado CA por ſecante do meſmo angulo; mas todos os lados deſte triangulo são conhecidos, porque ſendo o lado CB ſeno total, ſerá 10000000; o lado AB, tangente de hum angulo de 35 gráos, ſerá 7002075; e o lado AC, ſendo ſecante do meſmo angulo, ſerá conſequentemente 12207746, e por meio deſtes triangulos vamos reſolver os ſeguintes problemas. Figura 2.

712 Para ſe conſtruirem as taboas ſe dividio o ſeno total em grande numero de partes, para que nas divisões, que pedem as operações, ſe poſsão deſprezar os reſtos, quando são de partes pequenas; mas como na prática ordi-

naria da Geometria se póde escusar ás vezes huma grande exacção, em lugar de suppôr o seno dividido em 10000000 partes, se póde suppôr só dividido em 100000, e então se póde nas columnas dos senos, tangentes, e secantes, em lugar de tomar todas as figuras, desprezar os dous ultimos caracteres, e tomar só os primeiros, que estão á direita separados dos dous por hum ponto, isto he, na tangente de 30 gráos, em lugar de 57735:03, se póde tomar só 57735, e por este modo se farão todos os calculos, que veremos depois.

Calculo dos Triangulos rectangulos.

PROPOSIÇÃO I.

PROBLEMA.

713 No triangulo rectangulo ADE, em que se conhece o angulo agudo A, e o lado AD, achar o lado DE opposto ao angulo agudo.

Figura 3.

Suppondo o angulo A de 30 gráos, e o lado AD de 20 braças, busque-se nas taboas a tangente de 30 gráos, que se

ſe acha ſer 57735; e como os triangulos ABC, ADE são ſemelhantes, ſerá AB:BC::AD:DE, de que tiramos eſta regra: ſe AB, ſeno total, ou 100000, dá a tangente BC de 57735, o lado AD de 20 braças dará o lado DE, que ſe achará ſer de 11 braças e meia pouco mais.

PROPOSIÇÃO II.

PROBLEMA.

714 Conhecido em hum triangulo rectangulo ADE hum angulo agudo A de 30 gráos, e o lado AD de 20 braças, achar a hypothenuſa AE. Figura 3.

Buſque-ſe a ſecante de 30, que he 115470; e como o triangulo ABC he ſemelhante a ADE, ſerá AB:AC::AD:AE, do que ſe tira eſta regra: ſe AB, ſeno total, ou 100000, me dá 115470, que he a ſecante AC, AD, ou 20 braças, que me dará? e acharei o lado AE de 23 braças, e algumas pollegadas.

PROPOSIÇÃO III.

PROBLEMA.

715 Em hum triangulo rectangulo
Figura 4. ABC, de que ſe conhece hum angulo agudo A, e o lado BC oppoſto a eſſe angulo, achar o lado AB oppoſto ao outro angulo agudo C.

Se o angulo agudo A he de 40, e o lado CB de 25 braças, deve-ſe buſcar a tangente de 40 gráos, que he 83909; e ſendo ſemelhantes os triangulos ABC, DEA, ſerá DE: EA :: CB : BA, de que ſe tira eſta regra: a tangente DE, ou 83909 ao lado EA, ſeno total, ou 100000, como o lado CB de 25 braças ao lado AB, que ſe acha ſer de 29 braças, e alguma couſa mais.

716 De outro modo. Como o an-
Figura 5. gulo A he de 40 gráos, ſe ſe tira eſte numero de 90, teremos o angulo C de 50 gráos; e como os triangulos CED, CBA ſão ſemelhantes, poder-ſe-ha, buſcando a tangente do angulo C, dizer: Como o lado CE, ſeno total, he ao lado ED tangente de 40 gráos, aſſim o lado CB de 25 braças he ao lado BA,

BA, que ſe achará ſer de 29 braças, e alguma couſa mais.

PROPOSIÇÃO IV.

PROBLEMA.

717 Em hum triangulo rectangulo ABC, em que são conhecidos os dous lados AB, e BC, que comprehendem o angulo recto B, achar o angulo agudo A. Figura 6.

Suppondo o lado AB de 16 braças, e BC de 14, e por ſerem os triangulos ABC, ADE ſemelhantes, ſerá AB : BC :: AD : DE, de que ſe tira eſta regra: ſe o lado AB de 16 braças dá o lado BC de 14, o lado AD, que he de 100000, que dará pelo valor do lado DE, que he tangente do angulo A? e achar-ſe-ha 875000; e buſcando o numero mais proximo deſte na columna das tangentes, achar-ſe-ha que correſponde a 41 gráos, e 12 minutos, que he o valor do angulo A.

PRO-

PROPOSIÇÃO V.

PROBLEMA.

718 Em hum triangulo rectangulo
Figura 7. A B C, em que ſe conhecem os lados AB, e AC, que comprehendem hum angulo agudo A, achar o valor deſte angulo.

Suppondo o lado AB de 35 braças, e o lado AC de 40, teremos por cauſa dos triangulos ſemelhantes A B C, DEA, AB : AC :: AD : AE, de que ſe tira eſta regra: ſe o lado AB de 35 braças dá o lado AC de 40, o ſeno total AD de 100000 dará o valor da ſecante AE do angulo A, que ſe achará de 114285; e buſcando na taboada da columna das ſecantes o numero mais proximo deſte, ſe achará que lhe correſpondem 28 gráos, e 57 minutos, que he o valor do angulo A.

PROPOSIÇÃO VI.

THEOREMA.

719 Em todos os triangulos os ſenos dos angulos eſtão na meſma razão que os ſeus lados oppoſtos.

Digo

Digo que em qualquer triangulo ABC a meſma razão tem o ſeno do angulo A ao ſeu lado oppoſto BC, que o ſeno do angulo B ao ſeu lado oppoſto AC. Figura 8.

DEMONSTRAÇÃO.

Circumeſcreva-ſe hum circulo a eſte triangulo, como o angulo A tem por medida metade do arco BDC, a linha BC ſerá a corda de hum arco duplo do que mede o angulo A, por conſequencia metade da linha BC ſerá o ſeno do angulo A, e pela meſma razão o ſeno do angulo B ſerá metade da linha AC, como tambem o ſeno do angulo C metade da linha AB: aſſim ſerá $\frac{BC}{2}$: BC :: $\frac{AC}{2}$: AC, ou tambem $\frac{AC}{2}$: AC :: $\frac{AB}{2}$: AB. *O Q. S. Q. D.*

PROPOSIÇÃO VII.

THEOREMA.

720 Em hum triangulo obtuſangulo o ſeno do angulo obtuſo he o meſmo que o do ſeu ſupplemento.

Ti-

Eſtamp. 2. Figura 9. Tire-ſe a perpendicular CD ſobre a baſe continuada BD, e deſcrevão-ſe os arcos FE, HG com a meſma abertura de compaſſo AF, BH, e tirem-ſe as perpendiculares FI, HL: iſto ſuppoſto, como AF he igual a BH, chame-ſe a hum, e outro lado *a*, AC *b*, CD *c*, FI *d*, HL *e*, BC *f*, e moſtraremos que FI *d*: CB *f*:: HL *e*: AC *b*.

DEMONSTRAÇÃO.

Sendo os triangulos CAD, e FAI ſemelhantes, ſerá CD *c*: CA *b*:: FI *d*: AF *a*; e como tambem os triangulos CBD, HBL são ſemelhantes, ſerá CD *c*: HL *e*:: BC *f*: HB *a*, de que ſe tirão eſtas duas equações $ac = bd$, e $ac = ef$; e como os primeiros membros são iguaes, ſerá $bd = ef$, de que ſe tira FI *d*: CB *f* :: HL *e*: AC *b*, o que moſtra que o ſeno HL do ſupplemento do angulo ABC tem a meſma razão ao lado AC, que o ſeno FI ao lado BC, e por conſequencia o ſeno do angulo obtuſo ſempre he o do ſeu ſupplemento.

Eſtes dous theoremas nos dão o modo de conhecer os angulos, e os lados

da

da maior parte dos triangulos, que não são rectangulos, como vamos ver nos seguintes problemas.

PROPOSIÇÃO VIII.

PROBLEMA.

721 Achar os dous lados de hum triangulo, de que se conhecem dous angulos a hum lado.

Supponhamos o lado CB de 15 braças, o angulo A de 40 gráos, e o angulo B de 60 gráos, conhecer-se-ha o terceiro angulo, tirando do valor de dous rectos, ou de 180 gráos a somma dos angulos A, e B, e achar-se-ha o angulo C de 80 gráos. Isto supposto, para conhecer o lado AC busco nas taboas o seno do angulo A, isto he, o seno de 40 gráos, que será o do angulo opposto ao lado, que conheço, e acho ser 64278; e buscando tambem o do angulo B opposto ao lado, que busco, acho que he 86602. Presentemente digo: Se 64278, que he o seno do angulo A, me dá 15 braças para o lado BC, que dará 86602, seno do angu- Figura 10.

gu-

gulo B, para o lado AC? que acho ser 20 braças, e alguma couſa mais. Para ter o valor do lado AB buſque-ſe o ſeno do angulo C, que he de 98480, e direi: Se o ſeno do angulo A, ou 64278 me dá 15 braças para o lado BC, que me dará o ſeno do angulo C, ou 98480 para o lado AB? que ſe achará ſer de 23 braças, e alguma couſa mais.

LEMMA.

722 Se tivermos duas grandezas x, e y, cuja ſomma he a, e a differença d, a maior he igual á metade da ſomma, e mais metade da differença; e a menor he igual á metade da ſomma, menos metade da differença. Suppondo que x ſeja a maior, e y a menor, devo moſtrar que $x=\frac{a+d}{2}$, e que $y=\frac{a-d}{2}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Sendo a ſomma das duas grandezas a, teremos $x+y=a$; e por ſer a ſua differença d, ſerá $x-y=d$: da primeira equação ſe tira $y=a-x$; e pondo eſte valor de y na ſegunda equação, ſe-

rá

rá $x-a+x=d$, ou $2x=a+d$: logo $x=\frac{a+d}{2}$; e pondo eſte valor de x na primeira equação, ſerá $\frac{a+d}{2}+y=a$, ou $a+d+2y=2a$: logo $2y=2a-a-d=a-d$, e $y=\frac{a-d}{2}$. *O Q. S. Q. D.*

PROPOSIÇÃO IX.

PROBLEMA.

723 Achar dous angulos em hum triangulo ABC, de que ſe conhecem dous lados AC, BC, e hum angulo A oppoſto a hum dos lados conhecidos. Figura 11.

Para achar o angulo B do triangulo, ſuppondo o lado AC de 26 braças, e BC de 20, e o angulo A de 50 gráos, buſque-ſe o ſeno deſte angulo, que he 76604, e diremos: Se o lado BC de 20 braças dá 76604, ſeno do angulo A, que dará o lado AC de 26 braças por ſeno do angulo B? que ſe achará ſer de 99585; e buſcando na columna dos Senos o numero mais proximo deſte, veremos que correſponde a 84 gráos, e 45 minutos, que he o valor do angu-

lo

lo B. Como ſe conhecem os angulos A, e B, tirando a ſua ſomma de 180 gráos, o reſto ſerá a differença 45 gráos, e 15 minutos, valor do angulo C.

724 Porém ſe o angulo dado foſſe maior que recto, como no triangulo
Figura 12. ABC, em que o angulo B he de 120 gráos, o lado AC de 18 braças, e BC de 12, para conhecer o angulo A ſe buſque o ſeno do ſupplemento do angulo obtuſo, iſto he, o ſeno de 60 gráos, que he 86602, e diremos: Se o lado AC de 18 braças me dá 86602, ſeno do ſupplemento ao angulo obtuſo, o lado AC de 12 braças, que dará para o ſeno do angulo A? que ſe achará de 57734 correſpondente a 35 gráos, e 16 minutos.

PROPOSIÇÃO X.

THEOREMA.

725 Em todos os triangulos, v. gr.
Figura 13. ABC, de que ſe conhecem dous lados BA, e BC, e o angulo B por elles comprehendido, a ſomma dos lados conhecidos he á ſua differença, como a tangen-

gente da ſemiſomma dos angulos não conhecidos A, e C á tangente da ſemidifferença.

DEMONSTRAÇÃO.

Se do ponto angular B ſe deſcreve hum circulo, cujo raio ſeja BC, e ſe continúa o lado AB até a circumferencia para D, e E, a linha AD ſerá a ſomma dos lados conhecidos, porque BD=BC, e a linha AE ſerá a differença dos dous lados; porque ſendo BA menor que BD, tirando BA de BE, reſta AE por differença dos lados. Iſto ſuppoſto, como o angulo DBC he igual aos dous interiores BAC, e BCA, por ſer exterior do triangulo BAC, e igual á ſomma dos dous angulos, que ſe não conhecem, e tirando-ſe a linha EC, o angulo DEC, que eſtá na circumferencia, ſerá metade do angulo do centro DBC: logo o angulo E he igual á metade da ſomma dos dous angulos, que ſe não conhecem; e tirando-ſe a linha DC, que he perpendicular ſobre EC, porque o angulo ECD eſtá no ſemicirculo, eſta linha ſerá tangen-

gente do angulo DEC, iſto he, da ſemiſomma dos angulos BAC, e BCA. O triangulo EBC he *Iſocele*, e ſerão os angulos BEC, e BCE da baſe iguaes, e ſerá o angulo BEC maior que BCA todo o angulo FCE; e como o angulo exterior BAC do triangulo BAC he maior que o angulo BEC todo o angulo ACE, ſegue-ſe que o angulo BAC he maior que BCA duas vezes o angulo ACE; do que ſe ſegue que o angulo ACE he a ſemidifferença dos dous angulos deſconhecidos BAC, e BCA. Ora a linha EF he perpendicular a EC, ſerá tangente do angulo FCE, ſemidifferença dos dous angulos deſconhecidos; mas as linhas DC, e FE são parallelas, por ſerem ambas perpendiculares a EC, e por conſequencia o angulo FEA ſerá igual ao ſeu alterno EDC; e como tambem os angulos FAE, e DAC são iguaes, ſegue-ſe que os triangulos FAE, e DAC são ſemelhantes, de que ſe tira AD : AE :: DC : EF, o que moſtra que AD, ſomma dos dous lados, he para a ſua differença AE, como a linha DC, tangente da ſemi-

ſom-

ſomma dos angulos deſconhecidos, para a linha EF, tangente da ſua ſemi-differença. *O Q. S. Q. D.*

PROPOSIÇÃO XI.

PROBLEMA.

726 Achar dous angulos A, e B de hum triangulo ABC, de que ſe conhecem os dous lados AC, e CB, e o angulo C por elles comprehendido. Figura 11.

Para reſolver eſte problema, que he huma applicação do theorema precedente, ſe ſommem os dous lados CB de 25 braças, e CA de 20: para ter a ſomma dos lados conhecida, tire-ſe o menor do maior para ter a differença, que ſerá 5; e como o angulo C ſe ſuppõe de 40 gráos, ſe buſque a ſua differença a dous rectos, que ſerá 140 gráos, cuja metade 70 gráos ſerá a ſemiſomma dos angulos deſconhecidos A, e B, a ſua tangente ſerá 274747, e diremos: Se 45, ſomma dos lados conhecidos, dá 5 ſua differença, 274747 tangente da ſemiſomma dos angulos deſconhecidos, dará a tangente da meta-

de

de da differença dos meſmos angulos, a qual ſe achará ſer 30527.

Buſque-ſe na columna das Tangentes o numero mais proximo a eſte, e ver-ſe-ha que correſponde a 16 gráos, e 59 minutos; e como eſta quantidade he metade da differença, ſe dobre para ter a differença inteira, que ſerá 33 gráos, e 58 minutos, que ſe deve abater da ſomma dos dous angulos, iſto he, de 140 gráos, e achar-ſe-ha a differença 106 gráos, e 2 minutos, cuja metade he o valor do angulo oppoſto ao menor lado, iſto he, o angulo B, que ſerá 53 gráos, e 1 minuto, porque o menor angulo he igual á metade da ſomma menos metade da differença, e he o que fica, tirada a differença da ſomma, e tomando metade do reſiduo.

Para ter o angulo A baſta accreſcentar a differença 33 gráos, e 58 minutos ao valor do angulo B, e achar-ſe-ha que he de 86 gráos, e 59 minutos. O lado AB ſe achará facilmente pela Propoſição VII.

PRO-

PROPOSIÇÃO XII.

THEOREMA.

727 Em qualquer triangulo ABC Figura 15. o maior lado AC he para a ſomma dos outros dous AB, e BC, como a differença deſtes lados para a differença dos ſegmentos AG, e CG da baſe.

DEMONSTRAÇÃO.

Do ponto B ſe deſcreva hum circulo com o lado BC maior que BA, continue-ſe o lado AB até a circumferencia, ſendo BD=BC, ſerá AD a ſomma dos lados AB, e BC, e AF ſerá a differença. Como a linha EC eſtá dividida em duas iguaes pela perpendicular BG, ſerá AE a differença dos dous ſegmentos AG, e CG; e tirando as linhas EF, e DC, ficarão os dous triangulos ſemelhantes EAF, e DCA, porque tem os angulos em A verticalmente oppoſtos iguaes, e além diſſo o angulo E=D, por eſtarem ſobre o meſmo arco FC, e teremos eſta proporção: a baſe AC he a AD, ſomma dos lados, como AF, differença dos lados,

para AE, differença dos ſegmentos da baſe. Deſte theorema ſe tira o modo de conhecer os trez angulos de hum triangulo, de que ſe conhecem os trez lados, como vamos moſtrar no problema ſeguinte, que he ſua applicação.

PROPOSIÇÃO XIII.

PROBLEMA.

728 Achar o valor de hum dos ſegmentos da baſe de hum triangulo
Figura 16. ABC, de que ſe conhecem os trez lados.

Suppondo a baſe AC de 15 braças, o lado AB de 8, e o lado BC de 12, devemos dizer: a baſe AC de 15 braças he á ſomma dos outros dous lados, que he 20, como a differença deſtes dous lados, que he 4, á differença dos dous ſegmentos, que ſe achará ſer 5 braças, e 2 terços: accreſcentando eſta quantidade ao valor da baſe AC, teremos 20 braças, e 2 terços, que ſerá
Figura 15. o valor de huma linha, como CE, e por conſequencia a ſua metade ſerá o maior ſegmento DC, que he 10 braças,

ças, e 1 terço; mas como ſe conhecem no triangulo rectangulo DBC os lados BC, e DC, ſe poderá conhecer o angulo C, e depois os angulos A, e B, para o que ſe fará eſta proporção: o lado BC ao ſeno total, como o ſegmento DC ao ſeno do angulo DBC; e conhecendo eſte angulo, diminuido o ſeu valor de 90 gráos, ficará o angulo C: do meſmo modo ſe achará o angulo ABD, e o angulo A.

Uſo dos Logarithmos no calculo dos Triangulos.

729 Nas taboas ha trez columnas á direita das que acabámos de fallar, no alto das quaes ſe achão as palavras *Logarithmos dos Senos*, *Logarithmos das Tangentes*, e *Logarithmos das Secantes*. Para entender o uſo deſtes logarithmos no calculo dos triangulos, devemos trazer á memoria tudo o que temos demonſtrado ácerca das propriedades dos logarithmos, por meio dos quaes toda a multiplicação ſe reduz a ſommar os logarithmos do multiplicando, e multiplicador, e toda a divisão a huma di-

minuição do logarithmo do diviſor do do dividendo. Tambem nos havemos de lembrar que toda a regra de 3 ſe reduz a ſommar os logarithmos dos dous meios, e diminuir da ſomma o logarithmo do primeiro termo. Iſto ſuppoſto, he evidente que ſe ſe conhecem os logarithmos dos ſenos, tangentes, e ſecantes, como temos os dos numeros naturaes, que expreſsão os lados dos triangulos, que ſe querem calcular, as proporções, que ſe hão de fazer, ſe reduzirão á ſomma dos dous logarithmos, e á diminuição do logarithmo do primeiro termo de ſomma dos logarithmos dos meios. Aſſim buſcando os ſenos, ſe tome o logarithmo do ſeno; e buſcando huma tangente, ſe tome o ſeu logarithmo, como tambem buſcando huma ſecante, ſe tome o ſeu logarithmo. Depois em lugar de pôr os numeros naturaes, que expreſsão o numero de braças, ou depois que tem os lados conhecidos, ſe devem tomar os logarithmos deſtes numeros, que ſe buſcarão nas taboas dos logarithmos, calculadas da unidade até 200000,

que

que ſe achão no meſmo livro, em que ſe achão as dos ſenos, tangentes, e ſecantes, como vamos explicar nos ſeguintes exemplos.

EXEMPLO I.

730 Pedem-me pelos logarithmos o lado DE de hum triangulo rectangulo ADE, no qual são conhecidos o angulo A de 30 gráos, e o lado AD de 20 braças. Figura 7.

Buſcarei na pagina, em que tem no alto o numero 30 gráos, e em lugar de tomar a tangente da terceira columna, tomarei o ſeu logarithmo, que he 97614394; e como tambem ſe me faz preciſo o ſeno total, em lugar de tomar o que eſtá dividido em 100000, tomarei o ſeu logarithmo, que eſtá dividido em 100000000 partes; e como tambem hei de fazer huma regra de 3 para achar o lado DE, na qual o primeiro termo deve ſer o ſeno total, de que acabo de fallar, o ſegundo a tangente, que já achei, e o terceiro o valor de AD, he neceſſario achar o logarithmo deſte terceiro termo, para

pôr

pôr em lugar do numero 20, o qual acharei na primeira folha das taboadas dos logarithmos dos numeros naturaes ao lado do numero 20, cujo logarithmo he 13010300. Depois farei huma proporção arithmetica: ſe o ſeno total 100000000 dá 97614394, logarithmo da tangente de 30 gráos, 13010300 logarithmo de 20 braças que dará por logarithmo do numero que buſco? e para o achar ſommo o ſegundo, e terceiro termo, e da ſomma tiro o primeiro, e o reſto 10624694 ſerá o logarithmo do numero que ſe buſca; e para ſaber o numero, recorrerei á taboa dos logarithmos dos numeros naturaes, e buſcarei o logarithmo mais proximo a eſte, e acho que o proximo menor correſponde ao numero 11, e he muito menor; e que o proximo maior, que correſponde ao numero 12, he muito maior, e por iſſo buſco outro, que ſeja quaſi o meio entre eſtes dous, por exemplo, 12 e $\frac{1}{2}$, o que moſtra que o lado DE he quaſi de 11 braças e meia.

Ex-

EXEMPLO II.

731 Se tivermos hum triangulo rectangulo, no qual ſejão conhecidos o lado AB de 16 braças, e BC de 14, para conhecer o angulo A ſe deve buſcar na ſegunda taboa o logarithmo de 16, que he 12041200, e o logarithmo de 14, que he 11461280; e por ſerem os triangulos ABC, ADE ſemelhantes, ſe dirá: ſe 12041200, logarithmo do lado AB, me dá 11461280, logarithmo do lado BC, o logarithmo da tangente, que he 100000000, quanto dará? e depois de ter ſommado o ſegundo, e terceiro termo, e diminuido da ſua ſomma o primeiro, acho que a differença he 99420080, que ſerá o logarithmo da tangente DE, o qual correſponde nas taboas a 41 gráos, e 12 minutos, que ſerá o valor do angulo A. Figura 6.

EXEMPLO III.

732 Tendo conhecido em hum triangulo ABC o angulo A de 40 gráos, o angulo B de 60 gráos, e o lado BC de 15 braças, pede-ſe o valor do lado AC. Figura 10.

Buſ-

Buſco o logarithmo do ſeno de 40 gráos, que he 98080675, e o logarithmo de 60 gráos, que he 99375306, e finalmente na ſegunda taboa o logarithmo do numero 15, que he 11760913; e fazendo a analogia ordinaria, direi: ſe o logarithmo do ſeno do angulo A, que he 98080675, dá 11760913, logarithmo do lado BC, o logarithmo 99375306 do ſeno do angulo B o que dará? e acho 13055544 por logarithmo do lado AC; e buſcando na ſegunda taboa dos logarithmos o mais proximo deſte, vejo que correſponde ao numero 20, de que ſe ſegue que o lado AC he de 20 braças.

Applicação da Trigonometria á Pratica.

PROPOSIÇÃO XIV.

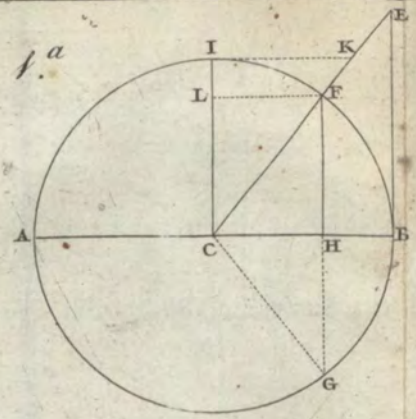
PROBLEMA.

733 Achar huma diſtancia inacceſſivel.

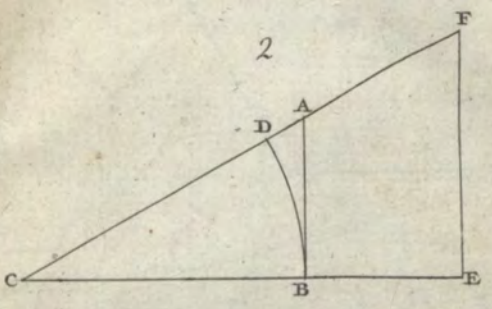
Eſtamp. 3. Figura 17. Dado hum objecto, v. gr. C, a que ſe não póde chegar, pedem-me quantas braças diſta eſte objecto do lugar D.

Pa-

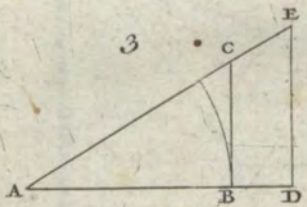
1.ª



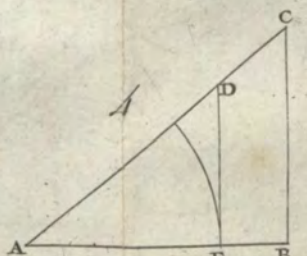
2



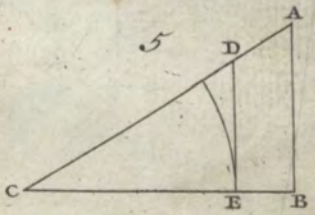
3



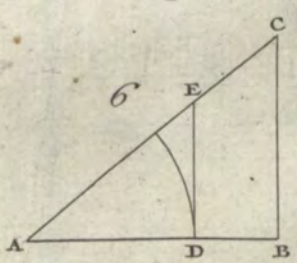
4



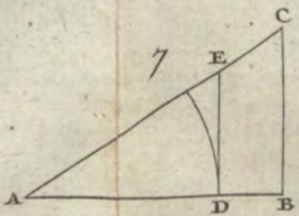
5



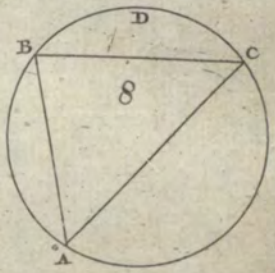
6



7



8



T. III.

Para ſe achar mande-ſe cravar huma bandeirola no ponto A, ſeparado hum intervallo proporcionado á diſtancia do ponto D a C, e ſeja eſta v. gr. de 20 braças, a qual deve ſervir de baſe para fazer a operação: depois diſſo meça-ſe a abertura do angulo formado pela baſe DA, e o raio DC, e para medir bem eſte angulo ſe enfiem os pontos D, e A com as pinulas moveis do grafometro, depois ſe mova a alidade de modo que pelas fendas, que eſtão nos extremos das pinulas, ſe veja o objecto C: côntem-ſe depois os gráos comprehendidos pelo lado do grafometro, que eſtá no alinhamento dos pontos D, e A, e o raio viſual, que ſe termina no objecto C, o qual angulo ſupponhamos que he aqui de 70 gráos: feito iſto, ſe ponha outra eſtaca no lugar, em que eſtava o pé do grafometro, iſto he, no ponto D, e paſſe-ſe ao ponto A para achar o valor do angulo DAC, iſto he, o angulo formado pela baſe AD, e pelo ſegundo raio viſual, por onde ſe obſervou o objecto C, e ſupponhamos que

eſte

eſte angulo he de 80 gráos. Iſto ſuppoſto, reſta conhecer o angulo C, o que ſe achará facilmente, tirando do valor de dous rectos a ſomma dos dous angulos A, e D, e acharemos ſer o angulo C de 30 gráos. Para conhecer o lado AD, diremos: ſe o ſeno de 30 gráos me dá 20 braças, que he o lado AD, o ſeno do angulo A de 80 gráos que dará? acharei 39 braças, e dous terços, que ſerá o valor do lado CD, diſtancia que ſe buſca.

REFLEXÃO.

734 Algumas vezes ſuccede encontrar grande embaraço em achar huma diſtancia inacceſſivel, quando o objecto he muito diſtante, como v. gr. na diſtancia de 2, ou 3 leguas. Para ſe ſaber a diſtancia neſte caſo, ſe preciſa huma baſe muito grande, ao menos de 1000 braças; e como he trabalhoſo medir huma tão grande diſtancia, a que accreſce a irregularidade do terreno, e outros obſtaculos, que ſe podem encontrar, o melhor partido, que ſe deve buſcar, he tomar logo huma pequena

na baſe, por meio da qual ſe póde ter outra, trez, ou quatro vezes maior, e com eſta ſegunda huma terceira maior para poder fazer a operação.

As operações precedentes são mui uteis para fazer as cartas, a fim de achar os pontos capitaes, para marcar os lugares, que tem com elles reſpeitos; ou tambem ſe ſe quizer traçar o campo, que occupe hum exercito, para marcar os quarteis, linhas de circumvalação, e pontos de conſequencia, e em fim tudo o que póde ſer intereſſante em caſos ſemelhantes.

Se ſe faz o ſitio de huma Praça, e são preciſas algumas galarias para fazer os fornilhos de baixo dos angulos da eſtrada coberta, ou de baixo de alguma obra avançada, he preciſo abſolutamente recorrer a eſta operação, para que ſabendo a diſtancia da entrada da galaria ao objecto, para onde ſe caminha, ſe poſſa dar a eſta galaria o comprimento neceſſario, para ficar poſitivamente de baixo do objecto, que ſe quer arruinar.

PRO-

PROPOSIÇÃO XV.

PROBLEMA.

735 Achar a diſtancia de hum lu-
Figura 18. gar a outro, como do lugar C a D.

Eſta operação ſe começa, eſtabelecendo huma baſe, v. gr. AB, que ſupponho aqui de 100 braças, e do ponto B ſe tome com o inſtrumento a abertura do angulo ABC, formado pela baſe AB, e o raio viſual BC, e o ſupponhamos v. gr. de 92 gráos: do meſmo lugar B ſe tome o angulo ABD, e ſeja por exemplo de 45 gráos: feita eſta operação, torne-ſe ao outro extremo A da baſe AB, para nella tomar a abertura do angulo DAB, que ſupponhamos de 98 gráos, e a abertura do angulo DAC que ſeja v. gr. de 50 gráos, conhecidos os angulos, como tambem a baſe, não ha difficuldade em conhecer a diſtancia DC, nem tambem a diſtancia DA, e a de B para C, porque he facil achar o valor dos lados AC, e BC do triangulo CAB, pois ſe conhece o lado AB de 100 braças, o angulo B de 92 gráos, o angulo CAB de 48,

e con-

e conſequentemente o angulo ACB de 40 gráos. Iſto ſuppoſto, para achar o valor do lado CB, direi: ſe o ſeno do angulo ACB me deo o lado AB de 100 braças, que me dará o ſeno do angulo AB por valor do lado CB, que buſco? Para achar o lado AC, direi: ſe o ſeno do angulo ACB me dá o valor do lado AB, o ſeno do angulo do complemento de 92 gráos, que ſerá de 88 gráos, por ſer o angulo ABC obtuſo, dar-me-ha o valor do lado AC.

Como o valor do lado DC ſe não póde conhecer, ſem conhecer o lado DA, para o achar direi: ſe o ſeno do angulo ADB de 37 gráos me dá o valor do lado AB de 100 braças, o ſeno de 45 gráos dar-me-ha o valor do lado DA, o qual conhecido, como tambem AC, e o angulo DAC, teremos conhecidos dous lados, e o angulo por elles comprehendido, que nos póde dar a conhecer os outros dous angulos, conforme o que diſſemos na Propoſição X.

* Buſcaremos pois os dous angulos D, e C com eſta proporção: a ſomma dos dous lados AD, e AC para a ſua diffe- * Numer. 725.

ferença, como a tangente da ſemiſomma dos angulos oppoſtos para a tangente da ſemidifferença dos meſmos angulos ; e achado o angulo C, que ſupponho maior, por ſer o lado CD maior, farei eſta proporção: o ſeno do angulo C he ao lado AD conhecido, como o ſeno do angulo A ao lado DC, que buſco, e aſſim conhecerei DC, diſtancia que ſe pede.

Como ſuccede quaſi ſempre que a campanha não eſtá marcada na planta das Cidades, que ſe ſitião, ou que ſe o eſtá, não ſe póde fiar, ſem ſe expôr a grandes erros, na exacção, com que deſenhárão, ou copiárão, a operação precedente dá hum meio excellente para horientar ſobre a planta a reſpeito da Praça, a cauda da trinxeira de cada ataque, para que depois ſe poſſão projectar os trabalhos, que ſe querem fazer de huma noite para outra, ou marcallos ſómente á proporção que ſe adiantão, porque huma vez que ſe tem a parelkla, ſe póde dentro da trinxeira medir os ramaes, e tomar a abertura dos angulos, que fazem as

vol-

voltas, marcar a disposição das baterias, e fazer finalmente o plano da trinxeira com tanta exacção, como se não houvesse obstaculo algum.

REFLEXÃO GERAL.

736 He preciso notar bem, que quando se busca hum lado, se deve sempre começar a operação pelo seno; e se se busca o angulo, devemos começar a operação por hum lado. Deste modo a grandeza, que se busca, será sempre a quarta proporcional de huma proporção geometrica, da qual são conhecidos os primeiros trez termos, no caso que se faça a operação com os senos, e numeros naturaes, ou o logarithmo do numero, que se busca, no caso que a operação se faça com os logarithmos dos senos, e os dos numeros naturaes.

PROPOSIÇÃO XVI.

PROBLEMA.

737 Tirar huma linha parallela a outra inacceſſivel.

Pe-

Figura 19. Pedem-me pelo ponto C huma linha parallela a outra linha inacceſſivel AB.

Para reſolver eſte problema, he neceſſario eſtabelecer huma baſe, v. gr. CD, que deve ſer, como já diſſemos, proporcionada á diſtancia do objecto: para que a operação ſe faça mais juſta, e nós a ſuppomos aqui de 150 braças, he o comprimento conveniente. Sabemos que duas linhas parallelas cortadas por huma terceira formão os angulos alternos iguaes; e que quando os angulos alternos são iguaes, as linhas são parallelas: de que ſe ſegue que ſe ſe conhece o angulo ABC feito pela linha AB, e o raio viſual BC, fazendo o angulo BCE igual ao precedente, ſerá a linha CE parallela a AB, e aſſim toda a queſtão ſe reduz a conhecer o valor do angulo ABC.

Para o conhecer começo, tomando do ponto C a abertura do angulo ACB, que acho por exemplo de 40 gráos, depois paſſo ao ponto D para tomar a abertura do angulo CDB, que ſerá por exemplo de 86 gráos, e tambem o an-

o angulo ADB, que ſerá por exemplo de 60 gráos: conhecidos eſtes angulos, acharei com elles o valor dos lados CA, e CB, para o que buſco no triangulo CDB o valor do lado CB; e ſendo o angulo BCD de 80 gráos, e o angulo CDB de 86, ſegue-ſe ſer o angulo CBD de 14 gráos. Iſto ſuppoſto, direi: ſe o ſeno do angulo de 14 gráos me dá 150, o ſeno do angulo de 86 gráos que me dará para o valor do lado oppoſto CB?

Para achar o lado CA, como o angulo CDA he de 26 gráos, ſendo o angulo ACD de 120, ſerá o angulo CAD de 34 gráos. Iſto ſuppoſto, direi: ſe o ſeno do angulo CAD de 34 gráos me dá 150 braças, valor do lado CD, que me dará o ſeno do angulo CDA de 26 gráos para o valor do lado CA? e como no triangulo CAB temos conhecidos os lados AC, e CB com o angulo por elles comprehendido, ſegue-ſe que facilmente ſe achará pela Propoſição X. o valor do angulo ABC, de cujo conhecimento depende a ſolução do problema.

Em muitas occaſiões nos vemos obrigados a tirar huma parallela a huma linha inacceſſivel, ou ſe queirão abrir eſtradas em hum boſque com certas precauções, ou nos ataques, quando ſe quer levantar huma bateria, que ſeja parallela á face da obra, que ſe quer bater, ou ſe quer fazer huma bateria em eſcarpa, cujo fogo ſe dirija por hum angulo dado com a face.

PROPOSIÇÃO XVII.

PROBLEMA.

738 Medir huma altura acceſſivel, ou inacceſſivel.

Figura 20. Para medir a altura AB de huma torre ſe deve tomar huma baſe EB, e medilla exactamente do ponto B da torre até o lugar E, em que ſe põe o grafometro; e ſuppondo eſta baſe v. gr. de 25 braças, ſe medirá a abertura do angulo ACD feito pelos dous raios viſuaes, dos quaes o primeiro CD deve ſer parallelo ao horizonte, e o ſegundo CA terminar-ſe no cume da torre; e ſuppondo que o angulo ſeja v. gr.

v. gr. de 35 gráos, buſcaremos no triangulo ACD o valor do lado AD, dizendo: o ſeno total he á tangente do angulo C, como o lado CD de 25 braças ao lado DA, que ſe achará de 17 braças e meia, ao qual accreſcentando a altura DB, ou CE do inſtrumento, que he ordinariamente de 6 palmos, ſe achará a altura da torre de 18 braças, e 1 palmo.

Mas ſe tiveſſemos que ſaber a altura de huma torre, ou de huma eminencia, a que ſe não póde chegar, como ſe vê na Figura 21, do lugar F ſe tomará a abertura do angulo ADG, formado pelos dous raios; e ſuppondo achar-ſe v. gr. de 50 gráos, viremos recuando pelo meſmo alinhamento dos pontos D, e G até o ponto C para ter huma baſe EF de baſtante comprimento, para que o angulo CAD não ſeja demaziado agudo; e achando eſta baſe, por exemplo, de 40 braças, mediremos o angulo ACG, que ſerá, por exemplo, de 30 gráos; e como o angulo ADG he igual aos dous interiores oppoſtos do triangulo CAD *, a differença deſte an-

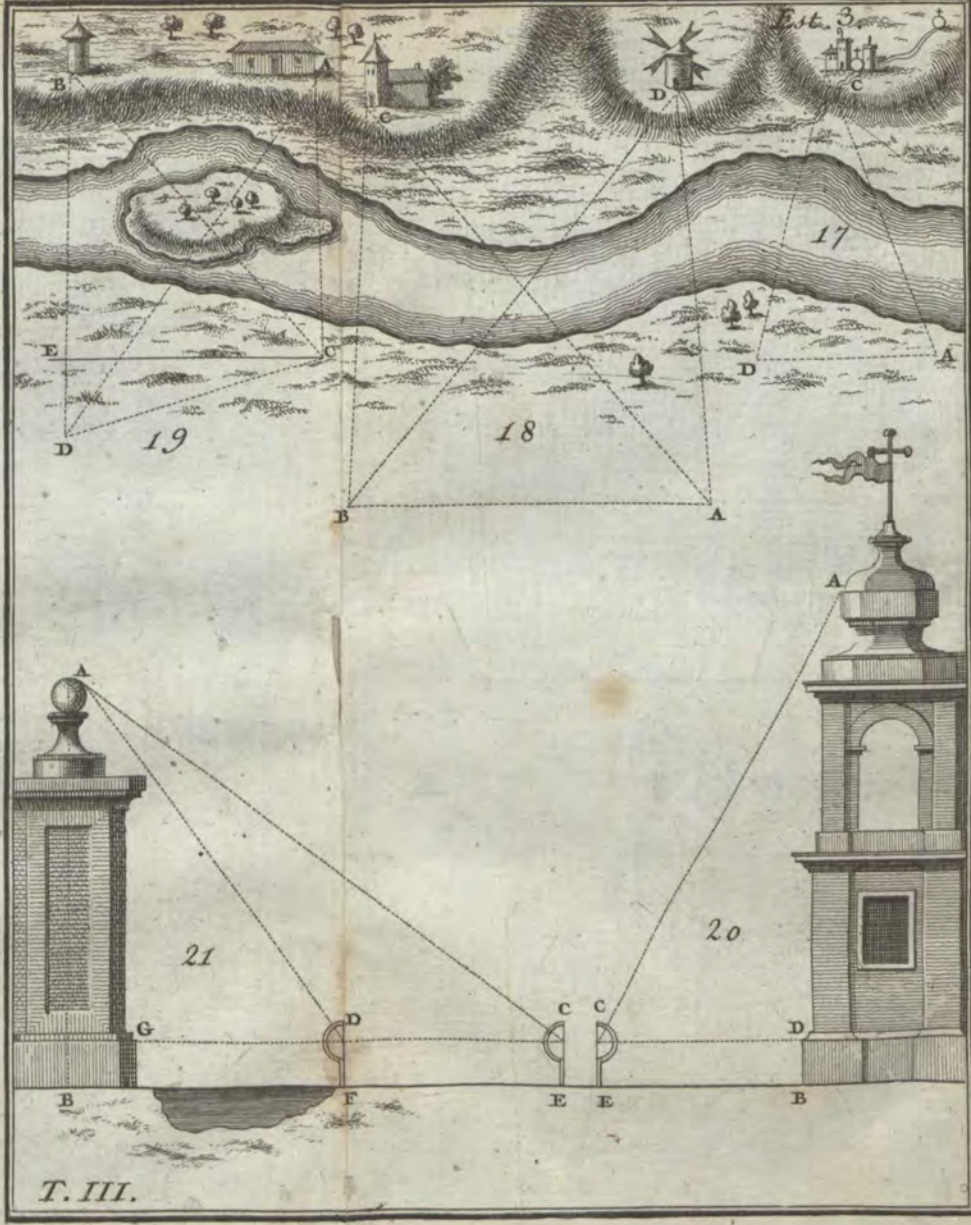
Figura 21.

Tom. II. * Numer. 374.

angulo, que he de 50 gráos, ao angulo ACD, que he de 30, ſerão 20 gráos, valor do angulo CAD; e como no triangulo rectangulo ADG neceſſitamos conhecer o lado DA para acharmos o lado AG, diremos: ſe o ſeno do angulo CAD de 20 gráos me dá o lado CD de 40 braças, o ſeno do angulo ACD de 30 gráos dar-me-ha o lado AD, que achamos ſer de 63 braças, e 1 terço. Para achar pois o lado AG, direi: a ſecante do angulo ADG he á tangente, como o lado DA de 63 braças, e 1 terço ao lado AG, que ſe achará ſer de 48 braças e meia, a que ſe deve juntar a altura do pé do inſtrumento para ter a linha AB.

Modo de fazer as cartas Geograficas por meio da Geometria.

739 Devem-ſe diſtinguir duas caſtas de cartas, humas geraes, e outras particulares: eſtas ultimas são as que ſe fazem com mais cuidado, não omittindo nada do que póde ter lugar na carta, como a grandeza, e figura dos lugares, aldeias, Cidades, matos, rios,



T. III.

rios, pontes, eſtradas, capellas, cemiterios, &c.

Para as geraes baſta tomar a poſição daquelles lugares os mais conſideraveis, e as figuras das eſtradas mais geraes, omittindo quantidade de couſas, que não ſe podem pôr neſta caſta de mappas, porque ordinariamente ſe fazem em pequeno ponto; taes são as cartas dos Reinos, e Provincias grandes: póde-ſe com tudo dizer que as cartas particulares, e geraes ſe fazem do meſmo modo, porque em humas, e outras ſe começa, determinando primeiro a grandeza da carta, e dentro nella as mais principaes poſições, que ſe precisão notar na carta: depois do que ſe entra na averiguação de cada couſa, como moſtraremos depois de ter enſinado o modo de tomar as principaes poſições, que são os pontos principaes do mappa.

Se ſe quizeſſe, por exemplo, fazer a carta dos lugares marcados pelas letras da Figura 22, vê-ſe que o fim propoſto não he outra couſa mais, que pôr ſobre o papel os differentes lugares, Eſtamp. 4. Figura 22.

res, que eſtão na figura, de ſorte que a diſtancia, que ha de huns a outros, tenha na carta a meſma razão que ſobre o terreno, o que propriamente he fazer huma reducção de grande a pequeno; e como eſtas reducções ſe não podem fazer, ſenão por meio de triangulos ſemelhantes, ſegue-ſe que fazendo a carta de hum paiz por meio da Trigonometria, não ſe faz outra couſa mais que achar o valor dos lados, e dos angulos, que ſe formão pela diſtancia dos lugares. Iſto ſuppoſto começarei, eſtabelecendo huma baſe, a maior que me for poſſivel, para que os lugares, que ſe devem pôr, ſejão marcados com mais exacção, e para iſto ſe deve evitar, quanto pudermos, ter angulos muito obtuſos, ou muito agudos. Tendo pois eſcolhido os pontos fixos A, e B, começo, buſcando a diſtancia pelo modo, que já deixamos explicado; e achando-a, venho ao ponto B para tomar a abertura dos angulos formados pela baſe AB, e os differentes lugares, que pertendo marcar. Para iſto meço a abertura do angu-

gulo ABC, do angulo ABD, do angulo ABE, e deixo o ponto F, porque o angulo, que elle formaria com a baſe AB, ſeria muito obtuſo, e daria muito trabalho cortar o raio tirado do ponto B ao ponto F: continúo a tomar a abertura dos angulos ABG, ABH, ABI, ABK, deixo o ponto L, porque o angulo formado pela baſe AB, e o raio BL ſeria muito obtuſo.

Preſentemente o que falta he a poſição dos lugares, que eſtão marcados, e cortar os raios, que ſe acabárão de tirar, para iſto venho ao ponto A para medir a abertura do angulo BAE, que me dará o ponto E, porque no triangulo BAE conheço o lado AB, e o valor dos angulos EAB, e ABE, por meio dos quaes acharei as diſtancias AE, BE; e para ter os outros pontos continúo a cortar os raios tirados na primeira operação, medindo os angulos BAD, BAC, BAG, BAH, BAI, BAK; e como todos os triangulos, formados por eſtes raios, tem commum o lado AB, ſegue-ſe que ſe poderá achar o comprimento, pois em to-

todos os triangulos ſe conhecem dous angulos, e hum lado. Como deixamos dous pontos pela razão, que já diſſemos, devemos moſtrar o modo de achar a ſua poſição, ſem nos ſervirmos da baſe AB. Para achar pois o ponto F, tómo a diſtancia BE, ou BG por baſe, ou qualquer outra, que nos ſirva melhor; mas aqui eſcolho o lado BE, e do ponto B meço o angulo EBF, e do ponto E a abertura do angulo BEF, que me dará o ponto F. O meſmo farei para achar o ponto L, e o ponto M, que ſuppuz não poder tomar na operação precedente, iſto he, eſcolhendo a baſe AC, e do ponto A tómo as aberturas dos angulos CAM, CAL, e do ponto C tómo tambem os angulos ACB, e ACM.

Depois de ter o valor de todos os lados do triangulo, que aqui eſtão, ſe devem proporcionar ſobre o papel, dando a cada linha o valor, que deve ter, o que ſe fará facilmente com hum petipé; e depois de bem proporcionados com exacção, ſe póde continuar com o meſmo methodo a fazer os map-

pas

pas dos lugares, que ſe não poderão deſcubrir na primeira operação, o que he bem facil, pois em toda a parte ſe podem ter baſes, cujo valor ſeja conhecido, por exemplo. Para marcar os objectos para lá dos pontos C, e D, ſe póde tomar por baſe a diſtancia CD, e do outro lado ſe póde tomar a linha IH, e finalmente á eſquerda a diſtancia LK, e á direita CF, ou qualquer outra linha, que ſe eſcolher.

Do que ſe deve attender, quando ſe faz huma carta particular.

740 Quando ſe quer fazer huma carta, de modo que fiquem notadas todas as particularidades, que entrão em huma carta circumſtanciada, os que dirigem a diligencia devem mandar peſſoas entendidas aos lugares para delinearem as ſuas ſituações, figuras, fórma de ruas, fontes, (ſe as ha) montes, caminhos, outeiros, e valles, que ſe podem encontrar nas vizinhanças, e cada lugar ſe reduz, conforme o petipé do mappa; e para as proporcionar ſe cuida em que a Igreja ſeja poſitiva-

men-

mente no ponto, que já eſtá notado na carta geral. Porque eſtes pontos são ordinariamente os campanarios, ou torres, cuida-ſe em ter a planta das Cidades, que ſe reduzem ao petipé do mappa; e quando ſe encontrão boſques, ou prados, ſe marcão exactamente as aldeias, e caſas, que eſtão mais vizinhas, para ter as baſes, que não são outra couſa mais que as diſtancias de huns lugares a outros, dos quaes ſe fórma huma eſpecie de polygono, que cérca o boſque: depois do que he facil relativamente a eſte polygono ter hum numero de pontos, que denotem os limites do boſque, para depois delinear a figura exterior, quando ſe trata de alguma irregularidade pouco conſideravel. Depois diſto ſe entra dentro a examinar os principaes caminhos, os regatos, fontes, caſas, e principaes caſtellos, que podem encontrar-ſe, e todas eſtas couſas ſe devem notar com a mais poſſivel exacção, e para iſto ſe dão eſtes pontos da poſição tomados de alguma eminencia fóra do boſque. Eſtes pontos são ordinariamente os cam-

pa-

E. A.
D
C
M
E
L
F. 21.
F
A
B
G
H
Y
K
T. III.

panarios, caſtellos, ou algumas arvores maiores, que ſe podem bem diſtinguir das mais; e quando ſe conhecem alguns deſtes pontos, ſe podem, ſem muita difficuldade, horientar os differentes lugares, que ſe achão no boſque, com a ajuda das poſições, que são conhecidas.

Applicação da Trigonometria á fortificação.

741 Para marcar huma fortificação no terreno he abſolutamente neceſſario conhecer todas as linhas, e angulos, que compõem o projecto; e como eſte conhecimento deve ſer o mais exacto que he poſſivel, não ſeria conveniente ſervir-mo-nos do compaſſo para achar pelo petipé as linhas, que ſe não conhecem, nem tambem do meio circulo para achar o valor dos angulos, pois ſe podem fazer erros ſenſiveis ſobre o papel, que ſerião de conſequencia ſobre o terreno, e por iſſo he util recorrer á Trigonometria, para determinar por meio das linhas já conhecidas as que ſe não conhecem; e como Eſtamp. 5. Figura 23.

na

na fortificação pelo methodo de Mr. de Wauban ſe conhece a baſe de 162 braças, a perpendicular CF de 27, e a face AD de 45, ſe poderá conhecer o angulo da eſpalda, o angulo flanqueante, o flanco, e a cortina, pois pela conſtrucção he a linha DH=DE do modo, que vamos moſtrar. Antes de tudo devemos achar o valor do angulo FAC, dizendo: o lado AC de 81 braças para o lado FC de 27, como o ſeno total AI á tangente ID, que achada ſe verá que correſponde a hum angulo de 18 gráos, e 26 minutos, que he o valor do angulo FAC, e conſequentemente tambem o angulo HDE, por ſerem AB, e DE parallelas, que cahem ſobre AH.

E como preciſamos conhecer o lado AI do triangulo DAI, diremos: a ſecante do angulo DAI he ao ſeno total, como o lado AD de 45 braças ao lado IA, que ſe achará ſer de 42 braças, e 8 palmos; e diminuido da linha AC de 81 braças, teremos a linha IC de 38 braças, e 2 palmos; e como eſta linha he metade do lado DE, ſerá eſ-

te

te lado DE de 76 braças, e 4 palmos. Como o triangulo HDE he *Iſocele*, e ſe conhece o angulo do vertice, e os dous lados, que o comprehendem, porque a linha DH he a face AD continuada, ſendo DE parallela a AB, pela conſtrucção conheceremos o angulo em H, ou em E, diminuindo o angulo de 180 gráos, e metade do reſto, ſerá o angulo H, ou E; e para ter o flanco HE diremos: ſe o ſeno do angulo DHE deo o lado DE, o ſeno do angulo HDE me dará o flanco, ou o lado HE, que ſe achará ſer de 24 braças, e 6 palmos.

Como os angulos da baſe do triangulo *Iſocele* são cada hum de 80 gráos, e 47 minutos, por ſer o angulo do vertice de 18 gráos, e 26 minutos, ſegue-ſe pelos angulos alternos formados pelas linhas GH, DE, que ſe do angulo HED ſe tira o angulo GED de 18 gráos e 26 minutos, reſtão 62 gráos, e 21 minutos, valor do angulo GEH, cujo ſupplemento para 180 gráos, que he o angulo da eſpalda HEB, deve ſer de 117 gráos, e 39 minutos; e ſe ſe lhe accreſcenta DEH ao angulo GHD, que

tam-

tambem he de 18 gráos, e 26 minutos, teremos o angulo flanqueante GHE, que ſerá de 99 gráos, e 13 minutos.

No triangulo GHE, em que ſe conhecem os angulos, e o lado HE, ſe conhecerá a cortina, dizendo: o ſeno do angulo HGE he ao lado HE, como o ſeno do angulo GEH ao lado GH, que ſe achará ſer de 32 braças, e 8 palmos e meio.

Para conhecer o angulo flanqueado ſe deve advertir que he menor que o angulo da circumferencia do polygono duas vezes o angulo diminuto DAI, que he de 18 gráos, e 26 minutos; e como ſe ſuppõe que he do *Exagono*, cujo angulo de circumferencia he de 120 gráos, tirando delles 36 gráos, e 52 minutos, ficará o angulo flanqueado de 83 gráos, e 8 minutos.

Deſte meſmo modo ſe poderão calcular todas as frentes da fortificação, cujo lado exterior tenha mais, ou menos de 162 braças, porque ſe acharão ſempre as meſmas proporções: aſſim ſe ſe quizerem calcular as linhas, e os angulos de huma obra córna, ou de huma

ma obra coroa, baſtará conhecer o lado exterior, a perpendicular, e a face de hum meio baluarte para conhecer o reſto, e por eſta razão eſte modo de calcular póde igualmente ſervir na fortificação regular, e irregular; porque ou os flancos ſe fação perpendiculares á linha da defenſa, ou á cortina, conforme o caſo, em que ſigamos hum methodo, ou outro, o calculo ſerá igualmente facil, com tanto que ſe conheção algumas grandezas, com as quaes ſe poſsão fazer as operações.

742 De tudo o que pertence ao calculo da fortificação o que ſe encontra hum pouco mais difficultoſo de calcular he o valor da face da meia lua, o que ſe póde tambem ter por hum pequeno problema de fortificação, razão, por que goſtarão de ver a ſolução, pois ainda que pareça couſa pequena, não deixaria de embaraçar os principiantes; e para ſe entender bem a queſtão, de que ſe trata, ſe ſuppõe a meia lua delineada pelo modo ſeguinte.

Tome-ſe na face o ponto E 45 palmos diſtante do angulo da eſpalda, e Figura 24

do

do ponto C, como centro, com o intervallo CE ſe deſcreva hum arco, que encontrando a capital, dará o ponto F, que ſerá a ponta da meia lua, depois ſe tome na face o ponto D 27 palmos diſtante do angulo da eſpalda, e tire-ſe a linha FD; e feito o foço de 18 braças, tomadas ſobre a face continuada no lugar AH, a linha HK determina o comprimento IF da face da meia lua, da qual queremos ſaber o valor.

Como o comprimento IF ſe conheceria facilmente, ſabendo-ſe o valor das linhas DI, DF, vamos moſtrar como ſe póde vir neſte conhecimento, tirando as linhas DH, DK, CF, conhecidas as partes do corpo da Praça, que acabámos de achar. No triangulo rectangulo CLF conhecerei o valor do angulo LCF por meio dos dous lados conhecidos LC, CF, pois hum he metade da cortina, e outro igual á linha CE, dizendo: o lado LC he ao lado CF, como o ſeno total á ſecante, o que dará 65 gráos, valor do angulo LCF, do qual tendo tirado o angulo MCD de 18 gráos, e 26 minutos, reſtarão 46 gráos,

gráos, e 34 minutos para o angulo DCF; e como o lado DC he conhecido de 79 braças e meia, e o lado FC de 81 braças, e 3 palmos, e ſe conhece o angulo, que comprehendem, achar-ſe-ha com a analogia ordinaria o lado DF, que he de 63 braças, e 3 palmos, e o angulo CDF de 68 gráos, e 15 minutos.

He-nos neceſſario conhecer o angulo CDK, como tambem o lado DK, para o que conhecidos no triangulo CDK os dous lados DC, e CK, com o angulo, que elles comprehendem, veremos que CDK he de 17 gráos, e 49 minutos, e o lado DK de 79 braças, e 2 palmos. No triangulo HDK preciſamos conhecer, além do lado DK, o lado HD, e o angulo, que elles comprehendem, para termos a ſolução do problema, para o que temos conhecido no triangulo AHD o lado AD de 39 braças, e 3 palmos, o lado AH de 18: conhecer-ſe-ha o angulo HAD, ſabendo o valor do angulo flanqueado, pois HAD he a differença do angulo flanqueado para dous rectos; e como

ſuppomos ſer a tenalha de hum *Exagono*, ſerá o angulo flanqueado de 83 gráos, e 8 minutos, e o angulo DAH ſerá de 96 gráos, e 52 minutos; e fazendo a regra ordinaria, ſe achará * que o lado HD he de 47 braças, e 8 palmos e meio, e que o angulo ADH he de 21 gráos, e 59 minutos; e tirando a ſomma dos dous angulos CDK, ADH de 180 gráos, o reſto 140 gráos, e 12 minutos he o valor do angulo HDK.

* Numer. 725.

743 No triangulo HDK são conhecidos dous lados, e o angulo por elles comprehendido. Achar-ſe-hão conſequentemente * os outros dous angulos, particularmente o angulo DKI de 14 gráos, e 4 minutos: o angulo FDK ſe acha, tirando do angulo FDC o angulo KDC, e he de 50 gráos, e 26 minutos; e como iſto nos dá o valor do angulo DIK, que he de 115 gráos, e 30 minutos, ſe póde achar o lado DI, dizendo: ſe o ſeno do ſupplemento do angulo DIK me dá o lado DK, o ſeno do angulo DKI dar-me-ha o valor do lado DI, que ſe achará ſer de 21 braças, e 3 palmos, que diminuidos da

* Numer. 729.

li-

linha DF, que he, como já diſſemos, de 63 braças, e 3 palmos, ſe acha a face IF da meia lua de 42 braças.

744 A demigola IN da meia lua ſe acha tambem, pois no triangulo ODF ſe conhecem os dous angulos FOD, e ODF, e por conſequencia ſe conhecerá o angulo OFD, que ſerá de 40 gráos, e 11 minutos; e como eſte angulo he tambem do triangulo INF, de que ſe conhece o angulo NIF, por ſer ſupplemento do angulo DIK, ſegue-ſe que tendo os dous angulos no triangulo IFN, ſe conhecerá o triangulo INF, e conſequentemente ſe poderá dizer: ſe o ſeno do angulo INF de 75 gráos, e 19 minutos me dá o lado IF, quanto dará o ſeno do angulo IFN por valor do lado IN? que ſerá de 28 braças, e algumas pollegadas. Finalmente para marcar a meia lua no terreno preciſamos o comprimento do ponto L meio da cortina ao ponto F, que ſe acha facilmente, dizendo: o ſeno total he á tangente do angulo LCF, como o lado CL ao lado LF, que ſahe de quaſi 73 braças, 9 palmos, e 1 pellegada.

Não fallo do modo de calcular as linhas tanto rectas, como curvas, que formão a contra eſcarpa, porque he huma couſa, que me parece muito facil, e que os principiantes podem fazer deſi meſmo: nem tambem fallo do modo de calcular huma fortificação, que tem os baluartes com orelhões, para lhes deixar o goſto de acharem de ſi meſmo alguma couſa, julgando por melhor em lugar diſto dar-lhes huma idéa do modo de marcar ſobre o terreno huma fortificação.

Modo de marcar as fortificações ſobre o terreno.

745 Depois de feito o calculo das linhas, e angulos, que compõem a fortificação, ſe começa a marcar ſobre o terreno, pondo eſtacas em todos os angulos, que devem formar os polygonos, depois ſe marca a fortificação de cada lado, até que fique tudo concluido. Suppõe-ſe que os pontos A, e B
Figura 25. repreſentão dous ſitios, em que ſe puzerão os piques, e determinão o comprimento AB de hum dos lados do poly-

lygono, que ſerá por exemplo de 162 braças. Eis-aqui o modo, com que ſe deve marcar toda a frente, que correſponde a eſte lado. Tendo marcado na planta o projecto da fortificação com o valor das linhas, e angulos, ſe começará pondo o pé do grafometro no lugar do pique A, e com a baſe AB, e as pinulas moveis farão o angulo EAB de 18 gráos, e 26 minutos; e fazendo levar o pique pelo alinhamento do raio viſual AE, ſe determinará, medido com exacção, hum comprimento como AC de 45 braças, que ſerá a face do primeiro baluarte: depois diſto ſe porá o inſtrumento no extremo C, e ſe fará com a linha CA hum angulo ACD de 117 gráos, e 39 minutos, que ſerá o angulo da eſpalda, e no comprimento CD ſe tomarão 24 braças, e 6 palmos do ponto C para ter o flanco CD. A meſma operação, que fizemos, ſe fará da outra parte no ponto B; e depois de ter traçado, ou ſómente plantado os piques nos pontos F, e E, ſe irá ao ponto E a examinar ſe ſe acha no meſmo alinhamento os dous C, e A, para ave-

averiguar se a face AC se termina exactamente no angulo flanqueante, e o mesmo se fará para segurar-nos se a face BF está bem dirigida: depois se marcará com hum cordel a cortina DE, como tambem as faces, e os flancos do baluarte; e para ver se houve engano na delineação das faces, e flancos, se medirá a cortina, averiguando se concorda com o calculo.

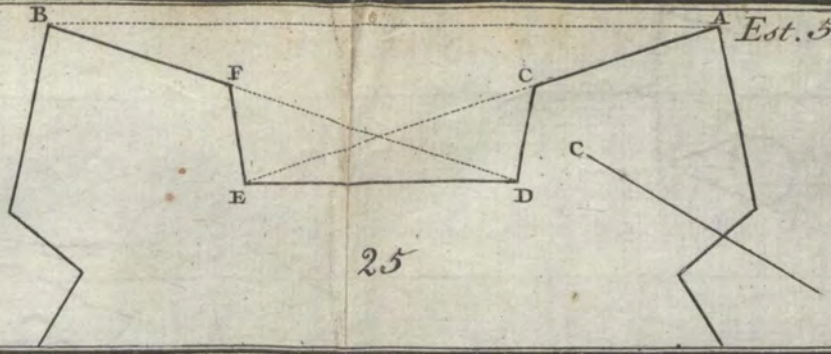
Para dar a conhecer mais a utilidade da Trigonometria no que pertence ás fortificações, accrescentaremos alguns problemas, cuja solução depende dos principios precedentes, e que podem ser de grande uso no ataque das Praças, e na conducção das obras, para conhecer com huma só observação a distancia, em que estamos de certos lugares notaveis, que se querem atacar.

Problemas da Trigonometria applicaveis á fortificação.

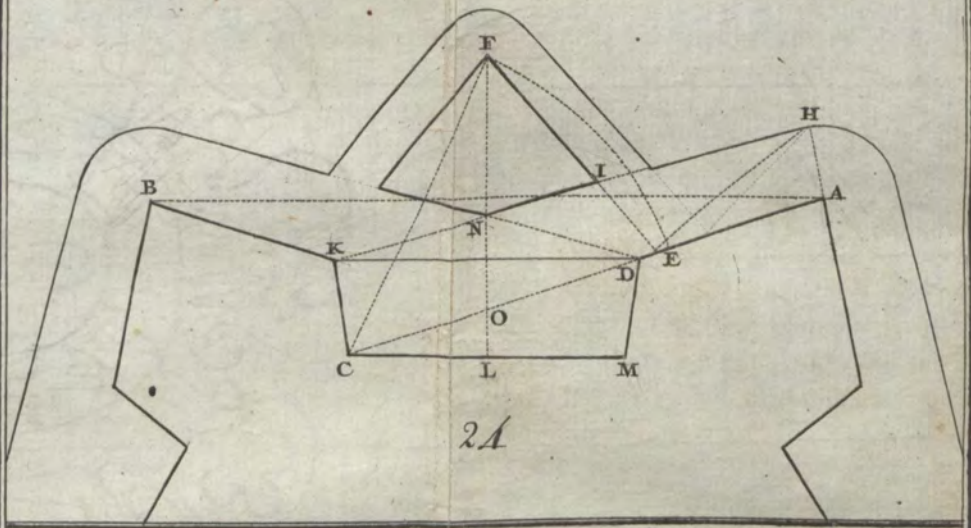
PROBLEMA I.

Estamp. 6. Figura 26. 746 Conhecendo huma linha AB, a que se não póde chegar, e os angulos

Est. 5.



25



24

23

T. III.

los ADC, ADB, e os angulos BCD, e BCA, obſervados dos pontos da eſtação C, e D, conhecer todos os angulos, e linhas deſta figura.

SOLUÇÃO.

Conhecendo-ſe o angulo ACB, e o angulo ADC, conhece-ſe tambem o angulo CAD, tirando os dous primeiros de 180 gráos. Tambem no triangulo BCD ſe conhece o angulo CBD, pois pela hypotheſe os angulos BCD, e BDC são conhecidos. Ainda que não conheço os lados AC, AD, DC, CB, e BD deſtes triangulos, ſei com tudo que eſtes lados são entre ſi como os ſenos dos angulos oppoſtos; e como os angulos são conhecidos, ſerá tambem a razão dos lados. Iſto ſuppoſto, no triangulo CAD teremos eſta proporção *S.* CAD: *S.* ADC :: DC : AC, e no triangulo CBD teremos eſta *S.* BDC: *S.* CBD :: BC : CD: logo multiplicando eſtas proporções termo por termo, teremos *S.* CAD × *S.* BDC: *S.* ADC × *S.* CBD :: BC × DC : AC × DC :: BC : AC, de que ſe ſegue que no tri-

an-

angulo BCA ſe conhece com exacção a razão dos lados AC, e BC, que comprehendem o angulo conhecido ACB. Supponhamos, por exemplo, por hum pouco que os lados são iguaes ao producto dos ſenos dos angulos CAD, BDC, ADC, CBD, e para ter os angulos em A, e B do triangulo ABC, ſe fará eſta proporção: a ſomma dos dous lados AC+BC he para a ſua differença, como a tangente da ſemiſomma dos angulos oppoſtos he para a tangente da ſemidifferença dos meſmos angulos *; e terminados aſſim os angulos em A, e B, ſe calculará de novo o triangulo ABC para ter a verdadeira expreſsão deſtes lados, que ſe achará, fazendo eſta proporção: o ſeno do angulo ACB he para o lado AB, como o ſeno do angulo ABC para o lado AC, e com a meſma analogia ſe calcularão todos os outros lados da figura, o que reſolverá o problema.

* Numer. 725.

REFLEXÃO.

747 Dever-ſe-hia notar que no triangulo ABC ſe não conhecem logo mais

mais que o lado AB, o angulo oppoſto C, e nada mais, o que nos tentaria a imaginar que o conhecimento de hum angulo, e de hum lado oppoſto póde baſtar para conhecer todas as partes do triangulo, mas facilmente ſe conhece a falſidade de ſemelhante inducção: he verdade que ſe conhece ſó hum lado, e o angulo oppoſto, mas as obſervações dos angulos em D ſupprem o que nos falta, dando a razão dos lados AC, e CB, com a qual ſe calcularão os angulos em A, e em B.

748 Se chamarmos o ſeno do angulo ADC a, o de CAD b, o do angulo CBD c, e finalmente o do angulo BDC d, teremos em lugar da proporção $S.\,CAD \times S.\,BDC : S.\,ADC \times S.\,CBD :: BC : AC$ eſta $bd : ac :: BC : AC$: logo dividindo os dous primeiros termos por c, teremos $\frac{bd}{c} : a :: BC : AC$.

Se quizermos fazer a operação com os logarithmos, os tomariamos do modo ſeguinte. Buſquem-ſe os ſenos dos angulos a, b, c, d, e tomem-ſe como numeros naturaes, buſque-ſe depois nas

nas taboas dos logarithmos dos numeros naturaes os logarithmos deſtes ſenos conſiderados como taes, ſommem-ſe os logarithmos dos ſenos b, d, e da ſomma ſe tire o logarithmo de c, e o que ficar ſerá o logarithmo de fracção $\frac{bd}{c}$, e ſe buſcará na taboa dos logarithmos o numero, que lhe correſponde: depois ſe tome a ſomma deſte numero, e do ſeno a, e da differença dos meſmos numeros, e ſe buſquem os logarithmos deſtas novas quantidades, e na taboa dos ſenos o logarithmo da tangente da metade da ſomma dos angulos oppoſtos aos lados AC, e BC, ſommando os logarithmos deſta tangente, e da differença dos numeros a, e $\frac{bd}{c}$, teremos, depois de ter tirado o logarithmo da ſomma dos meſmos numeros, o da tangente da ſemidifferença dos angulos, que ſe buſca, e eſtá reſolvido o problema.

PROBLEMA II.

Figura 27. 749 Conhecida a linha AC, e ſuas partes AB, e BC com os angulos AFB e'

e BFC, obſervados em hum ponto F, achar as diſtancias do ponto F aos pontos A, B, e C.

Eſte problema ſe póde reſolver geometricamente, e pelo calculo trigonometrico, diremos primeiro a ſolução, que depende do calculo, e depois diremos a geometrica.

SOLUÇÃO.

Imaginem-ſe as linhas AF, BF, CF tiradas dos extremos ABC das partes da linha AC ao ponto da obſervação F. Imagine-ſe tambem que por cada hum dos dous triangulos ABF, e BCF paſsão os circulos FBC, e ABF; e como os angulos em F eſtão na circumferencia, ſerão metade dos angulos BEC, BDA, que eſtão ſobre as meſmas baſes BC, e AB, e tem os vertices nos centros E, e D. Iſto ſuppoſto, por ſerem conhecidos os angulos BFC, e AFB, ſerão tambem conhecidos os angulos do centro, que são duplos dos angulos obſervados; e nos triangulos *Iſoceles* BEC, e BDA ſe conhecerão os trez angulos, e hum lado, e aſſim conhe-

nhecer-ſe-hão os lados, ou raios BE, e BD, pois ſe conhecem os angulos CBE, e BAD. Conhecer-ſe-ha tambem o angulo DBE, que junto com os dous ABD, e EBC, fazem dous rectos. Além diſſo são conhecidos os lados BE, e BD: logo conhecer-ſe-hão todas as partes do triangulo DBE, do qual temos já os lados BD, e BE, e o angulo por elles comprehendido: logo os angulos em D, e E ſerão conhecidos; e porque os circulos deſcriptos á roda dos triangulos CBF, e ABF ſe cortão nos dous pontos B, e F, o centro E ſerá igualmente diſtante dos pontos B, e F, e o ponto D da meſma linha DE ſerá tambem igualmente diſtante dos meſmos pontos B, e F, e aſſim DE ſerá perpendicular a BF, e o triangulo BGE rectangulo, no qual já he conhecido o angulo em E, como acabámos de ver, e ſe conhecerá tambem o angulo GBE; e accreſcentando o ſeu valor ao angulo CBE do triangulo *Iſoceles* BEC, ficará conhecido o angulo total CBF, e ficarão conhecidos no triangulo *Iſoceles* CBF os dous angulos, e

hum

hum lado: logo podem-ſe conhecer todas as outras partes.

SOLUÇÃO GEOMETRICA.

750 Como tenho conhecidas as partes da linha AC, e tambem os angulos AFB, e BFC, tómo huma linha AB, que contenha tantas partes iguaes, quantas braças ſe ſuppõe ter no terreno a linha AB. Tómo tambem ſobre AB continuada huma parte BC, que contenha tantas partes iguaes, quantas braças ſe ſuppõe ter no terreno a linha BC. Tómo tambem o duplo do angulo AFB, e abato de 180 gráos, e o reſto divido em duas partes iguaes. Nos pontos A, e B faço os angulos BAD, ABD cada hum igual á ſemidifferença, o que me determina o ponto D: dóbro tambem o angulo BFC; e tirando eſte duplo de 180 gráos, faço nos pontos B, e C os angulos CBE, BCE, cada hum igual á ſemidifferença do duplo do angulo obſervado, o que me dará o ponto E: tiro a linha ED, e do ponto B tiro ſobre a linha ED a perpendicular BGF, e faço FG = GB,

GB, e o ponto F he o que me dá tudo o que preciſo, pois o numero das braças das diſtancias do ponto F aos pontos A, B, C ſerá o das partes iguaes, que contém as linhas FA, FB, FC.

751 Eſte problema ſe podia tambem reſolver geometricamente de outro modo, deſcrevendo ſobre as linhas AB, e BC ſegmentos de circulos capazes dos angulos dados AFB, e BFC, e o ponto, em que eſtes circulos ſe cortaſſem fóra da linha AC ſeria o que determinaria as diſtancias pedidas.

REFLEXÃO.

752 Eſte problema ſe poderia tambem reſolver pelos methodos, que acabámos de propôr, ainda no caſo, em que as partes AB, e BC não foſſem linhas rectas, com tanto que ſe conheça o angulo ABC, que formão entre ſi, ou os trez lados do triangulo BAC; e para ſe convencerem diſto baſta tornar a ver as duas ſoluções precedentes, applicando-a ás figuras ſeguintes, com a reflexão que na Fig. 28 o angulo DBE he igual á differença do angulo ABC

Figura 28. 29. e 30.

aos

aos angulos ABD, e CBE, e na Figura 29 ſe acha o angulo DBE, tomando a differença dos trez angulos ACB, ABD, e DBE a quatro rectos. Finalmente ſe notará que ſe o ponto F da obſervação eſtá dentro do triangulo ABC, ſe hum dos angulos obſervados for obtuſo, ſe fará da outra parte da linha hum triangulo *Iſocele* ADB, do qual o angulo D ſeja duplo do ſupplemento do angulo AFB, e neſte caſo o angulo DBE he igual á ſomma dos angulos DBA, e ABC, menos o angulo EBC, o que ſe conhecerá, pois ſe conhece pela conſtrucção, ou pela hypotheſe os angulos, que o determinão. Figura 30

COROLLARIO I.

753 Segue-ſe daqui que conhecida a poſição de trez pontos dentro de huma Cidade ſitiada, ou pelas plantas, ou por ſe terem determinado geometricamente, ſe póde com huma ſó operação determinar a diſtancia do lugar, em que eſtamos aos meſmos objectos, que queremos atacar; e conſequentemente poderemos conduzir as galarias

do

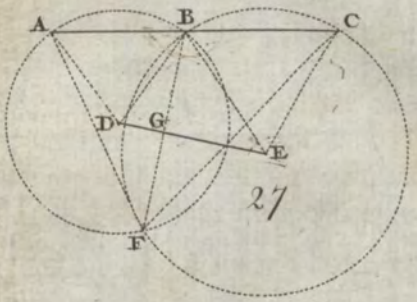
do modo que nos parecer mais util. Neſtes caſos, em que nos he preciſo huma grande exacção, podemos preferir as ſoluções numericas ás geometricas, porque o calculo dá ſempre as diſtancias muito mais exactas.

COROLLARIO II.

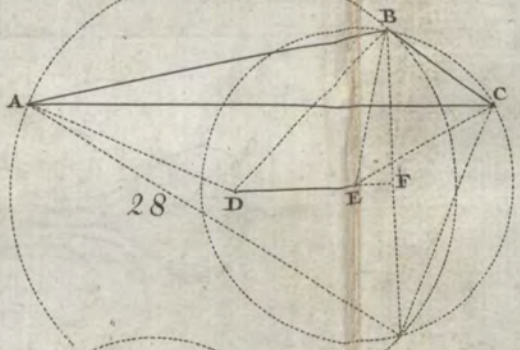
754 Segue-ſe tambem daqui que por meio deſtes objectos, que ſe ſuppõem viſiveis, ſe podem delinear as obras exteriores de huma Praça com duas obſervações, ſem ſermos obrigados a medir as baſes em hum Paiz expoſto ao fogo do inimigo. Supponhamos, por exemplo, que queiramos ſaber a poſição dos baluartes F, G, H de huma Praça ſitiada por duas obſervações feitas dos pontos D, e E; tomaremos pela Trigonometria a poſição dos trez objectos A, B, e C, o que ſe póde fazer ſem riſco, medindo huma baſe no terreno cuberto da artilheria; e depois com eſtes trez objectos dous Engenheiros, hum poſto em E, outro em D, obſervarão os angulos formados pelos raios viſuaes, dirigidos dos pontos E, e D aos pontos

Figura 31.

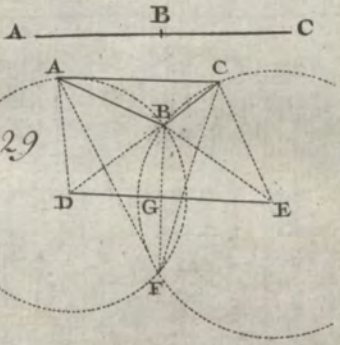
26



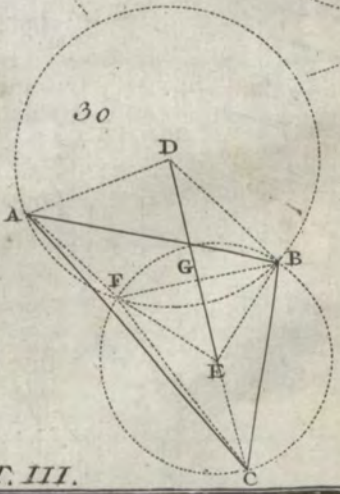
27

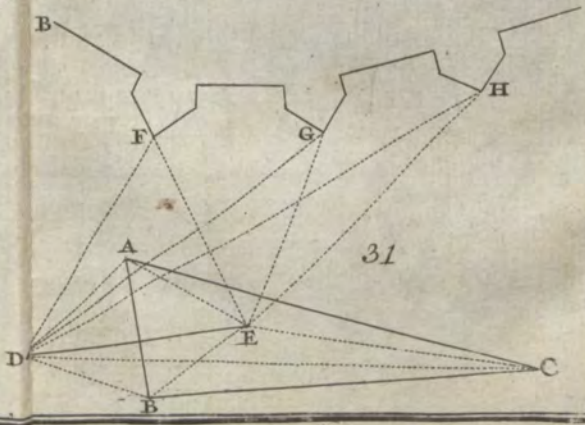


28



29





tos A, B, C, e aos angulos flanqueados dos baluartes F, G, H, a saber: o que está em E os angulos CEH, CEG, CEF; o que está em D os angulos BDH, BDG, BDF, e deste modo teremos logo a posição respectiva de hum baluarte a respeito do outro, e as suas distancias aos pontos da observação; porque he evidente que os pontos D, e E estão determinados a respeito dos pontos A, B, C, o que basta para determinar tudo.

NOTA.

O problema proposto * poderia tambem ter o mesmo uso, e se podia applicar a muitas outras operações, que seria inutil explicar aqui: a occasião offerece muitos expedientes a quem tem huma boa theorica, em que cada hum póde pôr em prática as proposições, que acabámos de demonstrar.

* Numer. 746.

Theorica, e prática do Nivelamento.

I.

755 Dous pontos se dizem estar de nivel, quando estão igualmente distantes do centro da terra. Figura 32.

756 Huma linha, que tem todos os ſeus pontos igualmente diſtantes do centro da terra, ſe chama linha do verdadeiro nivel, a qual não póde ſer ſenão curva.

757 Póde-ſe logo dizer que as ſuperficies das lagôas, tanques, e de todas as aguas, que não são agitadas, contém infinitos pontos de nivel, pois todos são igualmente diſtantes do centro da terra.

II.

758 Linha de nivel apparente he huma linha como BD tangente ao circulo da terra, e por conſequencia perpendicular ao ſemidiametro AB: a eſta linha ſe chama de nivel apparente, porque as ſuas extremidades B, e D não eſtão igualmente diſtantes do centro da terra; e aſſim toda a linha parallela ao horizonte, e que ſendo continuada por huma das ſuas extremidades ſe aparta da ſuperficie da terra, como huma tangente da ſuperficie do circulo, he huma linha de nivel apparente. Figura 32.

Como o ponto B eſtá de nivel com o ponto C, porque diſtão igualmente

do

do centro da terra, o ponto D não está de nivel com o ponto B por toda a linha CD, e assim CD he a differença do nivel apparente ao verdadeiro.

759 Quando huma linha de nivel apparente não tem mais que 100, ou 150 braças, he tão pequena a differença da distancia das suas extremidades ao centro da terra, que se podem imaginar, como se estiveſſem perfeitamente de nivel; mas se excede este comprimento, he preciso attender á differença do nivel apparente sobre o verdadeiro, como mostraremos em seu lugar.

III.

Quando se querem nivelar dous lugares para saber quanto hum he mais elevado que outro, estes dous lugares se chamão termos; e o lugar, de que se começa o nivelamento, se chama primeiro termo; e o em que se vai terminar a linha do nivel apparente, se chama segundo termo.

CAPITULO I.

Do modo de uſar do nivel d'agua.

Figura 33. 760 A Principal peça do nivel d'agua he hum canudo AB de 8, ou 9 palmos de comprido encurvado nas ſuas extremidades C, e D, o qual póde ter huma pollegada de diametro: nos extremos eſtão duas garrafas FC, GB, que são o principal do nivel: eſtas garrafas he muito conveniente que ſejão de vidro branco, claro, e tranſparente, feitas para iſſo de propoſito; porque os dous circulos F, e G, que tem quaſi trez pollegadas de diametro, são propriamente os fundos das garrafas, no meio das quaes tem hum buraco circular de quaſi huma pollegada. Eſtas garrafas, que tem 5 pollegadas de alto, tem hum pequeno gargalo, mais delgado que o canudo, porque ſe devem betumar nos extremos C, e D. No meio do canudo ha hum encaixe com hum joelho, que correſponde a hum pé MN de 6 palmos, de ſorte que poſto o nivel ſe poſſa fazer voltar para to-

toda a parte, como ſobre hum eixo, ſem mover o pé.

Para ſe ſervir deſte inſtrumento ſe deita agua em huma das garrafas, que logo ſe communica á outra pelo canudo, que he aberto nas ſuas extremidades; e quando as garrafas eſtão cheias quaſi duas terças partes, faz duas ſuperficies H, I, que eſtão perfeitamente de nivel. Iſto ſuppoſto, ſe ſe quer ſaber quanto o termo Q eſtá mais elevado que o termo P, quem faz a operação manda hum Ajudante para o ponto Q, em que põe huma vara de huma, ou duas braças, o mais a prumo que he poſſivel, a qual deve ſuſter com a mão eſquerda, e ter na direita hum papelão branco do tamanho da copa de hum chapeo, no meio do qual ſe faz hum pequeno ſinal preto de huma pollegada de diametro; e ſuppondo eſte Ajudante inſtruido dos ſinaes para ſe mover á direita, ou para a eſquerda, como tambem para levantar, ou abaixar o papelão, o que faz a operação olha horizontalmente pelas ſuperficies d'agua para o ſitio, que lhe correſponde na vara

o ra-

o raio da viſta KL, fazendo ſinal ao Ajudante para mover o papelão pela vara, para que a parte ſuperior do ſinal negro ſe encontre no ponto L, e lhe fará ſinal, para que enſaça neſte ponto fixo, e então ſe mede exactamente a altura QL, que ſupponho 4 palmos, e 1 pollegada; e neſte tempo outro Ajudante, que ſempre acompanha o que faz a operação, mede a altura KP, que ſerá, por exemplo, de 6 palmos, e 6 pollegadas; e depois de ter aſſentado as alturas, que ſe achárão, ſe examina a differença da linha LQ, e KP, diminuindo huma da outra, e ſe acha 2 palmos, e 5 pollegadas, que he a altura, que tem de mais o ſegundo termo a reſpeito do primeiro, de que ſe vê que todo o fim do nivelamento he o conhecer quanto hum lugar he mais elevado que o outro.

761 Como as niveladas, que ſe fazem com eſte inſtrumento, não excedem mais de 100, ou 120 braças, não fazemos caſo do nivel apparente em operações miudas, como neſta, pois ſe póde tomar pelo verdadeiro.

Por

Por cauſa do pequeno alcance da nivelada ſe fazem muitas de diſtancia em diſtancia, quando os objectos, que ſe querem nivelar, são muito mais diſtantes do que aqui ſuppomos: com tudo quando eſta diſtancia he quaſi dupla da nivelada, ſe póde de hum ſó lugar achar a differença das alturas deſtes dous lugares, ſe ſe puderem ver ambos os extremos de hum meſmo lugar quaſi no meio da ſua diſtancia.

Por exemplo. Suppondo que a diſtancia de A para B ſeja de 220 braças, Figura 34. e ſe queira ſaber quanto o termo A he mais baixo que B, ponha-ſe o nivel em C, que ſerá quaſi o meio da diſtancia AB, depois ſe olhe de D para E para ver o final negro, que eſtá poſto no papelão no ponto G, que ſupponho mais elevado 3 palmos, e 4 pollegadas. Iſto ſuppoſto o que faz a operação vem de D para E para olhar por EF, porque deve eſtar em A outro Ajudante com a vara, e papelão; e como póde ſucceder que a linha AF ſeja mais elevada que o lugar A mais de 9 palmos, neſte caſo ſe póde ter outra vara maior,

e no

e no fim della o papelão, como o de que acabámos de fallar, e o Ajudante fará mover eſta ſegunda, encoſtada pela primeira, fazendo-a ſubir, ou deſcer, até que o final preto ſe encontre no raio viſual EF, e depois ſe mede exactamente a altura FA; e ſupponhamos que medindo-a com a poſſivel exacção ſe acha a altura AF de 14 palmos, e 2 pollegadas, diminuir-ſe-ha deſta altura a quantidade 3 palmos, e 4 pollegadas, que he a elevação do ponto G, e a differença 10 palmos, e 6 pollegadas he quanto o ponto A he mais baixo que B.

Eſte modo de nivelar he o melhor de todos, porque he o mais livre de erro, ou ſeja por cauſa do nivel apparente, ou por cauſa das refracções, porque os pontos F, e G ſerão tanto mais perfeitamente de nivel, quanto o ponto C for mais no meio dos dous termos, porque eſtão igualmente diſtantes do centro da terra: além diſto eſta prática evita mais eſtações, do que ſe ſe fizeſſem com muitas niveladas.

CA-

CAPITULO II.

Do modo de fazer o nivelamento compoſto.

762 QUando os dous termos, que ſe querem nivelar, são muito mais diſtantes entre ſi do que ſe ſuppoz na operação precedente, he preciſo fazer muitas eſtações, e neſte caſo ſe diz que o nivelamento he compoſto, porque com effeito he compoſto de muitas niveladas, que ſe procurão diminuir, como vamos ver na ſeguinte operação.

Para nivelar dous objectos A, e B apartados hum do outro 680 braças, ſe divida eſte numero por 200, ou por 220 para ver quantas eſtações ſerá neceſſario fazer, porque na operação precedente ſe nivelou de huma eſtação a diſtancia de 220 braças; e como 680 dividido por 220 dá no quociente 3, vejo que de trez eſtações ſe podem nivelar os dous termos A, e B. Para iſto começo, buſcando na diſtancia AB trez lugares, que ſejão os mais commodos para fazer as eſtações: eſcolho o ponto

C

C quaſi no meio de AB, em que mando pôr hum pique, e na diſtancia de 100, ou 110 braças do ponto A ponho outro em D, e na meſma diſtancia do ponto B outro em E, os quaes piques devem ficar, o mais que he poſſivel, no meſmo alinhamento dos dous termos A, e B; e determinadas as trez eſtações C, D, e E, ſe mandão dous Ajudantes ao primeiro termo A, dos quaes hum leva huma vara de huma, ou duas braças, e o ſegundo ſe encarrega de medir, e aſſentar em hum caderno as alturas, e o outro ſe manda pôr quaſi no meio da diſtancia DC, o qual não deve mudar de lugar, ſem acabar as operações da primeira, e ſegunda eſtação; porque a vara, que tem na mão, deve ſervir de termo commum ás duas primeiras eſtações.

Tendo depois mandado o nivel para o ponto D, ſe olha de T para S, para que o raio viſual TM vá encontrar o extremo ſuperior do final negro, que ſerá no ponto M, e o ſegundo Ajudante mede a altura MA, que ſupponho de 12 palmos, e 2 pollegadas, as

quaes

quaes ſe eſcrevem no caderno: depois ſe olha de S para T até o raio viſual ſe terminar no final negro no ponto K; e como não he preciſo conhecer a altura KF, que ſerve mais de embaraço, que de utilidade, o Ajudante marca com hum lapis na vara hum final no ponto, em que ſe termina o raio viſual SK: vir-ſe-ha á ſegunda eſtação C, e ſe manda hum Ajudante para G, pouco mais, ou menos no meio da diſtancia CE, o qual não deve mudar de lugar ſem ſe acabarem as operações da ſegunda, e terceira eſtação. Preſentemente he neceſſario dar huma nivelada de Q para R para deſcubrir o ponto L do final preto; e tendo-ſe encontrado, ſe medirá a altura KL, que he a diſtancia do final do lapis ao ponto L, e o que tem o caderno do aſſento no lugar A paſſa á ſegunda eſtação para aſſentar a altura KL, que ſerá, por exemplo, de 5 palmos, e 2 pollegadas. Depois diſto ſe deve olhar de R para Q, para que o que eſtá em G poſſa marcar na vara o ponto H, ſem ſe embaraçar com a ſua elevação, que he inutil

util conhecer, como já diſſemos: finalmente ſe mande pôr o nivel na terceira eſtação E para dar huma nivelada de P para O, que determinará o ponto I: meça-ſe a linha HI, que ſe ſuppõe de 6 palmos, e 3 pollegadas, que ſe eſcreverão no caderno, e depois diſto ſe dá a ultima nivelada ON, e o Ajudante, que eſtá em B, medirá a altura BN, que ſupponho de 2 palmos, e 2 pollegadas, e ſe eſcrevem á parte, porque eſta altura não tem nada com o que eſtá marcado no caderno.

Acabado o nivelamento ſe ſommarão as alturas, que eſtão aſſentadas no caderno, iſto he, 12 palmos, e 2 pollegadas, 5 palmos, e 2 pollegadas, 6 palmos, e 3 pollegadas, que fazem 23 palmos, e 7 pollegadas, da qual ſe deve abater BN de 2 palmos, e 2 pollegadas, e a differença ſerá 20 palmos, e 5 pollegadas, que he a elevação, que tem demais o lugar de B para o lugar A.

CA-

CAPITULO III.

Do modo de nivelar dous termos, entre os quaes ha eminencias, e covas.

763 QUando ſe querem nivelar dous objectos muito diſtantes hum do outro raras vezes ſuccede que no caminho ſe não encontrem eminencias, e covas, que obrigue a nivelar humas vezes ſubindo, outras deſcendo, e neſte caſo ſe devem obſervar certas couſas, de que não temos ainda fallado, que he eſcrever no caderno em huma columna todas as alturas, que ſe acharem, quando ſe ſobe com outra as que ſe acharem deſcendo; e para as diſtinguir depois chamaremos a primeira columna áquella, em que ſe hão de eſcrever as alturas, que ſe acharem ſubindo, e ſegunda columna áquella, em que ſe hão de eſcrever todas as differenças, quando ſe deſce, como vamos moſtrar na operação ſeguinte. Figura 36.

Para nivelar os dous lugares A, e B ſe começará a operação, pondo o nivel no ponto D, apartado 100 braças dos

dos lugares A, e 3, para onde ſe mandão os Ajudantes com as varas: depois ſe devem dar as niveladas DC, e DE, e aſſentar a altura AC, v. gr. de 14 palmos e meio, na primeira columna, e marcar hum traço de lapis no lugar E. Daqui ſe deve mandar levar o nivel para o ponto 4, que não he o meio da linha FH, porque a rampa de 3 para 5 não o permitte, mais iſto não embaraça que as niveladas GF, GH ſejão juſtas, por ſer hum pequeno eſpaço; e determinados os pontos F, e H, he preciſo medir a altura FE, que ſerá, por exemplo, de 14 palmos, e 2 pollegadas, que ſe deve eſcrever na primeira columna, não ſe eſquecendo pôr hum traço de lapis no ponto H da vara 5. Daqui paſſa á eſtação 6, e ſe dão as niveladas KI, KL, e ſe marcará do modo ordinario hum traço de lapis no ponto L, e ſe eſcreverá na primeira columna a altura IH, que ſupponho de 10 palmos e meio. Daqui ſe paſſa ao lugar 8, do qual ſupponho que ſe não póde dar mais que a nivelada MN, por ſer grande a rampa, para poder dar outra de outro la-

lado, e medir-ſe-ha á altura LM do ponto L, que ſe marcou na vara, até o ponto M do raio viſual, que ſe acha ſer de 12 palmos, e 2 pollegadas, e ſe eſcreverá na ſegunda columna, porque he a altura, que ſe achou, indo para baixo; mas como a altura NO do nivel moſtra quanto o ponto O he mais baixo que o ponto M, he preciſo medir eſta altura, que ſupponho de 6 palmos, e $\frac{1}{2}$, para ſe eſcrever tambem na ſegunda columna. Depois ſe mandará pôr outro pique no lugar O, e deſcer o nivel ao ponto 9, que ſe deve buſcar, de ſorte que o raio viſual PO ſe vá terminar ao pé do pique, depois do que ſe dará a nivelada PQ; e o Ajudante, que tem a vara, terá cuidado de marcar com hum traço de lapis o ponto Q. Daqui ſe irá á eſtação 11 para dahi dar as niveladas RS, e ST para ter a altura RQ, que ſerá, por exemplo, de 4 palmos e meio, que ſe deve eſcrever na primeira columna, porque he a altura, que vai ſubindo. Depois ſe irá ao ponto 13 para dar as niveladas XY, XV, e ſe

eſ-

eſcreverá na primeira columna a altura VT, que ſe ſuppõe de 8 palmos, e 1 pollegada; e como ſuccede que o raio XY ſe vá terminar a hum ponto Y da altura, não haverá que marcar com lapis eſte lugar na vara, deixar-ſe-ha ſómente hum Ajudante para aſſiſtir á operação 15, a qual determinará os pontos Z, e B com as niveladas AZ, e AB, e ſe medirá a altura ZY, que ſupponho de 11 palmos, que ſe devem eſcrever na primeira columna. Daqui ſe paſſa á eſtação 17 para dar as niveladas DC, DE, e marcar com hum traço de lapis o ponto E; e como a altura BC, que ſe ſuppõe de 9 palmos, e 6 pollegadas, ſe achou deſcendo, deve-ſe por conſequencia eſcrever na ſegunda columna: em fim ſe levará o nivel á ultima eſtação B, para determinar pelo raio viſual GF a altura EF, que ſerá, por exemplo, de 12 palmos, e 5 pollegadas, que ſe deve eſcrever na ſegunda columna, como tambem a altura do nivel, que ordinariamente he de 6 palmos e meio.

Sommando agora os numeros da primei-

meira columna, ſe acharão 62 palmos, e 7 pollegadas; e fazendo o meſmo na ſegunda, teremos 47 palmos, e 5 pollegadas; e ſe a ſomma menor ſe diminue da maior, iſto he, 47 palmos, e 5 pollegadas, de 62 palmos, e 7 pollegadas, a differença ſerá 15 palmos, e 2 pollegadas, o que moſtra que o termo A he mais baixo que o termo B 15 palmos, e 2 pollegadas.

He bom notar, que quando temos que fazer hum nivelamento ſubindo, e ſe conhece que as niveladas hão de ſer mui curtas, e conſequentemente amiudadas, he melhor ſubir a ſima da altura, e fazer o nivelamento deſcendo, obſervando pôr em huma columna as alturas, que ſe acharem, indo para hum termo, e na outra columna as que ſe acharem, indo para o outro.

Por exemplo. Se ſe quizer conhecer a differença das alturas dos dous termos A, e B, e ſe adverte que ſerá neceſſario muito tempo, e muitas operações para nivelar de A para B com muitas niveladas, ſe levará o nivel para o lugar 6, que ſupponho ſer o vertice

da altura, e ſe nivelará de 6 para A, obſervando eſcrever na primeira columna as alturas, que ſe acharem. Depois diſto viremos ao lugar 6 para nivelar de 6 para 10, e as alturas, que ſe acharem, ſe eſcreverão na ſegunda columna. Finalmente viremos ao cume 15 da ſegunda eminencia para nivelar de 15 para 10, pondo todas as alturas, que ſe acharem, na primeira columna: depois do que ſe nivelará de 15 para B, eſcrevendo as alturas deſta ultima operação na ſegunda columna, e o reſto ſe fará como na precedente.

Com eſte modo de nivelar ſe póde fazer muita obra em pouco tempo, porque em quanto huma peſſoa com intelligencia faz o nivelamento de 6 para A, outra póde nivelar de 6 para 10, e da meſma ſorte de 15 para 10, e de 15 para B.

Pri-

Primeira columna.			*Segunda columna.*		
Palm.	*Polleg.*	*Lin.*	*Palm.*	*Polleg.*	*Lin.*
14”—”	4”—”	0”	12”—”	2”—”	0”
14”—”	2”—”	0”	6”—”	4”—”	0”
10”—”	4”—”	0”	9”—”	6”—”	0”
4”—”	4”—”	0”	12”—”	5”—”	0”
8”—”	1”—”	0”	6”—”	4”—”	0”
11”—”	0”—”	0”	47”—”	5”—”	0”
62”—”	7”—”	0”			

Palm.	*Polleg.*	*Linb.*
62”—”	7”—”	0”
47”—”	5”—”	0”
Differença. 15”—”	2”—”	0”

CAPITULO IV.

Do modo de conhecer quanto o nivel apparente he elevado ao verdadeiro por huma linha do comprimento que ſe quizer.

764 NÃo ſe attendeo á differença do nivel apparente ao verdadeiro nos nivelamentos, que acabámos de enſinar, porque as niveladas erão mui pequenas, e além diſſo o modo,

do, com que ſe fizerão as operações, não dava lugar a eſta differença ; mas como o nivel d'agua não póde ſervir ſenão para os pequenos nivelamentos, que pedem huma grande exacção, para não commetter erro, quando o nivelamento he muito compoſto, ſe inventou outra caſta de nivel, com o qual, por meio de hum oculo, ſe podem dar niveladas muito grandes, e he o uſo do nivel, que vamos enſinar, depois de termos enſinado neſte capitulo o modo de calcular a altura do nivel apparente ſobre o verdadeiro, cujo conhecimento he abſolutamente neceſſario, quando ſe fazem grandes nivelamentos.

765 Vimos na Geometria que o
Figura 32. quadrado da tangente BD era igual ao rectangulo feito da ſecante GD, e da parte CD: aſſim dividindo o quadrado da linha BD pelo valor da linha GD, ſe achará a linha CD; mas como a linha CG, que he o diametro da terra, ſe achou de 5884735 braças, não differe da linha GD ſenão de huma quantidade infinitamente pequena: do

que

que ſe ſegue que a linha GC ſe póde tomar pela linha GD, e que dividindo o quadrado da linha BD pelo diametro da terra CG, iſto he, por 5884734, teremos o valor da linha CD, que he a differença do nivel apparente ao verdadeiro. Ora ſuppondo que a linha do nivel apparente BD he de 720 braças, ſe devem reduzir a linhas, e teremos 691200 linhas, que ſe devem quadrar para ter 477754440000, que he o quadrado da linha BD: depois reduzindo o diametro da terra, que he 5884734 braças, a linhas, ſerá 5649345792 linhas; e dividindo o quadrado da linha BD pelo numero precedente, teremos 85 linhas, que fazem 7 pollegadas, e huma linha por differença CD do nivel apparente ao verdadeiro.

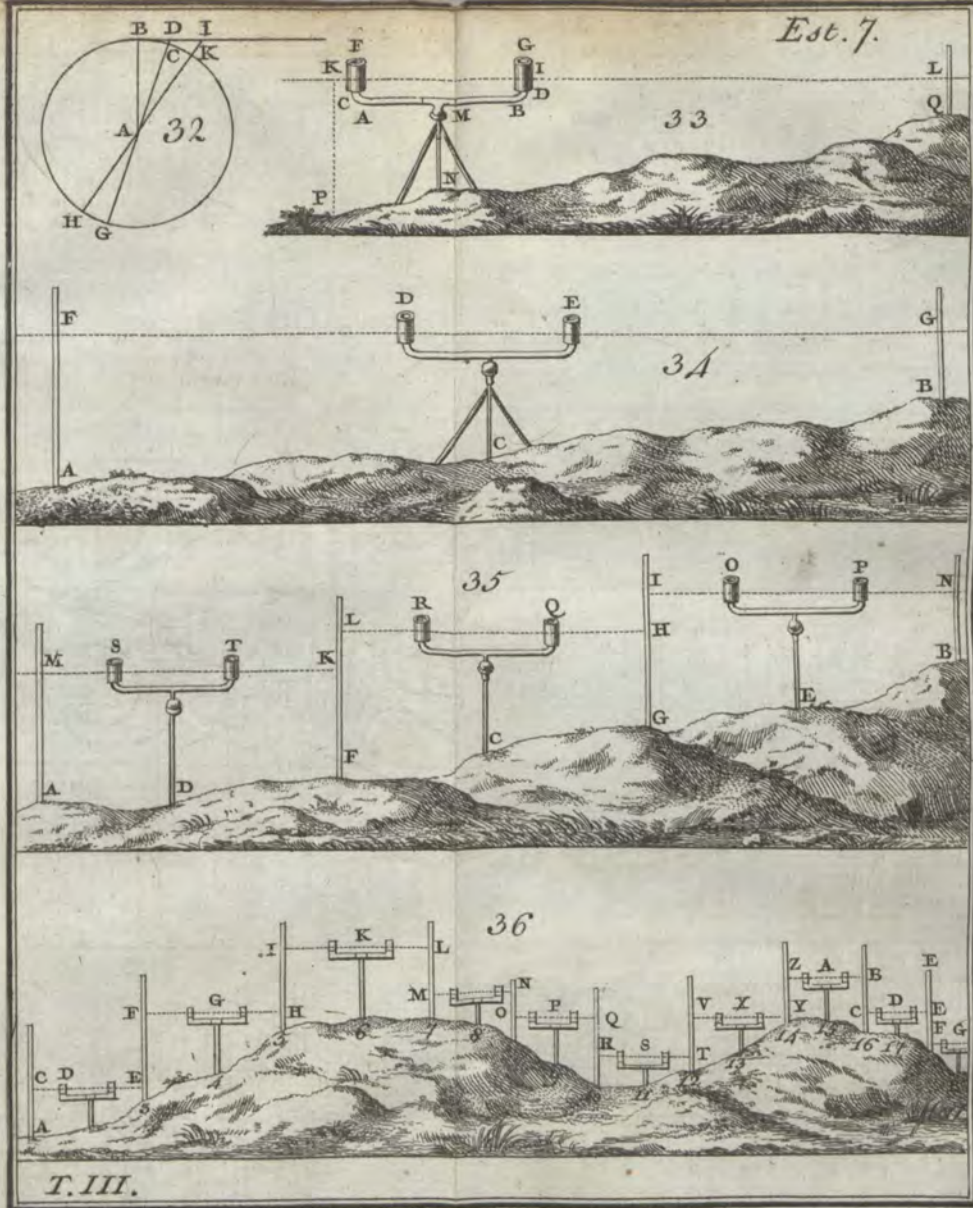
766 Póde-ſe tambem achar a differença do nivel apparente CD ao verdadeiro do outro modo mais geometrico; porque por ſer o triangulo ABD rectangulo, os quadrados AB, e BD juntos são iguaes ao quadrado de AD hypothenuſa, aſſim baſta quadrar o ſemidiametro da terra, e o valor da linha

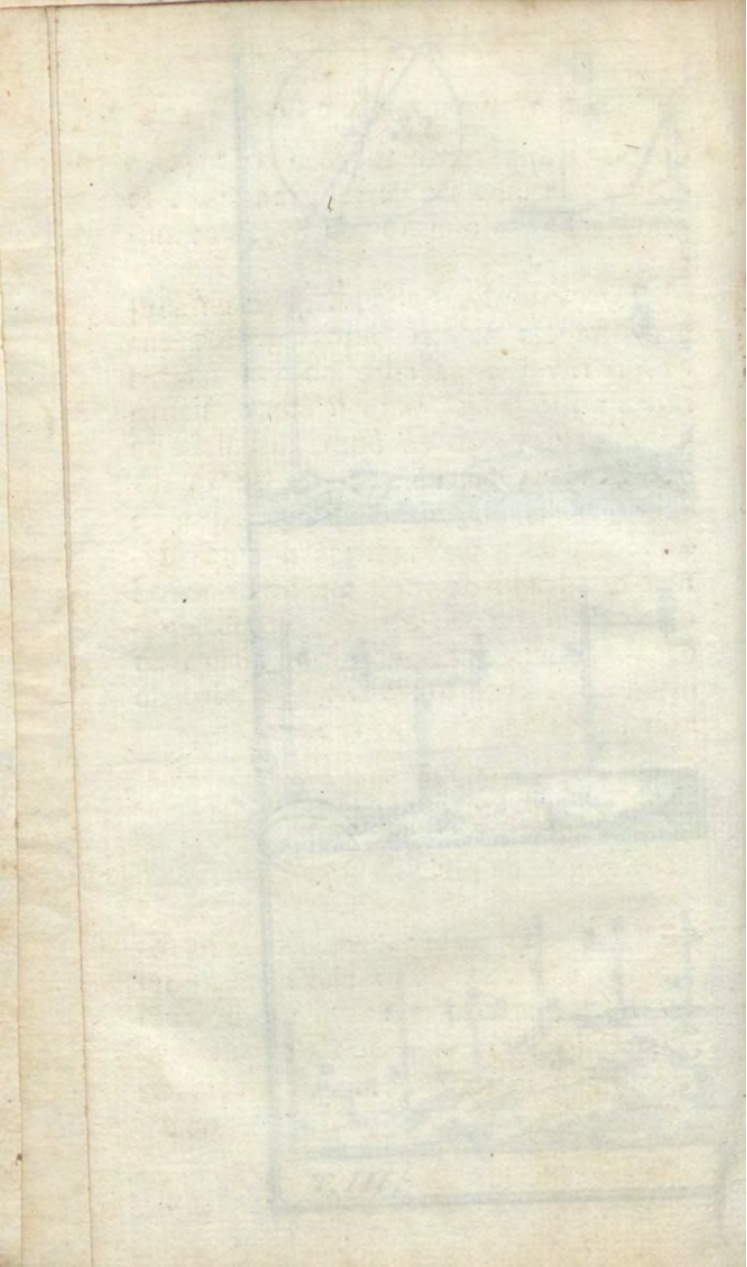
nha do nivel apparente, e ſommar eſtes dous quadrados, cuja raiz ſerá a linha AD, da qual abatido o ſemediametro AB, ou AC da terra, a differença ſerá o valor da linha CD.

767 Póde-ſe tambem notar que as alturas de dous pontos de nivel apparente ſobre o verdadeiro eſtão da meſma razão que os quadrados das linhas do nivel apparente; porque tomando o diametro CG pela linha GD, e o diametro HK pela linha HI, o quadrado da linha BI igual ao rectangulo de HK por KI, os quadrados das linhas BD, e BI eſtarão na meſma razão que os rectangulos, que lhes são iguaes; mas tendo eſtes rectangulos por baſe o diametro GC, ou HK da terra, ſerão entre ſi como as alturas CD, e KI, e ſerão os quadrados BD, e BI na razão das linhas CD, e KI.

768 Deſta conſequencia ſe póde tirar huma regra geral para achar a altura do nivel apparente, a reſpeito do verdadeiro, de outro modo mais breve do que os dous methodos precedentes; porque conhecida huma vez a altura

do


Est. 7.
32
33
34
35
36
T. III.



do nivel apparente ſobre o verdadeiro em huma linha de certa grandeza, ſe póde achar o meſmo em todas as outras.

Por exemplo. Sabendo que em huma diſtancia de 540 braças a differença do nivel apparente ao verdadeiro são 4 pollegadas, para ſe ſaber quanto he a ſua elevação em huma diſtancia de 900 braças, faço eſta regra de 3, dizendo: ſe o quadrado de 540, que he 291600, dá 4 pollegadas, quantas dará o quadrado de 900, que he 810000? e feita a regra, ſe acharão 11 pollegadas, 1 linha, e 4 pontos por altura do nivel apparente ſobre o verdadeiro de huma nivelada de 900 braças.

CAPITULO V.

Deſcripção do nivel de Mr. Huyghens.

769 ATé agora temos fallado ſómente do nivel d'agua, porque he o que eſtá mais em uſo nos nivelamentos, que não são de grande extensão: com tudo como os niveis de ocu-

oculo são muito mais commodos, porque de duas, ou trez niveladas, ou algumas vezes de huma ſó, ſe podem nivelar dous objectos, dos quaes ſe não poderia conhecer a differença das alturas com o nivel d'agua, ſem fazer muitas operações, inventou Mr. Huyghens o de que vamos fallar, que ſe póde ter pelo mais commodo, e ajuſtado de todos os que ſe tem feito até o preſente.

Huma das principaes partes deſte inſtrumento he o encaxe D, que tem dous braços chatos C, e E ſemelhantes, cada hum de quaſi 6 pollegadas de comprido, de ſorte que tudo faz huma eſpecie de cruz. Eſte encaxe D tem o oculo AB de 3 palmos de comprido; e ſenão tiveſſe mais que dous vidros convexos, repreſentaria os objectos ás avéſſas; mas com muito mais clareza do que ſe tiveſſe quatro, que os repreſentaria na ſua natural poſtura. O canudo AB deſte oculo deve ſer de cobre, ou de outra materia forte, e capaz de reſiſtir ás injurias do tempo.

No fim dos braços do encaxe D eſ-

tão

tão fixos dous fios paſſados por buracos pequenos, e prezos em barras de dous dentes, huma fixa no fim do traço, e a outra eſtá ſegura, de ſorte que ſe poſſa abrir.

Como o oculo eſtá ſuſpenſo pelo encaixe D ao gancho F, fica ſuſpenſo horizontalmente pelo pezo, que eſtá mettido na caixa G, donde não ſahe para fóra mais que o gancho, que o ſegura, e eſte pezo não deve ſer maior que o da cruz, e o vão, que fica na caixa, ſe enche de oleo de noz, ou de linho, ou de outro licor, que ſe não gelle, nem coalhe, e eſte licor evita os balanços do pezo, e do oculo. Dentro no oculo ha hum fio de ſeda prezo horizontalmente ao fóco do vidro objectivo, e ſe volta por hum parafuſo á roda do buraco H, aberto no canudo do oculo, que abaixa, e levanta eſte fio, como he preciſo. Dentro do canudo do oculo ha hum pequeno encaixe mui ligeiro, que não péza mais da 80.ª parte da cruz: não eſtá prezo ao canudo do oculo, porque ſe deve mover para o fim, ou recuar o que for preciſo

pa-

para ter o equilibrio do oculo, e pollo parallelo ao horizonte.

Eſta maquina eſtá ſuſpenſa no alto de huma cruz de páo chata, para o que ha a argola F, que ſe póde levantar, ou abaixar com o parafuſo, que tem na argola, que ſuſpende a maquina. Eſta meſma cruz ſuſtem a caixa, em que eſtá o plumo, e o azeite, e eſta caixa ſó tem os lados, e fundo. Eſte nivel ſe fecha em outra eſpecie de cruz cavada, que ſe ajunta á cruz de páo chata com muitas argolas para reparar o nivel das injurias do tempo, de ſorte que tudo faz huma caixa.

Para examinar eſte nivel ſe ſuſpenderá pelo annel de hum dos dous braços, ſem ſe lhe pôr o pezo de baixo, e ſe verá pelo oculo algum objecto diſtante, notando o lugar, em que o fio do oculo córta o ponto do objecto, e depois ſe lhe porá o pezo, encaixando-o na argola de baixo; e ſe depois diſto o fio correſponde ao meſmo lugar do objecto, he prova certa que o centro da gravidade, ou os dous pontos da ſuſpensão da cruz correſpondem ao

cen-

centro do canudo do oculo, ou ao centro da terra; mas ſe ſenão termina exactamente no meſmo ponto, ſe verificará por meio do encaixe I, fazendo-a correr de huma parte para a outra para emendar a falta, e pôr o nivel em equilibrio; e poſto o oculo horizontalmente pela argola ſem pezo, e com pezo, ſe voltará de baixo para ſima, pondo o braço de ſima para baixo, e pondo o pezo no braço, que ſe poz para baixo. Se depois deſte exame o fio, que eſtá no oculo, ſe acha na meſma altura do objecto dantes, he final que o fio do fóco do oculo eſtá directamente no meio do fóco; mas ſe o fio não correſponde no meſmo ponto, e córta o objecto aſſima, ou abaixo, ſe abaixará, ou levantará, movendo o parafuſo, que tem para iſſo, até que o fio córte pelo meio entre os dous pontos notados, e depois diſto eſtará o nivel bem ratificado.

O pé deſta maquina he huma eſpecie de meza de ferro, ou cobre redonda, e hum pouco concava, para que a maquina eſteja mais ſegura na conca-

vi-

vidade: eſtá montada em trez pés, que eſtão prezos em gonzos, cuja altura he de trez, ou quatro pés.

A figura N repreſenta em grande o canudo, que leva dentro do oculo o fio horizontal, que eſtá prezo com cera á forquilha K.

Qualquer couſa baſta para ſe commetterem grandes erros no nivelar, e por iſſo parece pouca toda a cautela, com que ſe trabalha com os inſtrumentos, e para iſto he preciſo ter delles perfeito conhecimento. Quando eu digo ter perfeito conhecimento, quero dizer, que ſe devem examinar tão bem que ſe poſſa conhecer até o menor defeito, entre os quaes o demais ponderação he levantar, ou abaixar a mira. He verdade que uſando do nivel de Mr. Huyghens, ainda que não foſſe feito com toda a cautela, para eſte inconveniente não nos devemos embaraçar muito, porque ſe abaixo a mira em hum ſentido, levantará outro tanto em outro; e tomando o ponto do meio entre os dous objectos, teremos o nivel apparente, que he huma particular venta-

tagem deſte nivel, que he poder-ſe voltar de baixo para ſima, e de ſima para baixo; mas como póde uſar-ſe de outro inſtrumento, que não tenha eſta ventagem, darei o modo de corrigir hum raio viſual.

Tendo poſto o inſtrumento no lugar A para apontar para DG, ſupponhamos que ſei que o oculo em lugar de dar o ponto C do nivel apparente BC, dá o ponto D mais elevado que C, porque o inſtrumento levanta a mira; e tendo notado que em huma diſtancia BC de 200 braças o ponto D levantou duas pollegadas ſobre C, depois de bem certo, ſe vejo que eſta falta ſe não póde reparar, porque ſe ſuppõe que o inſtrumento eſtá mal feito, cuidarei em todas as operações que faço em corrigir o inſtrumento de ſorte, que dando outra nivelada BE de 600 braças, examino em que ponto da altura HE deve ſer o nivelamento apparente, porque eſtou com a prevenção que não he o ponto E, mas que deve ſer outro ponto mais abaixo que eſte, e para o achar direi: ſe 200 braças dão 2 pol-

Figura 38.

le-

legadas, por exceſſo do raio viſual 600 quantas darão? e feita a regra, acho 6 pollegadas: e aſſim tómo o ponto F 6 pollegadas abaixo do ponto C, e então a linha BF he o nivel apparente; porém ſe o inſtrumento abaixa á mira em vez de a levantar, ſe achará ſempre o ponto do verdadeiro nivel apparente com a meſma regra, que ſe funda em que os triangulos BCD, e BFE ſão ſemelhantes.

CAPITULO VI.

Trata-ſe do modo de uſar do nivel de Mr. Huyghens.

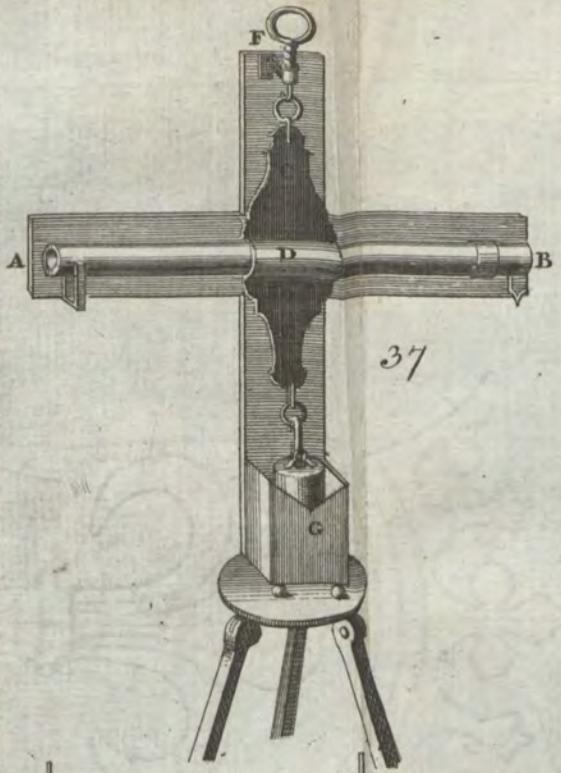
770 POſto o nivel no lugar deſtinado para a operação, ſe mandará do modo coſtumado hum Ajudante para huma diſtancia conveniente, e ſe obſervará exactamente pelo oculo o lugar da vara, a que correſponde o fio, e o Ajudante, que tem o papelão, o levanta, até que o pequeno final correſponda ao raio viſual, e notará logo na vara com hum traço de lapis o lugar,

gar, a que correſponde o raio viſual, e não muda de lugar até o mandarem, e então aquelle, que eſtá com o inſtrumento, o muda, voltando-o de ſima para baixo, iſto he, pendurando-o na cruz pela argola de baixo: depois do que ſe olha direitamente com o oculo, e o que tem a vara levanta, e abaixa o papelão para notar a que altura dá o raio viſual, que deve correſponder ao meſmo lugar, que ſe marcou. Ora ſuppondo que dá aſſima do final, ſe deve notar exactamente o lugar, e depois dividir em dous igualmente o intervallo das duas niveladas, e ſe terá juſta a altura do nivel á parte, da qual ſe deve abater a altura do nivel apparente ſobre o verdadeiro, que ſe achará conforme o que fica explicado no Capitulo IV, e a differença ſerá a altura do nivel verdadeiro, a qual ſe poderia achar, ſem fazer o calculo, como vamos a moſtrar.

Tendo duas varas compridas CA, e BE apartadas huma da outra, por exemplo, na diſtancia de 540 braças, perguntão-me qual ſerá a altura do nivel apparente ſobre o verdadeiro.

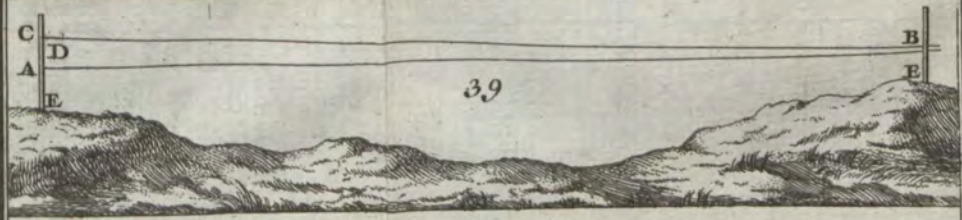
Pa-

Para ſe achar ponha-ſe o nivel no lugar A, e aponte-ſe o oculo ao lugar da vara BE, em que o raio viſual irá encontrar-ſe, ſupponhamos no ponto B. Ponha-ſe hum final, e examine-ſe eſta nivelada, voltando o inſtrumento para ver ſe ſe termina o raio viſual no ponto B. Iſto ſuppoſto, mude-ſe o inſtrumento para o lugar E, e ponha-ſe de modo que o fóco do vidro do oculo eſteja exactamente na altura B: depois ſe dê outra nivelada BC, que vá encontrar a vara AC no ponto C, que ſe marcará na vara depois de ratificado, como já diſſemos, e ſe mede exactamente a diſtancia CA, digo que ſerá dupla da altura do nivel apparente ſobre o verdadeiro, de ſorte que CA deve ſer de 8 pollegadas, porque dividindo CA em duas partes iguaes no ponto D, teremos a linha CD de 4 pollegadas, que ſerá a differença do nivel apparente ſobre o verdadeiro em huma diſtancia de 600 braças, como ſe póde ver no calculo, e aſſim os pontos B, e D eſtão de nivel, pois eſtão igualmente diſtantes do centro da terra, o que vamos moſtrar.



37

38



39

Se ſe tomar o ponto A por extremo de hum dos raios da terra, o ponto B ſerá mais diſtante do centro da terra que o ponto A 4 pollegadas, mas o ponto C eſtá mais apartado do centro da terra que o ponto B 4 pollegadas, logo o ponto C eſtá mais diſtante do centro da terra que o ponto A 8 pollegadas: logo os pontos D, e B, que diſtão cada hum do centro da terra mais 4 pollegadas que o ponto A, eſtão de nivel, e metade da linha CA ſerá a altura do nivel apparente ſobre o verdadeiro. Figura 35.

Daqui ſe vê que o nivelamento reciproco moſtra de hum modo muito ſimples o modo de determinar perfeitamente dous pontos de nivel, ſem ſe embaraçar com a ſua diſtancia. He verdade que ſe podem achar dous pontos do nivel, ſem fazer o nivelamento reciproco, pondo o inſtrumento no meio das diſtancias dos dous objectos, que ſe querem nivelar, o que ſe faz quaſi do meſmo modo, que ſe explicou no nivel d'agua.

CAPITULO VII.

Do modo de fazer o nivelamento compoſto com o nivel de Mr. Huyghens.

771 JA' diſſemos que em hum nivelamento compoſto era preciſo ſommar todas as alturas, que ſe achão ſubindo, e que ſe tinhão ſentado na primeira columna, e ſommar tambem todas as que ſe achavão deſcendo, que eſtão na ſegunda columna, diminuindo a ſomma de humas da ſomma das outras para ter a differença, que moſtra o quanto hum lugar he mais elevado que outro; mas como neſta prática nos ſervimos do nivel d'agua, que faz as niveladas curtas, e além diſſo o inſtrumento em cada eſtação ſe poz no meio dos dous termos, não ſe fez caſo da differença do nivel apparente ſobre o verdadeiro, nem ſubindo, nem deſcendo, porque, conforme eſta prática, a differença do nivel apparente não he conſideravel; mas não ſuccede o meſmo, quando nos ſervimos de inſtrumento, com que ſe poſsão dar grandes

des niveladas, em que he preciſo attender á differença do nivel apparente ſobre o verdadeiro, tanto ſubindo, como deſcendo, principalmente quando o inſtrumento eſtá poſto no primeiro termo para nivelar de hum termo a outro, porque neſta occaſião não ſómente ſe devem pôr na primeira columna as alturas, que ſe achárão ſubindo, e na ſegunda as que ſe achárão deſcendo, mas tambem eſcrever á margem de cada columna a differença do nivel apparente ſobre o verdadeiro nas diſtancias, que eſtão nas columnas, tanto ſubindo, como deſcendo; e o que aqui ha particular, he, que depois de ter ſommado as alturas do nivel apparente ſobre o verdadeiro, ſe deve eſta ſomma accreſcentar á ſomma da primeira columna, para fazer huma ſomma ſó das alturas da primeira columna, e das differenças do ſeu nivel apparente ao verdadeiro. Tambem ſe eſcreverá ao lado da ſegunda columna a differença do nivel apparente ao verdadeiro em cada altura, que ſe achar deſcendo, e a ſomma de todas eſtas differen-

ças ſe diminuirá da das alturas, de ſorte que ſe deve ter como regra geral, que ſubindo ſe deve accreſcentar a differença do nivel apparente ſobre o verdadeiro ás alturas, que ſe acharem, e deſcendo ſe devem abater, e eis-aqui a razão.

Eſtamp. 9. Figura 40. Supponhamos que ſubindo ſe derão as niveladas BC, e FG; e deſcendo, as niveladas KN, e QR: iſto ſuppoſto, imagine-ſe AD parallela a BC, eſta parallela ſerá huma tangente á terra, e a linha DE notará a differença do nivel apparente ſobre o verdadeiro; e como as linhas AB, e CD são iguaes, o ponto C ſerá mais diſtante do centro da terra que o ponto B toda a linha DE; e para que o ponto B fique de nivel com o ponto C, ſe lhe deve juntar á altura BA a linha DE, iſto he, a linha da differença do nivel verdadeiro ſobre o apparente. Tambem ſe á linha do nivel apparente FG ſe tira a parallela EH, a linha HI ſerá a differença dos niveis apparente, e verdadeiro: logo ſendo as linhas FE, e GH iguaes, o ponto G ſerá mais diſtan-

tante do centro da terra que o ponto F toda a linha HI: logo para o ponto F ficar de nivel com o ponto G, deve-ſe juntar a linha HI á altura FE.

A reſpeito das niveladas KN, e QR, que ſe derão deſcendo, ſe vê que tirando as parallelas LO, PS, que são tangentes á terra, o ponto N eſtá mais diſtante do centro da terra que o ponto K toda a linha OP: logo para achar o ponto do nivel com o ponto K ſe deve diminuir da altura NP da linha OP, que he a differença do nivel apparente ao verdadeiro no comprimento da linha KN; e finalmente como o ponto R não eſtá de nivel com o ponto Q, porque o primeiro eſtá mais diſtante do centro da terra que o ſegundo toda a linha ST, ſerá preciſo diminuir a linha ST da altura RT para ter o ponto R de nivel com o ponto Q: o meſmo ſe fará com os mais.

Suppuzemos as linhas BA, e CD, FE, e GH parallelas, ainda que ſejão diametros continuados, pois pela grande diſtancia do centro ſe podem tomar como taes ſem erro ſenſivel.

Pa-

Para applicarmos a hum exemplo o
Figura 41. que acabámos de enſinar, ſupponhamos que queremos ſaber a differença do nivel dos lugares A, e F.

Para iſto me ſervirei de hum nivel de oculo, que ſupponho no primeiro termo A, para dar a nivelada GB, que ſe termine no ponto B da altura, á qual mandarei hum Ajudante cravar hum pique, e imaginarei a differença, que ha do nivel apparente de 6 palmos e meio, que he a altura GQ do nivel, o que junto na primeira columna: depois mando medir o comprimento GB, que ſupponho de 540 braças, e buſco qual he a altura do nivel apparente ſobre o verdadeiro, e acho ſer 4 pollegadas: eſcrevo eſta altura ao lado da primeira columna defronte dos 6 palmos e $\frac{1}{2}$, depois diſto faço mudar o nivel para o ponto B, e mando hum Ajudante para o lugar C, que he a diſtancia, que ſe julgará conveniente; e depois de dar a nivelada HI, ſupponhamos que ſe acha IC de 3 palmos, que abatidos de 6 palmos

e

e $\frac{1}{2}$, reſtão 3 palmos e $\frac{1}{2}$ por altura do ponto C ſobre B; e tendo eſcrito eſta quantidade na primeira columna, meço o comprimento HI, que acho de 342 braças, que dão huma pollegada, e 7 linhas pela differença do nivel apparente ſobre o verdadeiro, que eſcrevo ao lado da primeira columna defronte de 3 palmos e meio.

Daqui venho ao ponto C, e mando hum Ajudante com huma vara para o ponto D, depois dou a nivelada KL, e o Ajudante, que eſtá em L, marca com hum traço de lapis o lugar da vara, que correſponde ao raio viſual; e medindo a altura LD, que ſerá, por exemplo, de 13 palmos, de que abatida a altura do nivel, ficão 6 palmos e $\frac{1}{2}$, que he a differença do nivel apparente dos pontos C, e D; mas como 6 palmos e $\frac{1}{2}$ he a altura, que ſe achou deſcendo, eſcrevo na ſegunda columna, ao lado da qual eſcrevo tambem 2 pollegadas, e 4 linhas, que he a differença do nivel apparente ao verdadeiro no com-

comprimento KL: depois mudo o nivel para o ponto D, e mando hum Ajudante para E a marcar o ponto M na vara, depois de ter dado a nivelada MN; e tendo achado a altura EN de 15 palmos e meio, tiro diſto a altura do nivel 6 palmos e $\frac{1}{2}$, e a differença he 9 palmos, que eſcrevo na ſegunda columna; e ſuppondo que a diſtancia MN ſeja de 585 braças, buſco a altura do nivel apparente ſobre o verdadeiro em huma diſtancia ſemelhante, e acho ſer de 4 pollegadas, e 8 linhas, que eſcrevo ao lado da ſegunda columna defronte do ultimo numero, que eſcrevi, iſto he, defronte de 9 palmos. Finalmente faço mudar o nivel para E para fazer a ultima operação OP, que me dá a altura PF de 12 palmos, de que tirando a do nivel, a differença he 5 palmos e meio, que eſcrevo na ſegunda columna, ao lado do qual eſcrevo 5 pollegadas, e 4 linhas, que he a differença do nivel apparente ſobre o verdadeiro no comprimento OP, que ſuppomos de 630 braças.

Fei-

Feita a operação, ſe ſommão as alturas da primeira columna, e teremos 10 palmos, e ſe ſommão tambem as alturas do nivel apparente ſobre o verdadeiro, que ſerá 5 pollegadas, e 7 linhas, que ſe ſommão com a primeira columna, e ſerá tudo 10 palmos, 5 pollegadas, e 7 linhas.

Depois ſe ſommão as alturas da ſegunda columna, que fazem 19 palmos, e pôr tambem em huma ſomma as alturas do nivel apparente ſobre o verdadeiro, que eſtão ao lado, para ter 1 palmo, 4 pollegadas, e 4 linhas, que ſe devem diminuir da ſomma das alturas da ſegunda columna, iſto he, de 19 palmos, e a differença ſerá 17 palmos, 3 pollegadas, e 8 linhas. Finalmente ſe devem diminuir 10 palmos, 5 pollegadas, e 7 linhas deſta quantidade, e o reſto ſerá 6 palmos, 6 pollegadas, e 1 linha, o que moſtra que o lugar A eſtá mais elevado que F 6 palmos, 6 pollegadas, e 1 linha.

772 Quando o permittir o terreno he melhor fazer o nivelamento entre dous termos, e ſeguir o que ſe acabou de

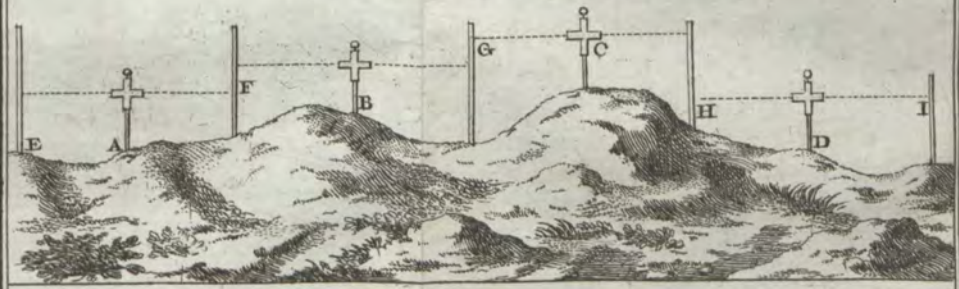
de dizer, porque não ſe attende á differença do nivel apparente ſobre o verdadeiro, do meſmo modo que temos dito no nivel d'agua; mas para iſto ſeria util que o nivel tiveſſe dous oculos, hum para olhar da direita para a eſquerda, e outro para olhar da eſquerda para a direita, e as niveladas ſe corrigirão do modo, que temos enſinado.

Por exemplo. Querendo conhecer a differença das alturas dos dous lugares
Figura 42. I, e E, divido eſta diſtancia dos dous termos para fazer as eſtações mais convenientes; e fazendo cravar os piques nos lugares F, G, H, faço a primeira eſtação no ponto A quaſi no meio de EF, a ſegunda no ponto B, tambem no meio de FG, a terceira no ponto C, e a quarta no ponto D, obſervando ſempre eſcrever na primeira columna as alturas, que ſe acharem ſubindo, e na ſegunda as que ſe acharem deſcendo, ſem ſe embaraçar das alturas do nivel apparente ao verdadeiro. Julgo que iſto ſerá baſtante para ſatisfazer tudo o que reſpeita o nivelamento; e procurando entender-ſe bem, baſta-

40

41

42



tará huma pouca de prática para ſe pôr capaz de fazer todas as operações, que ſe podem offerecer.

ADVERTENCIA.

Advertindo que huma grande parte daquelles, que fazem todos os dias as medições, não tem mais que huma pouca de prática, e que os que tem eſcrito não fizerão mais que enſinar a prática do calculo, ſem fallar das razões, em que ſe funda, julguei devia fazer hum pequeno tratado, antes de fallar da medida dos corpos, para que os que começão a calcular achem neſta Obra tudo o que devem ſaber, para poderem ſervir-ſe com utilidade de tudo o que fica enſinado na primeira parte.

FIM DO DECIMO LIVRO.

NO-

NOVO CURSO DE MATHEMATICA.

LIVRO XI.

DA MEDIÇÃO EM GERAL, em que ſe enſina o modo de medir os planos, e ſolidos, e obras de madeira.

773 POr medição ſe entende ordinariamente o modo de calcular as dimensões de todas as obras, que são partes da fortificação de huma Praça, e tambem de todos os edificios civis. Ainda que cada Paiz tenha a ſua medida particular nas obras

obras reaes, nos ſervimos da braça, que he compoſta de 10 palmos, e cada palmo de 8 pollegadas, dividindo-ſe cada pollegada em 12 partes, que ſe chamão linhas, e cada linha em outras doze, a que ſe chamão pontos.

Diſtinguem-ſe trez caſtas de braças, braça corrente, ou linear, braça quadrada, e braça cubica: a braça linear tem 10 palmos de comprido, ſem largura, nem profundidade; a braça quadrada he a que tem 10 palmos de comprimento, e 10 de largo, ſem altura, ou profundidade; e a braça cubica he a que tem 10 palmos de comprimento, 10 de largura, e 10 de altura, e por conſequencia tem trez dimenſões iguaes. Serve eſta braça para medir os ſolidos, a braça quadrada para medir as ſuperfices, e a braça corrente os comprimentos, e para determinar as dimenſões dos planos, e ſolidos.

Aſſim o que acabamos de explicar a reſpeito da braça, ſe deve entender do palmo.

Ten-

Tendo a braça quadrada 10 palmos de comprido, e 10 de largo, póde-ſe dizer que a ſuperfice ſe compõe de 100 palmos quadrados; porque multiplicando entre ſi as duas dimensões deſta braça, iſto he, 10 por 10, teremos 100 palmos quadrados; e a reſpeito da braça cubica, como cada huma das trez dimensões ſe compõe de 10 palmos, deve a braça cubica ter 1000 palmos cubicos; porque multiplicando a braça quadrada, que he 100 palmos quadrados, por 10 palmos, que he a altura da braça cubica, teremos 1000 palmos cubicos.

774 He util advertir que na medição dos planos, e dos ſolidos, como vamos explicar, não ſe attende quantos palmos quadrados tem a braça, nem de quantos palmos cubicos compõe a braça cubica, porque para ſer o calculo mais curto, ſe toma por palmo da braça quadrada a decima parte da meſma braça, e pelo palmo da braça cubica a decima parte da meſma braça; de ſorte que ſe ſe imagina o quadrado AB como huma braça quadrada, cujo la-

Eſtamp. 10 Figura 43.

lado AC eſtá dividido em 10 partes iguaes, o rectangulo DE ſerá a decima parte do quadrado AB, e conſequentemente ſerá hum palmo da braça quadrada: do meſmo modo o rectangulo DF contém 4 palmos da braça quadrada, que he metade do quadrado AB; mas como a braça quadrada tem 100 palmos quadrados, e o rectangulo DE he a decima parte da braça, ſegue-ſe que hum palmo da braça quadrada vale 10 palmos quadrados, e que o rectangulo DF, que he metade da braça, vale 50.

O meſmo ſe poderia dizer das pollegadas, das linhas, e dos pontos da braça quadrada, porque huma pollegada da braça he hum rectangulo, que tem por baſe huma pollegada, e por altura huma braça; do meſmo modo que huma linha he hum rectangulo, que tem por baſe huma linha, e por altura huma braça. Finalmente o ponto he hum rectangulo, que tem por baſe a duodecima parte de huma linha, e por altura huma braça, do que ſe vê que 12 pontos de huma braça quadrada

da fazem huma linha da meſma braça, que 12 linhas fazem huma pollegada, que 8 pollegadas fazem hum palmo, e que 10 palmos fazem huma braça quadrada, pois todas eſtas quantidades tem a meſma altura. Moſtraremos depois o meſmo a reſpeito dos palmos, pollegadas, e pontos da braça cubica, quando tivermos já baſtantemente explicado o modo de multiplicar duas dimensões expreſſadas por braças, e partes de braça linear.

CAPITULO I.

Do modo de multiplicar duas dimensões, das quaes a primeira he compoſta de braça, e partes de braça, e a ſegunda de braças.

Figura 43. 775 TEndo o comprimento AB de 6 braças, ao qual ſe accreſcentou huma pequena CB de 2 palmos, e a outra CD de 6 pollegadas, toda a linha AD ſerá de 6 braças, 2 palmos, e 6 pollegadas, a qual multiplicada pela linha AE de huma braça, o pro-

du-

ducto ſerá o rectangulo EADH, cujo valor ſe achará multiplicando 6 braças, 2 palmos, e 6 pollegadas por huma braça para fazer o calculo.

Supponhamos as duas dimensões, como aqui vemos, multiplico depois as partes menores, principiando da direita, e acabando na eſquerda, dizendo: 1 vez 6 são 6, que ponho na columna das pollegadas, porque são 6 pollegadas da braça quadrada: depois 1 vez 2 he 2, que ponho de baixo da columna dos palmos, porque são palmos de braça quadrada; em fim 1 vez 6 são 6, que ponho de baixo da columna das braças, porque são outras tantas braças quadradas, e ſerá o producto 6 braças, 2 palmos, e 6 pollegadas, que he o valor do rectangulo AH, o qual he compoſto do rectangulo AF, que são 6 braças, do rectangulo BG, que são 2 palmos, e do rectangulo CH, que vale 6 pollegadas.

Braç.	*Palm.*	*Poll.*
6.	2.	6.
1.	0.	0.
6.	2.	6.

Para multiplicar 10 braças, 4 palmos, e 6 pollegadas por 5 braças, diſ-

poremos os numeros do modo, que moſtra o exemplo, e digo: 5 vezes 6 são 30, advertindo que são 30 unidades, e o valor de cada huma he hum pequeno rectangulo, que tem por baſe huma pollegada, e por altura huma braça; e como são 30 pollegadas de braça quadrada, vejo em 30 quantas vezes cabem 8, porque 8 pollegadas de braça quadrada valem hum palmo de braça quadrada; e como em 30 cabem 3 vezes 8, e reſtão 6, eſcrevo 6 no lugar das pollegadas, e levo 3 palmos: depois digo: 5 vezes 4 são 20, e 3 fazem 23, cujas unidades são palmos de braça quadrada; e como 10 palmos fazem huma braça, vejo quantas vezes cabem 10 em 23; e como cabem duas vezes, e reſtão 3, ponho 3 de baixo da columna dos palmos, e levo 2, que são braças quadradas, que juntas ao producto de 10 por 5, dará 52, que ſe porão por baixo da columna das braças, e teremos 52 braças, 3 palmos, e 6 pollegadas.

Braç.	*Palm.*	*Pell.*
10.	4.	6.
5.	0.	0.
53.	2.	6.

Pa-

Para multiplicar 60 braças, 5 palmos, e 5 pollegadas por 84 braças, ſendo o numero 84 muito grande, cançaria a memoria, multiplicando os palmos, e pollegadas, como ſe vê neſta operação; porque dizendo 84 vezes 3, não ſe conhece logo quantas pollegadas dá o producto; e no caſo que ſe conheça, logo ſe encontrava outro embaraço em buſcar quantos palmos contém eſte producto, ſem ſe fazer a diviſão por 8: iſto ſuccederá não ſó a reſpeito das pollegadas, mas tambem dos palmos, linhas, e pontos; e por evitar as difficuldades, que podem offerecer-ſe em ſemelhante calculo, daremos hum modo muito ſimples para multiplicar os palmos, pollegadas, linhas, e pontos da primeira dimensão, quando o numero das braças da ſegunda conſta de mais de hum caracter: para iſto devemos começar a operação, multiplicando inteiros por inteiros, aſſim multiplico 60 por 84, e eſcrevo o producto do modo ordinario: depois advirto ſe em lugar de 5 palmos tiveſſe para multiplicar por 84 huma bra-

ça, o producto ſerião 84 braças; mas como 5 palmos não são mais que metade de huma braça, metade de 84 ſerá o producto dos 5 palmos por 84, aſſim direi: metade de 8 são 4, e metade de 4 são 2, o que dá o producto 42; mas deve-ſe advertir, que quando tómo metade de 84 por producto de 5 palmos, conſidero 84 como braças quadradas, porque para 42 ſer o producto das duas dimensões, ou de outro modo, para que ſejão braças quadradas, he preciſo que 84 ſe tome por braças quadradas.

Braç.	Palm.	Pell.
60.	5.	5.
84.	0.	0.
240.	0.	0.
480.		
42.	0.	0.
5.	2.	4.
5087.	2.	4.

Mas como faltão ainda 5 pollegadas, que ſe não multiplicárão, examino a razão de 5 pollegadas com 5 palmos, como examinei a de 5 palmos com braças; e como 5 palmos são 40 pollegadas, conheço que a razão de 5 a 40 he hum oitavo; e que ſe o producto de 84 por 5 palmos deo 42 braças, o pro-

ducto de 5 pollegadas por 84 não deve dar mais que a oitava parte de 42; direi pois: o oitavo de 42 braças são 5 braças, e reſtão 2, ou 20 palmos, cuja oitava parte são 2 palmos e meio, ou 2 palmos, e 4 pollegadas, que eſcreverei nos ſeus lugares correſpondentes, depois do que ſommo todos eſtes productos para ter o producto total, que he 5087 braças, 2 palmos, e 4 pollegadas.

Para fazer eſte calculo mais familiar aos principiantes, darei muitos exemplos das meſmas regras.

Para multiplicar 18 braças, 2 palmos, e 4 pollegadas por 24 braças, começarei multiplicando as braças por braças do modo ordinario: depois diſto ſe deve examinar a razão de 2 palmos com a braça; e como 2 palmos he o quinto, tómo a quinta parte de 24, que he 4 braças, e 8 pal-

Braç.	*Palm.*	*Poll.*
18.	2.	4.
24.	0.	0.
72.	0.	
36.		
4.	8.	0.
1.	2.	0.
438.	0.	0.

palmos, e eſcrevo os 4 de baixo da columna das braças, e os 8 palmos de baixo da ſua columna.

Para ficar convencido que 24 braças multiplicadas por 2 palmos dá 8 braças, façamos a multiplicação do modo ordinario, e ver-ſe-ha que o producto he 48 palmos, iſto he, 48 pequenos rectangulos, que cada hum tem por baſe hum palmo, e por altura huma braça; e como para fazer a braça quadrada ſe fazem preciſos 10, ſe vê que dividindo 48 por 10, o quociente ſerá 4, e 8 palmos, que he o meſmo que achámos do outro modo.

Reſta-nos ainda multiplicar 24 braças por 4 pollegadas: como iſto ſe póde fazer por meio do producto de 2 palmos, examino a razão, que tem 2 palmos com 4 pollegadas, porque a razão do producto de 4 pollegadas com o de 2 palmos ſerá a meſma que de 4 pollegadas com 2 palmos: como 2 palmos valem 16 pollegadas, de que 4 he a quarta parte, tómo a quarta parte do producto de 2 palmos, iſto he, a quarta parte de 4 braças, que he 1 braça, que

eſ-

eſcrevo de baixo da columna das braças : tómo tambem a quarta parte de 8 palmos, que são 2 palmos, que eſcrevo de baixo da columna dos palmos, depois do que faço a ſomma de todos os productos para ter a total, que he 438 braças.

Para multiplicar 36 braças, 7 palmos, 4 pollegadas, e 8 linhas por 28 braças, principio do modo ordinario, multiplicando braças por braças : depois comparo a razão de 7 palmos com a braça, e vejo que he $\frac{7}{10}$, e por conſequencia para multiplicar 28 braças por 7 palmos, he neceſſario tomar os $\frac{7}{10}$ de 28 braças ; e como não he facil fazello de hum jacto, buſco as partes aliquotas para fazer o calculo mais facil ; e como 7 he compoſto de 5, e

Braç.	*Palm.*	*Poll.*	*Linh.*
36.	7.	4.	8.
28.			
288.			
72.			
14.	0.	0.	0.
5.	6.	0.	0.
1.	4.	0.	0.
0.	2.	2.	4.
1029.	2.	2.	4.

de

de 2, de que 5 he metade da braça, e 2 a quinta parte, tómo logo por 5 metade de 28, que são 14, e por 2 palmos o quinto, dizendo: o quinto de 28 são 5, e reſta 3 braças, de que tómo o quinto, que são 6 palmos.

Para multiplicar as 4 pollegadas por 28 braças recorro ao producto de 2 palmos, que parece mais commodo, porque 4 pollegadas he a quarta parte de 2 palmos, pois 2 palmos valem 16 pollegadas, e aſſim o producto de 4 pollegadas ſerá a quarta parte do producto de 2 palmos; e como eſte producto he 5 braças, e 6 palmos, digo: a quarta parte de 5 he 1, e reſta huma braça, que são 10 palmos, os quaes juntos com os 6, que reſtão, fazem 16, de que a quarta parte he 4, e aſſim o producto de 4 pollegadas he 1 braça, e 4 palmos.

Como reſtão ainda 8 linhas para multiplicar, buſco a razão de 8 linhas com 4 pollegadas. Ora 4 pollegadas são 48 linhas, de que 8 he a ſexta parte, o producto das linhas ſerá a ſexta parte do de 4 pollegadas; direi logo: a ſex-

ta

ta parte de 1 he 0; mas como 1 braça são 10 palmos, aos quaes juntando 4 palmos, que reſtão, teremos 14, de que a ſexta parte são 2, e reſtão 2, que reduzidos a pollegadas fazem 16 pollegadas, de que a ſexta parte são 2, que eſcrevo de baixo das pollegadas, e reſtão 2 pollegadas, ou 24 linhas, de que a ſexta parte são 4 linhas, que eſcrevo de baixo da columna das linhas; e fazendo a ſomma, acho o producto total 1029 braças, 2 palmos, 2 pollegadas, e 4 linhas.

Para multiplicar 24 braças, 4 palmos, e 6 linhas por 52 braças, devemos, depois de ter multiplicado as braças por braças, buſcar a razão de 4 palmos com a braça; e como são os 2 quintos, ſe tomarão os dous quintos de 52, que são

Braç.	*Palm.*	*Poll.*	*Linh.*
24.	4.	0.	6.
52.			
48.			
120.			
20.	8.	0.	0.
5.	2.		
	6.	4.	
	3.	2.	
1269.	1.	2.	0. 0.

20 braças, e 8 palmos, reſtão para multiplicar 6 linhas por 52 braças, e não he facil ver a razão de 6 linhas com 4 palmos, o que ſahiria com muito mais facilidade, ſe ſe tiveſſe o producto de alguma pollegada; e como na primeira dimensão não ha pollegada, he neceſſario pôr hum producto ſuppoſto; e porque huma pollegada he a 32.ª parte de 4 pollegadas, conheço que não he muito facil tomar a 32.ª parte de 20 braças, e 8 pollegadas, &c., por iſſo tómo a quarta parte para ter o producto de hum palmo, que ſerá 5 braças, e 2 palmos; e pondo eſtes numeros nos ſeus lugares correſpondentes, os córto com huma riſca para não ſerem comprehendidos na ſomma: depois diſto conſidero que ſendo huma pollegada a oitava parte do palmo, tomando a oitava parte deſte producto ultimo, terei o producto de huma pollegada, que ſerá 6 palmos, e 4 pollegadas: depois do que riſco eſtes numeros, porque fazem hum producto ſuppoſto; e como 6 linhas são metade de huma pollegada, não ha mais que

to-

tomar metade de 6 palmos, e 4 pollegadas, que são 3 palmos, e 2 pollegadas, para ter o producto de 6 linhas; e feita a ſomma de todos os productos, teremos o producto total 1269 braças, 1 palmo, e 2 pollegadas.

Se tiveſſemos que multiplicar 24 braças, e 6 linhas por 52 braças, e na primeira dimensão não houveſſe palmos, nem pollegadas, como aqui ſe ſuppõe, ſeria preciſo, para achar o producto das 6 linhas, ſuppôr o de hum palmo, e depois o de huma pollegada para achar o de 6 linhas, que ſerá metade do de huma pollegada.

CAPITULO II.

Do modo de multiplicar duas dimensões, de que cada huma ſe compõe de braças, palmos, pollegadas, linhas, &c.

776 ATé agora muito de propoſito não puzemos palmos, pollegadas, e linhas na ſegunda dimensão das multiplicações, que ſe fizerão no Ca-

Capitulo precedente, para fazer as operações mais ſimplices; mas como quaſi ſempre ſuccede haver palmos, e pollegadas na primeira, e ſegunda dimensão, eis-aqui o modo de multiplicar as partes da braça, que ſe podem achar em huma, e outra.

Para multiplicar 15 braças, 4 palmos, 6 pollegadas, e 7 linhas por 6 braças, 5 palmos, e 5 pollegadas, advirta-ſe, que ſe o numero da ſegunda dimensão ſe expreſſa com huma ſó letra, poſſo fazer a multiplicação da primeira dimensão toda por 6 braças por hum calculo de memoria, como ſe fez no principio do Capitulo precedente; aſſim preſcindindo por hum pouco dos 5 palmos, e 5 pollegadas da ſegunda dimensão, começo, multiplicando as partes mais pequenas da primeira dimensão, por 6 braças, dizendo: 6 vezes

Braç.	*Palm.*	*Poll.*	*Linh.*	*Pont.*
15.	4.	6.	7.	0.
6.	5.	5.		
92.	8.	7.	6.	
7.	7.	3.	3.	6.
0.	9.	5.	4.	11.
101.	6.	0.	2.	5.

zes 7 são 42 linhas, que valem 3 pollegadas, e 6 linhas: eſcrevo as linhas no ſeu lugar competente, e conſervo as 3 pollegadas, depois digo: 6 vezes 6 são 36 com 3 fazem 39 pollegadas, que valem 4 palmos, e 7 pollegadas: conſervo os 4, e eſcrevo as pollegadas no ſeu lugar competente, paſſo a multiplicar os palmos, dizendo: 6 vezes 4 são 24, e 4, que forão, fazem 28 palmos, que valem 2 braças, e 8 palmos: eſcrevo 8 palmos, e deixo as 2 braças para accreſcentar ao producto de 15 braças por 6, que ſerá 92, aſſim o producto das 6 braças da primeira dimensão são 92 braças, 8 palmos, 7 pollegadas, e 6 linhas, que he huma quantidade, que contém tanto da primeira dimensão, quantas unidades tem o numero 6.

Preſentemente conſidero que cada braça do numero 6 dá no ſeu producto huma quantidade ſemelhante á da primeira dimensão; ſe tenho que multiplicar eſta primeira dimensão pelas partes da braça, deve o producto ter a meſma razão com o da braça pela primeira

ra dimensão, que tem as partes com a braça: iſto ſuppoſto, como a primeira dimensão deve multiplicar-ſe ainda por 5 palmos, conſidero que ſendo 5 palmos metade da braça, o producto dos 5 palmos ſerá metade da primeira dimensão, que ſe ſuppõe neſte caſo eſtar multiplicada pela braça, aſſim digo: metade de 15 são 7, e reſta 1 braça, que são 10 palmos, que juntos com 4 fazem 14, cuja metade são 7; digo pois: metade de 6 he 3, e metade de 7 linhas são 3 linhas, e 6 pontos.

Como nos faltão para multiplicar ainda 5 pollegadas, conſidero que ſendo 5 pollegadas a oitava parte de 5 palmos, o producto de 5 pollegadas ſerá a oitava parte do de 5 palmos; aſſim tómo a oitava parte deſte producto, que me dá 9 palmos, 5 pollegadas, 4 linhas, e 11 pontos, que ſommando com os mais, dá o producto total 101 braças, 6 palmos, 2 linhas, e 5 pontos.

Para multiplicar 68 braças, 5 palmos, 2 pollegadas, e 9 linhas por 9 braças, 4 palmos, e 4 pollegadas, co-

me-

meço multiplicando a primeira dimensão por 9, e o producto me dá 616 braças, 8 palmos, e 9 linhas: depois examino que 4 palmos são dous quintos da braça, assim tómo duas vezes o quinto para me embaraçar menos, isto he, duas vezes o producto de 2 palmos, dizendo: o quinto de 6 he 1, o quinto de 18 são 3, e restão 3 braças, que valem 30 palmos, que sommados com os 5, que restão á direita, fazem 35, cuja quarta parte são 7 palmos: depois o quinto de 2 pollegadas não podem ser pollegadas, e porei o no lugar das pollegadas, e levarei as 2 pollegadas, que são 24 linhas, com 9, que se seguem, fazem 33, cujo quinto são 6 linhas, e restão 3 linhas, ou 36 pontos, cujo quinto são 7 pontos, e resta 1 ponto, que desprezarei por ser pouco attendivel; assim

Braç.	*Palm.*	*Poll.*	*Linh.*	*Pont.*
68.	5.	2.	9.	0.
9.	4.	4.	0.	0.
616.	8.	0.	9.	0.
13.	7.	0.	6.	7.
13.	7.	0.	6.	7.
3.	4.	2.	1.	7.
1.	7.	1.	0.	9.
649.	3.	5.	0.	6.

ſim ſendo o producto de 2 palmos, 13 braças, 7 palmos, 6 linhas, e 7 pontos, eſcrevo outra vez o meſmo producto, para que os dous fação o de 4 palmos; e como ainda faltão 6 pollegadas para multiplicar, tómo por 4 pollegadas a quarta parte do producto de 2 palmos, dizendo: a quarta parte de 13 são 4, reſtão 10 palmos, que com 7 fazem 17, cujo quarto he 4, e reſta 1 palmo, ou 8 pollegadas, cujo quarto são 2, do que a quarta parte de 6 linhas he 1, e reſtão 2 linhas, ou 24 pontos, que ſommados com 7 fazem 31, cuja quarta parte são 7 pontos, e $\frac{3}{4}$, e o producto de 4 pollegadas são 3 braças, 4 palmos, 2 pollegadas, 4 linhas, e 7 pontos; mas como devo ainda ter o producto de 2 pollegadas, que he metade do antecedente, ſerá 1 braça, 7 palmos, 1 pollegada, e 9 pontos, depois do que faço a ſomma de todos eſtes productos, que fazem juntas 649 braças, 3 palmos, 5 pollegadas, e 6 pontos.

Para multiplicar 20 braças, 4 palmos,

mos, 6 pollegadas, e 4 linhas por 6 braças, 4 pollegadas, e 8 linhas, começar-se-ha do modo ordinario a multiplicar a primeira dimensão por 6 braças; depois do que he preciso notar, que como a segunda dimensão não tem palmos, não he facil achar o producto das 4 pollegadas, sem fazer huma falsa suppoſição, e por isso se suppõe o producto de hum palmo, tomando a decima parte da primeira dimensão, que he 2 braças, 3 pollegadas, e 10 linhas, tendo cuidado em riscar os caracteres; e como 4 pollegadas he metade do palmo, tómo metade do producto de hum palmo, e vem a ser 1 braça, 1 pollegada, e 11 linhas. Falta-me ainda para multiplicar 8 linhas; e sendo 8 linhas a sexta parte de 4 pollegadas, (porque 4 pollegadas são 48 linhas) o producto de 8

Braç.	*Palm.*	*Poll.*	*Lin.*	*Pont.*
20.	4.	6.	4.	0.
6.	0.	4.	8.	0.
122.	8.	6.	0.	0.
2.	0.	3.	10.	0.
1.	0.	1.	11.	0.
0.	1.	5.	7.	6.
124.	0.	5.	6.	6.

linhas ſerá a ſexta parte do de 4 pollegadas. Depois de ter tomado eſta ſexta parte, que são 1 palmo, 6 pollegadas, 7 linhas, e 5 pontos, ſommo tudo para ter o producto total, que he 125 braças, 4 pollegadas, e 6 pontos.

Para multiplicar 40 braças, 5 palmos, 5 pollegadas, e 6 linhas por 24 braças, 7 palmos, e 4 pollegadas, começo a operação, multiplicando braças por braças, em vez de multiplicar as linhas, pollegadas, e palmos da primeira dimensão, porque o numero das braças da ſegunda tem mais de hum caracter: depois faço o que fica dito no Capitulo precedente, tomando por 5 palmos metade de 24, que he 12, ſem attender mais que aos numeros inteiros

Braç.	*Palm.*	*Poll.*	*Linh.*	*Pont.*
40.	5.	5.	6.	0.
24.	7.	4.	0.	0.
160.				
80.				
12.	0.	0.	0.	0.
1.	5.	0.	0.	0.
0.	1.	4.	0.	0.
20.	2.	6.	9.	0.
8.	1.	1.	1.	2.
2.	0.	2.	3.	3.
1004.	0.	6.	1.	5.

ros da ſegunda dimensão, e aſſim preſcindo por ora dos 7 palmos, e 6 pollegadas, que tem, porque ainda ſe não multiplicão; e achado o producto de 5 palmos, que he 12 braças, como as 5 pollegadas da primeira dimensão são a oitava parte de 5 palmos, tómo a oitava parte de 12, que he 1 braça, e 5 palmos; e como ainda falta que multiplicar 6 linhas, o producto deſtas 6 linhas ſerão a decima parte do producto de 5 pollegadas; e como o producto de 5 pollegadas he 1 braça, e 5 palmos, direi: a decima parte de 1 he 0; mas como 1 braça vale 10 palmos com 5 fazem 15, cuja decima parte he 1, e reſtão 5 palmos, que valem 40 pollegadas, cuja decima parte são 4, que ponho de baixo das pollegadas. Até aqui ſó temos multiplicado a primeira dimensão por 24 braças, que eſtão na ſegunda; mas como eſtas 24 tem mais 7 palmos, e 6 pollegadas, he preciſo, como nas precedentes operações, buſcar o producto deſtas duas quantidades, e aſſim conſidero que 7 palmos valem 5, e mais 2, iſto he, metade,

e a quinta parte da braça, e por 5 tómo metade de todas as quantidades, que ſe achão na primeira dimensão, e por 2 palmos o quinto deſtas meſmas quantidades; e como eſte ultimo producto he de 2 palmos, ſendo 4 pollegadas a quarta parte de 2 palmos, ſerá o producto de 4 pollegadas o quarto do de 2 palmos: tomando pois o quarto deſte producto, ſommo com os outros, e o producto total ſerá a ſomma, que he 1004 braças, 6 pollegadas, 1 linha, e 5 pontos. Não ſe attendem aos quebrados por ſerem de pouco momento.

CAPITULO III.

Do modo de multiplicar trez dimensões, expreſſadas com braças, palmos, pollegadas, &c.

777 O Calculo, de que ſe tratou nos dous Capitulos precedentes, póde ſervir ſó para as ſuperficies, porque ſó ſuppuzemos duas dimensões. He verdade que o calculo de

de trez dimensões não differe muito deſte, porque para achar o producto baſta multiplicar o producto das duas dimensões pela terceira; mas como o producto de trez dimensões não ſómente dá braças cubicas, mas tambem palmos, pollegadas, e linhas de braça cubica, eis-aqui a idéa, que ſe deve formar deſtas differentes partes.

Já diſſemos que a braça cubica ſe compunha de 1000 palmos cubicos, mas no calculo nos não embaraçamos com eſta caſta de palmos, porque por hum palmo da braça cubica tomamos a decima parte da meſma braça, que he de 100 palmos cubicos, que fazem hum parallelipipedo EAFGHID, que Figura 44. tendo por baſe huma braça quadrada EAHD, tem por altura a linha GH de hum palmo, de ſorte, que eſte ſolido he a decima parte do corpo EABC, que he 1 braça cubica; e diſcorrendo do meſmo modo a reſpeito da pollegada de braça cubica he hum parallelipipedo, que tendo por baſe huma braça quadrada, tem por altura huma pollegada; e huma linha de braça cubica

he

he hum parallelipipido, que tem por baſe huma braça quadrada, e por altura huma linha, e aſſim as outras partes.

778 Segue-ſe deſta differença que 12 linhas de braça cubica fazem huma pollegada da meſma braça, que 8 pollegadas fazem hum palmo, e 10 palmos fazem huma braça cubica, porque todos eſtes ſolidos tem por baſe huma braça quadrada, e alturas, que juntas podem fazer braças cubicas, ou partes de braças cubicas, como vamos moſtrar nas ſeguintes operações.

Para multiplicar trez dimensões, a primeira de 8 braças, 2 palmos, e 4 pollegadas, a ſegunda de 6 braças, 5 palmos, e 4 pollegadas, e a terceira de 5 braças, 5 palmos, e 4 pollegadas, multiplique-ſe primeiro a primeira, e ſegunda dimensão, e o producto 54 braças, e 3 pollegadas ſe multiplique pela terceira dimensão, obrando conforme as regras dadas nos Capitulos precedentes, iſto he, como ſe o producto das duas primeiras dimensões fizeſſem hum ſó; digo pois: 5 vezes 3 são 15,

que

que são outras tantas pollegadas de braça cubica, isto he, 15 parallelipipedos, que tem por base huma braça quadrada, e a pollegada por altura; porque se attendermos que cada unidade do numero 3 he hum pequeno parallelogramo, que tem por base ma pollegada, e por altura huma braça, pois são pollegadas de braça quadrada *, veremos que multiplicando este parallelogramo por huma, ou muitas braças, se mudará em parallelipipedos, que terão duas dimensões de huma braça, que juntas fazem huma braça quadrada, o que concorda com a definição. Do mesmo modo, multiplicando os palmos da braça quadrada por braças, teremos tambem pequenos parallelipipedos, que terão por base 1 braça quadrada, e por altura 1 pal-

Braç.	*Palm.*	*Poll.*	*Linh.*	*Pont.*
8.	2.	4.	0.	0.
6.	5.	4.	0.	0.
5.	5.	4.	0.	0.
8.	2.	4.	0.	0.
6.	5.	4.	0.	0.
49.	5.	0.	0.	0.
4.	1.	2.	0.	0.
ø.	8.	2.	ø.	ø.
	4.	1.	0.	0.
54.	0.	3.	0.	0.

* Numer 774.

1 palmo, pois ſe multiplicão pela braça rectangulos, que tem em huma das ſuas dimensões a braça. A reſpeito das braças não ha dúvida que multiplicando braças quadradas por braças, o producto ſerão braças cubicas.

Aſſim multiplicando 54 braças, e 3 pollegadas por 5 braças, o producto ſerá 270 braças, 1 palmo, e 7 pollegadas; e como as 54 braças, e 3 pollegadas, multiplicadas por huma braça, hão de dar braças, e partes de braça cubica, que ſerão ſempre expreſſadas por eſtes meſmos numeros, iſto he, por 54 braças, 3 pollegadas, &c., ſe ſe ſuppõe eſta multiplicação feita por metade de 1 braça, dará o producto de 5 palmos; e aſſim por 5 palmos da ſegunda dimensão tómo metade deſta quantidade, que são 27 braças, 1 pollegada, e 6 linhas. Finalmente como ainda a terceira dimensão

Braç.	*Palm.*	*Poll.*	*Linh.*	*Pont.*
54.	0.	3.	0.	0.
5.	5.	4.	0.	0.
270.	1.	7.	0.	0.
27.	0.	1.	6.	0.
2.	7.	0.	1.	10.
299.	9.	0.	7.	10.

tem

tem 4 pollegadas, e 4 pollegadas he a decima parte de 5 palmos, o producto de 4 pollegadas ſerá a decima parte do producto de 5 palmos, e teremos 2 braças, 7 palmos, 1 linha, e 10 pontos, que he o producto de 4 pollegadas, o qual ſommado com os mais productos, darão o producto total 299 braças, 9 palmos, 7 linhas, e 10 pontos.

Para multiplicar 3 dimensões, das quaes a primeira he de 15 braças, 4 palmos, e 3 pollegadas, a ſegunda de 8 braças, 5 palmos, e 5 pollegadas, e a terceira de 6 braças, 5 palmos, e 4 pollegadas, multiplico as duas primeiras dimensões huma por outra para ter o producto, que he 132 braças, 1 palmo,

Braç.	*Palm.*	*Poll.*	*Linh.*	*Pont.*
15.	4.	3.	0.	0.
8.	5.	5.	0.	0.
6.	5.	4.	0.	0.
15.	4.	3.	0.	0.
8.	5.	5.	0.	0.
123.	5.	0.	0.	0.
7.	7.	1.	6.	0.
	9.	5.	2.	3.
132.	1.	6.	8.	3.
6.	5.	4.	0.	0.
793.	1.	0.	1.	6.
66.	0.	7.	4.	1.
6.	6.	0.	8.	9.
865.	8.	0.	2.	4.

mo, 6 pollegadas, 8 linhas, e 3 pontos; e como eſte producto dá braças, e partes de braças quadradas, multiplico tudo pela terceira dimensão, iſto he, por 6 braças, 5 palmos, e 4 pollegadas, e o producto dá 865 braças, 8 palmos, 2 linhas, e 4 pontos.

Para multiplicar trez dimensões, das quaes a primeira he de 4 braças, 2 palmos, e 5 pollegadas, a ſegunda de 3 braças, 2 palmos, e 4 pollegadas, e a terceira de 5 palmos, e 4 pollegadas, multiplico primeiro as primeiras duas dimensões, cujo producto he 13 braças, 8 palmos, 4 pollegadas, 2 linhas, e 11 pontos: depois multiplico eſte producto por 5 palmos, e 4 pollegadas; e como a tercei-

Braç.	*Palm.*	*Poll.*	*Linh.*	*Pont.*
4.	2.	5.	0.	0.
3.	2.	4.	0.	0.
0.	5.	4.	0.	0.
4.	2.	5.	0.	0.
3.	2.	4.	0.	0.
12.	7.	7.	0.	0.
0.	8.	4.	2.	4.
	2.	1.	0.	7.
13.	8.	4.	2.	11.
0.	5.	4.	0.	0.
6.	9.	2.	1.	5.
	6.	7.	4.	11.
7.	6.	1.	6.	4.

ceira dimensão não tem braças, ponho huma cifra no ſeu lugar, e multiplico por 5 palmos, e 4 pollegadas, tomando primeiramente por 5 palmos metade de 13 braças, 8 palmos, &c., e o producto ſerá 6 braças, 9 palmos, 2 pollegadas, 1 linha, e 5 pontos, e a decima parte deſte ultimo producto ſerá o producto de 4 pollegadas, por ſerem 4 pollegadas a decima parte de 5 palmos: ſommo finalmente eſtes productos, e ſerá o producto total 7 braças, 6 palmos, 1 pollegada, 6 linhas, e 4 pontos.

Eſtas regras das multiplicações para as ſuperficies, e ſolidos, cujos lados foſſem braças, ou partes de braça, ſerião baſtantes para com ellas ſe fazerem todas as caſtas de medições, ſe todas ellas ſe fizeſſem por braças cubicas, ou partes de braça cubica; como porém prevalece o uſo em contrario neſte Paiz, me pareceo juſto, e aſſim me foi ordenado, pôr aqui huma breve noticia de como ſe fazem as medições no noſſo Reino, do meſmo modo que o achei eſcrito na Geometria Pra-

ti-

tica do Engenheiro Mór do Reino Manoel de Azevedo Fortes no Tom. 1. do ſeu *Engenheiro Portuguez.*

Nas obras de pedreiro ſe obſervão varias medições, pois ſe medem por palmos lineares, e por varas lineares, varas, e braças ſuperficiaes, e braças cubicas.

As hombreiras, vergas, e mais pedraria de portaes, portas, e janellas, a que chamão lancil, ſe mede por palmos lineares; e dando o preço ao numero dos palmos, que ſe achou, eſtá feita a medição. Tambem ſe mede por eſte modo o cavado de pedra, rebaixos, ranhuras, aberturas em pedra para encaixar vigas, &c. mas eſtas ultimas regularmente são avaliadas.

As ſimalhas de pedraria, degráos, cordões de muralhas, bocelões, e betume ſe medem por varas ordinarias de ſinco palmos cada huma.

Os lagedos lavrados, ou toſcos ſe medem por varas ſuperficiaes; são porém eſtas de duas caſtas, humas de 12 palmos e meio, pois são ſuperficies de 5 palmos de comprido, e 2 e meio de lar-

largo; e assim medida a superficie toda, dividida por 12 e meio, dá o numero das varas superficiaes.

Ha outra vara de 7 palmos e meio, e tem sinco palmos de comprido, e palmo e meio de largo, e por esta se mede a incelheria das vitolas, e pedraria nas voltas dos arcos, pés direitos, e todo o reveſtimento de incelheria, e estas obras se medem em algumas Provincias por palmos superficiaes.

Os encaiamentos de alvenaria, simalhas, canos de telhas dobrados, ou singelos, se medem por braças lineares de 10 palmos; e assim repartindo a somma dos palmos por 10, dá o numero das braças.

As abobedas, frontaes, telhados, panos de chaminés, emboços, e rebocos, guarnições, ladrilhos, grades nos alicerces, azulejos, e calçadas se medem por braças superficiaes de 100 palmos quadrados.

As muralhas de fortificação, paredes de edifiios, de quarteis, e armazens, se medem por braças cubicas de 250 palmos cubicos, cuja medida he

hum

hum parallelipipedo de 10 palmos de alto, 10 de largo, e 2 e meio de comprido, cuja braça não he a verdadeira cubica, pois eſta, como já explicámos, conſta de 1000 palmos cubicos: a razão porém de ſe inventar eſta braça, foi o darem regularmente ás paredes 2 palmos e meio de groſſo. Na Provincia de Trás os Montes como tem por coſtume darem á parede 3 palmos de groſſo, uſão da braça de 300 palmos.

ADVERTENCIA.

Uſamos nos exemplos da multiplicação da medida de braça, e palmo para accommodarmos as regras á medida, de que ſe uſa no noſſo Paiz, o que fizemos já nos exemplos da multiplicação das partes alicotas, que vão no Tom. I. Pareceo-nos com tudo não deixar de pôr aqui os meſmos exemplos em toezas, e pés, que vem no original, para dar conhecimento do calculo em toezas, que ſe acha muito ordinariamente nos livros de fortificação.

He pois de ſaber que cada toeza conſta de 6 pés de Rei, que tem cada hum

12 pollegadas, e vem a ter a toeza 72 pollegadas: a toeza quadrada tem 6 pés de largura, e 6 de comprido ſem altura, ou profundidade: a toeza cubica tem 6 pés de comprimento, 6 de altura, e 6 de largura; e conſequentemente a toeza quadrada terá 36 pés quadrados, e a toeza cubica 216 pés cubicos.

He de advertir que no calculo dos planos, e ſolidos não attendemos, como já diſſemos, quando calculamos por braças, a quantos pés quadrados, ou cubicos ſe neceſſitavão para a braça cubica, porque para fazer o calculo mais facil ſuppuzemos por hum pé de toeza cubica a ſexta parte da meſma toeza cubica, aſſim como por pé de toeza quadrada tomamos a ſexta parte da toeza quadrada, de ſorte que hum pé de toeza quadrada he hum rectangulo, que tem huma toeza de comprido, e hum pé de largo, e vem a ſer igual a 6 pés.

O meſmo podemos dizer das pollegadas, e linhas de toeza quadrada, porque huma pollegada he hum rectangulo, que tem a baſe igual a huma pol-

le-

legada, e por altura huma toeza: a linha hum rectangulo, que tendo a baſe igual a huma linha, tem huma toeza por altura: finalmente o ponto he hum rectangulo, que tendo por baſe hum ponto, tem por altura huma toeza, e aſſim ſe vê que 12 pontos de toeza quadrada fazem 1 linha, 12 linhas, 1 pollegada, 12 pollegadas, 1 pé, e 6 pés, 1 toeza quadrada, pois todas eſtas quantidades tem a meſma altura. O meſmo moſtraremos a reſpeito dos pés, pollegadas, linhas, e pontos da toeza cubica, depois de darmos alguns exemplos das multiplicações de duas dimensões expreſſadas por toezas, e partes de toezas lineares.

Se quizermos multiplicar 10 toezas, 4 pés, e 8 pollegadas por 5 toezas, diſporei os numeros, como moſtra o exemplo, e digo: 5 vezes 8 são 40; e como são 40 unidades, que valem cada huma hum pequeno rectangulo, que tem por baſe huma pollegada, e huma toeza de altura, vem a ſer 40 pollegadas de toe-

Toez.	*Pés.*	*Poll.*
10.	4.	8.
5.	0.	0.
53.	5.	4.

zas

zas quadradas: vejo quantas vezes cabem 12 pollegadas de toeza quadrada, porque cada 12 pollegadas valem 1 pé; e como cabem 3 vezes, e reſtão 4, eſcrevo 4 no lugar das pollegadas, e conſervo os 3 pés; depois digo: 5 vezes 4 são 20, e 3, que tenho, fazem 23, cada unidade dos quaes vale 1 pé de toeza quadrada; e como 6 pés fazem huma toeza, vejo quantas vezes ha 6 em 23; e como ha 3 com hum reſto 5, ponho 5 no lugar dos pés, e conſervo 3, que são outras tantas toezas quadradas, que junto com o producto de 50 por 5, para ter 53; e acabada aſſim a operação, terei 53 toezas, 5 pés, e 4 pollegadas.

Para multiplicar 60 toezas, 3 pés, e 9 pollegadas por 84 toezas, como o numero 84 he muito grande, cançaria a memoria, multiplicando pelos pés, e pollegadas; porque além de ſe não poder logo ſaber quanto fazem 84 vezes 9, ainda

Toezas.	*Pés.*	*Poll.*
60.	3.	9.
84.	0.	0.
240.	0.	0.
480.	0.	0.
42.	0.	0.
10.	3.	0.
5092.	3.	0.

ſuppondo que ſe ſabia logo, era embaraço o ſaber quantos pés fazião, ſem outra operação de os dividir por 12, e eſta meſma difficuldade ſe encontrava nos pés, linhas, e pontos. Para a evitar ſe obra de hum modo muito ſimples na multiplicação dos pés, pollegadas, e linhas, quando o numero da ſegunda dimensão conſta de mais de hum caracter: multiplicão-ſe os inteiros pelos inteiros, iſto he, 60 por 84, e eſcrevo o ſeu producto do modo ordinario: depois he de notar, ſe ſe em lugar de 3 pés houveſſe que multiplicar huma toeza por 84, o ſeu producto ſerião 84 toezas; e como 3 pés são metade de huma toeza, o ſeu producto ſerá metade do producto de huma toeza, e aſſim eſcrevo pelo producto de 3 pés 42 toezas.

Ainda nos faltão 9 pollegadas para multiplicar: buſco pois a razão de 9 pollegadas com 3 pés, aſſim como buſquei a de 3 pés á toeza; e como 3 pés valem 36 pollegadas, 9 são hum quarto de 3 pés: logo o producto de 84 toezas por 9 pollegadas deve ſer a quarta par-

parte do producto de 84 toezas por 3 pés, ou a quarta parte de 42, que são 10 toezas, e 3 pés, depois do que ſommo os trez productos para ter o total 5092 toezas, e 3 pés.

Para multiplicar 15 toezas, 4 pés, 8 pollegadas, e 7 linhas por 6 toezas, 3 pés, e 6 pollegadas, como o numero das toezas da ſegunda dimensão tem ſó hum caracter, poſſo por elle multiplicar por hum calculo de memoria toda a primeira dimensão, dizendo: 6 vezes 7 são 42 linhas, que valem 3 pollegadas, e 6 linhas, porei as 6 linhas no ſeu lugar, conſervando as pollegadas: depois 6 vezes 8 são 48, e 3 fazem 51 pollegadas, que valem 4 pés, e 3 pollegadas, eſcrevo as 3 pollegadas, e ficão os 4 pés; venho á multiplicação dos pés, dizendo: 6 vezes 4 são 24, e 4 são 28, que fazem 4 toezas, e ficão 4 pés, que eſcrevo no lugar dos pés, e con-

Toezas.	*Pés.*	*Poll.*	*Linh.*	*Pont.*
15.	4.	8.	7.	0.
6.	3.	6.	0.	0.
94.	4.	3.	6.	0.
7.	5.	4.	3.	6.
1.	1.	10.	8.	7.
103.	5.	6.	6.	1.

conſervo as 4 toezas, que accreſcento ao producto de 15 toezas por 6, e terei 94 toezas, e vem a ſer o producto de 6 toezas pela primeira dimensão 94 toezas, 4 pés, 3 pollegadas, e 6 linhas.

Depois faço reflexão, que havendo a primeira quantidade de ſer multiplicada por 3 pés, ſendo eſta metade de 1 toeza, deve o ſeu producto ſer metade da primeira dimensão, que neſte caſo ſe ſuppõe multiplicada por 1 toeza, e aſſim eſcreverei metade do ſeu producto, que são 7 toezas, 5 pés, 4 pollegadas, 3 linhas, e 6 pontos.

Reſta-nos para multiplicar a primeira dimensão por 6 pollegadas, que ſendo a ſexta parte de 3 pés, ſerá o ſeu producto a ſexta parte do producto de 3 pés; e tomando a ſexta parte deſte producto, acho ſer 1 toeza, 1 pé, 10 pollegadas, 8 linhas, e 7 pontos; e ſommados os trez productos, me dão o total 103 toezas, 5 pés, 6 pollegadas, 6 linhas, e 1 ponto.

Se tivermos para multiplicar 15 toezas, 4 pés, 8 pollegadas, e 7 linhas

por

por 6 toezas, 3 pés, e 6 pollegadas, multiplicarei toda a primeira dimensão por 6 toezas, abſtrahindo dos 3 pés, e 6 pollegadas. Depois conſidero que havendo de multiplicar a primeira dimensão pelas partes da toeza, devem os productos ter a meſma razão que as partes tem com a toeza; o que ſuppoſto, havendo de multiplicar-ſe a primeira dimensão por 3 pés, ſendo eſtes metade de huma toeza, deve o ſeu producto ſer metade da primeira dimensão, que neſte caſo ſe ſuppõe multiplicada por 1 toeza, e aſſim tómo metade da primeira dimensão, que são 7 toezas, 5 pés, 4 pollegadas, 3 linhas, e 6 pontos.

Toez.	Pés.	Pol.	Lin.	Pont.
15.	4.	8.	7.	0.
6.	3.	6.	0.	
94.	4.	3.	6.	0.
7.	5.	4.	3.	6.
1.	1.	10.	8.	7.
103.	5.	6.	6.	1.

Como ainda nos reſtão para multiplicar 6 pollegadas, conſidero que ſendo 6 pollegadas a ſexta parte de 3 pés, o producto de 6 pollegadas ſerá a ſexta parte do de 3 pés, e aſſim tómo a ſexta parte deſte producto, que me dá

1 toe-

1 toeza, 1 pé, 10 pollegadas, 8 linhas, e 7 pontos, que ſommados com os productos antecedentes, dá o total producto 103 toezas, 5 pés, 6 pollegadas, 6 linhas, e 1 ponto.

Para multiplicar 68 toezas, 3 pés, 4 pollegadas, e 9 linhas por 9 toezas, 4 pés, e 9 pollegadas, começo multiplicando a primeira dimensão, e o producto dá 617 toezas, 6 pollegadas, e 9 linhas. Depois como 4 pés são os dous terços da toeza, tómo duas vezes o terço para me embaraçar menos, e eſcrevo duas vezes 22 toezas, 5 pés, 1 pollegada, e 7 linhas: ainda me reſtão para multiplicar 9 pollegadas, que divido em dous productos de 6, e 3 pollegadas, tomando por 6 pollegadas a quarta parte do producto de 2 pés, e ſerá 5 toezas, 4 pés, 3 pollegadas, 4 linhas, e 9 pontos; e pelo producto de 3 pollegadas tomarei metade do precedente, que

Toez.	*Pés.*	*Pol.*	*Lin.*	*Pont.*
68.	3.	4.	9.	0.
9.	4.	9.	0.	0.
617.	0.	6.	9.	0.
22.	5.	1.	7.	0.
22.	5.	1.	7.	0.
5.	4.	3.	4.	9.
2.	5.	1.	8.	4.
671.	2.	3.	0.	1.

que he 2 toezas, 5 pés, 1 pollegada, 8 linhas, e 4 pontos; e ſommados todos, terei o producto total 671 toezas, 2 pés, 3 pollegadas, e 1 ponto.

Até agora temos tratado do calculo para as ſuperficies, pois ſó ſuppuzemos duas dimensões: he verdade que o de trez não differe muito do precedente, pois ſó conſiſte em multiplicar primeiro duas dimensões, e o producto tornallo a multiplicar pela terceira.

Já diſſemos que a toeza cubica conſta de 216 pés cubicos, mas no calculo não attendemos a eſta caſta de pés, porque por 1 pé cubico tomamos a ſexta parte da toeza cubica, que vale 36 pés cubicos, que fazem hum parallelipipedo, que tendo por baſe 1 toeza quadrada, tem 1 pé de altura. Tambem a pollegada de toeza cubica he hum parallelipipedo, que tendo por baſe 1 toeza quadrada, tem 1 pollegada de altura. O meſmo he proporcionalmente da linha, e mais partes da toeza cubica.

Deſtas definições ſe ſegue que 12 linhas de toeza cubica fazem 1 pollega-

da

da da meſma toeza, 12 pollegadas 1 pé, e 6 pés 1 braça, pois todos são ſolidos, que tem por baſe a toeza quadrada, e alturas, que juntas podem dar toezas cubicas, ou partes de toezas cubicas, como vão moſtrar as ſeguintes operações.

Para multiplicar trez dimensões, das quaes a primeira tem 8 toezas, 2 pés, e 4 pollegadas, a ſegunda 6 toezas, 4 pés, e 8 pollegadas, a terceira 5 toezas, 3 pés, e 6 pollegadas, começarei a operação, multiplicando as duas primeiras dimensões, cujo producto ſerá 56 toezas, 5 pés, 1 pollegada, 9 linhas, e 4 pontos, que depois multiplicarei pela terceira, conforme as regras já dadas, iſto he, como ſe eſte producto foſſe huma dimenſão;

Toez.	*Pés.*	*Pol.*	*Lin.*	*Pont.*
8.	2.	4.	0.	0.
6.	4.	8.	0.	0.
5.	3.	6.	0.	0.
8.	2.	4.	0.	0.
6.	4.	8.	0.	0.
50.	2.	0.	0.	0.
2.	4.	9.	0.	0.
2.	4.	9.	0.	0.
	5.	7.	0.	0.
56.	5.	1.	9.	4.
5.	3.	6.	0.	0.
284.	1.	8.	10.	8.
28.	2.	6.	10.	8.
4.	4.	5.	1.	9.
317.	2.	8.	11.	1.

são; digo pois: 5 vezes 4 são 20, que são outros tantos pontos de toeza cubica, ou parallelipipedos, que tendo 1 toeza quadrada por baſe, tem hum ponto de altura; porque ſe bem advertimos cada unidade do numero 4 he hum parallelogramo, que tem por baſe 1 ponto, e por altura 1 toeza, pois são pontos de toeza quadrada; e multiplicando eſte parallelogramo por toezas lineares, ſe mudão em parallelipipedos, que tem duas dimensões de 1 toeza, que fazem 1 toeza quadrada. Do meſmo modo, multiplicando 9 linhas de toeza quadrada por toezas, reſultão pequenos parallelipipedos, que tem por baſe 1 toeza quadrada, e 1 linha por altura. O meſmo ſuccede nos pés, e pollegadas. A reſpeito das toezas não ha dúvida que multiplicando toezas quadradas por toezas lineares, o producto são toezas cubicas.

Aſſim multiplicando 56 toezas, 5 pés, 1 pollegada, 9 linhas, e 4 pontos de toeza quadrada por 5 toezas lineares, ſerá o producto 284 toezas, 1 pé, 8 pollegadas, 10 linhas, e 8 pontos

tos de toeza cubica. Ora como 56 toezas, 5 pés, 1 pollegada, 9 linhas, e 4 pontos, multiplicados por 1 toeza, darião toezas, e partes de toeza cubica, que ſe podião expreſſar por eſte meſmo numero, ſupponho eſta multiplicação feita, metade deſte numero ſerá o producto de 3 pés, e por elle tomarei 28 toezas, 2 pés, 6 pollegadas, 10 linhas, e 8 pontos, que são as toezas, e partes de toeza cubica, que compõe o producto de 3 pés.

Finalmente como temos ainda que buſcar o producto de 6 pollegadas, ſendo eſta a ſexta parte de 3 pés, o ſeu producto ſerá a ſexta parte do de 3 pés, e são 4 toezas, 4 pés, 5 pollegadas, 1 linha, e 9 pontos; e ſommando todos eſtes productos, terei por producto total 317 toezas, 2 pés, 8 pollegadas, 11 linhas, e 1 ponto.

Para multiplicar trez dimensões, das quaes a primeira he 15 toezas, 5 pés, e 3 pollegadas, a ſegunda 8 toezas, 3 pés, e 9 pollegadas, a terceira 6 toezas, 2 pés, e 6 pollegadas, multiplicarei primeiro as duas primeiras

ras dimensões para ter o producto, que he 136 toezas, 5 pés, 6 pollegadas, 4 linhas, e 6 pontos; e como este producto me dá toezas, e partes de toeza quadrada, multiplicarei este todo pela terceira dimensão, isto he, por 6 toezas, 2 pés, e 6 pollegadas, e o producto me dará toezas cubicas 878, 3 pés, 5 pollegadas, 10 linhas, e 10 pontos.

Toez.	*Pés.*	*Poll.*	*Linh.*	*Pont.*
15.	5.	3.	0.	0.
8.	3.	9.	0.	0.
6.	2.	6.	0.	0.
15.	5.	3.	0.	0.
8.	3.	9.	0.	0.
127.	0.	0.	0.	0.
7.	5.	7.	0.	0.
1.	5.	10.	10.	6.
136.	5.	6.	4.	6.
6.	2.	6.	0.	0.
821.	3.	2.	3.	0.
45.	3.	10.	1.	6.
11.	2.	5.	6.	4.
878.	3.	5.	10.	10.

CA-

CAPITULO IV.

Das medições das obras de Carpinteiro.

OS Francezes usão na medição das ſuas obras de madeira de huma medida de 3 pés cubicos, a que chamão *Soliva*; de ſorte, que havendo hum madeiro, cujo comprimento ſeja por exemplo de 6 pés, a largura de 1 pé, e a groſſura de 6 pollegadas, faz juſtamente huma *Soliva*, pois multiplicadas eſtas trez dimensões, dá no ſeu producto 3 pés cubicos; e como a toeza cubica tem 216 pés cubicos, ſegue ſe que huma toeza tem 72 *Solivas*, pois 216 divididos por 3 dá no quociente 72.

Dividem tambem a *Soliva* em 6 partes, a que chamão pés de *Soliva*, que he huma quantidade, que tem 6 pés de comprido, 1 pé de largo, e 1 pollegada de groſſura.

Como hum pé de toeza tem 36 pés cubicos, ſegue-ſe que ſerá a *Soliva* a 12.ª parte do pé de toeza; e como o meſ-

meſmo pé de *Soliva* he a ſexta parte da *Soliva*, ſerá o pé de *Soliva* a 72.ª parte de 1 pé de toeza cubica, pois são preciſos 6 pés de *Soliva* para fazerem huma *Soliva*, e 12 *Solivas* valem 1 pé de toeza cubica; e como tambem o pé de *Soliva* ſe divide em 12 pollegadas de *Soliva*, ſendo a pollegada de *Soliva* a 12ª parte da *Soliva*, ſerá a 72.ª parte da pollegada de toeza cubica: o meſmo ſe póde dizer das linhas, e pontos da *Soliva* a reſpeito das linhas, e pontos da toeza cubica.

Do que ſe ſegue que feito o calculo de madeira em toezas, e partes de toezas cubicas, multiplicando o producto por 72, dará o numero das *Solivas*.

Supponhamos por exemplo, que temos hum madeiro, que tem 2 toezas, 3 pés, e 6 pollegadas cubicas, como cada toeza vale 72 toezas, cada pé 72 pés de *Soliva*, e cada pollegada 72 pollegadas de *Soliva*, multiplicando tudo por 72, terei o numero de *Solivas*.

Toez.	*Pés.*	*Poll.*
2.	3.	6.
72.		
144.		
46.		
6.		
186. *Solivas.*		

Aſ-

Aſſim querendo fazer-ſe o calculo de ſemelhantes obras, conforme a medida Franceza, ſe farão as operações por toezas, pés, &c., conforme as regras já enſinadas, e o producto que ſahir ſe multiplicará por 72 para ter o numero das *Solivas*.

No noſſo Paiz tem a madeira diverſas medições. A madeira, que vem para a Ribeira das Náos, ſe coſtuma medir por pés cubicos, cujo calculo não tem mais difficuldade que obſervar as regras, que ficão enſinadas, com a reflexão, de que cada pollegada de pé cubico he hum ſolido, que tem hum pé quadrado por baſe, por altura huma pollegada, que vem a ſer a 12.ª parte do pé, que vale cada huma 144 pollegadas cubicas.

Nas mais obras uſão os medidores de duas caſtas de medidas: os aſſoalhados, forros, e toda a obra de taboado delgado coſtumão medir por duzias de taboas, ſuppondo cada taboa de 12 palmos de comprimento, e 1 de largo, e vem a ſer a ſuperficie de cada duzia de taboa de 144 taboas.

A

A pratica he medir a ſuperficie em palmos, multiplicando o comprimento pela largura; e o producto dividido por 144, dá no quociente o numero das duzias.

As molduras ſe medem em palmos lineares, contando por cada 12 palmos huma taboa, ſem fazer caſo da largura, pois o que lhe falta para a largura dão pelo feitio, e ao que ſe deſperdiçou; e quando o feitio he muito, contão por cada 12 palmos duas taboas; mas iſto mais he huma avaliação, que medição. Tambem medem por duzias de taboas os ripados, dividindo a ſuperficie em palmos por 144; mas eſte modo de medir he muito máo, como bem adverte o Engenheiro Mór Manoel de Azevedo Fortes, pois tambem entra na medição, e ſe conta o intervallo entre ripa, e ripa.

A madeira groſſa ſe mede por carros, que são ou de 10, ou de 20 palmos.

Os barrotes, varas, e a madeira mais delgada ſe medem por carros de 20 palmos; e aſſim ſommados os comprimentos

tos todos em palmos, e dividindo a ſua ſomma por 20, ſahe o numero dos carros.

As vigas, e madeira groſſa ſe medem por carros de 10 palmos.

O meſmo Engenheiro Mór Manoel de Azevedo Fortes diz, que não acha inconveniente neſte modo de medir, *com condição que ſe não meção vigas por vigotas, nem ſe dê o meſmo valor aos páos delgados que aos mais groſſos*; mas neſte calculo de obras de Carpinteiro não tem exacção nenhuma, pois o meſmo, e diverſos madeiros, de que ſe não medem mais que o comprimento, tem diverſas groſſuras, e não ſe lhes mede a ſolidez, mas ſó os comprimentos.

As mais obras de Carpinteiro, como portas, caixilhos, janellas, &c. ſe pagão por avaliação.

FIM DO DECIMOPRIMEIRO LIVRO.

NO-

NOVO CURSO DE MATHEMATICA.

LIVRO XII.

APPLICA-SE A GEOMETRIA á medição das ſuperficies, e ſolidos.

CAPITULO I.

Da medida das ſuperficies.

PROPOSIÇÃO I.

PROBLEMA.

784 MEDIR as figuras triangulares.

Para achar a ſuperficie de hum triangulo rectangulo ABC, cuja baſe BC ſeja de 8 palmos, e a altu- Eſtamp. 10 Figura 45.

tura AB de 5, multiplique-ſe metade da baſe AC por toda a perpendicular AB, ou metade da perpendicular por toda a baſe, e o producto 20 palmos ſerá o valor do triangulo. *

Tom. II. * Numer. 389.

785 Se o triangulo não for rectangulo, como DEF, ſerá preciſo conhecer a perpendicular EG *, conhecidos os lados, e multiplicar metade da baſe por toda a perpendicular, ou metade da perpendicular por toda a baſe.

Tom. II. * Numer. 414.

Figura 46.

786 Mas como póde ſucceder que a perpendicular em vez de cahir dentro no triangulo caia fóra, como KL neſte caſo, buſque-ſe o ſeu valor *, e multiplique-ſe por metade da baſe IK.

Tom. II. * Numer. 412.

787 Se finalmente tiveſſemos ſómente os trez lados de hum triangulo, poderiamos ter tambem a ſuperficie, ſegundo o que já fica enſinado *, iſto he, ſuppondo o lado DE de 10 palmos, EF de 11, e DF de 13: ſommem-ſe todos para ter 34 palmos, e teremos metade 17, a differença dos lados são 7, 6, 4: depois multipliquem-ſe os quatro termos 17, 7, 6, 4 hum por outro, iſto he, 17 por 7, que dará 119

Tom. II. * Numer. 531.

eſ-

eſte producto por 6 para ter 714; e eſte producto por 4, que dá 2856, cuja raiz quadrada, que são 52 palmos, 3 pollegadas, e 7 linhas de palmo quadrado, he a ſuperficie do triangulo DEF.

PROPOSIÇÃO II.

PROBLEMA.

788 Achar a ſuperficie dos quadrilateros.

Para achar a ſuperficie do quadrado AC, cujo lado ſeja por exemplo de 7 palmos, baſta multiplicar 7 por ſi meſmo, iſto he, AB por BC, e o producto 49 he o valor do quadrado AC. Figura 47.

789 Se em lugar do quadrado tiveſſemos que medir o rectangulo DF, cuja baſe DE ſe ſuppõe de 5 palmos, e a altura EF de 12, multiplique-ſe 5 por 12, e o producto 60 palmos he o valor do rectangulo. Figura 48.

790 Porém ſe em vez do rectangulo DF tiveſſemos para medir o parallelogramo GK, ſeria preciſo continuar a baſe GL, e baixar a perpendicular Figura 49.

Tom. II. * Numer. 384. KI, que será a altura do parallelogramo *; e ſuppondo ſer eſta perpendicular de 10 palmos, e a baſe GL de 4, multiplique-ſe 10 por 4, e o producto 40 palmos he o valor do parallelogramo.

Figura 50. 791 Se a figura he hum trapezoide, como ABCD, e o lado AB for perpendicular aos lados parallelos BC, e AD, juntem-ſe eſtes dous lados, accreſcentando o ſegundo ao primeiro, para terem a baſe do triangulo ABE, que he igual ao trapezoide: aſſim ſuppondo BC de 4 palmos, AD de 10, e a altura BA de 12, a baſe AE, ou a ſomma dos dous lados será 14, que ſe deve multiplicar por 6, metade da perpendicular, e teremos 84, producto da ſuperficie do triangulo ABE, que he a meſma do trapezoide, porque os triangulos BCF, e FDE são iguaes.

Tom. I. * Numer. 232. 792 Se quizermos achar por outro modo a ſuperficie do trapezoide, buſcaremos huma meia arithmetica * GF entre BC, e AD, iſto he, entre 4, e 10, e acharemos que he 7; e multiplicando eſta meia por toda a altura BA,

que

que he 12, teremos 84, valor da ſuperficie; o que he evidente, porque o rectangulo ABHI he igual ao trapezoide ABCD, porque o triangulo CFH he igual a FID.

PROPOSIÇÃO III.

PROBLEMA.

793 Medir as ſuperficies dos polygonos regulares, e irregulares.

Se quizermos medir a ſuperficie de hum polygono regular, tire-ſe do centro E a perpendicular EB ſobre hum dos lados CD, e tirem-ſe os raios EC, ED, que farão o triangulo *Iſoceles* ECD; e como ſe conhecem os angulos da baſe deſte triangulo, por ſer o polygono regular, e além diſſo ſe conhece o lado CD, teremos conhecido o triangulo rectangulo EBD, do qual facilmente conheço o lado EB *; e ſuppondo que ſe achou de 6 palmos, ſe ſommem todos os lados do polygono, cuja ſomma ſerá por exemplo 48, que multiplicados por 3, metade da perpendicular, dão 144 palmos por valor do polygono. Figura 51.

* Numer. 713.

Se

794 Se o polygono he irregular,
Figura 52. como ABCDEF, tirem-ſe do ponto E as linhas EA, EB, EC, que dividirão o polygono em quatro triangulos, dos quaes o primeiro terá por altura a perpendicular FG, o ſegundo a perpendicular AH, o terceiro a perpendicular CI, e o quarto a perpendicular DK. Iſto ſuppoſto, ſe ſe mede no terreno com a vara, e cordel, ou ſobre o papel com hum petipé o valor das perpendiculares, como tambem as linhas, ſobre que cahem as perpendiculares, baſta fazer tantas multiplicações, quantos são os triangulos; e ſommando todos os productos, teremos o valor do polygono.

PROPOSIÇÃO IV.

PROBLEMA.

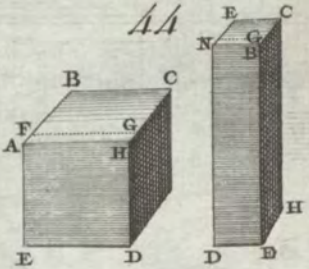
Eſtamp. 11 795 Medir as ſuperficies dos circulos, ou das ſuas partes.

Figura 53. Para medir a ſuperficie de hum circulo AB, deve-ſe conhecer o valor do ſeu diametro, e da ſua circumferencia, como já diſſemos *, e multiplicar meta-

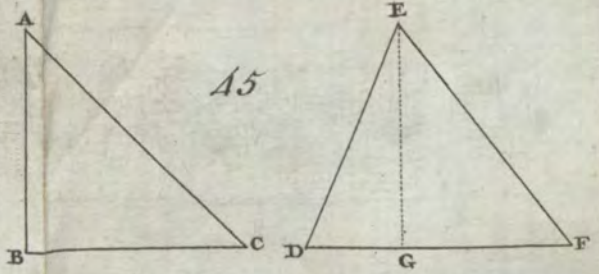
Tom. II. * Numer. 485.

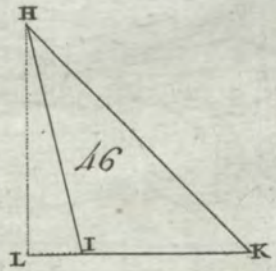
43

44

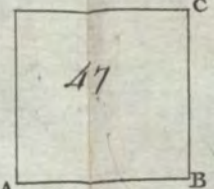


45

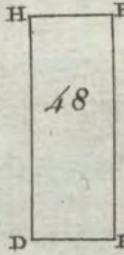




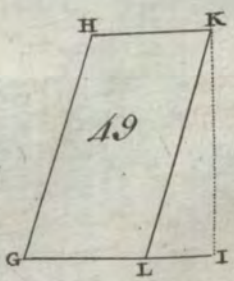
46



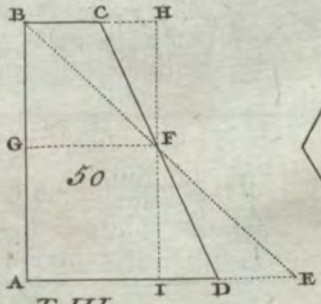
47



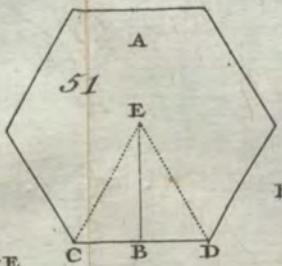
48



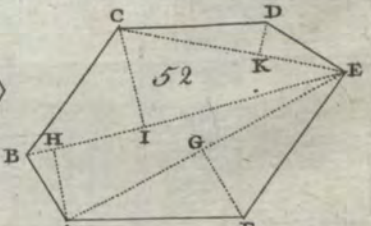
49



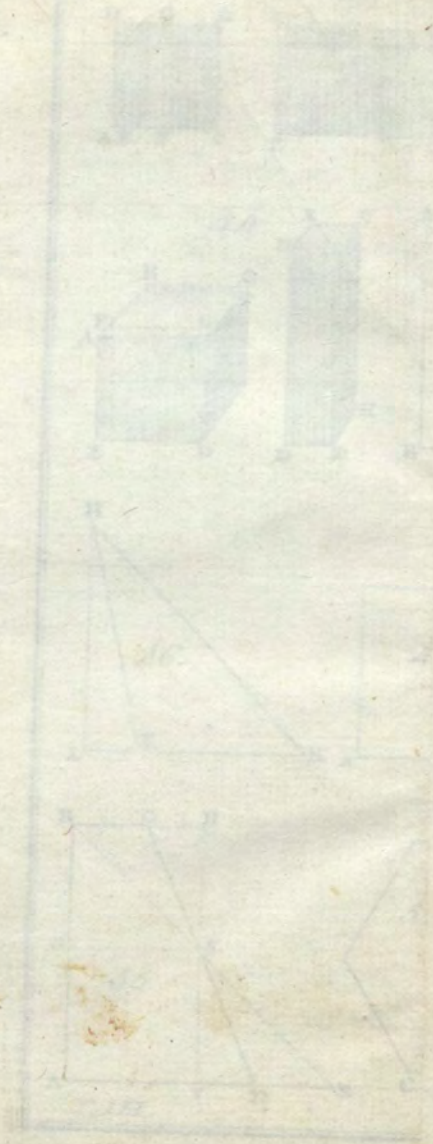
50



51



52



tade da circumferencia por metade do diametro, e o producto será o valor do circulo. Por exemplo. Para achar a superficie de hum circulo, cujo diametro he 14, busco a sua circumferencia, que será 44; e tomando metade 22, e metade de 14, que são 7, e multiplicando estes dous numeros entre si, o seu producto será a superficie do circulo 154.

Tambem póde servir a razão de 14 a 11, que expressa a do quadrado do diametro de hum circulo á superficie do mesmo circulo, conforme fica dito *: assim suppondo que o diametro sejão 15 palmos, quadrando este diametro, terei 225; depois digo: 14 a 11, como o quadrado do diametro 225 á superficie do circulo, que se achará de $176\frac{11}{14}$.

* Tom. II. Numer. 491.

796 Se quizermos saber a superficie de hum sector de circulo, he preciso conhecer o angulo formado pelos dous raios, e o valor do raio; e suppondo que o angulo do sector ABC he de 60 gráos, e o raio de 7 palmos, buscarei primeiramente o valor do circulo, de que he parte o sector, o qual

Figura 54.

se

ſe acha ſer de 154, e faço huma regra de trez, dizendo: ſe 360, valor de toda a circumferencia, me dá por ſuperficie 154, quanto me dará 60, valor do arco do ſector, pela ſua ſuperficie? e acharei 25 palmos, e 2 terços.

797. Finalmente para achar o valor Figura 55. de hum ſegmento de circulo com DGF, principiarei fazendo hum ſector, de que ſe buſque a ſuperficie, que ſupponho ſer 25 palmos, e 6 pollegadas. Iſto ſuppoſto, ſe buſcará a ſuperficie do triangulo DEF, que ſe achará quaſi de 21 palmos; e tirando eſta quantidade de 25 palmos, e 6 pollegadas, o reſto 4 palmos, e 6 pollegadas ſerá o valor do ſegmento.

PROPOSIÇÃO V.

PROBLEMA.

798 Medir a ſuperficie de huma Ellipſe.

Figura 56. Tom. II. Numer. 32. Já diſſemos * que os elementos FH, e EL de hum quarto de circulo eſtavão na meſma razão que os elementos FG, e ED do quarto da Ellipſe, e por conſe-

ſequencia a ſomma de todos os antecedentes terá a meſma razão á ſomma de todos os conſequentes, que hum antecedente ao ſeu conſequente *, iſto he, o quarto de circulo EAI he ao quarto da Ellipſe EAD, como EI a ED, ou tambem como AB a CD; e ſe em lugar do quarto de circulo, e do quarto da Ellipſe tomarmos todo o circulo, e toda a Ellipſe, teremos a meſma razão do circulo á Ellipſe, que tem a linha AB, e CD, o que moſtra que a ſuperficie de hum circulo, que tiver por baſe o eixo maior da Ellipſe, he á ſuperficie da Ellipſe, como o eixo maior ao menor; e ſuppondo que o eixo maior AB he de 14 palmos, o menor CD de 8, para achar a ſuperficie da Ellipſe ſe deve buſcar a do circulo do eixo maior, que ſe achará ſer de 154 palmos, e depois dizer: ſe o eixo maior 14 me deo 8, a ſuperficie do circulo 154, que dará por ſuperficie da Ellipſe? que acharei ſer de 88 palmos; e como as ſuperficies dos circulos eſtão na razão dos quadrados dos ſeus diametros, póde-ſe tambem dizer que a das Ellipſes eſtão na ra-

Tom. I. * Numer. 220.

razão composta dos seus eixos, que por consequencia se póde tomar em lugar da de seus diametros os rectangulos feitos dos mesmos eixos; e como não ha quadrado, que não possa ser producto das dimensões de hum rectangulo, que lhe seja igual, póde-se achar a superficie da Ellipse precedente, multiplicando os dous eixos 14, e 8 hum por outro para ter 112, que servirá em lugar do quadrado do seu diametro, e depois dizer: 14 a 11, como 112 á superficie da Ellipse, que se achará ser de 88 palmos.

PROPOSIÇÃO VI.

PROBLEMA.

799 Medir o espaço comprehendido por huma parabola.

Figura 57. Se tivessemos para medir a parabola ABC, cujo eixo BD seja de 9 palmos, e a maior ordenada DA de 12, toda a linha AC será de 24. Isto supposto, digo que a area da parabola ABC se acha, multiplicando a linha AC pelos dous terços do eixo BD, isto he, 24 por 6, que

que dará o producto 124, que he a area, que ſe buſca. A razão deſta operação eſtá em que o eſpaço ABC he os dous terços do rectangulo AEFC: para o provar moſtraremos que os eſpaços AE, BK he a terça parte do rectangulo AEBD.

Divida-ſe a recta EB em qualquer numero de partes iguaes, e tirem-ſe pelos pontos das divisões as linhas GH, e IK parallelas a AE, e veremos * que pela propriedade da parabola o quadrado de BG he ao quadrado de BI, como GH a IK; mas eſtando as partes, que ſe ſeguem da linha EB em proporção arithmetica, os quadrados das linhas BG, BI ſerão os dous termos da progreſsão arithmetica, e por conſequencia os elementos GH, e IK eſtão na meſma razão que os quadrados dos termos de huma progreſsão arithmetica: aſſim o eſpaço AEBK contém huma quantidade infinita de elementos, que eſtão na meſma razão que os quadrados dos termos infinitos de huma progreſsão arithmetica; mas como o valor de todos eſtes quadrados ſe acha *, multiplicando

Tom. II. * Numer. 605.

Tom. II. * Numer. 554.

do o maior quadrado pela terça parte da grandeza, que expreſſa os numeros dos termos, para achar o valor de todos os elementos, que compõe o eſpaço AEBK, ſe deve multiplicar o maior elemento EA pela terça parte da linha EB, que expreſſa a quantidade, o que moſtra que eſte eſpaço he a terça parte do rectangulo AEBD, e por conſequencia o eſpaço AKBD da parabola he os dous terços.

REFLEXÃO.

He abſolutamente neceſſario, aos que ſe querem applicar a ſer bons Engenheiros, ſaber medir bem as figuras planas, que ſe encontrão continuamente na medição das obras de fortificação, e civis; porque os telhados, os forros, calçadas, o guarnecido das paredes rebocadas, os vidros, os adobes, com que ſe reveſtem as obras de terra, ſe medem por braças quadradas, e todas as figuras, que podem formar-ſe, ſe reduzem a rectangulos, e triangulos.

PRO-

PROPOSIÇÃO VII.

PROBLEMA.

800 Medir as ſuperficies dos priſmas, e cylindros.

Para medir a ſuperficie de hum priſma AE multiplique-ſe a ſomma dos lados do polygono, que lhe ſerve de baſe, pela altura do priſma; aſſim ſe o priſma tem por baſe hum exagono, de que cada lado BC ſeja de 4 palmos, e a altura BE de 6, a ſomma dos lados ſerá 24, que multiplicada por 6, dará no producto 144, valor da ſuperficie. Figura 58.

801 Para medir a ſuperficie de hum cylindro, como BC, que tem o diametro de 14 palmos, e a altura de 8, buſcaremos primeiro a circumferencia do circulo, que lhe ſerve de baſe, que ſe achará de 44 palmos: depois diſto ſe multiplique eſta circumferencia por 8, altura do cylindro, e ſe achará ſer a ſuperficie do cylindro 352 palmos. Figura 59.

PRO-

PROPOSIÇÃO VIII.

PROBLEMA.

802 Medir as ſuperficies das pyramides, e dos cones.

Para medir a ſuperficie de huma pyramide recta, que tem por baſe hum
Figura 60. exagono, de que cada lado, como AB, ſe ſuppõe de 6 palmos, e a perpendicular, tirada do vertice ſobre hum dos lados, de 10 palmos, multiplique-ſe
Tom. II. * Numer. 546. metade da ſomma de todos os lados pela perpendicular *, iſto he, 18 por 10, e o producto 180 ſerá a ſuperficie da pyramide.

803 Para ſe ſaber a ſuperficie de hum cone recto, cujo diametro de circulo
Figura 61. de baſe he de 14 palmos, e o lado AD de 12, deve-ſe multiplicar a circumfe-
Tom. II. * Numer. 548. rencia do circulo, que ſe achará ſer de 42 palmos, por metade do lado AD *, iſto he, por 6, e dará a ſuperficie do cone de 624, ou tambem multiplicar metade da circumferencia por todo o lado AD, e dará o meſmo.

PRO-

PROPOSIÇÃO IX.

PROBLEMA.

804 Medir as ſuperficies das eſferas, ſeus ſegmentos, e zonas.

Para medir a ſuperficie de huma eſfera, cujo diametro AG ſe ſuppõe de 14 palmos, buſque-ſe primeiro a circumferencia do circulo deſte diametro, que ſe achará ſer de 44, e eſta ſe multiplique pelo diametro HG, iſto he, por 14, cujo producto dará a ſuperficie da eſfera *, que ſe achará ſer 616. Figura 62. Tom. II. *Numer. 576.

805 Se em lugar da ſuperficie de toda a eſfera quizeſſemos medir ſómente a de hum ſegmento, como ABC, buſquemos primeiro a circumferencia do circulo maximo da eſfera, de que ſe tirou o ſegmento, e conheça-ſe exactamente a perpendicular CD tirada ao centro do circulo AB, e multiplique-ſe a circumferencia do circulo maximo por eſta perpendicular *; e ſuppondo a circumferencia do circulo maximo 44, a perpendicular CD 4, multiplicando hum por outro, teremos 176, valor da ſuperficie do ſegmento. Tom. II. *Numer. 583.

Fi-

806 Finalmente para medir a ſuperficie de huma zona, como EGFH, devemos tambem conhecer a circumferencia do circulo maximo da eſfera, de que ella ſe tirou, e tambem o valor da perpendicular IK, tirada de hum centro a outro dos dous circulos oppoſtos, e multiplique-ſe eſta perpendicular pela circumferencia do circulo maximo *, de que acabámos de fallar. Aſſim ſuppondo que a circumferencia ſeja 44 palmos, e a perpendicular IK de 5, multiplicando hum numero por outro, ſerá 220 palmos o valor da ſuperficie da zona.

Tom. II. * Numer. 583.

REFLEXÃO.

A maior parte dos que eſtudão a Geometria ſabem muito bem que eſta ſciencia he muito util, e que geralmente todas as ſuas propoſições tem ſeu uſo: com tudo como não conhecem a applicação por cauſa de ſe não terem achado em occaſião de lhes ſervir, muitas vezes perguntão para que podem ſervir eſtes, ou aquelles problemas; e como intento ſocegallos deſta inquietação,

ção, procurarei, quanto me for poſſivel, moſtrar a applicação das menores couſas das propoſições precedentes, devendo advertir, que ſendo regularmente os ſinos pyramides, ou cones, e os zimborios figuras eſfericas, as torres dos Caſtellos cubertas com tectos de figura de cones, ou pyramides, preciſa ſaber medir eſtas differentes ſuperficies, para lhes ſaber medir a cubertura.

PROPOSIÇÃO X.

PROBLEMA.

807 Medir a ſolidez dos cubos, parallelipipedos, priſmas, e cylindros.

Para medir a ſolidez de hum cubo AD, de que o lado AB ſeja por exemplo de 6 palmos, quadre-ſe 6 para ter a ſuperficie da baſe, que ſerá 36; e multiplicando eſta baſe pela altura do cubo, iſto he, por 6, teremos 216 palmos, valor do cubo. Figura 63.

808 Do meſmo modo ſe achará tambem o valor dos parallelipipedos, multiplicando a ſuperficie da baſe pela altu- Figura 64.

tura; assim querendo medir o parallelipipedo EH, suppondo que a base tenha 10 palmos de comprido, e 4 de largo, e a sua altura seja de 5 palmos, multiplique-se 4 por 10 para ter 40, que será a superficie da base, que multiplicada pela altura 5, dará 200 palmos cubos, que he a solidez do parallelipipedo.

809 Para medir a solidez de hum
Figura 58. prisma EC, cuja base he hum exagono, deve-se primeiro achar a superficie do exagono, que se buscará, multiplicando a somma dos lados por metade da perpendicular AD; assim sendo o lado BC de 4 palmos, e a perpendicular de 3, e $\frac{1}{2}$, será a somma dos lados 24, que multiplicados por 1, e $\frac{3}{4}$, teremos 42 palmos quadrados, valor da base, que depois se deve multiplicar pela altura BE, que supponho de 6 palmos; e feita a multiplicação, acho 252 palmos cubicos, valor do prisma.

810 Para medir a solidez de hum
Figura 59. cylindro CB, no qual o diametro BD

do

do circulo da baſe he 14 palmos, e a altura AB de 8, buſcaremos primeiramente o valor do circulo, que lhe ſerve de baſe, e para iſſo ſe buſque a circumferencia, que ſerá 44, cuja metade, multiplicada pelo raio do meſmo circulo, dará o valor da baſe do cylindro de 154 palmos, que depois ſe devem multiplicar por 8 para ter 1232 palmos cubicos, que he o valor do cylindro.

Como a ſolidez dos cubos, parallelipipedos, priſmas, e cylindros ſe compõem de huma infinidade de planos ſemelhantes ao que ſerve de baſe a cada hum deſtes ſolidos, e a altura expreſſa á quantidade de planos, de que ſe compõem, ſegue-ſe que para achar a ſolidez de hum corpo dos precedentes ſe deve multiplicar a baſe pela altura.

PROPOSIÇÃO XI.

PROBLEMA.

811 Medir a ſolidez das pyramides, e cones.

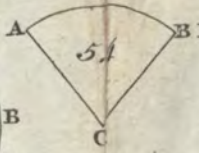
Para medir a ſolidez de huma pyramide, que tem por baſe hum exagono, Figura 60.

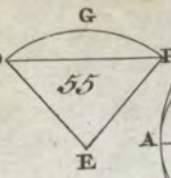
buſque-ſe primeiro a ſuperficie da baſe; aſſim ſuppondo que o lado AB ſeja de 6 palmos, e a perpendicular CE de 6, e $\frac{1}{4}$, ſe achará a ſuperficie da baſe de 121 palmos, e $\frac{1}{2}$, que ſe deve multiplicar pela terça parte do eixo CD da pyramide. Como eſte eixo ſe ſuppõe de 10 palmos, ſe deve multiplicar 121, e $\frac{1}{2}$ por 3, e $\frac{1}{3}$, e o producto 405 palmos cubicos he o ſolido da pyramide.

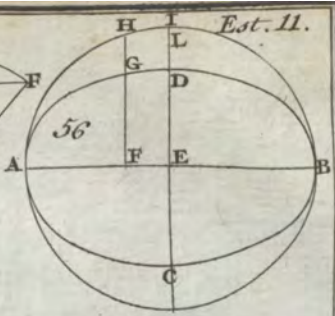
Figura 61. 812 A ſolidez do cone ſe achará do meſmo modo que ſe achou o ſolido da pyramide, e primeiramente ſe medirá a ſuperficie do circulo, que lhe ſerve de baſe, que ſe deve multiplicar pela terça parte do eixo do cone; aſſim querendo medir a ſolidez do cone ADB, no qual o diametro do ſeu circulo he 14 palmos, e o valor do ſeu eixo 9, achar-ſe-ha ſer a ſuperficie da baſe 154 palmos, que multiplicados por 3, terço do eixo, dará 462 palmos cubicos, que he a ſolidez do cone.

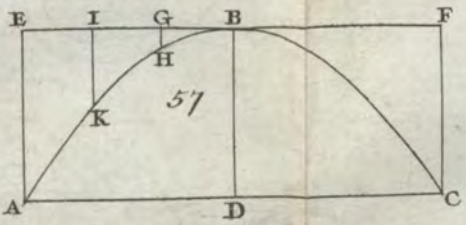
Mul-

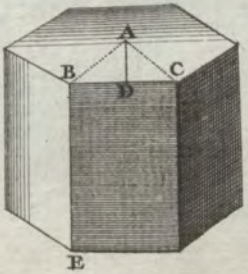
53
A
B

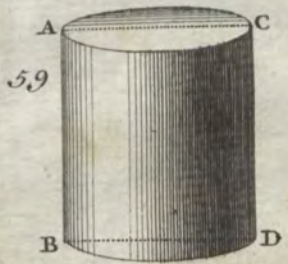

54
A
B
C

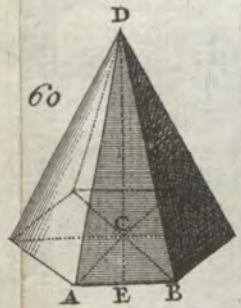

G
55
D
F
E

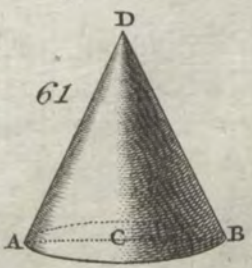

H
I
L
G
D
56
A
F
E
B
C

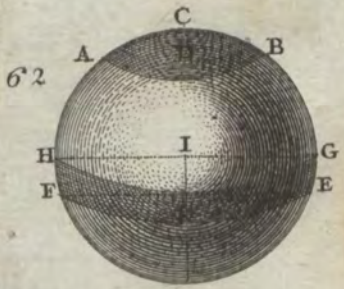

E
I
G
B
F
H
K
57
A
D
C

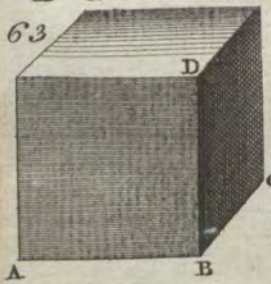

58
A
B
C
D
E

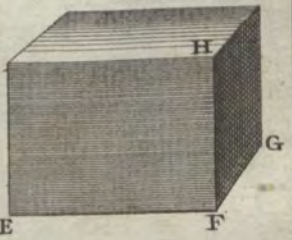

59
A
C
B
D


60
D
C
A
E
B


61
D
A
C
B


62
C
A
B
H
I
G
F
E


63
D
C
A
B


64
H
G
E
F

Multiplicamos a baſe da pyramide, como tambem do cone, pela terça parte da altura de hum, e outro, porque já vimos * que a pyramide era a terça parte do priſma da meſma baſe, e da meſma altura, como tambem o cone o terço do cylindro da meſma baſe, e da meſma altura.

Tom. II. * Numer. 551.

813 Se os parallelipipedos, priſmas, cylindros, pyramides, e cones forem inclinados, e ſe quizerem medir, ſerá preciſo tirar huma perpendicular do ſeu vertice ſobre as baſes continuadas, e depois achar o valor deſta perpendicular, e tomalla como altura do ſolido inclinado; e quando são parallelipipedos, priſmas, e cylindros, ſe multiplica a perpendicular pela baſe do ſolido, que lhe correſponde; e ſe forem pyramides, ou cones, ſe multiplicará a baſe de hum, ou outro pela terça parte da perpendicular.

PROPOSIÇÃO XII.

PROBLEMA.

814 Medir a ſolidez das pyramides, e cones truncados.

Se

Eſtamp. 12. Figura 65. Se quizeſſemos ſaber o ſolido de huma pyramide DB, na qual os planos oppoſtos ſejão quadrados, ſupponhamos o lado DE de 9 palmos, e o lado AC de 4, o eixo GH de 12: iſto ſuppoſto, buſque-ſe o valor dos planos AB, e DF, que ſerão 16, e 81, entre os quaes ſe buſque hum meio proporcional, que ſerá 36, que he o plano medio, que ſe deve ſommar com os outros dous para ter 133, ſomma dos trez planos, cuja ſomma ſe multiplique pela terça parte do eixo, iſto he, por 4, para ter 532 palmos, ſolido da pyramide truncada. *

Tom. II. * Numer. 561.

Do meſmo modo ſe achará o valor de hum cone truncado, buſcando hum circulo medio entre os dous oppoſtos, e multiplicando a ſomma dos trez pela terça parte do eixo, e o producto ſerá o ſolido que ſe buſca.

815 O valor da pyramide, ou cone truncado ſe póde tambem achar deſte modo, que he mais uſado que o precedente. Por exemplo. Para ter o ſolido do cone truncado ADEB, de que o eixo GC he de 15 palmos, o diametro

tro DE de 7, o diametro AB de 21, tiro a perpendicular DH, e acabo o cone para ter o eixo inteiro CF, de que buſco o valor do modo que ſe ſegue.

Sendo o raio DG de 3 palmos, e $\frac{1}{2}$, o raio AC de 10, e $\frac{1}{2}$, ſerá a linha AH a differença de DG, e AC, e por conſequencia ſerá de 7 palmos; e como os dous triangulos AHD, e ACF são ſemelhantes, direi: ſe AH de 7 palmos me dá 15, valor do lado HD, o lado AC de 10, e $\frac{1}{2}$, que dará por valor do lado CF? que ſe achará ſer de 22 palmos, e $\frac{1}{2}$. Achado todo o eixo, ſe buſque o valor do cone inteiro ABF, e o do pequeno DFE; e tirando eſte do outro, a differença ſerá o valor do cone truncado.

816 Tambem como os cones DFE, AFB são ſemelhantes, cubiquem-ſe os diametros AB, e DE, e diremos: o cubo do diametro AB para o cubo do diametro DE, como o valor do cone AFB

AFB para o valor do cone DFE, que ſendo conhecido, ſe tire do cone AFB para ter a differença, que he o cone truncado.

REFLEXÃO.

Adiante conheceremos a neceſſidade de ſaber medir os priſmas, cylindros, pyramides, e cones, como tambem das partes truncadas, porque não ſe póde medir o ſolido de alvenaria do reveſtimento de huma fortificação, ſem ſe encontrarem partes ſemelhantes a eſtas, o que ſuccede nos angulos reintrantes, e ſalientes; e tambem ſe encontrão caſos, em que a figura eſtravagante do que ſe quer medir pede muito uſo da Geometria para ſe poder conſeguir a ſua medição; e como muitos Engenheiros ſe contentão de os medir por approximação, darei aqui algumas propoſições, que darão muita luz para reſolver as difficuldades, que ſe coſtumão offerecer, e depois moſtrarei encontrar-ſe ſobre eſta materia.

PRO-

PROPOSIÇÃO XIII.

PROBLEMA.

817 Medir a ſolidez dos ſectores, de cylindros, e cones truncados.

Para achar a ſolidez de hum ſector ABCDEF de hum cylindro, formado por dous planos AC, e CE, devemos primeiro ſaber o valor do cylindro inteiro, conhecer o ângulo BCD do ſector; e ſuppondo que ſeja de 50 gráos, e o ſolido do cylindro de 425 palmos, diremos: ſe 360 gráos, valor do circulo do cylindro, me dão 425 palmos por valor do cylindro, que me darão 50 gráos por valor do ſector? e acharei 59 palmos, e alguma couſa mais. Figura 67.

818 Para medirmos hum ſector GH KLMN de hum cone truncado, devemos conhecer o angulo HKL do ſector, e o valor do cone truncado; e ſuppondo angulo de 60 gráos, e o cone truncado de 600 palmos, direi: ſe 360 me dão 600, valor do cone, que me darão 60 por valor do ſector? e acharei que he de 100 palmos. Figura 68.

819 Porém ſe tiveſſemos hum cone

Figura 69. ne truncado ABCD, no meio do qual haja hum vaſio cylindrico GEFH, e ſe quizeſſe ſaber o valor do fragmento LNPQOMSR formados pelos pedaços das coroas, dever-ſe-hia primeiro achar a ſolidez de todo o cone truncado AB CD, como ſenão eſtiveſſe ouco, para ter o valor do ſector LNKOMI, como ſe foſſe todo ſolido, do modo que acabámos de explicar, e depois tirar o ſector do cylindro RPKQSI, e a differença ſerá o ſolido do fragmento LN PQOMSR, que ſe buſca.

Figura 70. 820 Se pelo contrario tiveſſemos hum cylindro ABCD, no meio do qual houveſſe hum vaſio em fórma de cone truncado EFGH, e ſe quizeſſe ſaber o valor do ſolido do fragmento QONP RLMS terminado por planos, que eſtiveſſem nos raios IN, e IL, deve-ſe buſcar o valor do ſector cylindrico KO NILM, e do ſector KQPIRS do cone truncado para o diminuir do ſector do cylindro, e a differença ſerá o valor do fragmento QONPRLMS, que ſe pede.

Para cada hum ſe fazer ſenhor do que acabámos de dizer, he preciſo dar me-

di-

didas as linhas, que compõem eſtas figuras, fazer o calculo, e comprehender bem as razões de cada huma das operações; porque, como já diſſemos, ſer-nos-ha preciſo recorrer a ellas para dar ſolução a alguns problemas mais difficultoſos do calculo da fortificação.

PROPOSIÇÃO XIV.

PROBLEMA.

821 Medir a ſolidez de huma esfera.

Para achar a ſolidez de huma esfera, cujo diametro AB he de 14 palmos, ſe deve buſcar a circumferencia deſte diametro, que ſerá 44, e multiplicalla pelo meſmo diametro para ter a ſuperficie da esfera *, que ſerá de 616 palmos, que multiplicados pelo terço do raio, iſto he, pelo terço de 7, dará 1437 $\frac{1}{2}$ palmos cubicos, que he o ſolido da esfera. Figura 71. Tom. II. * Numer. 574.

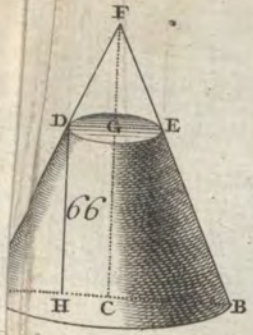
Tambem ſe achará a ſolidez da esfera de outro modo, multiplicando a ſuperficie do ſeu circulo maximo pelos dous terços do diametro. * Tom II. * Numer. 568.

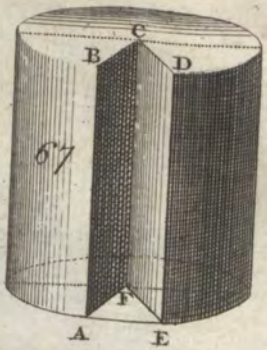
Tam-

Tambem ſe póde achar a ſolidez das esferas por huma regra de trez, tendo os cubos dos ſeus eixos com a meſma facilidade, que ſe acha a ſuperficie dos circulos por meio dos quadrados dos ſeus diametros, porque o cubo do eixo de huma esfera tem a meſma razão á ſolidez da esfera, que o ſeu diametro á ſexta parte da circumferencia do meſmo diametro. Para ſe convencerem diſto, chamemos *a* ao diametro, ou eixo da esfera, e *b* á ſua circumferencia, a ſuperficie do circulo maximo ſerá por conſequencia $\frac{ab}{4}$, que multiplicada pelos dous terços do diametro, iſto he, por $\frac{2a}{3}$, dá $\frac{2aab}{12} = \frac{aab}{6}$, ſolido da esfera, aſſim teremos $aaa : \frac{aab}{6} :: a : \frac{b}{6}$; e ſuppondo huma esfera de 21 palmos de diametro, cuja circumferencia he de 66 palmos, tomando a ſexta parte, que são 11, baſta fazer a regra, como 21 he a 11, aſſim o cubo de 14, que he 2744, ao ſolido da esfera, que ſe achará ſer de 1437 palmos, e $\frac{1}{2}$.

Pa-

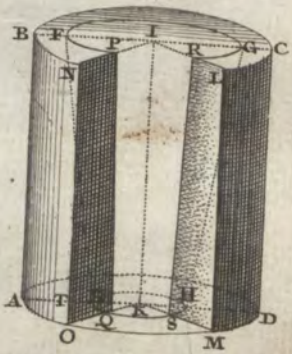
Est. 12.





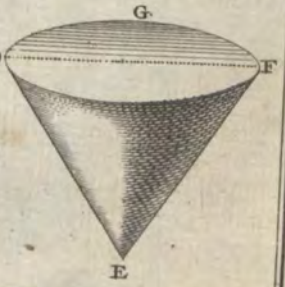
69

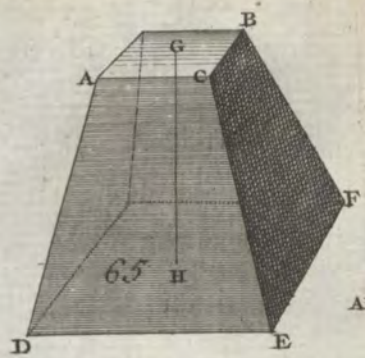
70

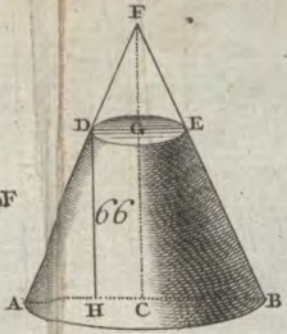


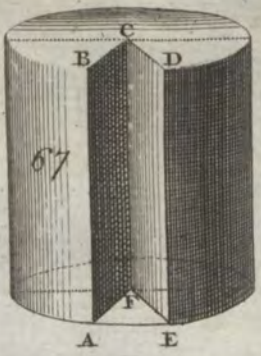
72

73

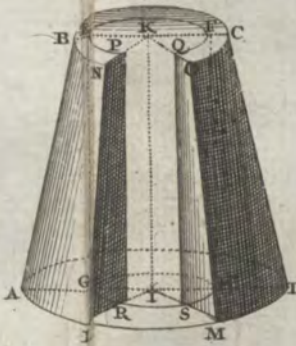


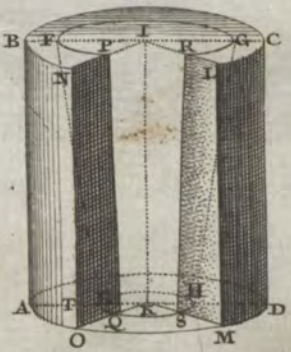

B
G
A
C
F
65
H
D
E

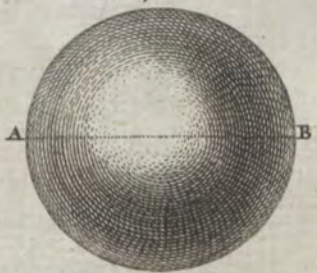

F
D
G
E
66
A
H
C
B

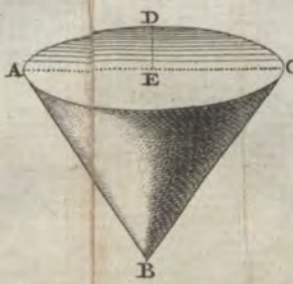

C
B
D
67
F
A
E

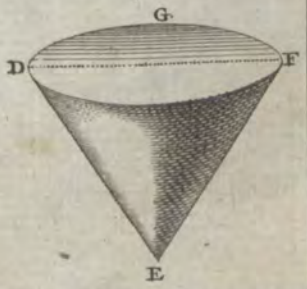
68
K
H
L
N
G
M


69
B
K
F
C
P
Q
N
A
G
I
D
R
S
J
M


70
B
F
P
I
R
G
C
N
L
A
T
H
D
K
O
Q
S
M


71
A
B


72
D
A
E
C
B


73
G
D
F
E

822 Para medir hum ſector da esfera, como ABCD, ſe deve conhecer o raio, e a perpendicular DE levantada ſobre o meio da corda AC. Ora ſe ſuppomos o raio de 7 palmos, e a perpendicular de 3, devemos buſcar por meio do raio a circumferencia do circulo maximo da esfera, de que he o ſector, e ſe achará de 44 palmos: depois multiplique-ſe eſta circumferencia pela perpendicular DE, iſto he, 44 por 3, e o producto 132 ſerá a ſuperficie ADC do ſector *, que ſe deve multiplicar pelo terço do raio BC, iſto he, por 2, e $\frac{1}{3}$, para ter o ſolido do ſector, que he 308 palmos. Figura 72. * Numer. 805.

823 Se em lugar de hum ſector tiveſſemos hum ſegmento da esfera FGD, para lhe achar o ſolido ſerá preciſo reduzillo a ſector, e buſcar a ſua ſolidez; e abatendo delle o cone DEF, o reſto ſerá o valor do ſegmento. Figura 73.

824 Porém ſe a parte da esfera, que ſe quer medir, foſſe huma zona comprehendida pelo circulo maximo da esfera, e por outro qualquer, que lhe foſſe

se parallelamente opposto, como he a
Estamp. 13 zona AFHE, achar-se-hia a sua soli-
Figura 74. dez, tomando os dous terços do cylindro, que tivesse por base o circulo maximo AE, e por altura a parte do eixo GC, e mais a terça parte do cylindro, que tivesse por base o circulo
Tom. II. menor FH, e por altura a mesma li-
* Numer. nha GC*; e para fazer a operação sup-
578. ponhamos o raio CE de 14 palmos, a perpendicular CG de 8, e como temos o triangulo rectangulo CHK, do qual a hypothenusa CH he de 14 palmos, e o lado HK de 8, acharemos pela raiz quadrada o lado CK de 11 palmos, e teremos o raio do circulo FH, e por consequencia se achará a solidez do cylindro maior AD de 4928 palmos, e a solidez do cylindro menor, que he 3036 palmos; e tomando os dous terços do cylindro maior, teremos 3285 $\frac{1}{3}$, que junto com a terça parte do cylindro menor 1012, teremos 4297 $\frac{1}{3}$ palmos, que he a solidez da zona.

RE-

REFLEXÃO.

825 Como a geração da maior parte dos ſolidos ſe fórma da circumvolução de hum plano pelo ſeu eixo, podem-ſe dar tantos ſolidos differentes, quantos são os planos geradores; porém para não fallar mais que dos que ſe formão pelo plano das curvas das ſecções conicas, he de ſaber, que ſe huma meia parabola ACB ſe move á roda do ſeu eixo AB, deſcreverá hum corpo, que ſe chama parabolico, que ſe compõe de huma infinidade de planos circulares, de que são raios as ordenadas, como DE, FG, que ſe conſiderão como elementos do plano ABC da parabola. Figura 75. e 76.

826 Se huma meia Ellipſe HLI faz huma circumvolução á roda do ſeu eixo HI, todas as ordenadas, como OP, RS, que ſe podem conſiderar como elementos do plano da Ellipſe, deſcreverão huma infinidade de circulos, que todos juntos formarão o corpo ABCD, que ſe chama Eſferoide; porque tendo por plano gerador huma Ellipſe, que propriamente he hum circulo alongado, Figura 79. e 80. Figura 80.

do, a Esferoide se considera como huma esfera longa.

827 Finalmente se metade da hy-
Figura 81. perbole ABC se move á roda do seu eixo BC, descreverá hum solido, que se chama Hyperboloide ; e se a meia hyperbole he acompanhada de hum assymptote EF, e das linhas BD, e DG parallelas a AC, e BC, o triangulo EFC descreverá hum cone, e o rectangulo BCGD hum cylindro.

Como a maior parte destes solidos se encontrão frequentemente, mostraremos a applicação, depois que tivermos ensinado nas seguintes proposições o modo de os medir.

PROPOSIÇÃO XV.

PROBLEMA.

828 Medir a solidez de hum paraboloide.

Figura 75. e 76. Para ter a solidez de hum paraboloide, no qual o raio do circulo da base fosse de 7 palmos, o eixo IL de 10, busque-se o valor do circulo da base, que será 154 palmos, e este se multipli-

plique por metade do eixo IL, iſto he, por 5, e o producto 770 ſerá o que ſe buſca.

Para ſaber a razão deſta operação, imagine-ſe o eixo AB da parabola compoſto de huma infinidade de partes AE, e AG, que eſtão em progreſsão arithmetica; e como os quadrados das ordenadas ED, FG eſtão na meſma razão que as partes AE, e AG *, eſtes quadrados eſtarão tambem em progreſsão arithmetica; mas os circulos eſtão na meſma razão que os quadrados dos ſeus raios *: logo os circulos, que compõem a paraboloide HIK, eſtão em progreſsão arithmetica, pois são como os quadrados das ordenadas da parabola; mas o valor dos termos infinitos de huma progreſsão arithmetica * he igual ao producto do maior termo da progreſsão por metade da grandeza, que expreſſa o numero dos termos: logo para achar o valor de todos os circulos, que compõem a paraboloide, deve multiplicar-ſe o circulo maior HK por metade do eixo IL.

* Tom. II. Numer. 604.

* Tom. II. Numer. 496.

* Tom. II. Numer. 390.

PROPOSIÇÃO XVI.

PROBLEMA.

829 Medir a ſolidez de hum eſferoide.

Para ſaber a ſolidez de hum eſferoi-
Figura 77. e 78. de, em que o eixo maior BD he de 18 palmos, e o menor AC de 14, buſque-ſe a ſuperficie do circulo feito ſobre o eixo menor, que ſerá 154 palmos, e eſta multiplicada pelos dous terços do eixo maior BD, iſto he, por 12, dá o producto 1848, que ſerá o ſolido buſcado.

A razão deſta operação conſiſte em que eſtando as ordenadas OP, e RS da Ellipſe entre ſi na meſma razão que as do circulo OQ, e RT, os quadrados das ordenadas da Ellipſe eſtarão na meſma razão que os das do circulo *; e ſe em lugar dos quadrados das ordenadas do circulo ſe tomarem as ſuperficies dos circulos, de que eſtas ordenadas são raios, veremos que todos os circulos das ordenadas da Ellipſe, que compõem o eſferoide, eſtão na meſma razão que todos os circulos,

Tom. II. * Numer. 632.

que

que compõem a esfera; mas o valor de todos os circulos, que compõem a esfera, ſe acha multiplicando o circulo, de que he raio a maior ordenada MN pelos dous terços do eixo HI *: logo o valor de todos os circulos, que compõem o esferoide, ſe acharão tambem multiplicando o circulo, de que he raio a maior ordenada NL da Ellipſe pelos dous terços do eixo HI. Tom. II. * Numer. 568.

830 Mas ſe o plano da Ellipſe em lugar de fazer huma circumvolução á roda do ſeu eixo maior AB a fizeſſe ſobre o eixo menor CD, teriamos tambem hum esferoide ACBD, e ſe lhe achará o ſolido multiplicando a ſuperficie do circulo feito ſobre o eixo maior AB pelos dous terços do eixo menor CD; porque ſe temos hum circulo ECFD, que tem por diametro o eixo menor CD, e ſe tirão as ordenadas GH, e KL, teremos pela propriedade da Ellipſe * $CG \times GD : CK \times KD :: GH^2 : KL^2$; e ſe em lugar dos rectangulos $CG \times GD$, e $CK \times KD$ puzermos os quadrados GI^2, e KM^2, que lhes são iguaes pela propriedade do circulo, ſerá Figura 79. e 80. Tom. II. * Numer. 638.

rá $GI^2 : KM^2 :: GH^2 : KL^2$; e ſe em lugar dos quadrados de todas as ordenadas de ſemicirculo CFD ſe tomarem os circulos, de que eſtas ordenadas são raios, e ſe fizer o meſmo na meia Elipſe CBD, veremos que todos os circulos da esfera eſtão na meſma razão que todos os circulos do esferoide; e ſe expreſſando a linha CD a quantidade de huns, e outros, ſe multiplica o circulo EF pelos dous terços da linha CD para ter o valor de todos os circulos, que compõem a esfera, multiplicar-ſe-ha tambem o circulo de AB pelos dous terços da linha CD para ter o valor de todos os circulos, que compõem o esferoide.

831 Póde-ſe dizer tambem, que ſe tiveſſemos ſó metade de hum esferoide ACB, para achar a ſua ſolidez ſe deveria do meſmo modo multiplicar o circulo AB pelos dous terços da linha CN.

Ainda que o hyperboloide não ſe encontre na Geometria pratica, iſto não embaraça o dizermos alguma couſa ſobre o modo de medir eſte ſolido para

ſa-

ſatisfazer á curioſidade dos que não goſtão omittir couſa alguma.

PROPOSIÇÃO XVII.

PROBLEMA.

832 Medir a ſolidez de hum hyperboloide.

Para ter o ſolido de hum hyperboloide DEF he preciſo acompanhar a curva DEF das ſuas aſymptotas BA, e BC, e da linha GH, que ſerá igual a hum dos ſeus eixos. Iſto ſuppoſto, buſque-ſe a ſolidez do cone truncado AGHC *, e diminua-ſe o cylindro IGHK, e a differença ſerá a ſolidez do hyperboloide. Figura 82. * Numer. 815.

Para comprehender a razão deſta operação, que damos aqui, he preciſo recorrermos ao que moſtrámos da hyperbole *, que tirada huma linha, v. gr. AC parallela a GH, o rectangulo feito das partes AD, e DC ſeria igual ao quadrado da linha GE; mas o rectangulo feito das linhas AD, e DC he igual ao quadrado da perpendicular DM * por cauſa do ſemicirculo ADC: Tom. II. * Numer. 678. Tom. I. * Numer. 442.

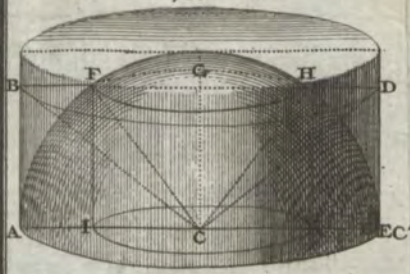
lo-

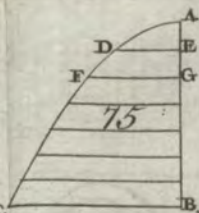
logo a linha DM he igual á linha GE. Iſto ſuppoſto, o circulo, de que for raio a linha DM, he igual á coroa formada pelas duas circumferencias * ANCO, DPFQ, de que ſe ſegue que eſta coroa ſerá igual ao circulo, de que for raio a linha GE, e que ſerá hum dos circulos do cylindro GHKI; e como o meſmo ſuccede em todas as linhas, como AC, que ſe tirarem parallelas a GH por qualquer ponto que quizerem da linha GA, ſegue-ſe que todas as coroas ſerão iguaes entre ſi, pois cada huma he igual á terça parte do cylindro; mas ha tantas coroas, como circulos, pois huns, e outros expreſſa a linha EL: logo o eſpaço entre o paraboloide DPFQE, e o cone truncado ANCOGH (que não he mais que a ſomma das coroas) he igual ao cylindro IGHK, e conſequentemente o cone truncado he maior que o hyperboloide do meſmo cylindro IGHK.

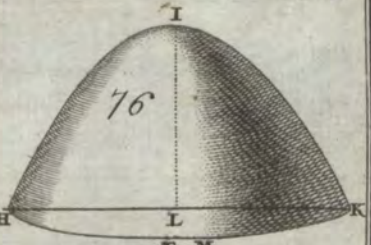
Tom. II. * Numer. 566.

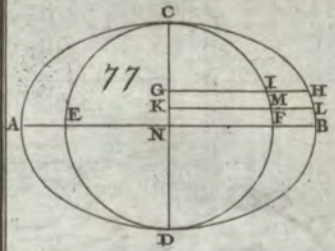
CA-

74

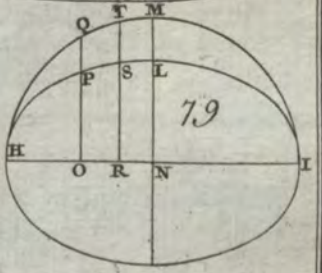

B
F
G
H
D
A
I
C
E


A
D
E
F
G
75
B

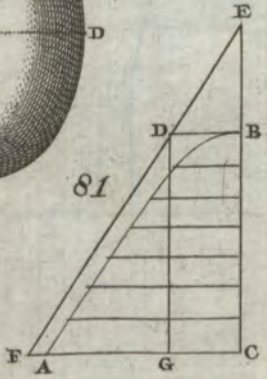

I
76
H
L
K

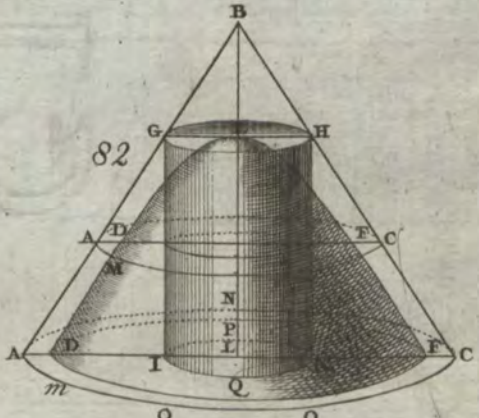

C
77
G
K
I
M
H
L
A
E
F
B
N
D

A
78
D
C


Q
T
M
P
S
L
79
H
O
R
N
I

A
80
C
D
B


E
D
B
81
F
A
G
C


B
G
H
82
A
D
F
C
M
N
P
D
L
F
A
I
K
C
m
Q
O
O

T. III.

CAPITULO II.

Applicação da Geometria á medição das abobedas.

PROPOSIÇÃO XVIII.

PROBLEMA.

833 MEdir a ſolidez de toda a caſta de abobedas.

Nas obras de fortificação não ha mais que trez caſtas de abobedas, as primeiras são as dos ſubterraneos, as ſegundas as dos armazens de polvora, e as terceiras as das torres, em que ha plataformas: humas, e outras ou são de volta inteira, como a da figura 83, ou abatidas, como na figura 84, ou gothica, que tambem ſe chama de terceiro ponto, ou abobeda em arco de clauſtro, como na figura 85; e ou ſirvão para os arcenaes, ou para os ſubterraneos, ſempre pela parte de fóra ficão de feitio de aſna, como hum tecto, porque em ſima ſe lhes põe huma paſta de argamaça para as livrar da chuva. Eſtamp. 14. Figura 83. 84. e 85.

Se

834 Se quizermos pois calcular a alvenaria de hum ſubterraneo, ou arcenal, de que a figura 86 ſeja o plano, medirei primeiro os encontros PR ST, e MKOL, no que não ha difficuldade, porque são parallelipipedos: depois ſe medem os pés direitos ADFG do fundo do alicerce até o principio AC da abobeda: para a abobeda ſe mede a ſuperficie do triangulo ABC, e ſe multiplica pelo comprimento da abobeda em obra, a que ſe chama medir o cheio, e o vaſio; e como do producto ſe deve tirar o vaſio DKE, ſe a abobeda he de volta inteira, ſe mede a ſuperficie do ſemicirculo * DKE, que ſe multiplica pelo meſmo comprimento, que ſervio de medir o triangulo ADC; e tirando eſte producto do precedente, a differença ſerá o valor da abobeda.

Figura 83.

Tom II. * Numer. 486.

835 Se a abobeda he rebachada, como FEG, cuja figura he huma Ellipſe, meça-ſe o triangulo ABC do modo, que fica dito, e multiplique-ſe pelo comprimento da abobeda feita: depois do que ſe buſcará a ſuperficie da meia El-

Figura 84.

Ellipſe FEG *, e ſe multiplicará pelo meſmo comprimento; e diminuindo eſte producto do precedente, teremos o valor da abobeda. Tom. III * Numer. 798.

836 Finalmente ſe a abobeda, que ſe quer medir, he de terceiro ponto com I L M, buſque-ſe a ſuperficie do triangulo I L M, a qual ſe accreſcentará * á dos ſegmentos de circulos, de que são cordas as linhas IL, e ML; e multiplicando pelo comprimento da abobeda toda, ſe diminue o ſeu producto do do triangulo HKN multiplicado pelo meſmo comprimento, e teremos o ſolido, que ſe pede. Figura 85. * Numer. 797.

837 A medição das abobedas, que tem em ſima plataformas, como são as ſallas do Real obſervatorio de París, he hum pouco difficil, nem ſei que alguem lhe tenha buſcado o modo de o fazer geometricamente; e como eſtas ou tem por baſe hum quadrado, ou hum polygono regular, e o cheio, e o vaſio da abobeda fazem ordinariamente hum priſma, que he difficultoſo de medir, e como tem hum vão, que ſe deve abater, e póde fazer alguma dif-

difficuldade, averiguaremos aqui as diverſas figuras, que póde ter para os reduzir a corpos regulares.

Supponho pois que os lugares, de que ſe trata, tem por baſe hum quadrado AB, ou hum polygono regular GH, eis-aqui o modo, com que ſe póde imaginar a natureza deſtas abobedas.

Figura 87. e 88. Se a baſe he hum quadrado, as diagonaes AB, e CD ſervirão de diametros aos meios circulos AFB, e CFD, que dividem a abobeda em quatro, e formão os rinções nos angulos. Ora ſe ſe imaginar o vaſio cheio de huma infinidade de quadrados, todos elles terão os angulos nos quartos de circulos FC, FA, FB, FD, e os ſeus lados ſerão as linhas GH, e IK tiradas de hum quarto de circulo a outro parallelas aos lados AD, ou DB; e metade de todas as diagonaes, como EA, LM, ſerão as ordenadas ao quarto de circulo AFE. Ora como a linha EF, ou EA, que marca a altura da abobeda, expreſſa a ſomma de todos os quadrados, ſegue-ſe que ſendo as ordenadas EA, e LM meias diagonaes dos quadrados, achar-

ſe-

ſe-ha o valor de todas eſtas diagonaes do modo, que ſe acha o das ordenadas de hum quarto de circulo; mas já vimos * que o valor dos quadrados das ordenadas de hum quarto de circulo he igual ao producto da maior EA pelos dous terços da linha EF: logo para achar o ſolido do corpo AFB, deve-ſe multiplicar o quadrado AB, que lhe ſerve de baſe, pelos dous terços da altura EF. * Numer. 821.

838 Se a abobeda eſtiveſſe ſobre pés direitos, que compuzeſſem hum priſma, e eſte priſma tiveſſe 6 lados, o corpo formado pelo vaſio da abobeda ſeria huma figura como GHIK, formada tambem por ſemicirculos; e como eſte corpo ſeria compoſto de infinitos polygonos ſemelhantes, do meſmo modo que o de que fallámos, he compoſto de quadrados, ſe ſe conſidera o quarto de circulo IKG, ver-ſe-ha que todas as ordenadas, como OP, e QR deſte quarto de circulo, ſervem de raios aos polygonos, de que o ſolido ſe compõe; e como todos eſtes polygonos são ſemelhantes, e eſtão na razão dos quadrados dos ſeus raios *, achar-ſe-ha o ſeu Figura 88. Tom. II. * Numer. 493.

ſeu valor do meſmo modo que ſe achou o dos quadrados dos raios, iſto he, multiplicando a ſuperficie do maior polygono pelos dous terços da linha, que expreſſa a quantidade, e ſe achará o valor do ſolido GIH, multiplicando a baſe GH pelos dous terços da perpendicular IK.

839 Mas ſe a abobeda não foſſe em ſemicirculo, mas os arcos ABC, DBE, que dividem a abobeda, foſſem meias Ellipſes, achar-ſe-ha o valor do vaſio, multiplicando a baſe AC pelos dous terços do eixo FB; porque ſe o plano AC he quadrado, todos os que compõem o ſolido são quadrados: logo metades dos diagonaes ſerão as ordenadas KL, e MN de quarto da Ellipſe HGI, ou FBC; e como o valor de todos os quadrados das ordenadas de hum quarto da Ellipſe ſe acha do meſmo modo que os das ordenadas do quarto de circulo *, iſto he, multiplicando o quadrado da maior ordenada HI pelos dous terços da linha GH, ſegue-ſe que ſe ſaberá a ſolidez de qualquer abobeda, ou os rincões ſejão Ellipſes, ou de quarto

Figura 89. e 90.

* Numer. 798.

to de circulos, pois o ſolido dos corpos, cujos elementos creſcem na meſma razão dos quadrados das ordenadas da Ellipſe, ou quarto de circulo, ſe determina pela multiplicação do maior elemento, que lhe ſerve de baſe pelos dous terços da altura, ou o polygono, que lhe ſerve de baſe ſeja regular, ou irregular.

840 Ha outra eſpecie de abobeda, que ſe chama de canudo, porque com effeito o vão deſta abobeda ſe lhe aſſemelha baſtantemente, e para dar huma idéa della vejão-ſe as figuras 91, e 92, das quaes a primeira he a planta de huma torre, que tem no meio hum pilar AB, ſobre que deſcança a abobeda, que tambem ſe ſuſtem nas paredes da torre, de ſorte, que de qualquer modo que ſe tome o perfil da torre, ſerá ſempre ſemelhante á figura 92; e como a abobeda cérca todo o pilar ABE, he preciſo medir-ſe o corpo HICD, tanto o ſolido, como o vaſio, que he hum cylindro, que tem por baſe hum circulo, de que CD he o diametro, e HC a altura.

Pre-

Preſentemente para ſe achar o vaſio, que ſe deve abater deſte cylindro, buſque-ſe a ſuperficie do ſemicirculo CMA, e multiplique-ſe pela circumferencia do circulo, que for meio arithmetico entre a circumferencia da torre, e do pilar, iſto he, entre as circumferencias, que tiverem os raios AF, e FC; e diminuindo eſte producto do precedente, teremos o valor da abobeda.

Como o canudo ſe compõe de tantos ſemicirculos, quantas linhas, como AC, NO, que ſervem de raios aos ſemicirculos, contém o eſpaço entre as ditas circumferencias, ſegue-ſe que a linha, que expreſſar a ſomma de todos os elementos, que compõem a coroa, iſto he, a ſomma de todas as linhas AC, e NO, ſerá a ſomma de todos os ſemicirculos, que compõem o canudo; e como eſta linha não he outra couſa mais que huma circumferencia GH, meia arithmetica entre as duas CODQ, e ANBP, que fazem a coroa, ſegue-ſe que ſe deve multiplicar o ſemicirculo, que tiveſſe por diametro CA, pela cir-

circumferencia GH para ter a ſolidez do canudo.

A reſpeito do reveſtimento da torre he claro que ſe achará a ſolidez, tirando do valor do cone truncado, de que RSTX he o córte, o cylindro, que tiveſſe por diametro do circulo da baſe a linha HI, e por altura a linha HZ para ter a differença, que ſe buſca.

841 Muitas vezes preciſaremos medir as ſuperficies das abobedas, de que acabámos de medir a ſolidez, e por iſſo ſerá util ſaber o modo, com que ſe devem medir ſemelhantes ſuperficies curvas.

O methodo, que vou explicar, ſó ſe póde applicar ás abobedas taes, como ABC, cuja baſe he hum polygono regular, e a altura BF igual ao raio GF, tirado do centro F do polygono regular, que lhe ſerve de baſe perpendicular ao lado AE; e ſe ſe pudeſſe achar o modo de medir por hum methodo geral, e facil a ſuperficie de hum ellipſoide, ſe poderia com a meſma facilidade applicar o methodo, que vamos propôr, ás abobedas abatidas, e de ponto Figura 89.

eſ-

eſperto; e geralmente ſe diz, que huma abobeda he de volta inteira, quando a altura BF, ou a perpendicular, tirada do vertice ſobre o plano da baſe, he igual á linha tirada do centro F á baſe, em que cahe a perpendicular ao meio de hum dos lados do polygono regular, como a linha FG: ſe eſta linha BF he maior, ou mais pequena que GF, a abobeda ſe chama de ponto eſperto, ou abatida. O principio, que vamos explicar, tem eſta ventagem, que ainda que ſe não poſſa applicar ſenão ás abobedas de volta inteira, achaſe por elle a ſuperficie de huma abobeda muito vulgar, a que ſe chama abobeda arrincoada: a figura 93 repreſenta huma abobeda arrincoada. Moſtraremos o modo de medir a ſolidez deſta abobeda, applicando-lhe os principios precedentes.

DEFINIÇÃO.

Figura 89. 842 Suppondo ſempre a abobeda em volta inteira, ou abatida, como a que ſe repreſenta pela figura 89, chamaremos a cada porção de abobeda, co-

como ABE, hum lanço de abobeda; assim na figura a abobeda he de 4 lanços, e geralmente huma abobeda abatida, e de volta inteira tem tantos lanços, quantos são os lados do polygono regular, que lhe serve de base.

PROPOSIÇÃO XIX.

THEOREMA.

843 A superficie curva ABE de qualquer lanço de abobeda he dupla da do triangulo, que lhe serve de base. Figura 89.

Seja $2a$ o lado do polygono regular, que serve de base á abobeda, e b a perpendicular GF, tirada do centro F do polygono sobre o lado AE, a qual ** deve ser igual á altura BF da abobeda, que se suppõe de volta inteira, a superficie do triangulo AFE, que serve de base á porção ABFE de abobeda, será ab; e para ter o solido desta porção de abobeda se deve multiplicar o maior elemento *, ou o triangulo AFE pelos dous terços BF, o que dará o solido do corpo $\frac{2.ab^2}{3}$. ** Numer. 841. * Numer. 837.

Preſentemente advertirei que o ſolido do corpo ſe póde imaginar de outro modo, como compoſto de infinitos cones pequenos, como FG, Fg, Fh, que tem o vertice no ponto F, cujas baſes eſtão eſpalhadas uniformemente pelas ſuperficies, ou lanços da abobeda ABE. Facilmente ſe vê que de todos eſtes cones ſó os que eſtão no quarto de circulo podem ſer rectos, e todos os outros são neceſſariamente obliquos, e differentemente inclinados, ainda que tem a meſma altura FG; aſſim para ter o ſolido da porção da abobeda ABFE aſſim conſiderada, multiplicar-ſe-ha a ſomma das baſes de todos eſtes pequenos cones, que não he outra couſa ſenão a ſuperficie do lanço da abobeda ABE pela terça parte do raio FG: logo chamando a eſta ſuperficie s, ſerá o ſolido do corpo ABFE $= s \times \frac{a}{3}$. Além diſſo acabamos de ver que o meſmo ſolido ſe expreſſa por $\frac{2}{3} ab^2$, imaginando-o compoſto de elementos triangulares, como ILK, que creſcem como

os

os quadrados das ordenadas LH ao quarto de circulo BHG: logo $s \times \frac{a}{3} = \frac{2}{3}ab^2$; e dividindo por $\frac{1}{3}b$, será $s = 2ab$, de que se segue que o lanço da abobeda ABE he duplo do triangulo correspondente AFE, que lhe serve de base.

Nota, que se a figura, ou base ADCE he hum quadrado, a superficie do triangulo he $\frac{aa}{2}$, porque a perpendicular FG será pela propriedade do quadrado igual á metade AG do lado AE; e como isto he accidental, e a nossa demonstração se deve estender a qualquer polygono, he util não suppôr a perpendicular FG = AG, para que a proposição fique geralmente demonstrada.

COROLLARIO I.

844 Segue-se daqui que a superficie de huma abobeda em arco de claustro, ou em volta inteira sempre he dupla do polygono regular, que lhe serve de base; assim suppondo que a linha DK perpendicular ao lado GN do exagono, Figura 88.

ſeja igual á linha IK, tirada do vertice I da abobeda perpendicularmente ao centro K da baſe, a ſuperficie deſta abobeda ſerá dupla da do exagono MNGLOH, que lhe ſerve de baſe, porque cada lanço NIM, NIG ſerá duplo do triangulo correſpondente NKM, e NKG.

COROLLARIO II.

845 Segue-ſe deſta propoſição que a ſuperficie de huma meia eſféra he dupla do circulo, que lhe ſerve de baſe, de ſorte, que a propoſição, que demonſtrámos ácerca da ſuperficie da eſfera, he hum corollario muito natural deſta; porque como a noſſa demonſtração ſe póde applicar a todos os polygonos regulares, póde-ſe tambem applicar ao circulo: com effeito a ſuperficie da eſfera póde-ſe imaginar compoſta de huma infinidade de pequenos triangulos curvilineos, que tem o vertice no polo da meia eſfera, e que ſe vão terminar na circumferencia, os quaes todos são pela propoſição preſente duplos dos triangulos, que lhe cor-

correſpondem no circulo, que lhe ſerve de baſe.

ESCHOLIO.

846 A propoſição precedente póde-ſe applicar a achar a ſuperficie das abobedas arrincoadas taes como as que repreſenta a figura 93; mas antes de buſcar a ſuperficie deſta caſta de abobedas, he conveniente buſcar o modo, com que ellas ſe podem formar, o que examinaremos nos articulos ſeguintes, depois do que nos ſerá facil determinar a ſua ſuperficie, e ſolidez pela ſua conſtrucção.

847 AEDCFB he hum meio cylindro recto, de que a baſe he hum parallelogramo rectangulo ADCB: o lado AD eſtá dividido em dous igualmente no ponto K, e deſte ponto ſe tirarão aos angulos B, e C as rectas KB, e KC. Imaginem-ſe por eſtas linhas, e pela linha EK perpendicular ao plano da baſe, e comprehendida no plano do meio circulo AED, dous planos EKIB, KEHC, que neceſſariamente hão de ſer perpendiculares ao plano da baſe, he cla- Figura 94.

claro que eſtes planos cortão do meio cylindro, ou tumba dous corpos iguaes AKEB, DKEC, que ficão como os que acabámos de examinar no que temos dito, cuja ſolidez ſe póde achar, multiplicando cada triangulo, que lhe ſerve de baſe, pelos dos terços do raio AK, e a ſuperficie ſe acha, dobrando os meſmos triangulos iguaes AKB, e DKC: o corpo, que ſe termina em ponta da parte da linha EK, he evidentemente igual ao reſto do cylindro, depois de tirados os dous corpos AKEB, EKDC: logo como ſe podem medir eſtes dous corpos, e tambem o meio cylindro, acharemos a ſolidez do corpo EKBFC. Tambem a ſuperficie curva deſte meſmo corpo he igual á do meio cylindro, depois de abatida a dos corpos AKEB, DKEC: logo podendo-ſe determinar a ſuperficie dos dous corpos, póde ſe tambem ſaber a do corpo EKBFC.

848 Iſto ſuppoſto, huma abobeda de rincões tal como a que repreſenta a figura 93, não he outra couſa mais que hum compoſto de differentes corpos

pos RGDLE, RGFIE, todos iguaes entre ſi, e formados do meſmo modo que o corpo EKBFC da figura 94, os quaes ſe tocão todos nas ſuperficies planas, que formão os ſeus lados, que ſempre ſerão quartos de Ellipſe, e terminados todos por huma meſma linha perpendicular ao plano da abobeda: he viſivel que todos eſtes corpos devem ſer perfeitamente iguaes, e que os ſeus circulos FIE, ELD devem tambem ſer iguaes, como tambem os triangulos, que lhes ſervem de baſe; e daqui ſe vê que a ſuperficie, e a ſolidez ſe reduz a achar a ſuperficie, e ſolidez do corpo EKBFC da figura 94.

849 Seja o raio AK, ou EK $= a$ a linha AB, comprimento do cylindro $= b$: para achar a ſuperficie deſte corpo, buſco primeiro a do cylindro, e determino a ſemicircumferencia BFC com a ſeguinte proporção $7 : 22 :: a : \frac{22a}{7}$, porque a razão do raio á ſemicircumferencia he a meſma que a do diametro á circumferencia; e multiplicando a ſemicircumferencia por b, terei

rei $\frac{22}{7} ab$, ſuperficie do meio cylindro; e tirando deſta ſuperficie a dos corpos AKEB, DKEC, que juntas são iguaes ao rectangulo AC, teremos a ſuperficie do corpo EKBFC $\frac{22}{7} ab - 2ab = \frac{22}{7} ab - \frac{14}{7} ab = \frac{8}{7} ab$, do que ſe ſegue que eſta ſuperficie he igual a $ab + \frac{1}{7} ab$, iſto he, igual á baſe ABCD, e mais $\frac{1}{7}$ da meſma baſe: logo a ſuperficie de huma abobeda arrincoada de volta inteira, como a da figura 93, cuja baſe he hum polygono regular, he igual á ſuperficie da baſe, e mais hum ſetimo da meſma baſe.

850 Para achar o ſolido do meſmo corpo buſco a ſuperficie do ſemicirculo BFC, multiplicando a ſemicircumferencia $\frac{22}{7} a$ por metade do raio, o que me dá $\frac{11}{7} a^2$; e multiplicando eſte producto por b, terei a ſolidez do ſemicylindro, que ſerá $\frac{11}{7} ab^2$: depois buſco

co a ſolidez dos dous corpos iguaes AKEB, e EKDC, que he $\frac{2}{3}ab^2$: logo o ſolido do corpo EKBFC ſerá $\frac{11}{7}ab^2 - \frac{2}{3}ab^2$, ou reduzindo ao meſmo denominador $\frac{33}{21} - \frac{14}{21} \times ab^2 = \frac{19}{21}ab^2$, do que ſe ſegue que eſte ſolido he para o meio cylindro AEDCFB :: 19 : 33 : logo eſte meſmo corpo ſerá $\frac{19}{33}$ do meſmo meio cylindro. Para applicar o que acabamos de dizer á medição do ſolido de huma abobeda arrincoada, cuja baſe he hum polygono regular, he preciſo buſcar a ſolidez do meio cylindro, que tiveſſe por baſe hum rectangulo feito do lado ED do polygono, e da perpendicular GS, tirada do centro do polygono ſobre o lado DE, e depois tomar os $\frac{19}{33}$ deſte ſolido tantas vezes, quantos forem os lados do polygono da baſe.

851 He preciſo reflectir em que ainda que pelo noſſo methodo ſe não poſ-

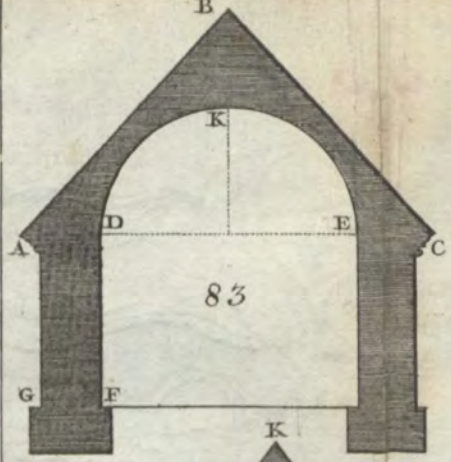
poſſa achar a ſuperficie de huma abobeda de rincão abatida, ou remontada, determinar-ſe-ha com baſtante facilidade o ſolido deſta caſta de abobeda neſtes dous caſos: deixo aos principiantes a ſatisfação de acharem per ſi meſmo a demonſtração.

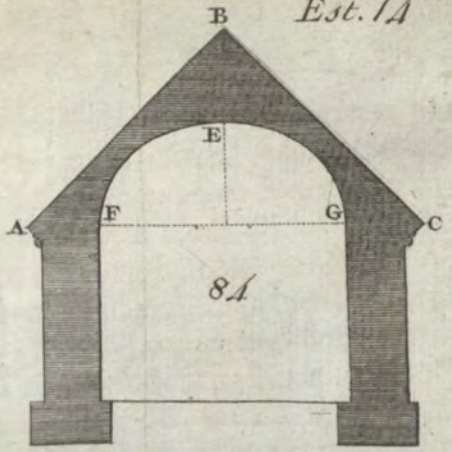
Como eſta caſta de abobedas são ordinariamente cheias de alvenaria da parte de ſima nos tectos das Igrejas, ou outros lugares, em que ſe fazem, medir ſe-ha a ſolidez do priſma recto, que tiveſſe a meſma baſe, e altura, e deſte todo ſe tirará o ſolido da abobeda pelo methodo, que acabamos de explicar.

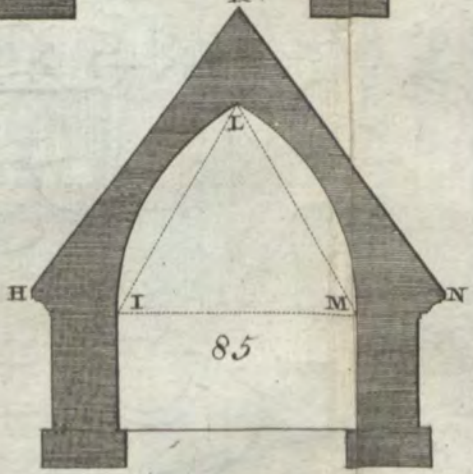
Facilmente ſe vê que não nos foi poſſivel fallar da ſuperficie deſta caſta de abobeda no artigo da medida das ſuperficies, porque o conhecimento deſta meſma não ſe póde deduzir, ſem o conhecimento da ſolidez deſtas abobedas, ao menos ſegundo o noſſo methodo.

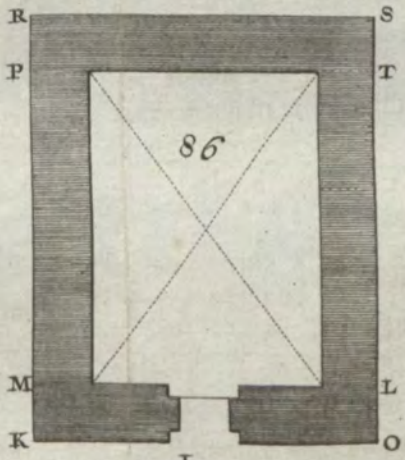
CA-

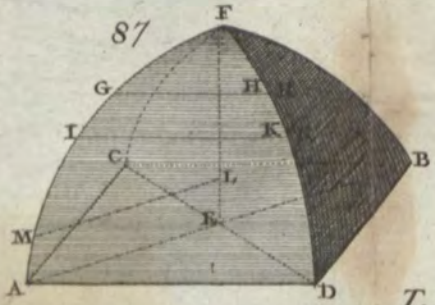
Est. 14

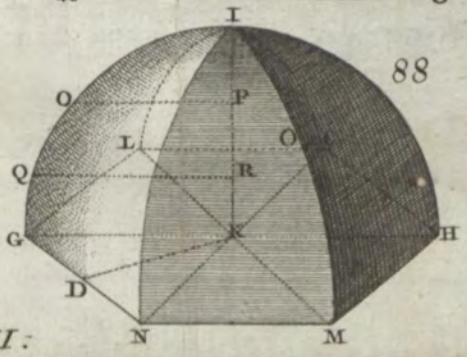

B
K
D
E
A
C
83
G
F


B
E
A
F
G
C
84


K
L
H
I
M
N
85

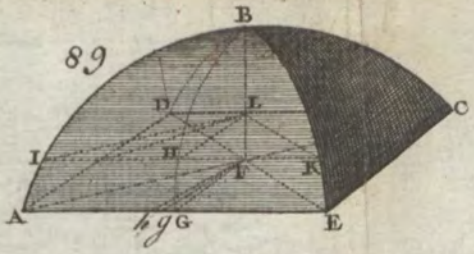

R
S
P
T
86
M
L
K
O


87
F
G
H
I
K
C
B
L
M
E
A
D

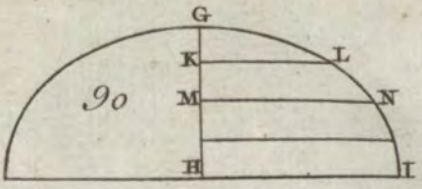

I
88
O
P
L
Q
R
G
K
H
D
N
M

T. III.

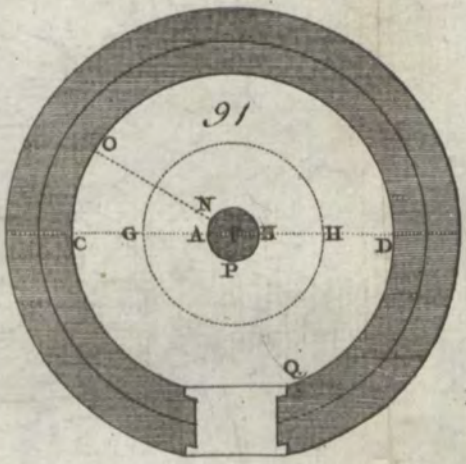
89



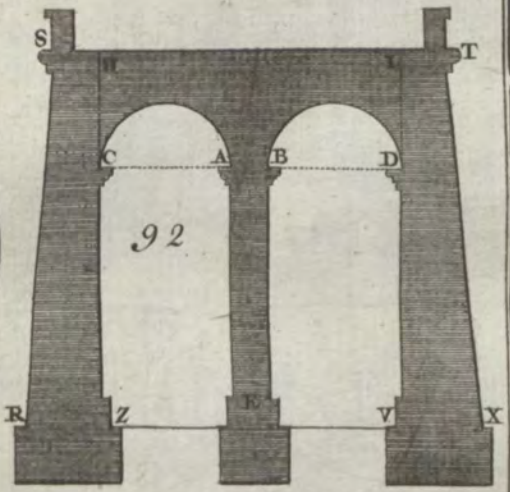
90



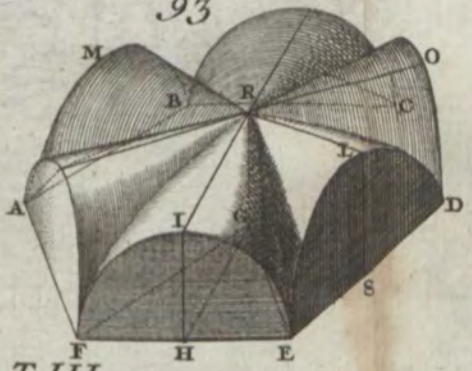
91



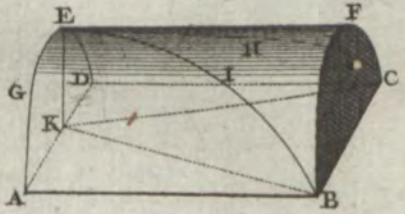
92



93



94



T. III.

CAPITULO III.

Applicação da Geometria ao modo de medir o reveſtimento de huma fortificação.

852 QUando ſe deſenha huma fortificação ha huma linha á roda de todas as obras, a que ſe chama magiſtral, que determina todos os comprimentos, que devem ter todas as partes de huma fortificação, e eſta linha he a que repreſenta o cordão do reveſtimento de qualquer obra. Por exemplo. Se diſſermos que a face de hum baluarte tem 50 braças, iſto deve entender-ſe de hum extremo do cordão deſta face até o outro, ou, o que vem a ſer o meſmo, de hum extremo até outro da muralha da face.

Preſentemente para medir o reveſtimento do baluarte repreſentado pela figura 95, veja-ſe o perfil, cujas medidas ſe tomarão, conforme o perfil geral de Mr. de Wauban, para o reveſtimento ordinario de hum reparo, que tiveſſe 45 palmos do fim AG do alicerce até á altura CH do cordão; e como Figura 96.

a par-

a parte DEFC não tem talud, não fallaremos della, porque ſe mede facilmente, fallemos ſó da muralha do fim do cordão até o alicerce, perſcindindo dos contrafortes; e por cauſa das pyramides truncadas, que ſe encontrão nos angulos, ſe tirem dos pontos A, e D as perpendiculares AB, e DE, e meça ſe a ſuperficie do trapezio ABCG do perfil pelo comprimento AD, da face, e o producto he o reveſtimento da face; e paſſando depois ao angulo flanqueante I, ſe tire huma perpendicular GH do ponto G, que correſponda ao angulo K do pé da muralha; e tendo tambem tirado a perpendicular CA, ſe multiplicará o perfil precedente pelo comprimento HA, ou GC do flanco, e o meſmo ſe fará para medir a cortina, e as mais partes, de que ſe tem tirado as pyramides dos angulos.

Para conhecer o valor deſtas pyramides truncadas, imagino que as do angulo da eſpalda, e do angulo ſaliente ſe aſſemelhão baſtantemente com a figura 99; e aſſim conhecendo os dous planos VT, e QR, meço eſta pyramide

de truncada do modo ordinario; e ſuppondo que eſta ſeja a do angulo flanqueado, terei cuidado em não a confundir com a do angulo da eſpalda, porque tem differente ſolidez, e por iſſo meço eſta ultima, como a precedente.

Quanto ao que nos reſta que medir no angulo flaqueante I, imagino a figura 98 como eſta parte ſeparada: eſte corpo ſe pareceria com hum priſma, ſe o vaſio BCEHG foſſe cheio. Suppondo pois que o ſeja, buſco o valor do priſma AFG, do qual diminuo o da pyramide KMI, que ſupponho ſer igual ao vaſio BEG, e a differença he a parte, que ſe buſca. Figura 97.

853 Pouco cuſtaria a medir o reveſtimento de huma fortificação, ſe elle conſtaſſe ſempre de linhas rectas, como neſta figura; mas encontrão-ſe outras muitas difficuldades, quando ſe querem medir os reveſtimentos das partes dos baluartes com orelhão, como a do baluarte repreſentado na figura 100: com tudo como o que tratámos antecedentemente * foi para facilitar a intelli- * Numer. 854. e 855.

gen-

gencia, vamos fazer eſtas operações de modo que ſe fação perceptiveis.

A figura 104 repreſenta o flanco de hum baluarte com orelhão, a largura AB he a groſſura do reveſtimento no cordão, que ſempre são 7 palmos e meio, e a largura BC he do talud I do reveſtimento, que he quaſi de 9 palmos; de ſorte que toda a largura AC moſtra a groſſura do reveſtimento ao pé da çapata, que ſerá 16 palmos e meio, e a linha FKIGDE he a magiſtral. Para ſaber como ſe deve medir o orelhão GSD, vejamos primeiro a ſua deliniação, pois preciſamos conhecer o angulo GHD, e o raio HD.

Sabemos que para a delineação do orelhão, conforme o methodo de Mr. de Wauban, ſe divide o flanco FD em 3 partes iguaes, e a terceira GD he a corda de huma porção de circulo, que fórma o orelhão, e que para ſe deſcrever eſta porção de circulo ſe levanta no meio da parte GD huma perpendicular LH, e outra DH ſobre o extremo DE da face DE do baluarte; e encontrando-ſe eſtas duas perpendiculares

no

no ponto H, dão o centro do orelhão, ou do arco GVD, cujo raio he a perpendicular DH.

Iſto ſuppoſto, ſe com os raios HB, HG, HQ ſe deſcrevem trez circulos, e ſe examina a figura 102, veremos que eſtes trez circulos fazem hum cone truncado, dentro no qual ha hum cylindro; e ſendo o plano BY o perfil do orelhão, a linha QG em huma, e outra figura denotará o talud do reveſtimento, a linha GB a ſua groſſura no lugar do cordão, a linha GH o ſemidiametro do orelhão, que he o meſmo que HD; e como o reveſtimento do orelhão he hum ſector de cone truncado, depois de abatido o cylindro, que tem no meio, e a grandeza deſte ſector he determinada pelo angulo GHD, conheceremos do modo ſeguinte o valor das linhas, que preciſamos conhecer para medir o ſector. Na figura repreſentamos ſó metade do cone truncado por não fazer a chapa tão grande.

Já vimos * que o angulo da eſpalda FDE era de 117 gráos, e 39 minutos, e por conſequencia ſe ſe tira o angulo re-

* Numer. 741.

recto HDE, reſtará o angulo HDL do triangulo rectangulo HLD de 27 gráos, e 39 minutos, e ſerá o angulo LHD de 62 gráos, e 21 minutos; e como tambem achamos * que o flanco FD era de 24 braças, e 6 palmos, ſendo a linha LH a ſua ſexta parte, ſerá de 4 braças, e 1 palmo; mas no triangulo LHD ſão conhecidos os trez angulos, e o lado LD: logo conhecer ſe-ha facilmente o lado DH, que ſe achará de 4 braças, 6 palmos e 1 pollegada. Iſto feito, conheceremos todas as linhas da figura; porque ſendo o ſemidiametro HG de 4 braças, 6 palmos, e 1 pollegada, e a linha GB de 7 palmos e meio, o raio HB do cylindro ſerá de 3 braças, 8 palmos, e 5 pollegadas; e ſendo o talud QG de 9 palmos, o ſemidiametro HQ da baſe do cone truncado ſerá de 5 braças, 5 palmos, e 1 pollegada; e o eixo HZ, que expreſſa a altura do reveſtimento, ſerá de 45 palmos, e aſſim ſe conhece tudo o que ſe preciſa para medir o cone truncado, e o cylindro, que eſtá no meio delle.

* Numer. 741.

Me-

Medido pois o cone truncado, e o cylindro, ſe diminuirá o valor do cylindro do cone truncado para ter o fragmento, que he a ſua differença; e como o reveſtimento do orelhão he hum ſector deſte fragmento, buſcar-ſe-lheha o valor, ſegundo o que vimos no artigo 820, iſto he, conhecendo o angulo GHD, que he de 124 gráos, e 24 minutos, diremos: ſe 360 me dão o valor do cone truncado, depois de abatido o cylindro, quanto me darão 124 gráos, e 24 minutos por valor do ſector, ou por valor do reveſtimento do orelhão, que ſe achará, fazendo o calculo das partes, que ſe enſinárão.

854 Antes de ſe medir o flanco curvo KI, he preciſo advertir, que para a ſua conſtrucção ſe continuou a linha da defenſa SF, e ſe tomou FK de 4 braças e meia, e que pelo angulo flanqueado S, e ponto G ſe tirou a linha SI, e ſe tomou na parte GI 4 braças e meia: depois ſe tirou a linha KI, ſobre que ſe fez hum triangulo eqnilatero KPI, para ter o ponto P, que ſervio de centro para deſcrever com o raio PK o arco KI, com Figur. 101. e 104.

o raio PN o arco NO, e com o raio PL o arco RM.

A primeira difficuldade, que ſe offerece, he achar o valor do raio PK, que ſe achará, porque ſe conhece o angulo SFG de 80 gráos, e 47 minutos *, e a linha EF de 76 braças, e 4 palmos, á qual accreſcentando a linha SE, iſto he, a face do baluarte, que são 45 braças, teremos toda a linha SEF de 121 braças, e 4 palmos; e como a linha FG he os dous terços do flanco ED, que achamos de 24 braças, e 5 palmos, ſerá 16 braças, 2 palmos, e 5 pollegadas; e como no triangulo SFG ſe conhecem os lados FS, e FG com o angulo, que elles comprehendem, ſe conhece o angulo FSG de 8 gráos, e o lado SG, que he de 114 braças, e 1 palmo e meio; e ſe ao lado SF ſe accreſcenta a linha FK, e ao lado SG a linha GI, ambas de 4 braças e meia, teremos outro triangulo KSI, de que ſe conhecerá o lado SK de 125 braças, e 9 palmos, e o lado SI de 118, e 4 palmos e meio, e o angulo KSI de 8 gráos, com os quaes ſe conhecerá a linha KI de pouco mais de 16 braças,

* Numer. 741.

e 8

e 8 palmos; e como eſta linha he igual ao raio PK, ſerá tambem eſte de 16 braças, e 8 palmos.

Examinando bem o reveſtimento do flanco KI, ver-ſe-ha que não he outra couſa mais que hum ſector de cylindro, no meio do qual ha hum vaſio da figura do cone truncado, como no artigo 820, e para ſe comprehender melhor imaginemos que XV he metade de hum cylindro, cujo raio PN do circulo he o meſmo que o do arco NO do flanco; e ſendo o raio PK de 16 braças, e 8 palmos, ſe ſe lhe accreſcenta a linha KN, groſſura da muralha, no cordão, que he de 7 palmos e meio, teremos a linha PN de 17 braças, e 5 palmos: logo ſe da linha PK ſe diminue a linha KL, que denota o talud da muralha, que são 9 palmos, teremos a linha PL de 15 braças, e 9 palmos; e ſe a linha NV he igual á altura do reveſtimento, que são 4 braças e meia, o trapezio KLVN ſerá o perfil; e como ſe conhece o raio PN do cylindro, o ſemidiametro KP do maior circulo do cone truncado, e o ſemidiametro PL do menor circulo do Figur. 102. e 103.

meſmo cone, e além diſſo o eixo P*p* de 4 braças e meia, temos tudo o de que ſe preciſa para medir a ſolidez do cylindro V X, e a do cone truncado. Achando pois a ſolidez deſtes corpos, ſe diminuirá a do cone truncado da do cylindro para ter a differença, que huma vez achada, ſe dirá: ſe 360 me dão a differença do cylindro ao cone truncado, que me darão 60 gráos, valor do angulo, por ſolido do ſector, depois de tirado o cone truncado? e o que ſahir ſerá o valor do reveſtimento do flanco concavo. O prolongo F K, e o revéz do orelhão G I são muito faceis de medir, e não precisão explicar-ſe.

Figur. 107. 855 O modo de medir o redondo de huma contraeſcarpa he tambem hum pouco difficultoſo; mas como neſta parte ſe obſerva o meſmo que o flanco concavo, comprehendido bem o que temos dito, julgo que não ſe encontrará difficuldade: com tudo como não deſejo deixar couſa alguma para adivinhar, advirta-ſe, que para ſe calcular a alvenaria da contraeſcarpa da figura 107, ſe fará o meſmo que no baluarte da figu-

gura 95, iſto he, não attendendo aos contrafortes, ſe multiplicará a ſuperficie da alvenaria pelo comprimento da contraeſcarpa rectilinea, e ſe medirão tambem as pyramides truncadas dos angulos reintrantes, e o redondo ſe medirá do modo ſeguinte.

856 Suppondo que o arco ACB he o pé da muralha no foſſo, o arco DFG o vertice, o arco HIK com o precedente a groſſura em ſima, e o intervallo CF o talud, buſque-ſe primeiro o valor da corda AB, que ſuppomos de 18 braças, e o da flexa LC, que ſerá por exemplo de 36 palmos, para conhecer o diametro do arco ACB, que ſe achará como o de qualquer outro arco, buſcando huma terceira proporcional á flexa LC, e á corda LA, iſto he, a 36 palmos, e 18 braças; e eſta terceira proporcional, que ſahe de 22 braças e meia, ſerá o diametro, que ſe pede.

857 A razão diſto ſe entenderá facilmente, imaginando que o arco ACB he o meſmo que o precedente, e ſe notará que acabando o circulo, a ſemicorda LB he meia proporcional entre a fle- Figur. 105.

a flexa CL, e a parte LM do diametro; e tendo achado a linha LM, terceira proporcional, a CL, e LB, accreſcente-ſe a flexa CL, e teremos o diametro CM.

Como preciſamos conhecer tambem a quantidade de gráos, ou o valor do arco ACB, tirem-ſe os raios AN, e NB, e teremos o triangulo ANB, de que ſe conhece o lado AB de 18 braças, e cada hum dos lados NA, e NB de 13, e 4 pollegadas: logo facilmente ſe conhecerá o angulo ANB, que ſe achará ſer de 90 gráos, e 44 minutos.

Preſentemente ſe ſe examina o perfil da contraeſcarpa na figura 110, ver-ſe-ha que aſſemelhando-ſe ao flanco curvo, o redondo do foſſo he hum ſector, do qual ſe tirou hum cone truncado, cujo eixo commum ſeria a linha OP. Ora ſe a altura FR, ou OP he de 27 palmos, a groſſura FI de 4 e meio, o talud CR de 6, ſendo o raio PC de 13 braças, e 4 pollegadas, o raio OF ſerá de 13 braças, e 6 palmos e meio, e ſerá o raio OI de 14 braças, e 1 palmo; e como ſe conhecem todas as linhas do cylindro,

que

que terião por plano gerador o rectangulo PI, e as do cone truncado, que terião por plano gerador o trapezoide POFD, ſe ſe buſca a ſolidez de hum, e outro, e ſe tira a do cone truncado da do cylindro, teremos a differença, que nos dará o ſolido, que buſcamos, dizendo: ſe 360 gráos me dão eſta differença, que me darão 90 gráos, e 44 minutos por valor do redondo?

Não tenho fallado até aqui no modo de medir os contrafortes, porque não são outra couſa mais que parallelipipedos, cuja ſolidez ſe acha multiplicando a baſe pela altura.

PROPOSIÇÃO XX.

PROBLEMA.

858 Modo de medir a ſolidez da unha do travéz no fóço aquatico.

Quando os foſſos de huma fortificação são cheios de agua, ſe lhes faz ordinariamente nos ſitios mais commodos travézes de alvenaria para ſuſtentar as aguas, e largallas quando for preciſo. Para fazer idéa deſte travéz examine-ſe a figura 106, que moſtra que eſta obra Figur. 106.

não

não he outra couſa mais que hum corpo de alvenaria, cujo perfil he ABCDE, moſtra que o tecto BCD he em feitio de aſna para expedição das aguas da chuva, e para embaraçar a paſſagem por ſima della: com tudo como os ſoldados poderião, deſcendo do reparo por huma corda, paſſar o foſſo eſcarranchados por ſima delles, ſe lhe faz a torrinha no meio para embaraçar abſolutamente a paſſagem.

Para medir eſte travéz ſe mede primeiro a ſuperficie do perfil ABCDE, que ſe multiplica por toda a largura do foſſo neſte ſitio: buſque-ſe depois a ſolidez do cylindro FIKG, como tambem da ſua cupula, que humas vezes he hum cone ILK, ou huma meia eſfera: até aqui he facil; mas o que embaraça quaſi todos os Engenheiros he medir os dous fragmentos FHG, que ficão de huma, e outra parte da torrinha, como ſe conhece melhor na figura III em X, e Z, que he o perfil do travéz, e torrinha.

Figur. III. Alguns Engenheiros me propuzerão eſte problema, deſejando ter a ſolução delle: buſquei-a, e a achei por muitos

mo-

modos; e goſtei tanto de trabalhar niſſo, que foi cauſa de achar tambem muitas couſas curioſas, e entre outras a quadratura da ſuperficie do travéz, iſto he, achar hum rectangulo igual á ſua ſuperficie, e julgo que para ſe ſaber o que ſe póde dizer mais intereſſante a eſte reſpeito baſta examinar o que ſe ſegue.

Como o eixo do cylindro, que faz a torrinha, correſponde ao cume da cupula do travéz, e divide a copa do cylindro em duas igualmente, de ſorte, que cada ſemicirculo he huma das faces NQM da unha. Se eſte ſolido ſe imagina compoſto de infinitos triangulos rectangulos, como POQ, que todos tem por baſe as ordenadas QO, RS, TV, dos quartos de circulos OQN, OQM, veremos que ſendo todos eſtes triangulos ſemelhantes, são na meſma razão que os quadrados das ſuas baſes; e tomando os triangulos, que compõem a metade QNOP da unha, ſegue-ſe que ſe achará o ſeu valor do modo que ſe acha o dos quadrados das baſes, ou tambem como ſe acha o dos quadrados das Figur. 108.

or-

*Numer. 569. ordenadas de hum quarto de circulo *; mas o valor de todos eſtes quadrados ſe acha multiplicando o da ordenada maior OQ pelos dous terços da linha ON, que expreſſa a ſua quantidade: logo para achar o valor de todos os triangulos, deve-ſe multiplicar o maior triangulo POQ pelos dous terços da linha ON; e como iſto dá ſó metade do ſolido da unha, para ſe ſaber o ſolido de todo multiplique-ſe o triangulo POQ pelos dous terços do diametro MN.

Figur. 108. e 111. Suppondo que eſta unha ſeja a meſma que a que eſtá em X, o triangulo OPQ ſerá o meſmo que ABC; e por conſequencia ſe a linha BA he de 5 palmos, e o diametro BD de 9, a linha BC ſerá de 4, e $\frac{1}{2}$, e a ſuperficie do triangulo ABC ſerá de 11 palmos, e 2 pollegadas, que multiplicada pelos dous terços de AD, iſto he, por 6, dará 67 palmos, e $\frac{1}{2}$ cubicos, que he a ſolidez da unha X. Se a torrinha ſe imagina cortada por huma quantidade de

de planos, que paſſando pelo centro B do ſemicirculo, vão á circumferencia A F D, iſto he, perpendicularmente á ſuperficie da unha, eſtes planos o dividirão em huma infinidade de pequenas pyramides, que terão todas por altura o raio do ſemicirculo, e as baſes na ſuperficie da unha; mas como todas eſtas pyramides juntas são iguaes a huma ſó, que tenha por baſe a ſomma de todas as baſes, iſto he, a ſuperficie da unha, e por altura o raio, ſegue-ſe que a ſolidez da unha ſe achará tambem, multiplicando a ſuperficie pela terceira parte do raio. Figur. 109.

859 Digo tambem que a ſuperficie da unha X he igual a hum rectangulo, que tenha por baſe o diametro B D, ou MN da unha, e a meſma altura da unha, iſto he, a linha AB.

Chame-ſe á linha AB a, o raio BC, ou CD b, o diametro BD ſerá $2b$: iſto ſuppoſto, moſtraremos que BD×BA $2ba$ he igual á ſuperficie da unha.

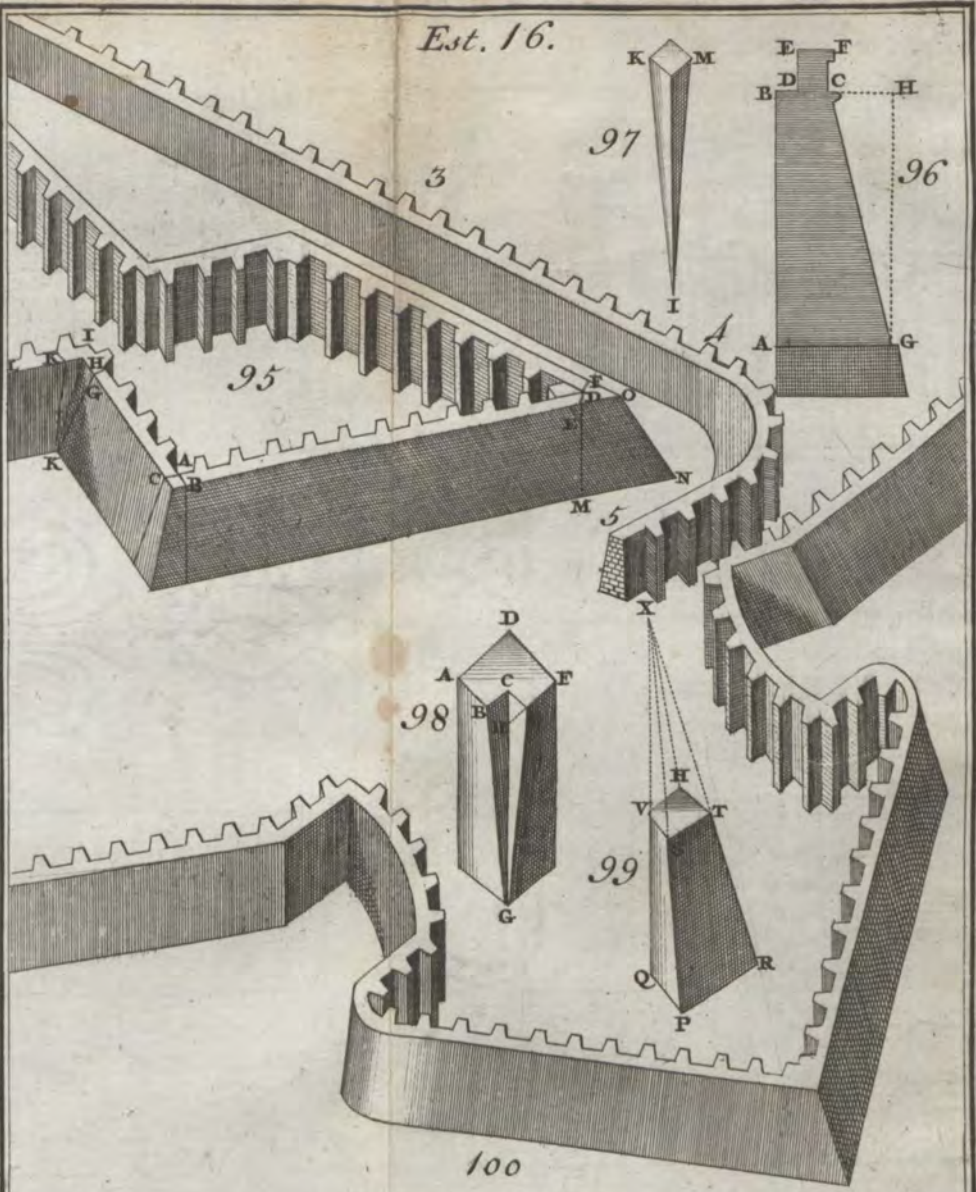
A ſuperficie A B C he $\frac{ab}{2}$; e ſe eſta quantidade ſe multiplica pelos dous ter-

terços do diametro BD, isto he, por $\frac{4b}{3}$, teremos $\frac{4abb}{6}$, solido da unha; mas como este producto he o da superficie pela terça parte do raio, segue-se que dividindo $\frac{4abb}{6}$ por $\frac{b}{3}$, o quociente ha de ser necessariamente a superficie da unha; e feita a divisão, se achará no quociente $2ab = BD \times BA$, o que mostra que a superficie he igual ao rectangulo que dissemos. Isto se refere ao que dissemos ácerca das abobedas de volta inteira, e sua solidez, pois a unha póde imaginar-se como dous lanços de abobeda, de que cada hum tivesse a mesma altura, e por base o triangulo BFI.

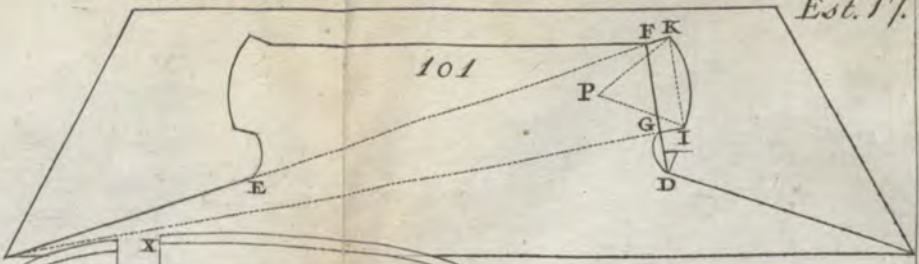
CAPITULO IV.

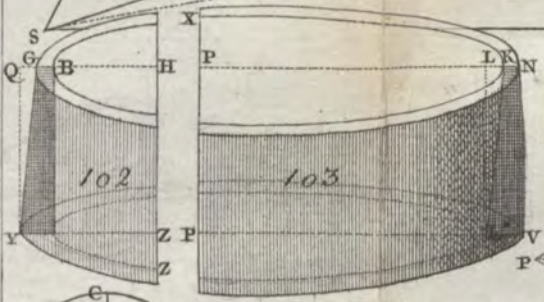
Regra geral para medir as superficies, e solidos.

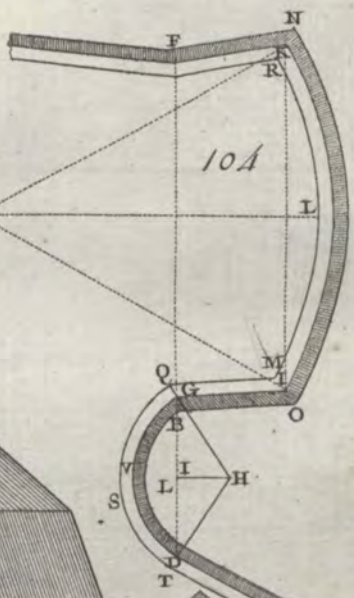
860 NAda dá mais a conhecer a beleza da Geometria que a fecundidade dos seus principios, que pa-

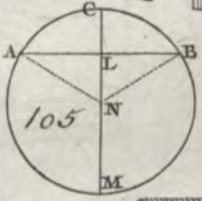


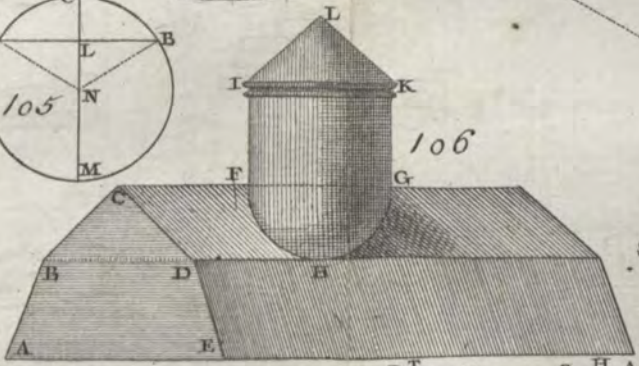
T. III.

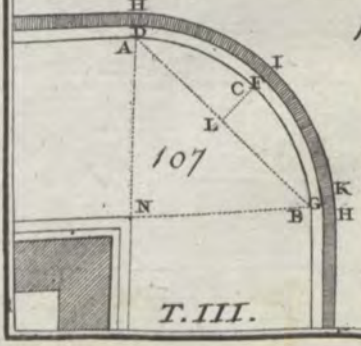

101
F
K
P
G
I
E
D

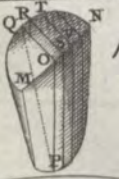

S
X
G
Q
B
H
P
L
K
N
102
103
Y
Z
P
V
Z


N
F
K
R
104
L
P
Q
M
T
G
O
B
V
I
H
L
S
D
T

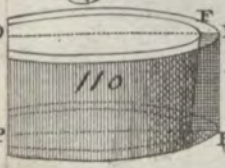

C
A
B
L
105
N
M

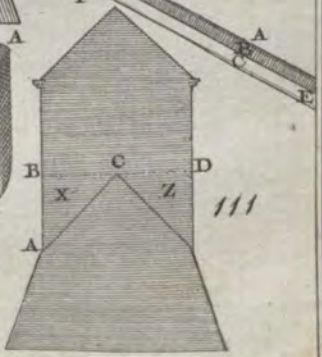

L
I
K
106
F
G
C
B
D
B
A
E


H
D
A
I
C
E
L
107
N
B
G
K
H
T. III.


Q
R
T
N
108
C
M
F

G
H
A
109
F
E
B
D
C
I


O
F
I
110
P
R


A
B
C
D
X
Z
111
A

parecem andão apoſtados a moſtrar novos caminhos para chegar ao meſmo lugar, o que teſtemunhão os bellos deſcubrimentos, que ſe tem feito nos noſſos tempos, entre os quaes he eſte hum tão intereſſante, que ſe não póde deixar de fazer patente áquelles, que tem por principal objecto do ſeu eſtudo de Geometria a medição dos corpos; mas como o ſeu conhecimento depende de certas couſas, de que não temos fallado até aqui, vamos fazello, para que nos não fique nada por tratar.

DEFINIÇÃO.

861 Chama-ſe centro de gravidade de huma linha recta hum ponto, pelo qual ſe ſe ſuſpender eſta linha, todas as ſuas partes ficão em equilibrio; porque ainda que huma linha ſe imagine não ter pezo, iſto não embaraça que a differença das ſuas partes ſe não conſidere como hum obſtaculo ao equilibrio. Aſſim ſe a linha AB ſe dividir em duas igualmente no ponto C, eſte ponto ſe póde tomar pelo do equilibrio, iſto he, por aquelle lugar, pelo qual ſuſpenſa eſ-

esta linha, ficarão as partes CA, e CB em equilibrio; porque não sendo huma maior que outra, não se dá maior razão, para que o extremo A se mova mais que o extremo D; e quando succede o mesmo em hum plano, se chama a este ponto centro de gravidade do plano; porque ainda que o plano, assim como a linha, se considere sem pezo, isto não embaraça que as suas partes se imaginem como podendo obstar ao seu equilibrio.

862 Por exemplo. Se temos hum
Figur. 112. rectangulo AB, e se tirão as diagonaes AB, e CD, o ponto E, em que se cortão, será o centro da gravidade; porque se este plano se puzesse sobre hum eixo muito agudo, que correspondesse ao ponto E, não haveria maior razão, para que o plano se inclinasse mais para a parte DB, que para a parte AC, nem da parte AD mais que da parte CB.

Como as superficies circulares são formadas pela uniforme circumvolução de huma linha recta, e os solidos circulares são formados pela circumvolução

ção de hum plano, buſcando conhecer o centro da gravidade da linha geratriz, e do plano gerador, ſe buſca o valor deſtas ſuperficies, e deſtes ſolidos; porque ſe o ponto C he o centro da gravidade da linha AB, e neſte lugar ſe levanta a perpendicular CD, moſtraremos que tendo-ſe movido a linha AB ao redor da linha EF, que ſe chamará eixo, que tambem he perpendicular ſobre CD, a ſuperficie, que deſcreve a linha AB, ſerá igual a hum triangulo, que tenha por baſe a linha AB, e por altura huma linha igual á circumferencia, que tiveſſe o raio igual á linha CD, que expreſſa a diſtancia do centro da gravidade C ao eixo; e que ſe do centro da gravidade E ſe abaixa huma perpendicular EF ſobre o lado GB, e o rectangulo AB ſe move á roda do lado GB, que nós chamaremos eixo, o corpo, que deſcrever eſte plano, ſerá igual ao parallelipipedo, que teria por baſe eſte meſmo plano, e por altura huma linha igual á circumferencia do circulo, que tiveſſe o raio EF, o que faremos geral para medir to-

Figur. 113. e 114.

todas as ſuperficies, de que ſe puderem conhecer os centros da gravidade das ſuas linhas geradoras, e para medir todos os ſolidos, de que ſe puder conhecer os centros da gravidade do ſeu plano gerador.

PROPOSIÇÃO XXI.

PROBLEMA.

863 Conhecendo o centro da gravidade de huma recta AB, achar o valor da ſuperficie, que deſcreverá depois de fazer a circumvolução á roda do eixo EF.

Digo que ſe deve multiplicar a linha AB pela circumferencia do circulo, que tiver o raio DC, e teremos a ſuperficie, que ſe buſca; porque como eſta linha deſcreverá hum cylindro BG, e a ſuperficie deſte cylindro ſe acha, multiplicando o circulo do raio FB da baſe pela altura AB do cylindro, ſegue-ſe que ſendo a linha DC igual a FB, as circumferencias deſtas linhas ſerão tambem iguaes, e por conſequencia o producto da linha AB pela cir-

Figur. 114. e 115.

circumferencia do raio DC será igual á ſuperficie, que ſe pede.

864 Mas ſe a linha AB em vez de ſer parallela ao eixo EF foſſe obliqua, como he, por exemplo, a linha GH, digo, que fazendo huma circumvolução á roda do eixo EF, a ſuperficie, que ella deſcrever, será tambem igual ao rectangulo comprehendido da meſma linha GH, e da circumferencia do circulo, que tiveſſe o raio DC, tirado do centro da gravidade, e perpendicular ao eixo EF. Figur. 116. e 117.

Como eſta linha deſcreveria a ſuperficie IH de hum cone truncado, e a linha DC he meia arithmetica entre EG, e FH, a circumferencia, que tiveſſe o raio DC, será meia arithmetica entre as circumferencias dos raios EG, e FH; como eſtas circumferencias são lados parallelos do trapezoide, que tiveſſe por altura a linha GH, e eſte trapezoide he igual á ſuperficie do cone truncado, ſegue-ſe que o rectangulo feito de GH, e da circumferencia do circulo, que tiveſſe o raio DC, he igual á ſuperficie deſcripta pela linha GH.

865 Finalmente ſe a linha gerado-
Figur. 118. ra encontraſſe o eixo EF, como a linha EK, digo, que ſe fizer huma circumvolução á roda do eixo EF, a ſuperficie, que deſcrever, ſerá igual ao rectangulo feito da meſma linha EK, e da circumferencia do circulo, que tiveſſe o raio DC.

Se ſe faz reflexão que a linha geradora deſcreve a ſuperficie do cone LEK, veremos que ſendo eſta ſuperficie igual ao rectangulo feito do lado EK, e da metade da circumferencia do circulo LK *, e ſendo a linha DC metade do raio FK, a circumferencia, de que elle for raio, ſerá tambem metade de LK, e por conſequencia o rectangulo feito da linha geradora EK, e da circumferencia do circulo, que tiveſſe o raio DC, ſeria igual á ſuperficie, que deſcreveria.

Tom. II. * Numer. 547.

PROPOSIÇÃO XXII.

PROBLEMA.

866 Se temos huma ſemicircumfe-
Figur. 123. rencia EBF, de que o ponto C ſeja o cen-

centro da gravidade, digo que movendo-se a semicircumferencia á roda do eixo EF, a superficie, que ella descrever, que será a de huma esfera, será igual ao rectangulo de huma linha igual á semicircumferencia EBF, e da que fosse igual á circumferencia, de que CD fosse raio.

Como se deve conhecer o centro da gravidade C, deve saber-se que a linha CD, que determina a posição a respeito do centro do semicirculo, deve ser quarta proporcional á semicircumferencia, EBF ao diametro EF, e ao semidiametro DF; assim chamando á semicircumferencia a, ao diametro EF b, o semidiametro DF será $\frac{b}{2}$, e por consequencia será $a:b:: \frac{b}{2} : \frac{bb}{2a}$, o que mostra que $\frac{bb}{2a}$ he igual á linha CD; mas como necessitamos da circumferencia da linha DC, se achará, dizendo: o raio DF $\frac{b}{2}$ á circumferencia $2a$, como o raio DC $\frac{bb}{2a}$ á sua circumferencia; e por isso multiplicando

o ſegundo termo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro, acharemos o quarto, que ſerá $2b$.

Como $2b$ he a circumferencia do raio DC, ſe ſe multiplica pela ſemicircumferencia EBF a, teremos $2ab$, ſuperficie deſcripta pela ſemicircumferencia, o que he evidente; porque como eſta ſuperficie de huma eſfera he igual ao producto do diametro do circulo maximo pela circumferencia do meio circulo *, ſendo a circumferencia $2a$, e o diametro b, a ſuperficie ſerá ſempre $2ab$.

Tom. II. * Numer. 574.

REFLEXÃO.

Tenho dito baſtante para moſtrar que achado o centro da gravidade de huma linha recta, ou curva, ſe achará a ſuperficie, de que ella foi geradora, e ſeria eſte o melhor modo, ſe o centro da gravidade deſtas linhas ſe achaſſe com a meſma facilidade que as ſuperficies que deſcrevem; e tendo ſatisfeito o meu primeiro intento, paſſo ao ſegundo do modo como ſe póde pelo centro da gravidade dos planos geradores achar o ſolido dos corpos, que elles deſcrevem.

PRO-

PROPOSIÇÃO XXIII.

PROBLEMA.

867 Se hum rectangulo AF faz huma circumvolução á roda do eixo EF, digo que a ſolidez do corpo, que deſcrever, ſerá igual ao producto do plano AF pela circumferencia, cujo raio foſſe a linha CD, tirada do centro da gravidade C, perpendicular ao eixo EF. Figur. 113.

Como eſte ſolido ſerá hum cylindro, ſupponhamos que he o cylindro AG; aſſim chamando o eixo EF a, á linha EA b, a linha CD ſerá $\frac{b}{2}$, porque he metade de AE; e ſe ſe chama á circumferencia do raio EA c, a do raio CD ſerá $\frac{c}{2}$.

Iſto ſuppoſto, AE×EF ab ſerá o valor do plano gerador, que multiplicado pela circumferencia do raio CD $\frac{c}{2}$, deve ſer $\frac{abc}{2}$ o valor do ſolido formado pela circumvolução do plano AF, o que

o que he evidente ; porque como eſte ſolido, ou eſte cylindro AG he igual ao producto do circulo da baſe pelo eixo EF *, vê-ſe que ſendo a ſuperficie deſte circulo $\frac{bc}{2}$, ſe ſe multiplica pelo eixo EF, ſerá tambem $\frac{abc}{2}$.

* Numer. 812.

PROPOSIÇÃO XXIV.

PROBLEMA.

868 Se tivermos hum triangulo *Iſoceles* EBF, cujo centro da gravidade ſeja o ponto C, digo, que ſe eſte triangulo faz huma circumvolução á roda do eixo EF, o ſolido que deſcrever ſerá igual ao producto do plano gerador pela circumferencia do circulo, cujo raio foſſe a linha CD, tirada do centro da gravidade perpendicular ſobre o eixo.

Figur. 120. e 121.

O ſolido IKGH, que deſcreveo o triangulo EBF, he compoſto de dous cones KGH, e KIH, queremos moſtrar que o producto do plano EBF pela circumferencia do raio CD he igual a eſtes dous cones; mas para iſto he preci-

ciſo ſaber que o centro da gravidade do triangulo *Iſoceles* he hum ponto tal como C, tomado na perpendicular BD em huma diſtancia CD da baſe, que he a terça parte da perpendicular ; aſſim chamando á linha EF a, á linha BD b, e c á circumferencia, de que elle ſeria raio, ſendo CD o terço de BD, a circumferencia, de que ella ſeria raio, ſerá $\frac{c}{3}$. Iſto ſuppoſto, o triangulo EBF ſerá $\frac{ab}{2}$, que multiplicado por $\frac{c}{3}$, teremos $\frac{abc}{6}$ por valor do ſolido KGHI, o que he evidente; porque ſe ſe buſca do modo ordinario o ſolido de hum cone KGH, cujo plano gerador he o triangulo EBD, ſendo a linha BD o raio do circulo da baſe, o ſeu valor ſerá $\frac{bc}{2}$, que multiplicado pelo terço da linha ED *, ou pela ſexta parte de EF $\frac{a}{6}$, dará $\frac{abc}{12}$, valor do cone, e conſequentemente $\frac{2abc}{12}$, ou $\frac{abc}{6}$ ſerá o valor

Tom. II. * Numer. 556.

dos dous cones, isto he, do solido KG HI, que se acha o mesmo precedente.

869 Mas se o triangulo EBF fizesse huma circumvolução á roda do eixo LM, descreveria hum solido de outra figura, que terá á precedente a mesma razão que a linha BC a CD, porque para achar o valor deste solido se multiplicará o plano EBF pela circumferencia do circulo, de que fosse raio BC; e como hum, e outro solido tem por base o mesmo plano EBF, estará na mesma razão que as suas alturas, isto he, na razão das circumferencias dos raios BC, e CD, que estão na mesma razão dos raios.

Figur. 124. Deve-se notar que se hum triangulo rectangulo EBD se move á roda do lado ED, descreverá hum cone, cujo valor se achará, multiplicando o triangulo EBD pela circumferencia do circulo, de que fosse raio a linha CD igual á terça parte da base BD; porque multiplicando BD b por metade de ED $\frac{a}{4}$, será a superficie do triangulo $\frac{ab}{4}$, que multiplicada por $\frac{c}{3}$, dará $\frac{abc}{12}$.

E

E ſe o triangulo EBD fizeſſe huma revolução á roda do eixo HB, deſcreveria o funil FGBED, que ſeria duplo do cone; porque como o cone, e o funil tem o meſmo plano gerador, ſerão na razão das circumferencias deſcriptas pelo centro da gravidade C; e como o raio BC he duplo de CD, o funil ſerá duplo do cone, o que moſtra que hum cone he a terça parte do cylindro da meſma baſe, e altura. Figur. 124.

870 Finalmente ſe tiveſſemos hum triangulo BAD, de que o ponto C foſſe o centro da gravidade do triangulo duplo deſte, e a linha AD ſe continuaſſe indefinitamente até os pontos E, e F, e o triangulo BAD fizeſſe huma circumvolução á roda do eixo FG, o ſolido, que deſcreveſſe, ſeria igual ao producto do plano BAD pela circumferencia do circulo, cujo raio foſſe CF, que he a diſtancia do centro da gravidade C ao eixo FG; e ſe o triangulo em vez de fazer a circumvolução á roda do eixo GF fizeſſe outra á roda do eixo HE, deſcreveria hum ſolido, que ſeria igual ao producto do plano ABD Figur. 122.

pe-

pela circumferencia do circulo, que tiveſſe o raio igual á linha CE, tirada do centro da gravidade ao eixo, e eſtes dous ſolidos eſtarião na razão dos raios CF, e EC.

Deixo ao Leitor a ſatisfação de buſcar a demonſtração, e contentar-me-hei com dizer ſómente que o ſolido, formado pela revolução do triangulo ADB á roda do eixo GF, he ſemelhante ao de que fallámos no artigo 820, iſto he, que faz a differença de hum cylindro, do qual ſe tiveſſe tirado hum cone truncado; e que o ſolido, formado pela circumvolução do triangulo ABD á roda do eixo HE, he tambem ſemelhante ao do artigo 819, quero dizer, que faz a differença de hum cone truncado, do qual ſe tirou hum cylindro; e como o methodo de achar o valor deſtes ſolidos do modo que acabamos de dizer he mais facil que nos artigos 819, e 820, póde ſervir para medir a alvenaria do talud do orelhão flanco concavo, e redondo de contraeſcarpa.

PRO-

PROPOSIÇÃO XXV.

PROBLEMA.

871 Se tivermos hum ſemicirculo, cujo centro da gravidade ſeja o ponto I, e deſte ponto ſe baixaſſe a perpendicular ID, digo que o ſolido formado pela circumvolução do ſemicirculo EBF á roda do eixo EF, que ſerá huma eſfera, ſerá igual ao producto do plano EBF pela circumferencia do circulo, de que for raio a linha ID. Figur. 123.

Deve-ſe ſaber que a linha ID, que he a diſtancia do centro da gravidade I ao centro D do ſemicirculo, he huma quarta proporcional á ſemicircumferencia EBF ao raio DE, e aos dous terços do meſmo raio; aſſim chamando á circumferencia EBF a, ao raio DE b, metade da circumferencia EBF ſerá $\frac{a}{2}$, os dous terços do raio DE ſerão $\frac{2b}{3}$, acharemos a linha DI, dizendo: $\frac{a}{2}$ he para $b :: \frac{2b}{3}$ para DI, que ſerá $\frac{4bb}{3a}$; e para

ra termos a circumferencia do raio DI, que preciſamos, direi: ſe o raio DE b me dá $2a$ circumferencia, que me dará o raio DI $\frac{4bb}{3a}$ por ſua circumferencia? e acharemos $\frac{8abb}{3a}$, ou $\frac{8bb}{3}$; e ſe eſta circumferencia ſe multiplica pelo valor do ſemicirculo EBF $\frac{ab}{2}$, teremos $\frac{8abb}{6}$, ou $\frac{4abb}{3}$, valor do ſolido, o que facilmente ſe prova; porque como a esfera he igual ao producto de quatro vezes o ſeu circulo maximo pelo terço do radio *, e ſendo a ſuperficie do ſemicirculo $\frac{ab}{2}$, ſerá a de todo o circulo ab, que multiplicada por 4, dará $4ab$, valor de quatro circulos; e ſe eſta quantidade ſe multiplica pela terça parte do raio, iſto he, por $\frac{b}{3}$, teremos $\frac{4abb}{3}$, valor da esfera, que he o meſmo que acabamos de achar.

Tom. II. * Numer. 568. e 570.

Porém ſe o ſemicirculo EBF fizeſſe huma circumvolução á roda da tangente GA, parallela ao diametro EF, deſcre-

creveria hum ſolido, de que ſe achará o valor, multiplicando o ſemicirculo pela circumferencia de que foſſe raio a linha IB, que he a diſtancia do centro da gravidade I ao eixo GA; e ſe o ſemicirculo ſe move á roda do eixo AH perpendicular a EF, faria huma eſpecie de meio canudo, cujo valor ſe achará, multiplicando o ſemicirculo pela circumferencia do raio IK, ou do raio DF, que he o meſmo, e então o ſolido deſcripto á roda do eixo EF ſerá para o ſolido deſcripto á roda do eixo GA, como o raio ID ao raio IB; e o ſolido formado pela circumvolução do ſemicirculo á roda do eixo EF ſerá para o que ſe fórma pela circumvolução do ſemicirculo á roda do eixo AH, como ID he para o raio IK, ou DF.

REFLEXÃO.

Não enſinei o modo de achar os centros da gravidade, porque ſeria ſahir fóra do meu intento, que ſó pertende exercitar o eſpirito dos principiantes, e moſtrar-lhes o valor deſte principio geral, por meio do qual ſe póde inde-

pen-

pendentemente, do que fica já explicado no Livro VIII., resolver huma quantidade de Problemas, quando se tem os centros das gravidades das figuras geradores, que se não podem achar com hum methodo geral sem a ajuda do calculo integral: com tudo póde-se ver o que diz Mr. Ozanam no seu Tratado de Mecanica, em que dá o modo de achar o centro da gravidade de muitas figuras só com a geometria ordinaria.

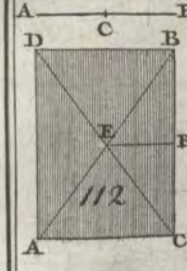
FIM DO DUODECIMO LIVRO.

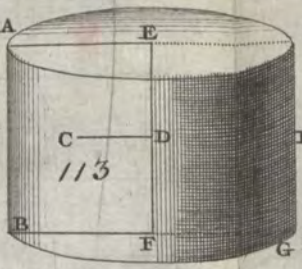
NO-

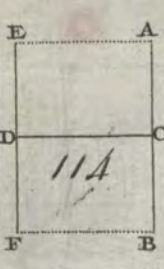
pendentemente, do que fica já explicado no Livro VIII., reſolver huma quantidade de Problemas, quando ſe tem os centros das gravidades das figuras geradores, que ſe não podem achar com hum methodo geral ſem a ajuda do calculo integral: com tudo póde-ſe ver o que diz Mr. Ozanam no ſeu Tratado de Mecanica, em que dá o modo de achar o centro da gravidade de muitas figuras ſó com a geometria ordinaria.

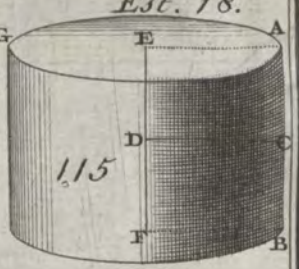
FIM DO DUODECIMO LIVRO.

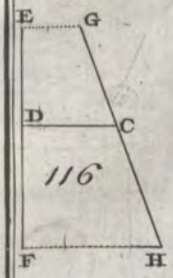
NO-

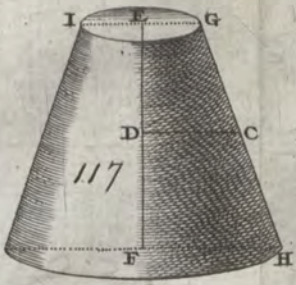

A
C
B
D
B
E
F
112
A
C

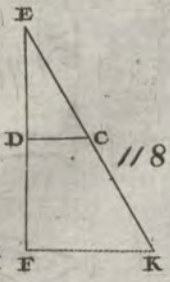

A
E
C
D
113
B
F
G

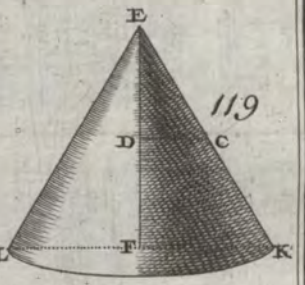

E
A
D
C
114
F
B

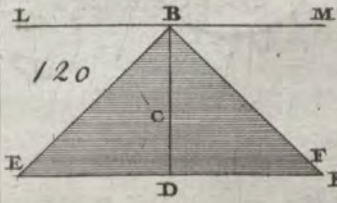

G
E
A
D
C
115
F
B

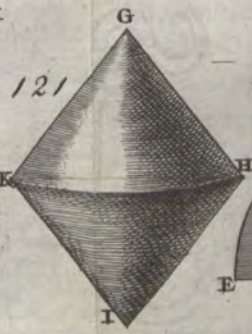

E
G
D
C
116
F
H

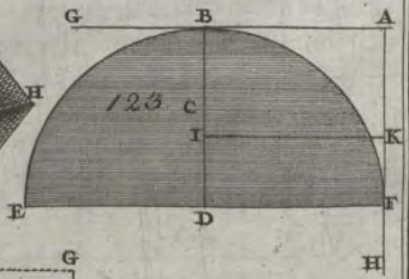

I
E
G
D
C
117
F
H

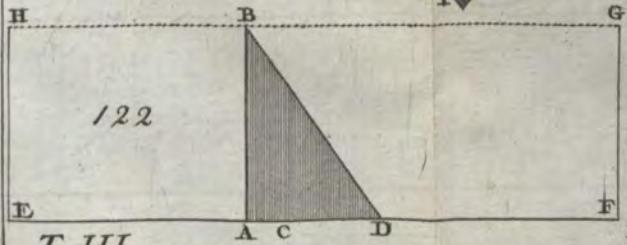

E
D
C
118
F
K

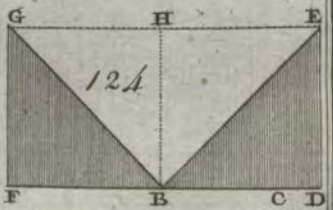

E
119
D
C
L
F
K


L
B
M
120
C
E
F
D


G
121
K
H
I


G
B
A
123
C
I
K
E
D
F
H


H
B
G
122
E
A
C
D
F


G
H
E
124
F
B
C
D

NOVO CURSO DE MATHEMATICA.

LIVRO XIII.

APPLICA-SE A GEOMETRIA á divisão dos campos, e uſo do compaſso de proporção, e Arithmetica.

PROPOSIÇÃO I.

PROBLEMA.

872 DIVIDIR hum triangulo nas partes iguaes, que ſe quizerem, tirando para dentro, linhas rectas ſobre a baſe, do angulo oppoſto á meſma baſe.

Pa-

Figur. 125. Para dividir hum triangulo ABC em trez partes iguaes por linhas, tiradas do vertice á baſe, divida-ſe a baſe AC em trez partes iguaes nos pontos D, e E; e tirando-ſe as linhas BD, e BE, ficará dividido em trez triangulos iguaes, porque tem baſes iguaes, e tem a meſma altura.

PROPOSIÇÃO II.

PROBLEMA.

873 Dividir hum triangulo em duas partes iguaes por huma linha tirada de hum ponto dado em hum dos lados.

Pedem-me que divida o triangulo
Figur. 126. ABC em duas partes iguaes por huma linha tirada do ponto D: ſuppõe-ſe que eſte triangulo he hum campo, que tem em hum dos ſeus lados hum lugar ventajoſo no ponto D, que deve ſer commum a ambos os que tem parte no campo.

Para reſolver eſte Problema, divida-ſe a baſe AC em duas partes iguaes no ponto E, tirem-ſe deſte ponto as linhas EB, e ED, e do ponto B ſe tire a li-

a linha BF parallela a DE, e finalmente a linha FD, que dividirá o triangulo em duas partes iguaes DCF, e BDFA.

Prova-ſe eſta operação, porque o triangulo ABE he metade do triangulo ABC, e por ſerem as linhas BF, e DE parallelas, o triangulo BFD ſerá igual a BEF: logo o triangulo OFE, tirado do triangulo BEA, he igual ao triangulo ODB, que ſe tirou do triangulo BEC, o que moſtra que o trapezio BDFA he igual ao triangulo DFC.

PROPOSIÇÃO III.

PROBLEMA.

874 Dividir hum triangulo ABC em trez partes iguaes por linhas tiradas do ponto D, tomado em hum de ſeus lados. Figur. 127.

Para dividir o triangulo ABC em trez partes iguaes por linhas tiradas do ponto D, divida-ſe o lado AC em trez partes iguaes nos pontos E, e F, e depois tire-ſe a linha BD, e a eſta ſe tirem parallelas dos pontos E, e F, e do ponto D tirem-ſe as linhas DG, e

DH, que dividirão o triangulo em trez partes iguaes AHD, DHBG, e DGC.

Para ſe provar baſta tirar as linhas BE, e BF, que dividirão o triangulo em trez partes iguaes, e o triangulo ABE he igual ao triangulo AHD por ſerem HE, e BD parallelas: pela meſma razão o triangulo DGC he igual ao triangulo BFC, e por conſequencia cada hum he a terça parte de toda a figura.

PROPOSIÇÃO IV.

PROBLEMA.

875 Dividir hum triangulo em trez partes iguaes por linhas tiradas dos angulos.

Pedem-me hum ponto dentro do tri-
Figur.128. angulo ABC, do qual tirando linhas aos angulos, dividão o triangulo em trez partes iguaes. Para reſolver eſte Problema, faça-ſe a linha AF igual á terça parte de AC do ponto F, tire-ſe FE parallela a AB, divida-ſe igualmente no ponto D, e eſte ponto ſerá o que ſe buſca; porque tirando delle aos angulos as linhas DB, DA, e DC,

di-

dividirão o triangulo em trez partes iguaes.

Para ſe provar, tire-ſe a linha BF, e ſerá o triangulo BAF a terça parte do triangulo total; e como eſte triangulo he igual a ADB, por ſerem as linhas AB, e FE parallelas, ſegue-ſe que tambem eſte ultimo triangulo he a terça parte da figura; e como os triangulos ADC, e BDC são iguaes, como facilmente ſe vê, ſegue-ſe que eſtá reſolvido o Problema.

PROPOSIÇÃO V.

PROBLEMA.

876 Dividir hum triangulo em duas partes iguaes por linhas tiradas de qualquer ponto na ſuperficie do triangulo.

Para dividir em dous igualmente o triangulo ABC por linhas tiradas do ponto dado F, divida-ſe primeiro a baſe AC em duas igualmente no ponto D, e tire-ſe a linha DF, á qual ſe tire huma parallela BE; e tirando as linhas EF, e FB, ficará a figura ABFE igual á figura BFEC. Figur. 129.

Para ſe provar, tire-ſe a linha BD, e por cauſa das parallelas BE, e FD ſerá o triangulo BFE igual ao triangulo BDE, e por conſequente nos dous triangulos ABD, e DBC o que ſe tirou de huma parte he igual ao que ſe accreſcentou da outra.

PROPOSIÇÃO VI.

PROBLEMA.

877 Dividir hum triangulo em duas partes iguaes por huma linha parallela á baſe.

Figur.130. Para dividir em dous o triangulo ABC por huma linha DE parallela á baſe, divida-ſe pelo meio hum dos lados, por exemplo o lado BC, e buſque-ſe huma meia proporcional entre o lado BC, e a ſua metade BF; e ſuppondo que a linha BE he igual á meia proporcional, tirando pelo ponto E a parallela ED á baſe AC, ficará reſolvido o Problema.

Prova-ſe; porque ſendo BC, BE, e BF proporcionaes, ſerá o quadrado de BC ao quadrado de BE, como a primeira BC á terceira BF; mas os tri-

an-

angulos eſtão na meſma razão que os quadrados dos ſeus lados homologos: logo o triangulo A B C ſerá duplo do triangulo BDE, porque o quadrado do lado BC he duplo do quadrado do lado B E, por ſer a linha B C dupla de BF.

Se ſe quizer dividido em trez partes iguaes por linhas parallelas á baſe, buſque-ſe huma meia proporcional entre hum dos lados do triangulo, e os dous terços do meſmo lado; e tendo marcado o comprimento deſta meia ſobre o lado, que ſe quer dividir, ſe tirará huma parallela por eſte ponto á baſe, e o triangulo interior ſerá os dous terços do que ſe quer dividir; e ſe o triangulo ſe divide em dous igualmente pela propoſição precedente, todo ficará dividido em trez partes iguaes.

PROPOSIÇÃO VII.

PROBLEMA.

878 Dividir hum trapezoide por huma linha parallela á baſe em duas partes iguaes.

Pa-

Figur.131. Para dividir o trapezoide ABCD por huma linha parallela á baſe, continuem-ſe os dous lados AB, e DC até ſe encontrarem no ponto G, depois no extremo G ſe levante a perpendicular GH igual á linha GB, tire-ſe a linha HA, e ſobre ella ſe deſcreva hum ſemicirculo, cuja circumferencia ſe divida em duas igualmente no ponto I, e tirando a linha IH, faremos GE igual a IH, e a parallela á baſe AD, tirada pelo ponto E, dividirá o trapezoide em dous iguaes.

O quadrado HA^2 he igual á ſomma dos dous quadrados BG^2, e GA^2, a linha IH he lado de hum quadrado, que he metade do quadrado de HA: logo o quadrado de IH, ou GE he meio arithmetico entre os quadrados GA^2, e GB^2; mas os triangulos ſemelhantes eſtão na meſma razão que os quadrados dos ſeus lados homologos: logo como os quadrados dos lados GB, GE, e GA eſtão em progreſsão arithmetica, os triangulos GBC, GEF, e GAD eſtão tambem em progreſsão arithmetica, e por conſequencia ſe excedem igualmente; e como

mo as grandezas, por que são excedidos, não são outra couſa mais que os trapezoides AC, e EC, ſegue-ſe que eſtes são iguaes, e por conſequencia eſtá o Problema reſolvido.

PROPOSIÇÃO VIII.

PROBLEMA.

879 Dividir hum trapezio em dous iguaes por huma linha parallela a hum dos lados.

Para dividir o trapezio ABCD por huma linha parallela ao lado AB, continuem-ſe os lados BC, e AD até ſe encontrarem no ponto G, reduza-ſe o trapezio a triangulo para ter o ponto F, e depois ſe divida a baſe AF do triangulo ABF pelo meio no ponto H, buſque-ſe huma meia proporcional entre AG, e GH, que ſerá por exemplo IG; e a linha IK, tirada do ponto I, parallela a AB, dividirá o trapezio em duas partes iguaes ABKI, e IKCD. Os triangulos ABG, e IKG são ſemelhantes: logo eſtão na meſma razão que os quadrados dos lados homologos, e tambem Figur. 132.

Numer. 496. bem ſerão como as linhas AG, e HG; mas os triangulos ABG, e HBG tem a meſma altura: logo eſtarão na razão das baſes, e conſequentemente das linhas AG, e HG: logo o triangulo IKG he igual ao triangulo HBG. Iſto ſuppoſto, ſe ſe tira de ambas as partes a figura HOKG, que he commua, ficará o triangulo OBK igual a OIH; mas o triangulo BAH he metade do trapezio: logo tambem AIKB ſerá metade do trapezio, e conſequentemente a linha IK o divide em duas partes iguaes.

PROPOSIÇÃO IX.

PROBLEMA.

880 Dividir hum trapezoide em trez partes iguaes.

Eſta propoſição põe-ſe aqui para ſervir de introducção ás que ſe ſeguem; Figur. 133. aſſim examinando o trapezoide AC, que ſe propõe para ſe dividir em trez partes iguaes, ver-ſe-ha que baſta dividir os lados BC, e AD em trez partes iguaes, e tirar as linhas EG, e FH, e ficarão iguaes as figuras AG, HE, e FC,

FC, porque cada huma ſe compõe de dous triangulos iguaes.

PROPOSIÇÃO X.

PROBLEMA.

881 Dividir hum trapezio em duas partes iguaes.

Para dividir o trapezio ABCD em duas partes iguaes tire-ſe do ponto B a linha BH parallela a AD, dividão-ſe as linhas BH, e AD em duas iguaes nos pontos G, e F, tirem-ſe as linhas GC, e GF, que farão a figura CBAFG igual á figura CGFD, cada huma metade do trapezio, por quanto o trapezoide AG he igual ao trapezio GD, e o triangulo BCG he igual ao triangulo GCH. Figur. 134.

Porém para as duas partes do trapezio ficarem mais regulares, ſeria bom que as linhas da divisão CG, e GF fizeſſem huma recta: para iſto tire-ſe FC, e a ella do ponto G a parallela GE, tirando-ſe do ponto E ao ponto F a linha EF, ficará o trapezio dividido em duas partes iguaes, o que he evidente,

te, porque os triangulos FGC, e FEC eſtão entre as meſmas parallelas.

PROPOSIÇÃO XI.

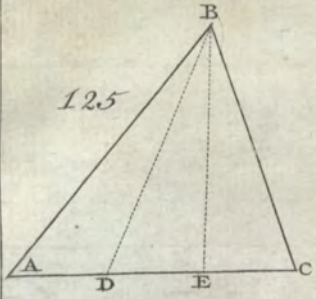
PROBLEMA.

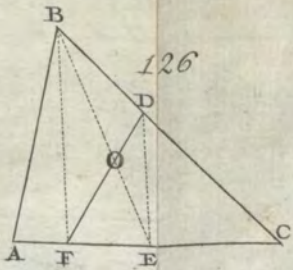
882 Dividir hum trapezio em duas partes iguaes por huma linha tirada de hum de ſeus angulos.

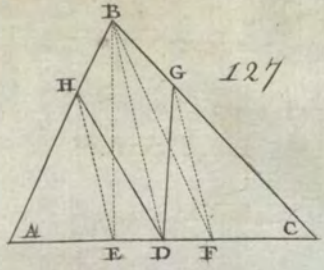
Figur. 135. Pedem-me que divida o trapezio AB CD em duas partes iguaes por huma linha tirada do angulo B. Para reſolver eſte Problema tirem-ſe as diagonaes AC, e BD, divida-ſe a primeira AC em duas partes iguaes no ponto E, e deſte ponto ſe tire EF parallela a BD, a linha tirada do ponto B ao ponto F F dividirá o trapezio em duas partes iguaes.

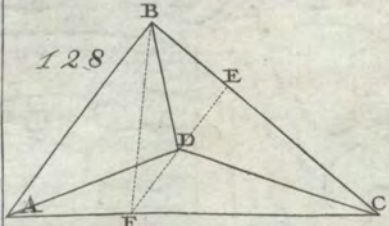
Para ſe demonſtrar tirem-ſe as linhas EB, e DE, e ſerão os triangulos AED, e ECD iguaes entre ſi, como tambem os triangulos ABE, e EBC. Iſto ſuppoſto, o trapezio ſe acha dividido em dous igualmente pelas linhas EB, ED; mas os triangulos, que são iguaes entre as meſmas parallelas, nos dão EBO,

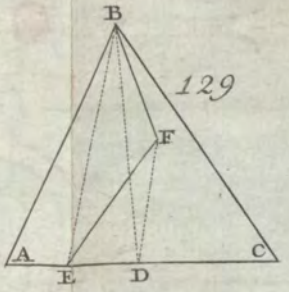
e OFD

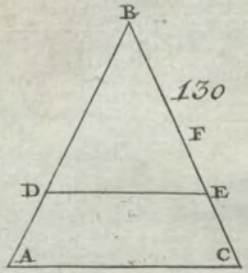

125
B
A
D
E
C

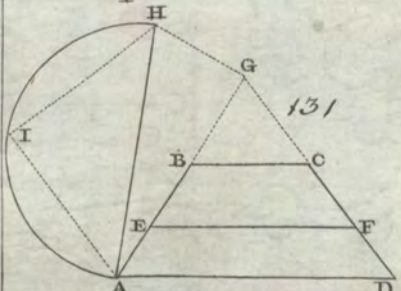

126
B
D
O
A
F
E
C

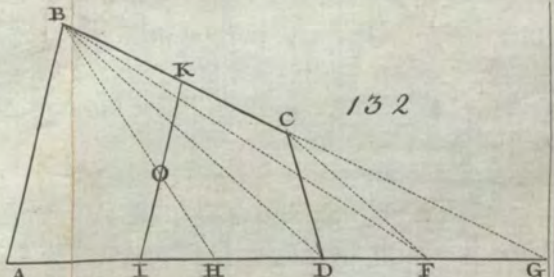

127
B
H
G
A
E
D
F
C

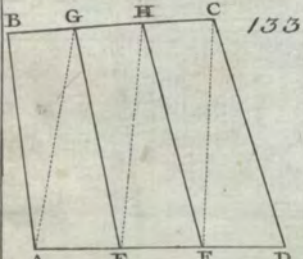

128
B
E
D
A
F
C

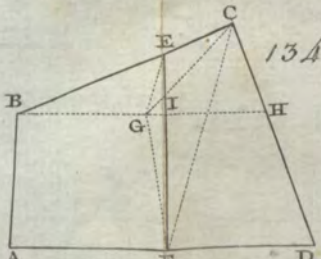

129
B
F
A
E
D
C

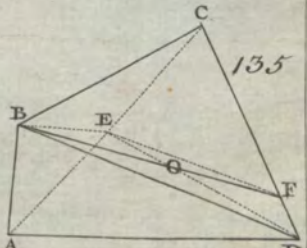

130
B
F
D
E
A
C


131
H
G
I
B
C
E
F
A
D


132
B
K
C
O
A
I
H
D
F
G


133
B
G
H
C
A
E
F
D


134
C
E
B
I
G
H
A
F
D


135
C
B
E
O
F
A
D

e OFD iguaes: logo a linha BF divide o trapezio em dous iguaes.

PROPOSIÇÃO XII.

PROBLEMA.

883 Dividir hum trapezoide em duas partes iguaes por huma linha tirada de hum ponto de hum de seus lados.

Para dividir em dous igualmente o trapezoide ABCD por huma linha tirada do ponto H, reduza-se o trapezoide a triangulo, tirando á diagonal DD a parallela CF para ter o ponto F, a que tirando a linha FB, ficará o triangulo ABF igual ao trapezoide. Isto supposto, divida-se a base AF em duas partes iguaes no ponto E, tire-se a linha BE, e o triangulo ABE será metade do trapezoide, tire-se a linha BH, e do ponto E a linha EG parallela a BH, e a linha HG dividirá o trapezoide em duas partes iguaes. Figur. 136.

Por serem BH, e GE parallelas, serão os triangulos OHE, OBG iguaes: logo a figura ABGH he igual á metade

de do trapezoide, pois he igual ao triangulo ABE.

PROPOSIÇÃO XIII.

PROBLEMA.

884 Dividir hum pentagono em trez partes iguaes por linhas tiradas de hum de ſeus angulos.

Para dividir em trez partes iguaes
Figur. 137. o pentagono ABCDE por linhas tiradas do angulo C, reduza-ſe o pentagono a triangulo, tirando ás linhas CA, e CE, as parallelas BF, e DG, e as linhas CF, e CG, e ficará o triangulo FCG igual ao pentagono, como he facil moſtrar: divida-ſe a baſe em trez partes iguaes nos pontos H, e I, e tiradas as linhas CH, e CI, teremos o triangulo CHI, que he a terça parte do triangulo, e conſequentemente do pentagono, e ficarão as partes HABC, ICDE iguaes entre ſi, e ſerá conſequentemente cada huma a terça parte do pentagono.

Ap-

Applicação da Geometria ao uſo do compaſſo de proporção.

De todos os inſtrumentos de Mathematica não ha nenhum, que tenha tanto uſo, e tão univerſal como o que ſe chama compaſſo de proporção, porque facilita a pratica de toda a theorica da Geometria. Por exemplo: a linha das partes iguaes ſerve para dividir huma linha em certa razão dada, e para achar as terceiras, e quartas proporcionaes: a linha das cordas ſerve de transferidor, pois por ſeu meio ſe póde conhecer o valor dos angulos, e determinar qualquer quantidade de gráos, que ſe quizer: a linha dos polygonos ſerve para dividir o circulo em huma quantidade de partes iguaes, para lhe inſcrever os polygonos: por meio da linha dos planos ſe achão os lados das figuras ſemelhantes, que ſe querem augmentar, ou diminuir em certas razões dadas; e finalmente a linha dos ſolidos, que ſe póde dizer a mais conſideravel do compaſſo de proporção, ſerve para achar duas meias proporcionaes entre

duas

duas linhas dadas, e diminuir, e augmentar os ſolidos ſemelhantes, conforme as razões, que quizerem, e são as propriedades, que vamos enſinar, começando pelas linhas das partes iguaes.

PROPOSIÇÃO XIV.

PROBLEMA.

885 Dividir huma recta nas partes iguaes que ſe quizer.

Achar-ſe-ha marcada de cada parte da perna do compaſſo huma linha com o nome de partes iguaes, porque Figur. 138. effectivamente ſervem para dividir as linhas rectas em partes iguaes; e para moſtrar o modo de ſe ſervir dellas, ſupponhamos que ſe quer dividir a linha HI em 9 partes para fazer, por exemplo, o petipé de huma planta, para iſto ſe tome com o compaſſo ordinario o comprimento da linha HI, e ſe abra o compaſſo de proporção, de ſorte que as pontas do compaſſo ordinario ajuſtem entre os pontos das linhas das partes iguaes, onde eſtiver marcado 9o, que ſerá por exemplo nos pontos D, e E;

E; e deixando aſſim o compaſſo de proporção, ſe tome com o compaſſo ordinario o intervallo dos pontos, em que ſe achar o numero 10, que ſerá por exemplo o intervallo FG; e applicando-ſe o compaſſo ordinario com eſte intervallo FG ſobre a linha HI, ſerá a nona parte da meſma linha.

Demonſtra-ſe, porque os triangulos AFG, e ADE são ſemelhantes: logo a razão de AF a AD he a meſma que FG a DE; mas FA he a nona parte de AD: logo FG he a nona parte de DE.

PROPOSIÇÃO XV.

PROBLEMA.

886 Achar huma terceira proporcional a duas linhas dadas.

Para achar huma terceira proporcional a duas linhas dadas F, e G, tome-ſe entre as pontas do compaſſo a primeira F, applique-ſe ſobre as linhas das partes iguaes, v. gr. de A para D, depois tome-ſe a ſegunda G, e applique-ſe de A para B: abra-ſe depois o compaſſo de proporção, de ſorte que a diſtan- Figur. 139.

tancia DE dos dous numeros iguaes, que correſpondem aos pontos D, e E, ſeja igual á linha G; e a diſtancia BC, iſto he, o intervallo do numero, que eſtá no ponto B, até onde ſe achar o meſmo numero no ponto C, ſerá a terceira proporcional, que ſe buſca, e ſerá por exemplo H.

Demonſtra-ſe, porque os triangulos ABC, ADE são ſemelhantes, e a linha AB he igual a DE: logo AD:DE:: AB:BC, e por conſequencia ∴ F.G.H.

PROPOSIÇÃO XVI.

PROBLEMA.

887 Achar huma quarta proporcional a trez linhas dadas.

Figur.140. Para achar huma quarta proporcional a trez linhas A, B, C, tome-ſe com o compaſſo ordinario ſobre a linha das partes iguaes o comprimento da linha A, e ſupponhamos que occupa o intervallo EF, depois abra-ſe o compaſſo de proporção, de ſorte que ſe applique a ſegunda B do ponto F até o ponto, que lhe correſponde G, e to-

me-

me-ſe a terceira C, e ſupponhamos occupa o eſpaço EH, o intervallo do ponto H até o que lhe correſponde com o meſmo numero no ponto I ſerá a quarta proporcional.

Demonſtra-ſe, porque os triangulos EFG, e EHI são ſemelhantes: logo ſerá EF: FG:: EH: HI, ou A: B:: C: D.

Uſo da linha dos Polygonos.

PROPOSIÇÃO XVII.

PROBLEMA.

888 Inſcrever hum polygono em hum circulo.

Por meio da linha dos polygonos, que eſtá marcada no compaſſo de proporção, ſe podem inſcrever em hum circulo os polygonos de trez lados até doze, que são os mais vulgares. Para moſtrar eſte uſo, ſupponhamos que no circulo H ſe quer inſcrever hum octogono, para iſto tome-ſe com o compaſſo ordinario a grandeza do raio HI deſte circulo, e abra-ſe o compaſſo de proporção de modo, que as pontas do compaſſo ordinario ſe ajuſtem no intervallo Figur. 141. c 142.

do compaſſo de proporção entre os pontos B, e C de 6 para 6, marcada na linha dos polygonos: depois tome-ſe o intervallo do ponto F para G, onde ſe acharão correſpondentes os numeros 8 a 8, e eſte intervallo ſerá o lado do octogono, que applicado oito vezes á circumferencia do circulo H, dá os pontos, que ſervem para deſcrever o octogono.

Se em lugar do octogono ſe quizeſſe deſcrever no meſmo circulo hum decagono, baſtaria tomar o intervallo de 10 para 10, e o meſmo dos mais polygonos, tendo a abertura de B para C igual ao raio do circulo, em que ſe quer inſcrever o polygono.

PROPOSIÇÃO XVIII.

PROBLEMA.

889 Deſcrever hum polygono regular ſobre huma recta dada.

Servindo-nos da meſma figura, poderemos por meio do compaſſo de proporção deſcrever qualquer polygono. Se quizermos pois fazer hum octogono ſo-

ſobre a linha KL, tomemos entre as pontas do compaſſo ordinario a linha KL, e applicalla-hemos ao compaſſo de proporção aberto de ſorte, que o ſeu intervallo ſe termine nos pontos 8, e 8: depois tome-ſe o intervallo BC de 6 para 6, e dos extremos K, e L ſe faça huma ſecção H com o intervallo de BC; e deſcripto do ponto H hum circulo, cujo raio ſeja HL, ou HK, ſe acharão todos os pontos, que ſervem para deſcrever o octogono, applicando oito vezes a linha KL á circumferencia do circulo.

Uſo da linha das Cordas.

PROPOSIÇÃO XIX.

PROBLEMA.

890 Tomar na circumferencia de hum circulo hum arco de qualquer numero de gráos.

Supponhamos que na circumferencia do circulo H queremos tomar hum arco de 70 gráos, applique-ſe com o compaſſo ordinario na linha das cordas nos lugares marcados de 60 a grandeza, ou raio HI; e ſuppondo que o angulo ABC Figur. 141 e 143.

he formado pelas linhas das cordas do compaſſo de proporção, de ſorte que a linha DE ſeja igual ao raio HI, tome-ſe o intervallo de F para G, e ſupponho he entre 70, e 70, e a linha FG ſerá a corda de 70 gráos, que applicada á circumferencia do circulo, dará o arco MI, que ſe buſca.

PROPOSIÇÃO XX.

PROBLEMA.

891 Dado hum angulo, achar o ſeu valor por meio da linha das cordas.

Para conhecer o valor de hum angu-
Figur. 143. e 149. lo ABC do ponto B como centro, ſe deſcreva o arco AC com huma indeterminada abertura de compaſſo, tome-ſe depois o raio BC, e abra-ſe o compaſſo de proporção de ſorte, que o eſpaço entre 60, e 60 na linha das cordas ſeja igual ao raio: tome-ſe com o compaſſo a corda AC, e applique-ſe a linha das cordas, de ſorte que fique entre dous pontos igualmente diſtantes do centro; e os numeros, que correſponderem a eſtes pontos, determinarão

rão o valor do angulo: assim suppondo que sejão os numeros 50, e 50, conhecer-se-ha que o angulo ABC he de 60 gráos.

PROPOSIÇÃO XXI.

PROBLEMA.

892 Conhecida a quantidade de gráos de hum arco de circulo, achar-lhe o raio.

Se tivermos o arco de circulo, v. gr. BA, de 50 gráos, e se quizer conhecer o raio do circulo deste arco, tome-se no compasso a corda BA, e applique-se á linha das cordas para se abrir o compasso de proporção de 50 até 50. Por exemplo. Se os pontos F, e G correspondem aos numeros 50, e 50, se faça o intervallo FG igual á corda BA: se depois se toma o intervallo DE de 60 até 60, será a linha DE o raio, que se busca, isto he, será igual ao semidiametro BC. Figur. 143 e 144.

PRO-

PROPOSIÇÃO XXII.

PROBLEMA.

893 Abrir o compaſſo de proporção de ſorte que as linhas das cordas fação o angulo que ſe quer.

Figur. 143. Suppondo que as linhas AB, e BC ſejão as das cordas, pedem-me hum angulo de 70 gráos feito com ellas. Tome-ſe com o compaſſo ordinario o intervallo do centro B ao ponto F, ou G, que ſupponho ſer de 70 gráos; e conſervando aſſim aberto o compaſſo, ſe applique de 60 para 60. Por exemplo. Se os pontos D, e E eſtão entre 60, e 60, faremos a diſtancia DE igual ao intervallo BF, e as linhas das cordas farão o angulo ABC de 70 gráos.

PROPOSIÇÃO XXIII.

PROBLEMA.

894 Aberto como ſucceder o compaſſo de proporção, conhecer o angulo formado pelas linhas das cordas.

Se quizermos ſaber o valor do angu-

Figur. 143. lo ABC formado pelas linhas das cordas,

das, tomaremos com o compaſſo ordinario o intervallo de 60 a 60, e applique-ſe eſte intervallo ſobre huma das cordas, começando do centro, e conhecer-ſe-ha a quantidade de gráos, que contém o angulo: aſſim ſuppondo os pontos D, e E entre 60, ſe toma a linha DE para ſe applicar ſobre BF; e ſe o ponto F correſponde, por exemplo, ao numero 70, he certo que o angulo ABC he de 70 gráos.

REFLEXÃO.

Como algumas vezes ſe applicão pinulas aos extremos das cordas do compaſſo de proporção para fazer no terreno os angulos, podem-ſe formar da abertura que quizerem, porque por eſtas duas propoſições ſe póde fazer qualquer angulo com as linhas das cordas, e além diſſo ſe conhece o valor dos angulos, que ſe formarem.

Uſo

Uſo das linhas dos Planos.

PROPOSIÇÃO XXIV.

PROBLEMA.

895 Fazer hum quadrado, que tenha para outro huma certa razão.

Figur. 145. e 150. Se ſe quizer fazer hum quadrado, que tiveſſe para outro a razão de 5 a 2, tome-ſe o lado AB do quadrado, e abra-ſe o compaſſo de proporção, de ſorte que o intervallo HI entre os pontos 2, e 2 da linha dos planos ſeja igual ao lado AB, iſto he, que AB ſeja igual a HI, e o intervallo KL, que ſupponho entre os pontos 5, e 5, ſerá o lado do quadrado, que ſe buſca: aſſim fazendo CD = KL, haverá a meſma razão do quadrado AB ao quadrado CD, que de 5 a 2.

PROPOSIÇÃO XXV.

PROBLEMA.

896 Conhecer a razão de hum quadrado a outro.

Figur. 145. e 150. Se quizermos ſaber a razão do quadrado AB ao quadrado CD, tome-ſe o la-

o lado AB do menor quadrado, e abra-se o compasso de proporção de modo, que a linha AB se ache na linha dos planos entre dous pontos igualmente distantes do centro, como por exemplo HI: depois tome-se o lado CD do outro quadrado, e busque-se com o compasso ordinario na linha dos planos hum intervallo, em que ajuste o lado CD, como v. gr. KL, e a razão que houver entre os dous numeros, que se acharem nos pontos H, e K, será a mesma que a do quadrado AB ao quadrado CD.

PROPOSIÇÃO XXVI.

PROBLEMA.

897 Abrir o compasso de proporção de modo que as linhas dos planos formem hum angulo recto.

Para fazer hum angulo recto, v. gr. BAC, com as duas linhas dos planos, Figur.146. tome-se com o compasso ordinario o intervallo do centro a qualquer numero, v. gr. D, que será por exemplo 20, depois abra-se o compasso de proporção de sorte, que o intervallo dos pontos

(que

(que correſponderão á metade deſte numero) ſeja igual ao comprimento AD; aſſim tomando os numeros 10, e 10, que ſerão metade de 20, e fazendo o intervallo FG igual á diſtancia AD, as linhas dos planos AB, e AC farão hum angulo recto.

PROPOSIÇÃO XXVII.

PROBLEMA.

898 Fazer hum quadrado igual a dous quadrados dados.

Para fazer hum quadrado, que ſeja igual a outros dous AB, e CD, abraſe o compaſſo de proporção de modo, que as linhas dos planos formem hum angulo recto, como o he o angulo EFG: depois tome-ſe ſobre a linha FE o comprimento FI igual ao lado AB, e tome-ſe de memoria o numero, em que ſe termina o extremo I, tome-ſe depois o comprimento FH igual ao lado CD do outro quadrado, e a diſtancia de H para I, que ſerá por exemplo de 18 para 5, ſerá o lado do quadrado igual aos dous quadrados propoſtos.

Figur. 147. e 150.

RE-

REFLEXÃO.

Como todas as figuras ſemelhantes eſtão na meſma razão que os quadrados dos ſeus lados homologos, podem-ſe fazer as meſmas operações a reſpeito dos triangulos, polygonos, e circulos, que nas propoſições precedentes ſe fizerão com os quadrados.

Uſo das linhas dos Solidos.

PROPOSIÇÃO XXVIII.

PROBLEMA.

899 Fazer hum cubo, que tenha a outro huma razão dada.

Se quizermos hum cubo, que ſeja a outro, como 3 a 7, tome-ſe entre as pontas do compaſſo ordinario o lado AB, e applique-ſe na linha dos ſolidos de ſorte que ajuſte entre os pontos 7, e 7; e ſuppondo que o intervallo dos pontos KL ſeja o numero 7, tome-ſe o intervallo IH de 3 para 3, que ſerá o lado do cubo, que ſe buſca; aſſim fazendo CD = HI, haverá a meſma razão do cubo A ao cubo B, que 7 a 3. Figur. 148. c 151.

PRO-

PROPOSIÇÃO XXIX.

PROBLEMA.

900 Achar a razão que ha entre dous cubos.

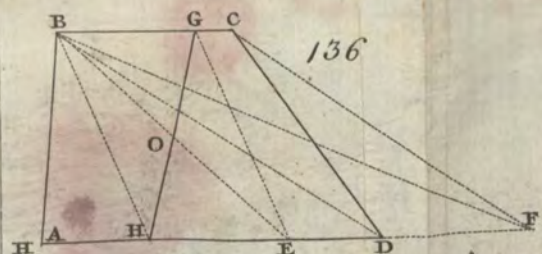
Para achar a razão que ha entre quaeſquer dous cubos CD, e AB, tome-ſe o lado CD do cubo menor entre as pontas do compaſſo ordinario, abra-ſe o compaſſo de proporção de ſorte que o intervallo HI, tomado do centro, ſeja igual ao lado CD: tome-ſe depois o lado AB, e applique-ſe onde lhe for o intervallo igual, e a razão, que ſe achar entre os numeros, que ficão nos pontos K, e I, ſerá a meſma que tem o cubo AB ao cubo CD.

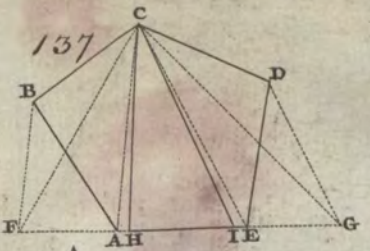
Figur. 148. e 141.

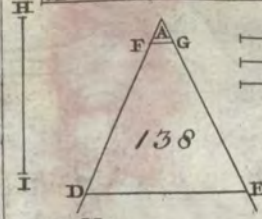
REFLEXÃO.

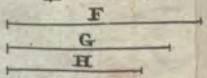
Como todos os ſolidos ſemelhantes eſtão na meſma razão que os cubos dos ſeus lados homologos, ſegue-ſe que ſe póde fazer com os cylindros, cones, pyramides, e eſferas as meſmas operações, que acabamos de fazer com os cubos nas propoſições precedentes.

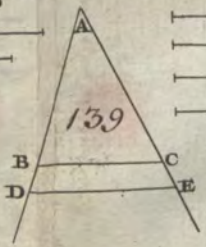
Ap-

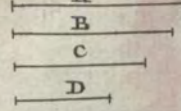

B
G
C
136
O
A
H
E
D
F

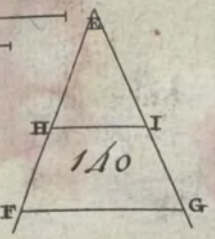

137
C
B
D
F
A
H
I
E
G

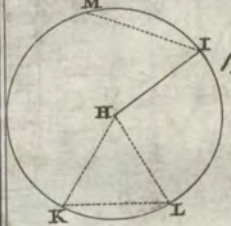

H
I
F
A
G
138
D
E

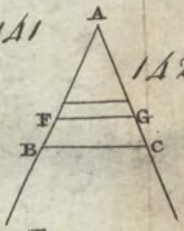

F
G
H

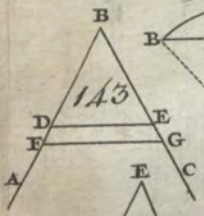

A
139
B
C
D
E

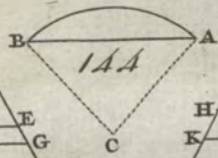

A
B
C
D

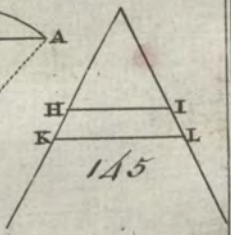

E
H
I
140
F
G

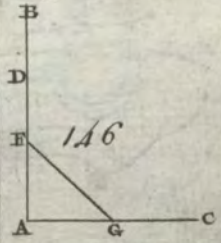

M
I
141
H
K
L


A
142
F
G
B
C

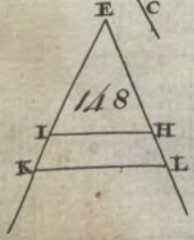

B
143
D
E
F
G
A
C

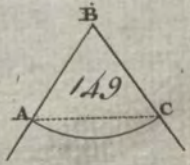

B
A
144
C

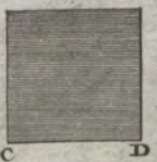

H
I
K
L
145


B
D
E
146
A
G
C

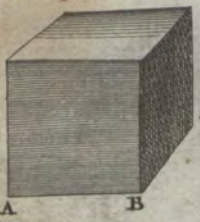
E
I
147
F
H
G

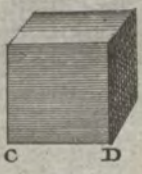

E
148
I
H
K
L


B
149
A
C


C
D

150
A
B


151
A
B


C
D

Applicação da Geometria á Artilheria.

PROPOSIÇÃO XXX.

PROBLEMA.

901 Fazer a analyſe da miſtura do metal, de que ſe fazem as peças de artilheria.

Para conhecer a utilidade deſte Problema he preciſo ſaber que o metal, de que ſe fazem as peças de artilheria fundidas, he compoſto de cobre, e eſtanho fino de Inglaterra; e como deve haver huma proporção entre o cobre, e o eſtanho, que compõem o metal, os fundidores mais experimentados ſeguem a de 100 a 12, iſto he, que em 100 libras de cobre miſturão 12 de eſtanho.

Ora como todos os dias ſuccede que nas fundições ſe achão peças, que não podem ſervir, e para as fundirem de novo ſe achão os fundidores embaraçados, por ignorarem ſe o metal tem a miſtura que deve ter para não ficar nem muito rijo, nem muito brando, eis-aqui o modo como ſe póde conhecer

cer juſtamente a quantidade de cobre, e eſtanho, que tem as peças.

A experiencia tem moſtrado, e facilmente ſe entende a razão fyſica, que quando os metaes ſe mergulhão em algum liquido, perdem parte do ſeu pezo. Por exemplo. Se ſe põe em huma balança romana hum pedaço de chumbo, que péze 48 arrates, ver-ſe-ha que mergulhado eſte corpo na agua, de ſorte que fique por toda a parte cuberto, em lugar de pezar 48 arrateis, pezará ſó 44, porque o chumbo perde a duodecima parte do ſeu pezo, e os outros metaes perdem mais, ou menos, conforme são mais, ou menos pezados; mas como pertendemos ſaber tambem quanto perdem o eſtanho, e o cobre, tem-ſe achado que o eſtanho perde a ſetima parte do ſeu pezo, e o cobre a nona parte. Iſto ſuppoſto, para ſe conhecer a quantidade de cobre, e eſtanho, que ſe acha em huma peça de 24 libras, que péza por exemplo 5200 libras, he preciſo ter hum pedaço do metal da peça, e ſupponhamos que péza 163: pezar-ſe-ha depois de mergulha-

lhado na agua para ver quanto perdeo do ſeu pezo, e ſupponhamos que perdeo 19 libras.

Primeiramente imagine-ſe o metal como ſe foſſe todo cobre, para ver, conforme a ſuppoſição, quanto perderia do ſeu pezo, e achar-ſe-ha que perderia $\frac{163}{9}$; e imaginando todo o metal, como ſe foſſe ſó eſtanho, ſe buſcará quanto perderia do ſeu pezo, e achar-ſe-ha que perderia $\frac{163}{7}$, aſſim chamo a ao pezo do metal, b ao que perdeo, c á perda do pezo do metal, ſe foſſe todo cobre, e d á meſma perda, ſe foſſe todo eſtanho, teremos $a=163$, $b=19$, $c=\frac{163}{9}$, $d=\frac{163}{7}$; e chamando x á quantidade de cobre que tem, e y á quantidade de eſtanho, achar-ſe-ha o valor das quantidades deſconhecidas do modo ſeguinte.

Primeiramente faremos duas proporções, dizendo: a, pezo do metal, conſiderado como cobre, he para c, perda do pezo do cobre, como x, quantidade

de

de cobre, que se não conhece, he para a perda do mesmo cobre, que tambem se não conhece, o que dá $a:c::x:\frac{cx}{a}$; e fazendo o mesmo para o estanho, diremos: a, pezo do metal, tomado como estanho, he para d, perda deste pezo, como com y, quantidade incognita de estanho, para a perda da mesma quantidade de estanho, o que dará $a:d::y:\frac{dy}{a}$.

Temos achado $\frac{cx}{a}$, perda do pezo do cobre, que ha no metal, e $\frac{dy}{a}$, perda do pezo de estanho do mesmo metal; e como estas duas quantidades juntas fazem a perda do pezo total, teremos esta equação $\frac{cx}{a}+\frac{dy}{a}=b$; e como x, e y representão o cobre, e o estanho, de que se compõem o metal, poderemos fazer esta equação $x+y=a$; e desembaraçando huma das incognitas, por exemplo x, teremos $x=a-y$; e substituindo este valor de x na equação $\frac{cx}{a}+\frac{dy}{a}=b$, teremos $\frac{ac-cy+dy}{a}=b$, ou tambem

bem $c + \frac{dy - cy}{a} = b$; e paſſando c do primeiro para o ſegundo membro, e multiplicando os dous membros por a, teremos $dy - cy = ab - ac$; e dividindo ambos os membros por $d - c$, teremos $y = \frac{ab - ca}{d - c}$, em que y he igual a quantidades já conhecidas; e por conſeguinte ſe na equação $x = a - y$ puzermos o valor de y, teremos $x = a - \frac{ab - ac}{d - c} = \frac{ad + ab}{d - c}$, o que tambem dá o valor de x.

Para achar em numeros o valor de y, imagino que y he igual a $ab - ac$, dividido por $d - c$; e como $b - c$ eſtá multiplicado por a, tiro de 19, iſto he de b, $\frac{163}{9}$ valor de c, e reſtão $\frac{8}{9}$, que multiplico por 163, que he o valor de a, para ter $\frac{1304}{9}$, que divido por $\frac{363}{7} - \frac{163}{9}$, valor de $d - c$, que he $\frac{416}{63}$; e feita a diviſão, ſe achará 28, valor de y; e buſcando o valor de x, ſe achará que ella he de 135, o que moſtra que ha 135 libras de cobre, e 28 de eſtanho no pedaço do metal.

Preſentemente para ſaber a quantidade de eſtanho, que ha em toda a peça, devemos dizer: ſe em 163 libras de metal ha 28 libras de eſtanho, em 5200, pezo da peça, quantas haverá? e ſe achará ter 894 libras, e por conſequencia 4306 de cobre; mas como a razão de 4306 libras a 894 não he igual á de 100 a 12, porque ſuppomos haver na peça muito mais eſtanho que cobre, ſerá facil ſaber quanto he preciſo accreſcentar, para que fique boa a liga, dizendo: ſe para 12 libras de eſtanho he preciſo 100 de cobre, quanto ſerá preciſo para 894? e ſe achará preciſar 7450 libras; e como já tem 4306, falta accreſcentar 3144 libras. Se tivermos muitas peças para tornar a fundir no meſmo tempo, buſcar-ſe-lhe-ha pela regra precedente o que falta a cada huma de cobre, ou de eſtanho, para que a liga fique na razão de 100 para 12.

PRO-

PROPOSIÇÃO XXXI.

PROBLEMA.

902 Achar o calibre das balas, e peças de artilheria.

Para achar o calibre das balas de qualquer pezo que ſe quizer, he preciſo primeiro o diametro de huma bala do meſmo metal de hum determinado pezo, como por exemplo o de huma libra de ferro coado, o qual he de huma pollegada, 10 linhas, e 8 pontos, e imaginar o diametro dividido em grande numero de pequenas partes iguaes, como 500: (para que no calculo ſe poſsão deſprezar os reſtos) depois cubique-ſe o valor do diametro em partes minimas, e então teremos 125000000, que tomaremos pela meſma bala, porque como são eſferas, eſtão na meſma razão dos cubos dos ſeus diametros; e por iſſo ſe quizermos o diametro de huma bala de 24, multiplique-ſe o cubo de huma linha, iſto he, 125000000 por 24, e o producto 3000000000 ſerá o cubo do diametro da bala de 24, pois he 24 vezes maior

que a outra; e assim extrahindo a raiz cubica de 3000000000, teremos 1442 partes, e se achará o seu valor em pollegadas, linhas, e pontos, dizendo: se 500 partes dão por diametro de huma bala de huma libra 1 pollegada, 10 linhas, e 1 ponto, quanto darão 1442 partes por diametro da bala de 24? e acharemos, feita a regra, que o diametro he de 5 pollegadas, 5 linhas, e pouco mais de 4 pontos.

Se quizermos saber o diametro de qualquer bala, por exemplo de 16, faremos o mesmo que fizemos para a de 24, com esta differença, que em lugar de multiplicar 125000000 por 24, multiplicaremos por 16 para ter o cubo do diametro da bala, que se busca, e por este principio se póde calcular a taboada para todas as outras balas.

Mas como temos necessidade de saber com individuação os diametros das balas para fazer as formas, em que se coa o ferro, de que se fazem, e a maior parte se achão embaraçados, senão sabem o diametro de huma libra, ou se duvidão que seja justo, para poder ser-

vir

vir de baſe a huma regra geral, neſte caſo póde-ſe fazer huma bala de qualquer diametro que quizerem, como v. gr. de 3 pollegadas, ſem ſe embaraçar com o ſeu pezo, ſenão depois de fundido, porque então ſe pezará com exacção; e ſuppondo que ſe achou pezar 5 libras e meia, divida-ſe o ſeu diametro em partes pequenas para ſe cubicar, e depois ſe dirá: ſe 5 libras e $\frac{1}{2}$ dão tantas partes por cubo do diametro da ſua bala, quantas partes dará huma libra por cubo do ſeu diametro? e achado o que ſe buſca, ſe lhe extrahirá a raiz cubica, que ſerá o valor em partes minimas do diametro da bala de huma libra, que facilmente ſe reduzirá a pollegadas, linhas, &c., ſabendo que o diametro da primeira bala são 3 pollegadas.

Para achar o diametro das peças deve-ſe ſaber que differe muito pouco do das balas; e como eſta differença he o que ſe chama vento da bala, não he o meſmo em todas as peças, baſtará ſaber o diametro da peça de huma libra pa-

para achar o de todas as peças; e como o diametro he de 1 pollegada, 11 linhas, e 6 pontos, porque a bala deſta peça tem quaſi huma linha de vento, ſuppôr-ſe-ha, como ſe fez com a bala, dividido o ſeu diametro em 500 partes. Querendo ſaber o da peça de 24, ſe cubicará 500 para multiplicar por 24, de que ſe extrahirá a raiz cubica, que ſerá tambem 1442, de que ſe poderá conhecer o valor em pollegadas, linhas, &c., dizendo: ſe 500 dão 1 pollegada, 11 linhas, e 6 pontos por diametro da peça de huma libra, quanto darão 1442 por diametro da peça de 24? e achar-ſe-ha de 5 pollegadas, 7 linhas, e 9 pontos.

PROPOSIÇÃO XXXII.

PROBLEMA.

903 Conhecer o diametro dos cylindros, que ſervem para medir a polvora.

Nos Armazens, e Arcenaes nunca ſe uſa de balança para ſe medir a polvora, que ſe reparte ás tropas, ou para

os

os deſtacamentos, ou para qualquer outra couſa, porque gaſtaria muito tempo em ſe fazer a diſtribuição, e ſervem-ſe em lugar de balanças de certas medidas de folha de Flandres, ou cobre de figura cylindrica, que contém mais, ou menos libras de polvora, ou partes de libra; e como muitas vezes ſe preciſa fazer eſtas medidas, e não ſe póde ſaber ſem o ſoccorro da Geometria, as dimensões, que ſe lhes devem dar para contar certa quantidade de polvora, daremos huma regra geral para achar o diametro de todas as medidas, que ſe quizerem; e como he preciſo que eſtas medidas ſejão ſemelhantes, para que a regra poſſa ſervir para todas igualmente, ſupporemos que eſtas medidas são cylindros, que tem a altura igual ao diametro do circulo, que lhe ſerve de baſe.

Iſto ſuppoſto, ſabendo que huma medida cylindrica, cujo diametro he de 5 pollegadas, contém 4 libras, achar-ſe-ha o diametro de huma medida, que leve as libras, que ſe quizerem, como por exemplo de 10 libras, dizendo: ſe

4 li-

4 libras de polvora dão 125 pollegadas, cubo do diametro da ſua medida, quanto darão 10 libras? e ſe acharão 312 pollegadas e $\frac{1}{2}$ cubicas, cuja raiz quadrada ſerá de 6 pollegadas, 8 linhas, e 9 pontos, que he o tamanho, que deve ter o diametro da medida de 10 libras, que deve tambem ter a meſma altura, e o meſmo ſerá de qualquer outra medida, que ſe quer.

Porém ſe ſe ignora o diametro de huma medida de certa quantidade de polvora, nem temos conhecido termo algum da proporção, neſte caſo he preciſo fazer huma medida com o diametro que quizerem, e ſe encherá de polvora para ſe ſaber o que leva; e ſabendo o que contém, e o valor do diametro, nos ſerviremos da regra precedente para ſaber o diametro de qualquer outra medida: com reflexão, que eſtas ſó podem ter lugar na polvora, que tem os grãos quaſi da meſma groſſura da polvora bombardeira, porque ſe foſſe com polvora mais fina, as medidas conterião menos pezos de polvora.

He

He claro que eſta regra ſe funda em que os cylindros ſemelhantes eſtão na meſma razão que os cubos dos ſeus diametros; e como as medidas, de que ſe trata, ſe ſuppuzerão ter huma altura igual ao diametro, ſerão ſemelhantes, e conſequentemente a ſua ſolidez, que não he outra couſa mais que a quantidade de polvora, que contém, ſerá na razão dos cubos dos ſeus diametros.

Porém ſe quizeſſemos ter medidas, cuja altura foſſe maior, ou mais pequena que o diametro da baſe, (ao que chamaremos medida irregular) ſerá preciſo buſcar o diametro da medida para a quantidade de polvora, que ſe quer que contenha, como ſe eſta medida houveſſe de ſer regular, iſto he, como ſe o diametro foſſe igual á altura: depois faça-ſe o cubo do diametro, e o producto ſe divida pela altura da medida irregular, e o quociente ſerá o valor do quadrado do diametro deſta medida: depois diſto extrahindo a raiz quadrada deſta quantidade, teremos o diametro do circulo, que deve ſervir de baſe á medida, que ſe pertende.

Co-

Como os circulos eſtão na razão dos quadrados dos ſeus diametros, póde-ſe tomar em lugar dos circulos os quadrados dos diametros; e por ſerem os cylindros iguaes, quando as ſuas alturas, e as ſuas baſes, ou os quadrados dos diametros das ſuas baſes são reciprocos, chamando a ao diametro da baſe do cylindro regular, ſerá tambem a altura a; e chamando b á altura do cylindro irregular, x o diametro da baſe, para que o cylindro irregular ſeja igual ao regular, he preciſo que ſeja $b:a::aa:xx$, de que ſe tira $bxx=aaa$, ou tambem $xx=\frac{a^3}{b}$, ou $x\sqrt{\frac{a^3}{b}}=a\sqrt{\frac{a}{b}}$, o que moſtra a razão da regra precedente.

O que acabamos de dizer a reſpeito das medidas para polvora, ſe póde applicar a qualquer outra medida cylindrica para qualquer couſa que ſeja.

PRO-

PROPOSIÇÃO XXXIII.

PROBLEMA.

904 Achar o comprimento, que devem ter as peças de artilheria reſpectivamente aos ſeus calibres.

Os exceſſos, que ſe tem commettido a reſpeito de regular o comprimento das peças de artilheria, fazendo as do meſmo calibre, ora muito compridas, ora muito curtas, me tem feito julgar que devia haver hum comprimento determinado para cada calibre, e que ſeja tal que com a ſua carga ordinaria a bala tenha o maior vigor, de que he capaz a força da polvora; e como para ſe conhecer he preciſo examinar os effeitos da polvora no canhão, direi o que me parece ſe póde dizer mais plauſivel neſta materia.

Como não ſe póde duvidar que quanto mais polvora ſe inflamma em hum canhão, maior movimento tem a bala, ſupporemos que por carga da peça DG ſe lhe deo a quantidade de polvora DE. Figur. 343. Iſto ſuppoſto, logo que o fogo da eſcorva ſe introduz no ponto A do fogão,

gão, os primeiros grãos de polvora inflammados rarefarão o ar, que elles contém, e os de que eſtão cercados, e apartarão em roda tudo o que encontrarem; e continuando ſucceſſivamente a inflammar-ſe a polvora, occupará muito maior volume que antes, fazendo grande violencia para huma, e outra parte do ponto A, e particularmente para o lado, em que achar menos reſiſtencia, que he o da bala, que lançará para a boca com huma grande quantidade de polvora, que não teve tempo de inflammar-ſe; e augmentando a velocidade da bala na meſma razão do volume da polvora inflammada, achar-ſe-ha em hum inſtante lançada para G para ſahir da peça. Ora ſe no tempo, que a bala correo o eſpaço EG, a polvora, que a acompanhava, não teve tempo de ſe inflammar inteiramente, ſahirá com a bala huma quantidade F, que cahirá logo; e ſe a peça foſſe mais comprida que eu aqui ſupponho, tendo a bala maior eſpaço que correr, a polvora, que vai com ella, tem mais tempo de ſe inflammar, e por conſequencia

cia ſeria capaz de adquirir maior força; e póde-ſe concluir, que a proporção, que deve haver entre DE, e DG, iſto he, entre a carga, e o comprimento da peça, deve ſer tal, que ſe acabe inteiramente de inflammar a polvora no inſtante que a bala ſahe da peça, de que ſe ſegue que hum canhão com maior carga da preciſa não lança por iſſo a bala mais longe, e pelo contrario, pois quantas mais partes houver entre a polvora, e a bala, menos movimento receberá; e iſto he tão verdade, que ſe em lugar de huma bucha entre a polvora, e a bala puzeſſem ſinco, ou ſeis, ver-ſe-hia que o alcance não ſeria tão grande, como ſenão houveſſe mais que huma; porque como a bala não recebe movimento, ſenão pelo impulſo da polvora impreſſo á primeira bucha, eſta não a póde communicar ás outras até a bala ſem ſe diminuir, o que faz que a bala não tenha tanta velocidade, como ſe a tiveſſe immediatamente recebido da polvora, aſſim a muita polvora fará o meſmo effeito que ſe tiveſſe muitas buchas.

Mas

Mas ſe em lugar de huma peça muito curta tiveſſemos huma muito comprida, como LO, não ha duvida que ainda que ſeja do meſmo calibre que a precedente, e carregada com a meſma quantidade de polvora, não tem tamanho alcance, como ſe tiveſſe ſeu juſto comprimento; porque ſuppondo que o effeito da polvora lançaſſe a bala até o ponto N, que he o lugar, em que ſe acabou inteiramente de inflammar, he certo que ſe a bala ainda tem que andar o eſpaço NO, ſahirá com menos violencia do lugar O, do que ſe tiveſſe ſahido do lugar N; porque no tempo que o reſto da polvora ſe acaba de inflammar para N, a chamma, da que ſe inflamma na culatra, ſe dilata, enfraquecendo a força do ar já rarefeito deſte lado, ſó o ar, que eſtá para N, he que impelle a bala, de ſorte, que ſe a peça foſſe baſtantemente comprida para a impreſsão da polvora poder amortecer inteiramente no inſtante que a bala eſtá quaſi ſahindo da peça, poderia ſucceder que o ar, que a bala tiveſſe impurrado com violencia baſtante,

pro-

procuraſſe tornar a entrar pela boca da peça, e impelliſſe outra vez a bala para dentro, o que ſem duvida ſuccederia ſe no inſtante, em que ſe communica o fogo á polvora, ſe lhe pudeſſe fechar o fogão com promptidão para embaraçar que o ar, que lança a bala, não foſſe ſubſtituido pelo que ſe introduz. E como as peças de demaziado comprimento fazem menos effeito que as outras, não nos devemos admirar que a colobrina de Nancy (contra a opinião commua) tenha menos alcance que as outras peças do meſmo calibre, como obſervou Mr. Dumez nas experiencias, que fez em Dunkerque.

Eſte diſcurſo moſtra que a carga deve depender do comprimento da peça, e o comprimento da peça da força da carga; mas como para grandes cargas ſerião preciſas peças mui reforçadas, cujo ſerviço, e tranſporte teria muita difficuldade, parece que o methodo ordinario de carregar as peças com metade do pezo da bala he o melhor. Aſſentando-ſe niſto, preciſa-ſe procurar qual deve ſer o comprimento de huma

pe-

peça a reſpeito de qualquer calibre, porque depois diſto ſe podem eſtabelecer regras para vir no conhecimento do comprimento de todos os calibres ordinarios. Creio que o modo mais ſeguro para vir a eſte conhecimento he fazer hum canhão muito comprido, cujo calibre ſeja por exemplo 8 libras, carregallo com metade do pezo da bala, depois atirar de ponto em branco para ver o alcance; e como ſe ſuppõe que a peça he mais comprida do que deve ſer, ſe ſerrará para ſe diminuir hum calibre, e ſe atirará outro tiro para ver quanto alcança mais que o primeiro; e continuando a ſerrar a peça, e diminuir algumas pollegadas, ſe chegará finalmente a hum ponto, em que a peça, por ſer hum pouco curta, terá menos alcance que antes; e averiguando o comprimento medio entre o do ultimo tiro, e o penultimo, teremos o juſto comprimento da peça a reſpeito da ſua carga, para que a polvora ſeja capaz do maior effeito, que póde ter com a meſma quantidade de polvora.

Com

Com tudo como o que aqui proponho póde ſer que não tenha apaixonados, ainda que a materia ſeja de baſtante conſequencia, para ſe proceder com toda a cautela eis-aqui o que ſe poderia fazer.

A experiencia moſtra todos os dias que as peças pequenas alcanção muito mais longe á proporção que as grandes, pois conforme as experiencias, que fez Mr. Dumez, ſe achou que as peças, de que uſão em França, carregadas com os dous terços do pezo da bala, e apontadas em 45 gráos, alcançavão

Primeiramente, A peça de 24 2025 braças.
de 16 1818.
de 12 1683.
de 8 1494.
de 4 1368.

O que me obriga a julgar que o comprimento das mais pequenas he mais bem proporcionado a reſpeito dos ſeus calibres, que das maiores: aſſim ſuppondo que huma peça de artilheria de 4, que tem ordinariamente de compri-

mento da alma 9 palmos, he bem proporcionada. Podemos achar o comprimento de outra peça de qualquer calibre do modo seguinte.

Figur. 152. Imagine-se que AC he o comprimento da alma de huma peça de 4; AB o espaço, que occupa a polvora no canhão; HK o comprimento da peça de 24, que busco; e HI o espaço, que occupa a carga: faço reflexão, que obrando a polvora na peça de 4, e na de 24, na razão da quantidade, que se acha em huma, e outra, (prescindindo de forças unidas) para que a bala de huma, e outra peça parta no instante que a polvora está inteiramente inflammada, deve haver a mesma razão do cylindro AB ao cylindro AC, que do cylindro HI ao cylindro HK; e como posso tomar em lugar dos cylindros AB, e HI a quantidade de polvora, que elles contém, e em lugar dos cylindros HK, e AC o cubo dos seus eixos, pois devem ser semelhantes, poder-se-ha achar o comprimento HK, dizendo: se duas libras de polvora, que he a carga da peça de 4, dão 729, cubo do seu ci-

eixo, quanto darão 12 libras de polvora, que he a carga da peça de 24, por cubo do eixo da meſma peça? e acharſe-hão 4374 palmos cubicos, cuja raiz cubica he pouco menos de 16 palmos e meio, e aſſim veremos que para que a alma da peça de 24 ſeja proporcionada com a ſua carga, como a de 4, deve ter 16 palmos e meio de comprido; e como a alma deſtas meſmas peças tem ordinariamente quaſi 13 palmos e meio, são, conforme eſte principio, mais curtas 13 palmos do que devem ſer.

Do meſmo modo ſe póde achar o comprimento de qualquer outra peça, quando tiverem as cameras cylindricas, porque ſe tiveſſem outra figura, ſeria preciſo ſeguir outro caminho.

Como as peças, que ſervem, não tem ordinariamente o comprimento proporcionado á da peça de 4, e não pareça que todas ſe fundão de propoſito para não ſervirem, he preciſo, viſto depender a carga do ſeu comprimento, como o comprimento depende da carga, moſtrar como ſe póde achar a carga de todas as peças, conhecendo-lhes o cali-

bre, e comprimento. Como as almas das peças, que não são ſemelhantes, são na razão compoſta dos quadrados dos diametros das peças, e dos eixos da meſma peça, ſe ſe multiplica o quadrado do diametro de cada peça pelo eixo, ſe lhe achará a carga, que lhe convem, porque eſtas cargas devem ſer na razão do producto dos quadrados dos diametros das peças pelos ſeus eixos; aſſim querendo ſaber a carga de huma peça ordinaria de 24, cuja alma tem 13 palmos e meio de comprido, recorro á peça de 4 para lhe tomar o diametro, que he 3 pollegadas, quadro o diametro, e o quadrado multiplico pelo comprimento do ſeu eixo, que são 9 palmos, cujo producto he 81: depois quadro o diametro da peça de 24, que dá 29 pollegadas, 9 linhas, e 6 pontos, que multiplicados pelo eixo 13 e meio, o producto ſerá 401. Depois diſto faço huma regra de 3, dizendo: ſe 81, producto do quadrado do diametro da peça de 4 pelo ſeu eixo, dão 2 libras para a carga, quanto darão 401, producto do quadrado do diametro da peça

de

de 24 pelo ſeu eixo para carga da meſma peça? e achar-ſe-ha 10 libras, e alguma couſa menos, que moſtra que as peças de 24, cuja alma tem 13 palmos e meio de comprido, devem carregar-ſe com 10 libras, ſe a peça de 4 ſe carrega com metade do pezo da bala.

Do meſmo modo ſe quizermos ſaber qual deve ſer a carga da colobrina de Nancy a reſpeito da peça de 4, carregada com metade do pezo da bala, devemos ſaber que eſta peça tem 18 libras de bala, e que o ſeu diametro he de 5 pollegadas, 1 linha, e 6 pontos, e que o comprimento do ſeu eixo he de 30 palmos; e aſſim fazendo a regra, ſe achará que deve carregar-ſe com 20 libras de polvora.

Mas como o ſeu metal póde ſer não pudeſſe reſiſtir a huma carga tão forte como eſta, devemos ver o comprimento, que lhe convem para a carga de metade do pezo da bala, iſto he, por 9 libras de polvora, dizendo: ſe 2 libras de polvora, que he a carga ordinaria da peça de 4, dão 729, cubo do ſeu eixo, que darão 9 libras de polvo-

ra,

ra, que he a carga da peça de 18, por cubo do ſeu eixo? que ſe achará ſer de 3284, cuja raiz cubica he quaſi 14 palmos, e 7 pollegadas, que he o comprimento, que ſe deve dar á alma da colobrina para ſer bem proporcionada, aſſim ſe conhecerá que a peça he quaſi 15 palmos mais comprida que deve ſer.

905 Depois de 1723, em que eſcrevi eſte Diſcurſo, fiz algumas experiencias para conhecer qual era a carga das peças de diverſos calibres, que ſe uſão na França, para lançar a bala a maior diſtancia, ou para abrir a brexa com a maior violencia, para que deſte ponto ſe poſſa fazer a diminuição que for preciſa, e nunca a augmentar. Fiz as primeiras experiencias na eſcola de la Fere no mez de Outubro de 1739 em preſença dos Senhores Officiaes de Artilheria, carregando cada peça de 8, de 12, de 16, e de 24 com cargas, que ſe hião augmentando de meio em meio arratel de polvora, começando por huma carga igual á oitava parte do pezo da bala, e acabando na de dous terços do meſmo pezo: depois mandava atirar

4 ti-

4 tiros com a meſma carga, e tomava o alcance medio. Para o primeiro tiro ſe carregou huma peça de 16 com duas libras de polvora, para o ſegundo com duas e meia, para o terceiro com 3 libras, para o quarto com 3 e $\frac{1}{2}$, e aſſim ſucceſſivamente até 10 libras e meia, que he quaſi os dous terços de 16, pezo da bala. O meſmo uſei com as peças de outros calibres, apontadas todas com angulo de 4 gráos, formado da direcção da alma da peça com o horizonte.

E tendo medido com exacção todos os alcances deſtas peças a cada differente carga, reconheci que o que fazia maior effeito, iſto he, que lançava a bala a maior diſtancia, era a que levava carga quaſi igual ao terço do pezo da ſua bala, e que toda a polvora, que ſe lhe punha demais, era perdida, porque não ſe inflammava ſenão depois de ter ſahido a bala: he verdade que quanta mais polvora ſe mette na peça, quanto maior eſtrondo faz, o que ſuccede igualmente quando ſe atira ſem bala, e eſ-

tas

tas experiencias me derão a conhecer, que para fazer o maior effeito poſſivel, ſe devia carregar huma peça de 8 com 3 libras, a de 12 com 4, a de 16 com 5 e $\frac{1}{2}$, e a de 24 com 8 para 9.

Sendo eſtas experiencias diſputadas com baſtante calor pelos que não as tinhão viſto, mandou a Corte que ſe repetiſſem em Metz na preſença do Senhor Marechal de Belle-Isle, que eſtava encarregado por ElRei do cuidado da ſua exacção para dar conta a S. Mageſtade, e fizerão o meſmo effeito que em Fere, tendo-ſe reconhecido que a maior carga devia ſer quaſi o terço do pezo da bala, e ſe aſſentou que para o maior effeito das peças de 24 erão preciſas 9 libras.

No mez de Agoſto do meſmo anno ſe repetírão eſtas experiencias em Strasbourg, e com circumſtancias mui proprias para ſerem exactas: ſervírão-ſe de huma peça de 24 bem acondicionada, que ſe apontou com angulo de 45, tendo-a fixa para ſe não mover, ſervião-ſe ſó de balas bem calibradas, e li-

lizas. No Tratado de lançar as bombas veremos que a direcção de 45 gráos he a melhor para ſe julgar o effeito de differentes cargas; porque os alcances das balas com direcção de mais, ou menos de 45 gráos são mais curtos, tendo a meſma carga que os que ſeguem a direcção da alma apontada com eſte angulo, de que ſe ſegue que o maior alcance ſe deve attribuir á força da polvora, e não aos accidentes, que ſó podem diminuillo.

As cargas creſcião em progreſsão arithmetica, augmentando de huma libra em cada huma, começando por 8 libras, e acabando em 24: reconheceo-ſe com grande admiração de todos os que duvidavão que a carga de 9 libras de polvora lançou a bala a 2250 braças, e que todas as outras cargas mais fortes até 24 não lançárão as balas mais longe. No dia ſeguinte deſta primeira conferencia ſe repetírão as meſmas experiencias com as meſmas cargas; mas em vez de ſe começar por 8 libras, e acabar em 24, ſe fez o primeiro tiro com 24, e o ultimo com 8, ſeguindo a meſ-

meſma progreſsão trocada a ordem, e nunca as maiores cargas derão maior alcance que a de 9 libras.

Como não aſſiſti a eſtas ultimas experiencias, não poſſo ſer ſuſpeito, e provão com a maior evidencia que a maior carga do canhão deve ſer quaſi a terça parte da bala.

Na Hiſtoria da Academia Real das Sciencias no anno de 1757 ſe achará huma memoria ácerca da carga para o maior effeito do canhão, e que dá maior luz a eſta materia, do que eu até aqui tenho dado; e ſe ſe julgar conveniente, podem recorrer a ella.

906 Ha outra difficuldade ácerca das armas de fogo, que he ſaber em que lugar ſe deve pôr o fogão, para que a polvora faça o ſeu maior effeito, e não ſei que iſto eſteja decidido: huns dizem que ſe deve pôr no meio do comprimento da camera, para que a polvora ſe inflamme para toda a parte em maior quantidade; outros são de contraria opinião, e querem que ſe ponha no fim da camera da parte da culatra, e dão a razão, de que a peça não tem

ta-

tamanho recuo: eſtes dous diſcurſos são igualmente verdadeiros, com tudo como a força da polvora, como tambem de todos os mais corpos elaſticos, obrão com mais, ou menos violencia, conforme a reſiſtencia dos corpos, que cedem mais, ou menos depreſſa, ſegue-ſe que quando huma arma de fogo quaſi não tem recuo, he final que a polvora achou tão pouca reſiſtencia em deſpedir a bala, que não preciſou mais que do primeiro esforço, em lugar, que ſe encontra muita reſiſtencia na culatra, e da parte da bala, todo o elaſterio ſe dilatará ao meſmo tempo; e ainda que o recuo ſeja maior, a bala irá mais longe do que ſenão tiveſſe recuo; e aſſim ſe o fogão eſtiver no meio da camera, os elaſterios ſerião mais no meſmo tempo, do que ſe eſtiveſſe perto da culatra, em que os elaſterios ſó podem fazer hum effeito ſucceſſivo, porque a polvora ſe inflamma ſucceſſivamente; e ſe a bala começa a partir logo que a polvora ſe começa a inflammar, ſuccederá tambem que huma grande parte da polvora ſahirá fóra da peça ſem fazer effeito, e

aſ-

assim me parece que posto o fogão no meio da camera, he muito melhor que em outra parte; porque como o canhão recua com difficuldade por causa do pezo da maquina, e a fricção do reparo contra a platafórma faz huma reacção de huma grande parte da polvora, que obra contra a culatra, e augmenta o impulso, com que lança a bala.

Julgo não será fóra de proposito desenganar os que julgão que a bala, sahindo da peça, levanta sobre a mesma peça; e os que julgão que depois de ter descripto huma curva, toma huma direcção horizontal para depois descrever a outra. A maior parte são tão afferrados em defender este erro, que será bom dizer-lhes que o pezo da bala, bem fóra de permittir que possa levantar para sima do eixo da peça, a leva para baixo logo do mesmo instante que sahe, e lhe faz descrever huma curva, que na verdade he muito proxima a huma linha recta; mas faz-se sensivel á medida, que se vai apartando da peça. A prova, a que todos elles recorrem para sustentar a sua opinião, he,

di-

dizem elles, porque quando ſe caſſa, he preciſo fazer a pontaria hum pouco mais abaixo do animal para ganhar a diſtancia, que a bala levanta; mas como eſta razão não vale nada, eis-aqui a cauſa.

Se hum cano de eſpingarda ſe ſegura a huma taboa, e aos dous lados ſe lhe põem dous munhões, de ſorte que o cano fique em equilibrio ſobre elles, como o braço de huma balança, ver-ſe-ha que carregando com bala, ſe ſe atira ſobre o horizonte, a parte da polvora, que obra contra a culatra, e que ordinariamente cauſa o recuo, fará abaixar a culatra, e conſequentemente levantar a boca do canhão; e como iſto ſe faz antes que a bala ſaia do canhão, ſuccede que irá por ſima do objecto, que ſe apontou; porque ſahindo, irá pela direcção da alma, e não pela direcção do raio viſual, que não ſerá o meſmo por cauſa do movimento da culatra; e ſe fazemos reflexão que o fuzil nas mãos do caſſador faz o meſmo effeito que acabamos de dizer, ver-ſe-ha que quando ſe quer apontar juſto, he

pre-

preciſo fazer a pontaria mais baixa do objecto.

Com tudo parece-me que o que faz que a bala em huma certa diſtancia ſe levante ſobre a peça, he, que como a ſuperficie exterior da peça não he parallela á alma, a bala, que ſahe com velocidade, ſe aproxima muito por algum tempo á direcção da alma; e como eſta direcção ſe córta com a da ſuperficie da peça, continuadas eſtas duas linhas, a da alma paſſa por ſima da das ſuperficies; e ſe a bala ſegue quaſi a direcção da alma para lá da ſecção das duas linhas, ſuccede com effeito que a bala vai por ſima da ſuperficie da peça, mas não por ſima da direcção da alma continuada, e parece que os fundidores attendêrão á obliquidade da ſuperficie da peça a reſpeito da alma para rectificar a linha curva para atirar de ponto em branco.

PROPOSIÇÃO XXXIV.

PROBLEMA.

907 Achar o modo de conhecer o numero das balas, que eſtão em pilha.

As

As balas de canhão, e bombas, que eſtão nos Arcenaes, eſtão ordinariamente em pilhas, e eſtas pilhas são de trez ſortes: huma tem por baſe hum quadrado, e ſe chamão pilhas quadradas, como na Figura 153; outras tem hum triangulo, e ſe chamão pilhas triangulares, como na Figura 154; e outras hum parallelogramo, como na Figura 155, e ſe chamão pilhas longas; e como o modo de contar as balas depende de calculo, que he differente, conforme a figura da pilha, o methodo he o ſeguinte.

He preciſo advertir, que diſpoſtas aſſim as couſas, as faces da pilha quadrada, e triangular ſempre são triangulos, que tem os trez lados iguaes; e ſendo eſtes triangulos formados pelas balas, compõem huma progreſsão arithmetica, que começa na unidade, iſto he, por huma bala, e o maior termo de progreſsão he a baſe do triangulo; e como ſomos obrigados a conhecer as balas, que tem huma face, que chamaremos daqui em diante triangulo arithmetico, eis-aqui como ſe po-

podem contar de hum modo mui facil.

Para saber quantas balas ha no triangulo ABC, devem-se contar quantas ha no lado AC, e ajuntar a este numero a unidade, depois multiplicar esta quantidade por metade do lado AB, ou AC, que he o mesmo, e o producto dará o numero das balas conteúdas no triangulo; e assim sendo o lado AC de 6 balas, accrescento a este numero a unidade para ter 7, e os multiplico por metade de AB, ou AC, que he 3, e o producto será 21, que he o numero das balas, que se busca. O mesmo será para todos os outros triangulos arithmeticos.

A razão disto he, que em huma progressão arithmetica a, $a+e$, $a+2e$, $a+3e$, $a+4e$, $a+5e$, &c., cujos termos se excedem da quantidade e, a somma de dous termos $a+e$, e $a+4e$, igualmente distante dos extremos, he igual á somma dos extremos a, e $a+5e$, ou a de quaesquer outros dous termos igualmente distantes dos extremos, pois a somma de huns, e outros dá

$2a+5e$; mas na metade ha tantas vezes $2a+5e$, que he a ſomma dos extremos, quantos termos ha na progreſsão: logo para ter o valor de todos os termos de huma progreſsão arithmetica, que começa pela unidade, ou por outro numero, deve-ſe multiplicar o primeiro, e ultimo termo por metade do numero, que expreſſa a quantidade dos termos, e por iſſo tomamos o primeiro termo AC com o ultimo B, e multiplicamos a ſomma por metade do lado AB, iſto he, por metade do numero dos termos da progreſsão para ter o numero das balas do triangulo.

Advertido iſto, deve-ſe conſiderar que ſe tivermos huma quantidade de balas, que fórmão pela ſua diſpoſição hum priſma triangular DEHGF, ſuſtido por hum plano inclinado IK, cuja baſe ſeja o triangulo EGH, ſendo eſte priſma cortado por hum plano parallelo á baſe, achar-ſe-ha dividido em duas partes, huma das quaes, como DEF, ſerá a terça parte de todo o priſma, e a outra EFGH ſerá os dous terços, porque a parte EDF he huma py- Figur. 156.

ramide triangular, que tem por baſe o triangulo oppoſto EGH, e por altura a altura DE do priſma, e por conſequente a parte EFGH, que tambem he huma pyramide, que tem por baſe hum quadrado, ſerá os dous terços. Deve-ſe notar que o plano EF divide hum triangulo, como EFG, que ſe encontra no córte, que faz as duas pyramides imperfeitas, quando ſe conſiderão compoſtas de balas; porque como o plano EF paſſa pelo terço de cada huma das balas L, daremos á pyramide triangular DEF os dous terços das quantidades das balas do triangulo arithmetico, que ſe encontra no córte EF.

Do meſmo modo para fazer regular a pyramide quadrada EFGH, ſerá preciſo dar-lhe o terço do meſmo triangulo arithmetico. Ora ſe ſuppõe ſeparada do priſma a pyramide quadrada EFGH para occupar o lugar da pyramide ABCQ, e que a pyramide triangular DEF, que fica, ſe tome pela pyramide MNOP, poder-ſe-ha dizer que a pyramide ABCQ he maior que os

Figur. 153. e 154.

dous

dous terços do prisma, que tivesse por base o triangulo ADC, e que he o mesmo que EGH, e por altura o lado AB, que he o mesmo que DE, o terço do triangulo ABC, que he o mesmo que se acha no córte EF.

Finalmente poderiamos tambem dizer que a pyramide MNOP será maior que o terço do prisma, que tivesse por base o triangulo MNO, que he o mesmo que EGH, e por altura o lado MN, que he o mesmo que ED, os dous terços do triangulo MNO, que he o mesmo que o triangulo arithmetico, que se encontra no córte EF.

De que se segue primeiro, que para achar a quantidade das balas conteúdas em huma pilha quadrada ABCQ, se deve buscar primeiro o numero das que se contém no triangulo arithmetico ABC, e multiplicar pelos dous terços do lado AB, ou AC, e ao producto accrescentar o terço do triangulo ABC.

908 Assim sendo o lado AC 6, acharei primeiro o triangulo ABC, sommando a unidade com o numero 6, para

ra ter 7, que multiplico por metade do lado AB, que he 3, ſahe 24 no producto, que multiplicado pelos dous terços do lado AB, que são 4, o producto he 84, ao qual accreſcentando o terço do triangulo arithmetico ABC, que he 7, temos 91, numero das balas da pilha.

909 Poder-ſe-ha tambem logo achar o numero das balas conteúdas na pilha triangular MNOP, multiplicando o triangulo MNO pela terça parte do lado MN, e ajuntando ao producto os dous terços das balas conteúdas no triangulo MNO; aſſim ſendo o lado NO de 6, o triangulo arithmetico ſerá de 21, que ſendo multiplicado por 2, terça parte do lado MN, teremos 42, aos quaes accreſcentando os dous terços do triangulo, que são 14, teremos 56 por numero das balas conteúdas neſta pilha.

A reſpeito da pilha oblonga he muito facil conhecer a quantidade de balas; porque como ſe compõe de hum priſma triangular RSTV, e de huma pyramide quadrada VTXY, ſe vê que ſe

Figur. 155.

de-

deve primeiro buſcar a quantidade de balas, que contém huma pyramide quadrada, que tiveſſe o lado XY, ou VX, e depois accreſcentar ao valor deſta pyramide o do priſma RSTV, que ſe achará multiplicando o triangulo XTV, ou o do córte TV, que he o meſmo, pelo numero das balas RT, que ſe acha no vertice da pilha menos huma. Quando digo menos huma, he porque ſe deve fazer reflexão que a primeira bala T com o triangulo arithmetico TV, que lhe correſponde, pertence inteiramente á pyramide TVXY, e por conſequencia deve tirar-ſe da quantidade RT.

Aſſim ſuppondo que o lado XY, ou TX ſeja 9, accreſcento huma a 9 para ter 10, que multiplico por metade de 9, ou, que he o meſmo, 9 por metade de 10, que he 5, o producto 45 ſerá o numero das balas do triangulo XTY, que multiplico pelos dous terços de 9, iſto he, por 6, e terei 270, ao qual producto accreſcento a terça parte do triangulo, que he 15, e o todo 285 he a pyramide. Ora ſuppondo tambem que

RT

RT seja de 15 balas, multiplico 15 menos huma, que são 14, pelo triangulo arithmetico, que he 45, e terei 630 pelo numero das balas do prisma RSTV, que accrescentando ao da pyramide, acharei 715 balas na pyramide oblonga.

910 Como não ha cousa mais commoda para a imaginação, como as formulas, que nos mostrão na sua expressão, o que devemos fazer em todos os casos imaginaveis, vamos dar huma formula muito simples, por meio da qual se poderá achar o numero das balas, ou bombas postas em pilhas, ou estas estejão dispostas em fórma de prisma, como na Figura 155, ou em fórma de pyramide quadrada, ou triangular. A nossa formula se póde applicar a todos os casos, porque he evidente que para conhecer o numero das balas na pilha da Figura 155, se deve, como dissemos, dividir esta pilha em dous corpos, dos quaes hum he hum prisma triangular RQXYT, o que não tem difficuldade; e o outro huma pyramide, que tem o mesmo numero de camadas que o pris-

ma

ma triangular, que tem tantas camadas, quantas balas ha no lado RQ do triangulo RSQ.

Não he menos evidente que esta pilha he a somma dos quadrados de outros tantos numeros desde a unidade, quantas balas ha no lado RQ, assim se temos 9 balas, a pyramide será igual á somma dos quadrados dos primeiros 9 numeros 1. 2. 3. 4. &c.: logo tudo se reduz a achar a somma dos quadrados de tantos numeros naturaes, que nós quizermos: sobre o que noto, que todos os quadrados dos numeros naturaes resultão da somma dos termos de duas series iguaes de numeros triangulares, dispostos de modo que o primeiro tenha hum termo mais que o segundo.

Por exemplo. Se quizermos duas series

1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36. &c.
1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. &c.
1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. &c.

como vemos no exemplo, e que se sommem termo por termo, he evidente que resultará a serie dos quadrados dos numeros naturaes, que se vem da parte debaixo.

Af-

Assim tudo se reduz a achar a somma dos quadrados de quantos termos quizermos da serie dos numeros naturaes, porque deste modo se poderá achar o numero das balas conteúdas em huma pilha triangular, e em qualquer pyramide quadrada. A pyramide triangular se achará, sommando tantos termos, quantas balas tem o lado do tri-
Figur. 153. angulo MNO, e a pyramide quadrada se achará pela somma de hum numero de termos da serie dos numeros triangulares igual ao numero das balas conteúdas no lado BC do triangulo BCQ; e sommando hum numero de termos da mesma serie triangular tirada a unidade, a somma destes dous primeiros será a somma das balas da pyramide quadrada: eis-aqui a formula, que achei. Se m he igual ao numero das balas, que achei conteúdas no lado MO do triangulo MNO, a somma das balas será $\frac{m^3 + 3m^2 + 2m}{6}$ por exemplo, na nossa Figura $m = 6$: logo será $\frac{216 + 108 + 12}{6} = 56$, que he o numero achado no artigo 907. Se a pyramide he quadrada,

se

ſe póde achar o numero das balas com a meſma formula: ſe $m=6$, teremos por primeira ſomma 56, e por ſegunda, fazendo $m=5$, iſto he, tomando a ſomma dos meſmos numeros triangulares, diminuindo hum termo, teremos $\frac{125+75+10}{6}$ $=35$, que ſommado com 56, faz 91, como já achámos no artigo 906. Achei eſta fórma, buſcando as propriedades dos numeros triangulares; mas como a theorica póde ſer hum pouco difficil aos principiantes, contento-me com dar a formula, que he baſtantemente ſimples, para que poſſa lembrar nos caſos poſſiveis. He preciſo advertir, que por eſta formula ſe poderão ſommar tantos termos, quantos quizermos de huma ſerie de quadrados de numeros naturaes.

911 Seguindo eſtes principios, ſe póde facilmente deduzir huma formula para ſommar os numeros quadrados, que ſe quizerem, para iſto baſta pôr na formula $m=m-1$, e juntar o que der a meſma formula, e a ſomma ſerá huma formula propria para ſommar os nu-

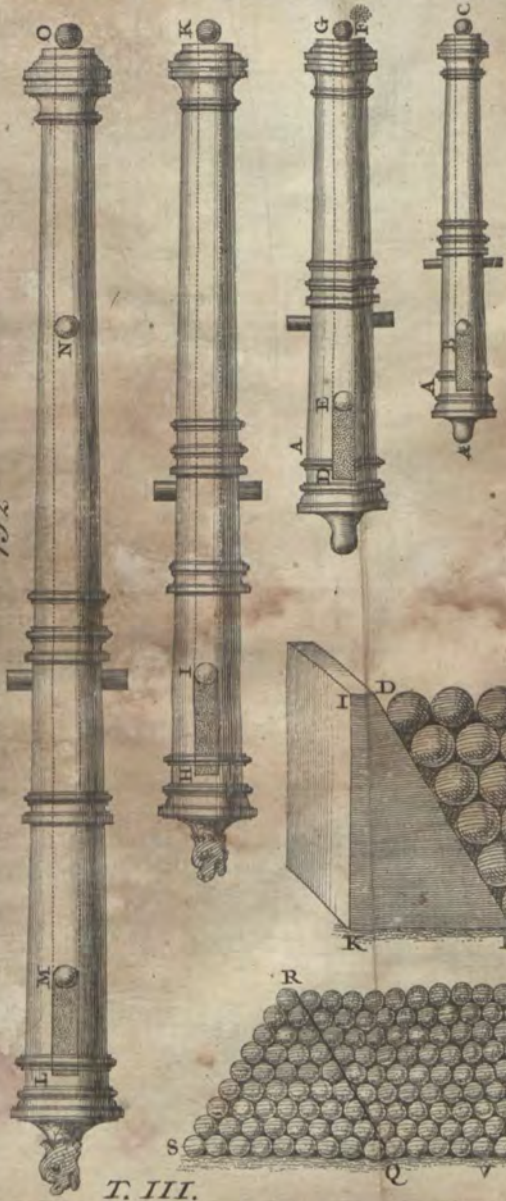
numeros quadrados, que ſe quizerem eſta ſubſtituição, dá $\frac{m^3-3m^2+3m-1}{6}$ $+\frac{3m^2-6m+3+2m-2}{6}=\frac{m^3-m}{\times 6}$, que junto com $\frac{m^3+3m^2+2m}{6}$, dará $\frac{2m^3+3m^2+m}{6}=\frac{m^3}{3}+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{6}m$.

He util uſar deſta formula para achar o numero das balas diſpoſtas em pyramide quadrada, pois ſe acha com huma ſó operação a ſomma pedida, e na outra formula neceſſariamente ſe fazem duas. Por exemplo. Se o numero das camadas das balas he 6, fazendo $m=6$ neſta ultima formula, teremos $\frac{116}{3}+18+1=91$, como ſe achou já.

Eſta formula para ſommar os numeros quadrados fica demonſtrada, admittindo a que démos para ſommar os numeros triangulares.

FIM DO DECIMOTERCEIRO LIVRO.

IN-



T. III.

INDICE
DAS MATERIAS, QUE SE comprehendem neſte terceiro Tomo.

LIVRO X.
Trata da Trigonometria, Rectilinea, e Nivelamento.

Definições. Pag. 8.
Prop. I. Probl. *Em hum triangulo rectangulo, conhecidos hum lado, e hum angulo, achar o lado oppoſto ao angulo agudo*, pag. 18.
Prop. II. Probl. *Conhecendo em hum triangulo rectangulo hum angulo agudo, e hum lado, achar a hypothenuſa*, pag. 19.
Prop. III. Probl. *Conhecendo em hum triangulo rectangulo hum angulo agudo, e o lado oppoſto ao meſmo angulo, achar o lado oppoſto a outro angulo agudo*, pag. 20.
Prop. IV. Probl. *Conhecidos os dous lados, que comprehendem o angulo recto, achar o angulo agudo*, pag. 21.

Prop.

Prop. V. Probl. *Conhecidos em hum triangulo rectangulo os lados, que comprehendem hum angulo agudo, achar o valor deſte angulo*, pag. 22.

Prop. VI. Theor. *Em todo o triangulo os ſenos dos angulos são entre ſi como os ſeus lados oppoſtos*, ibid.

Prop. VII. Theor. *Em hum triangulo obtuſangulo o ſeno do angulo obtuſo he o meſmo do ſeu ſupplemento*, pag. 23.

Prop. VIII. Probl. *Achar os dous lados de hum triangulo, de que ſe conhecem dous angulos, e hum lado*, pag. 75.

Prop. IX. Probl. *Conhecidos dous lados, e hum angulo oppoſto a hum dos lados, achar os outros dous angulos*, pag. 27.

Prop. X. Theor. *Em todo o triangulo a ſomma dos lados he para a ſua differença, como a tangente da ſemiſomma dos angulos á tangente da ſemidifferença*, pag. 29.

Prop. XI. Probl. *Conhecidos em hum triangulo trez lados, e o angulo por elle comprehendido, conhecer os outros dous angulos*, pag. 31.

Prop. XII. Theor. *Em qualquer triangulo o maior lado he para a ſomma dos outros*

tros dous, como a differença deſtes para a differença dos ſegmentos da baſe, pag. 33.
Prop. XIII. Probl. *Achar o valor de hum dos ſegmentos da baſe em hum triangulo, de que ſe conhecem os trez lados*, pag. 34.
Uſo dos logarithmos, e calculo dos triangulos, pag. 35.
Applicação da Trigonometria á pratica, pag. 40.
Prop. XIV. Probl. *Achar huma diſtancia inacceſſivel*, ibid.
Prop. XV. Probl. *Conhecer a diſtancia entre dous objectos inacceſſiveis*, pag. 44.
Prop. XVI. Probl. *Tirar huma linha parallela a outra inacceſſivel*, pag. 47.
Prop. XVII. Probl. *Medir huma altura acceſſivel, ou inacceſſivel*, pag. 50.
Applicação de Geometria a fazer as cartas Geograficas, pag. 52.
Applicação da Geometria á fortificação, pag. 59.
Modo de marcar a fortificação ſobre o terreno, pag. 68.
Problemas de Trigonometria applicaveis á fortificação, pag. 70.

Probl.

Probl. I. *Conhecido o comprimento de huma linha, a que se não póde chegar, e os angulos de duas estações, cuja distancia he incognita, conhecer todos os angulos, e linhas de figura*, pag. 71.

Probl. II. *Conhecendo huma linha, e suas partes com os angulos observados de hum ponto só, achar a distancia deste ponto aos extremos da mesma linha*, pag. 75.

Theorica, e pratica do Nivelamento, pagin. 81.

Cap. I. *Do modo de usar do nivel d'agua*, pag. 84.

Cap. II. *Do modo de fazer o nivelamento composto*, pag. 19.

Cap. III. *Do modo de nivelar dous termos, entre os quaes ha covas, e eminencias*, pag. 93.

Cap. IV. *Do modo de conhecer a differença do nivel apparente ao verdadeiro em huma só linha*, pag. 99.

Cap. V. *Descripção do nivel de Mr. Huyghens*, pag. 103.

Cap. VI. *Do modo de usar do nivel de Mr. Huygens*, pag. 110.

Cap. VII. *Do modo de fazer o nivelamento composto com o nivel de Mr. Huyghens*, p. 114.

LI-

LIVRO XI.

Trata da medição em geral, em que se ensina o modo de medir planos, solidos, e obras de madeira.

CAp. I. *Da multiplicação de duas dimensões, das quaes a primeira he composta de braças, e partes de braças, e a segunda de braças*, pag. 128.
Cap. II. *Do modo de multiplicar duas dimensões, que contém cada huma braças, palmos, e pollegadas*, pag. 139.
Cap. III. *Do modo de medir trez dimensões, que constem de braças, palmos, e pollegadas*, pag. 149.
Cap. IV. *Do modo de medir as obras de carpinteiro*, pag. 157.

LIVRO XII.

Applicação da Geometria a medir as superficies, e solidos.

CAp. I. *Da medida das superficies*, pag. 177.
Prop. I. Probl. *Medir as figuras triangulares*, ibid.

Prop.

Prop. III. Probl. *Medir a ſuperficie dos polygonos regulares, e irregulares*, pagin. 181.
Prop. IV. Probl. *Medir as ſuperficies dos circulos, ou das ſuas partes*, pag. 182.
Prop. V. Probl. *Medir a ſuperficie da Ellipſe*, pag. 184.
Prop. VI. Probl. *Medir a arca de huma parabola*, pag. 186.
Prop. VII. Probl. *Medir a ſuperficie dos priſmas, e cylindros*, pag. 189.
Prop. VIII. Probl. *Medir a ſuperficie das pyramides, e cones*, pag. 190.
Prop. IX. Probl. *Medir a ſuperficie das eſferas, ſeus ſegmentos, e zonas*, p. 191.
Prop. X. Probl. *Medir a ſolidez dos cubos, parallelipipedos, priſmas, e cylindros*, pag. 193.
Prop. XI. Probl. *Medir a ſolidez das pyramides, e cones*, pag. 195.
Prop. XII. Probl. *Medir a ſolidez das pyramides, e cones truncados*, pag. 197.
Prop. XIII. Probl. *Medir a ſolidez dos ſectores de cylindros, e cones truncados*, pag. 201.
Prop. XIV. Probl. *Medir a ſolidez de huma eſfera*, pag. 203.

Prop.

Prop. XV. Probl. *Medir a ſolidez de hum paraboloide*, pag. 208.
Prop. XVI. Probl. *Medir a ſolidez de hum eſferoide*, pag. 210.
Prop. XVII. Probl. *Medir a ſolidez de hum hyperboloide*, pag. 213.
Cap. II. *Applicação da Geometria á medição das abobedas*, pag. 215.
Prop. XVIII. Probl. *Medir a ſolidez de toda a caſta de abobedas*, ibid.
Prop. XIX. Theor. *A ſuperficie curva de hum lanço de abobeda he dupla do triangulo, que lhe ſerve de baſe*, p. 225.
Cap. III. *Applicação da Geometria ao modo de medir o reveſtimento de huma fortificação*, pag. 235.
Prop. XX. Probl. *Modo de medir a unha do travéz no foſſo aquatico*, pag. 247.
Cap. IV. *Regra geral para medir as ſuperficies, e ſolidos*, pag. 252.
Prop. XXI. Probl. *Conhecido o centro da gravidade de huma recta, achar o valor da ſuperficie, que deſcreveria depois de fazer a circumvolução á roda do eixo*, pag. 256.
Prop. XXII. Probl. *Achar a ſuperficie de huma meia eſfera, conhecendo o centro*

da gravidade da ſemicircumferencia do circulo gerador, pag. 258.

Prop. XXIII. Probl. *Conhecido o centro da gravidade de hum rectangulo, que ſe move á roda do ſeu eixo, achar o ſolido, que faria com eſte movimento*, pagin. 261.

Prop. XXIV. Probl. *Conhecido o centro da gravidade de hum triangulo Iſocele, que ſe move á roda do ſeu eixo, achar o ſolido do corpo, que deſcreveria*, pagin. 262.

Prop. XXV. Probl. *Conhecido o centro da gravidade de hum circulo, achar o ſolido da eſfera, que deſcreveria pela circumvolução á roda do ſeu diametro*, pagin. 267.

LIVRO XIII.

Applicação da Geometria á divisão dos campos, e uſo do compaſſo de proporção.

PRop. I. Probl. *Dividir hum triangulo nas partes iguaes, que ſe quizerem, por linhas tiradas do angulo oppoſto á ſua baſe*, pag. 271.

Prop.

Prop. II. Probl. *Dividir hum triangulo em duas partes iguaes por huma linha tirada de hum ponto dado em hum dos lados*, pag. 272.

Prop. III. Probl. *Dividir hum triangulo em trez partes iguaes por linhas tiradas de hum ponto dado em hum dos seus lados*, pag. 273.

Prop. IV. Probl. *Dividir hum triangulo em trez partes iguaes por linhas tiradas dos trez angulos*, pag. 274.

Prop. V. Probl. *Dividir hum triangulo em duas partes iguaes por linhas tiradas de hum ponto, qualquer que seja, na superficie do triangulo*, pag. 275.

Prop. VI. Probl. *Dividir hum triangulo em duas partes iguaes por huma linha parallela á base*, pag. 276.

Prop. VII. Probl. *Dividir hum trapezoide por huma linha parallela á base em duas partes iguaes*, pag. 277.

Prop. VIII. Probl. *Dividir hum trapezio em dous iguaes por huma linha parallela a hum dos lados*, pag. 279.

Prop. IX. Probl. *Dividir hum trapezoide em trez partes iguaes*, pag. 280.

Prop. X. Probl. *Dividir hum trapezio em duas partes iguaes*, pag. 281.
Prop. XI. Probl. *Dividir hum trapezio em duas partes iguaes por huma linha tirada de hum dos seus angulos*, pag. 282.
Prop. XII. Probl. *Dividir hum trapezoide em duas partes iguaes por huma linha tirada de hum ponto de hum dos seus lados*, pag. 283.
Prop. XIII. Probl. *Dividir hum pentagono em trez partes iguaes por linhas tiradas de hum dos seus angulos*, pag. 284.
Uso do compasso de proporção, pag. 285.
Prop. XIV. Probl. *Dividir huma recta em quantas partes iguaes quizerem*, pag. 286.
Prop. XV. Probl. *Achar a duas linhas huma terceira proporcional*, pag. 287.
Prop. XVI. Probl. *Achar huma quarta proporcional a trez linhas dadas*, pag. 288.
Prop. XVII. Probl. *Inscrever hum polygono em hum circulo*, pag. 289.
Prop. XVIII. Probl. *Descrever sobre huma recta hum polygono regular*, p. 290.

Prop.

Prop. XIX. Probl. *Tomar na circumferencia de hum circulo hum arco de qualquer numero de gráos*, pag. 291.
Prop. XX. Probl. *Achar o valor de hum angulo por meio da linha das cordas*, pag. 292.
Prop. XXI. Probl. *Conhecida a quantidade de gráos de hum arco, achar o raio do circulo, de que he arco*, pag. 293.
Prop. XXII. Probl. *Abrir o compaſſo de proporção de ſorte que as linhas das cordas fação hum determinado angulo*, pag. 294.
Prop. XXIII. Probl. *Conhecer o angulo, que fazem as linhas das cordas, aberto arbitrariamente o compaſſo de proporção*, pag. 294.
Prop. XXIV. Probl. *Fazer hum quadrado, que tenha para outro huma certa razão*, pag. 296.
Prop. XXV. Probl. *Conhecer a razão de hum quadrado a outro*, ibid.
Prop. XXVI. Probl. *Abrir o compaſſo de proporção, de ſorte que as linhas dos planos formem hum angulo recto*, p. 297.
Prop. XXVII. Probl. *Fazer hum quadrado igual a dous*, pag. 298.

Prop.

Prop. XXVIII. Probl. *Fazer hum cubo, que tenha a outro huma razão dada*, pag. 299.
Prop. XXIX. Probl. *Achar a razão que ha entre dous cubos*, pag. 300.
Applicação da Geometria á Artilheria, pag. 301.
Prop. XXX. Probl. *Fazer a analyſe da miſtura do metal nas peças da artilheria*, ibid.
Prop. XXXI. Probl. *Achar o calibre das balas, e peças de artilheria*, pag. 307.
Prop. XXXII. Probl. *Conhecer o diametro dos cylindros, que ſervem para medir a polvora*, pag. 310.
Prop. XXXIII. Probl. *Achar o comprimento, que devem ter as peças de artilheria reſpectivamente aos ſeus calibres*, pag. 315.
Prop. XXXIV. Probl. *Achar o numero das balas, que eſtão em pilha*, p. 334.

As 21 Eſtampas deſte Tomo ſe encadernarão na ordem ſeguinte.

Eſtampa 1, e 2 - - - - - - - - pag. 40.
Eſtampa 3 - - - - - - - - - - pag. 52.
Eſtampa 4 - - - - - - - - - - pag. 58.
Eſtampa 5 - - - - - - - - - - pag. 70.
Eſtampa 6 - - - - - - - - - - pag. 80.
Eſtampa 7 - - - - - - - - - - pag. 102.
Eſtampa 8 - - - - - - - - - - pag. 112.
Eſtampa 9 - - - - - - - - - - pag. 122.
Eſtampa 10 - - - - - - - - - pag. 182.
Eſtampa 11 - - - - - - - - - pag. 196.
Eſtampa 12 - - - - - - - - - pag. 204.
Eſtampa 13 - - - - - - - - - pag. 214.
Eſtampa 14, e 15 - - - - - - pag. 234.
Eſtampa 16, e 17 - - - - - - pag. 252.
Eſtampa 18 - - - - - - - - - pag. 270.
Eſtampa 19 - - - - - - - - - pag 282.
Eſtampa 20 - - - - - - - - - pag. 300.
Eſtampa 21 - - - - - - - - - pag. 346.