$CF : \frac{CH}{CF} :: CG : CI$

$CF : CH - CF :: CG : CI - CF$

$CF : CG :: CH - CF : CI - CF$

$a^2 : b :: a^2$

$8 : 12 :: 2 : 3$

$8 : 10 :: 2 : 1$

343
Mathematics

370 DOM

# NOVO CURSO
DE
# MATHEMATICA
PARA USO DOS OFFICIAES
Engenheiros, e Artilheria
POR
## MONSIEUR BELLIDOR,
*Coronel de Infanteria, Socio das Reaes Academias de França, Inglaterra, e Pruſſia,*

Traduzido no idioma Portuguez
POR
## MANOEL DE SOUSA,
*Capitão de Infanteria, com exercicio de Engenheiro, e Socio da Arcadia de Lisboa.*

## TOMO II.

LISBOA,
Na Officina de Miguel Maneſcal da Coſta, Impreſſor do Santo Officio. Anno 1764.

COMANDO GERAL DE ARTILHARIA
BIBLIOTHECA
DIRECÇÃO DA ARMA DE ARTILHARIA
N.º 370
BIBLIOTECA

# NOVO CURSO DE ATHEMATICA.

## LIVRO III.

*TRATA-SE DAS DIFFERENTES posições das linhas rectas a respeito de outras rectas.*

### DEFINIÇÕES.

I.

36 *LINHAS parallelas* são aquellas, que por mais que se continuem, sempre são igualmente distantes entre si, nem as suas extremidades se podem juntar, como as linhas AB,CD. Estamp. 1. Figura 1.

II.

337 *Angulo* he a inclinação de huma linha ſobre outra: chama-ſe *angulo rectilineo*, quando as linhas, que o formão, ſão rectas, como o angulo ABC: chama-ſe *curvilineo*, quando as linhas, que o formão, ſão curvas, como o angulo DEF: *mixtilineo*, quando huma das linhas he recta, e outra curva, como GHI.

Figura 2.

Figura 3.

Figura 4.

III.

338 As linhas rectas, ou curvas, de cuja inclinação ſe fórma o angulo, ſe chamão *lados do angulo*: o ponto, em que concorrem mutuamente, ſe chama *vertice do angulo*: daqui ſe ſegue que a grandeza do angulo não depende do comprimento dos lados, mas ſómente da inclinação das linhas, o que ſó conſtitue a natureza do angulo: tambem ſe ſegue que hum angulo não comprehende eſpaço finito, ou determinado: para denotar hum angulo ſe ſervem ordinariamente de trez letras, e a que ſe acha no meio denota o vertice do angulo.

IV.

IV.

339 *Angulo recto* he o que he formado pelo encontro de duas linhas perpendiculares huma ſobre outra, como os angulos ABC, ou ABD. Figura 5.

V.

340 *Angulo obliquo* he o que fazem duas linhas, que não são perpendiculares, que por eſta razão ſe chamão *linhas obliquas*, como as linhas IH, e LK: o angulo obliquo ou he *agudo*, Figura 6. ou *obtuſo*.

VI.

341 *Angulo agudo* he aquelle, que he menor, ou tem menos abertura que o angulo recto, como o angulo HIL. Figura 6. *Angulo obtuſo* he o que he maior que recto, como HIK.

He evidente que a linha HI cahindo ſobre outra, fórma com ella dous angulos deſiguaes, que juntos valem dous rectos; porque ſe imaginarmos a recta IF perpendicular a LK no ponto Figura 6. I, o angulo agudo HIL = FIL − FIH, e o angulo obtuſo HIK = FIH + FIK; aſſim ſommando os membros deſtas equações, teremos HIL + HIK = FIL

+

+FIK=2FIL, pois todos os angulos rectos são iguaes.

VII.

Figura 7. 342 *Circulo* he huma ſuperficie plana, terminada por huma ſó linha curva, a que ſe chama *circumferencia do circulo*, todos os pontos da qual diſtão igualmente de hum ponto A, a que ſe chama *centro do circulo*. As linhas AB, AC, AD, tiradas do centro A á circumferencia, ſe chamão *raios do circulo*, e todas são entre ſi iguaes, pois medem a diſtancia do centro a cada ponto da circumferencia, e eſta diſtancia ſempre he igual, conforme a definição do circulo.

VIII.

343 O *diametro do circulo* he huma linha recta, que paſſa pelo centro do circulo, e as ſuas extremidades ſe vão
Figura 8. terminar na circumferencia, como ED. Eſta linha divide o circulo, e ſua circumferencia em duas partes iguaes, a que indifferentemente chamão *ſemicirculo*, ou *ſemicircumferencia*, e conſequentemente a ſua metade ſe deve chamar *quarto do circulo*.

IX.

IX.

344 Chama-ſe *arco de circulo* huma parte da circumferencia menor, ou maior que a ſemicircumferencia.

X.

345 Os Mathematicos ſuppuzerão o circulo dividido em 360 partes iguaes, a que chamárão *gráos*, e cada gráo em 60 partes, a que chamárão *minutos*, e cada hum deſtes tambem dividido em outras 60, a que chamárão *ſegundos*: inventárão-ſe eſpecialmente eſtas diviſões para medir os angulos, e determinar com mais exacção a ſua razão. O gráo não ſe deve julgar de huma medida determinada, e abſoluta, antes pelo contrario he variavel, conforme os differentes circulos, ainda que conſtantemente a meſma a reſpeito de cada circulo em particular, de que hum gráo he a tricenteſima ſexageſima parte da ſua circumferencia, do que facilmente ſe deduz que em hum circulo maior são os gráos maiores, do que em outro mais pequeno: o meſmo he a reſpeito dos minutos, ſegundos, e terceiros.

XI.

## XI.

Figura 10. 346 A *medida de hum angulo* he o arco deſcripto do ſeu vertice, e terminado entre os ſeus lados, aſſim a medida do angulo ABC he o arco AC, de ſorte que o angulo ABC ſerá de tantos gráos, minutos, &c., quantos contiver o arco AC. Para comprehender como os arcos dos circulos são a medida dos angulos, e podem determinar a ſua grandeza, ſe póde imaginar que o angulo CBA ſe formou do movimento da linha CB á roda do ponto B, até chegar a ſobrepôr a linha BA, pois he evidente que tomando na linha BA o ponto A, e na linha BC o ponto C, igualmente diſtantes do ponto B, o arco AC determinará a quantidade do caminho, que correo o ponto C, affaſtando-ſe da linha CB. Se eſta linha ſe tiveſſe affaſtado duas vezes mais, o angulo ſeria duas vezes maior, como tambem o arco, que denotava o eſpaço corrido pelo ponto C, affaſtando-ſe de CB. Póde-ſe aqui notar que a medida de hum angulo recto ſempre he a quarta parte da circumferencia

cia do circulo, iſto he, 90 gráos; porque ſe ſe imaginão cortados os dous diametros AB, CD em angulos rectos, ver-ſe-ha que dividem a circumferencia do circulo em quatro partes iguaes, de que cada huma he a medida do angulo recto, que lhe correſponde, e conſequentemente ſe póde dizer ſer o ſemicirculo a medida de dous angulos rectos. Figura 9.

## PROPOSIÇÃO I.

### PROBLEMA.

347 Dado hum ponto A fóra de huma linha BC, e no meſmo plano, tirar delle huma perpendicular AD a eſta linha. Figura 11.

### SOLUÇÃO.

Para tirar do ponto dado A huma perpendicular ſobre a linha BC, deſcreva-ſe do ponto A, como centro, hum arco de circulo, que córte a linha dada em dous pontos B, e C: deſtes pontos com huma meſma abertura de compaſſo menor que AB ſe deſcrevão dous arcos de circulo, que ſe corta-

tarão em hum ponto v. g. E: a linha, que tirada pelo ponto A paſſar pelo ponto E, he a perpendicular, que ſe pede.

DEMONSTRAÇÃO.

Para o provar ſe deve reflectir que as linhas AB, AC são iguaes pela conſtrucção, pois são raios do meſmo circulo; e que as linhas EC, EB tambem pela meſma razão são iguaes, de que ſe conclue que a linha AD he perpendicular ſobre BC, pois não inclina mais para hum lado, do que para outro. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO II.

### PROBLEMA.

Eſtamp. 2. Figura 12. 348 De hum ponto dado ſobre huma linha v. g. A levantar huma AD, que lhe ſeja perpendicular.

SOLUÇÃO.

Para levantar do ponto A huma perpendicular ſobre BC, tomem-ſe dous pontos B, e C igualmente diſtantes de A, e deſtes pontos, como centro, ſe deſ-

deſcrevão com a meſma abertura do compaſſo os dous arcos, que ſe cortão em hum ponto D: deſte ponto ao ponto A ſe tire a recta AD, que ſerá perpendicular ſobre BC.

DEMONSTRAÇÃO.

Facilmente ſe comprehende que a linha AD he perpendicular ſobre BC, pois pela conſtrucção os dous pontos A, e D da linha AD são igualmente diſtantes dos dous pontos B, e C da linha BC: logo aquella não inclina mais para hum lado, do que para outro, e conſequentemente he perpendicular ſobre BC. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO III.

PROBLEMA.

349 Dividir huma linha em duas partes iguaes. Figura 13.

SOLUÇÃO.

Para dividir huma linha v. g. AB em duas partes iguaes, ſe deſcrevão dos ſeus extremos A, e B, como centros,

tros, com huma meſma abertura de compaſſo, dous arcos de circulo, que ſe cortem nos pontos C, e D: tire-ſe por eſſes pontos a recta CD, que cortará a recta AB em duas iguaes no ponto E.

DEMONSTRAÇÃO.

Porque os pontos C, e D da linha CD diſtão igualmente dos extremos da linha AB, todos os mais pontos della ſerão igualmente diſtantes dos meſmos extremos A, e B: logo o ponto E, que he hum dos da linha CD, e da linha AB, tambem he igualmente diſtante de A, e B: logo o ponto E he o meio da linha AB. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

350 De hum ponto ſobre huma linha não ſe póde levantar mais que huma perpendicular.

DEMONSTRAÇÃO.

Figura 14. Se do ponto C da linha AB ſe levantou CE perpendicular á linha AB, he

he claro que ſe ſe quizeſſe levantar outra v. g. CD do meſmo ponto C, ſe não poderia fazer, ſem que eſta linha inclinaſſe mais para hum lado, que para outro, iſto he neſte exemplo, mais para A, que para B; e como iſto ſeria contra a definição das linhas perpendiculares, ſegue-ſe que do meſmo ponto ſe não póde levantar mais que huma perpendicular. Além diſſo ſe eſta linha tem outro ponto commum com a perpendicular, além do ponto C, concorda com ella, pois dous pontos determinão a poſição de huma linha recta *: logo de hum ponto dado não ſe póde levantar mais de huma perpendicular. *O Q. S. Q. D.* * Num. 13.

## PROPOSIÇÃO V.

### THEOREMA.

351 De hum ponto dado fóra de huma linha não ſe póde abaixar mais que huma perpendicular.

### DEMONSTRAÇÃO.

Se do ponto A ſe tirou ſobre DE a perpendicular AB, os pontos D, e E ſão Fig.ª 15.

são igualmente distantes do ponto A: logo o ponto B, em que a perpendicular encontra a linha DE, tambem será igualmente distante dos extremos D, e E da recta; mas do ponto A não se póde tirar á linha DE outra linha v. g. AC differente de AB, sem que o ponto C seja mais á direita, ou á esquerda de B: logo os pontos D, e E não são igualmente distantes do ponto C, e consequentemente a linha AC não he perpendicular sobre DE. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO VI.

### THEOREMA.

352 A perpendicular he a mais curta de todas as linhas, que se podem tirar de hum ponto sobre huma linha.

### DEMONSTRAÇÃO.

Figura 16. Se do ponto D se tirar sobre AB a perpendicular DC, digo que esta he mais curta de todas as que do mesmo ponto D se podem tirar á linha AB, como v. g. DF, &c.

Para se demonstrar continue-se a perpendicular DC para E, de sorte que CE

CE=CD: tire-se a linha EF, a linha DE certamente he mais curta que a linha DFE, pois pela definição a linha recta he a mais curta de todas as que se podem tirar de hum ponto a outro, do ponto D v. g. ao ponto E.* Além disso a linha DE he perpendicular sobre AB, e reciprocamente tambem AB he perpendicular sobre DE, que pela constrúcção divide em duas partes iguaes: logo o ponto F tambem dista igualmente dos extremos da linha D, e E, e consequentemente DF=FE: logo tomando metade de cada huma destas linhas, será DC menor que DF: do mesmo modo se fará a demonstração com qualquer outra linha diversa de DF, tomada para qualquer lado de DC: logo DC he a mais curta de todas as que do ponto D se podem tirar sobre AB.

* Numer. 13.

Este theorema se póde presentemente tomar como huma definição da linha perpendicular a outra, pois esta he huma das suas mais importantes propriedades, de que se podem deduzir outras muitas.

PRO-

## PROPOSIÇÃO VII.

### THEOREMA.

353 Quando duas rectas se cortão, formão os angulos oppostos no seu vertice iguaes.

### DEMONSTRAÇÃO.

Figura 18. Sejão quaesquer duas rectas AB, CD, que se cortão no ponto E, e formão pelo seu encontro, e mutua intersecção, os angulos BED, e AEC, que se chamão *verticalmente oppostos*, porque tem o seu vertice no mesmo ponto E, hum de huma parte, e outro da outra, digo que estes angulos são iguaes.

Para se mostrar do ponto E, como centro, com qualquer raio v. g. EB, descrevo a porção de circulo, que córte as linhas AB, CD nos pontos A, C, D, B: isto supposto, como o centro do circulo he o ponto da intersecção das duas linhas, está em ambas ellas: logo cada huma das linhas AB, CD he hum diametro de circulo, e cada hum dos arcos ADB, e DAC será

igual

igual á semicircumferencia, e será ADB = DAC: tirando de huma, e outra parte o arco AD, que he commum, será o restante BD = AC; mas estes arcos são a medida dos angulos AEC, DEB: logo tambem os angulos verticalmente oppostos, formados pelas rectas AB, CD, são iguaes. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO VIII.

### THEOREMA.

354 Quando duas rectas, v. g. AB, CD entre si parallelas, cahem sobre huma terceira EF, formão os angulos para a mesma parte iguaes. Figura 19.

### DEMONSTRAÇÃO.

Para demonstrar que as duas parallelas AB, CD, que cahem sobre a linha EF, formão para a mesma parte os angulos ABF, CDF iguaes, basta advertir, que não sendo o angulo mais que a inclinação de duas linhas *, a igualdade destas inclinações fará a igualdade dos angulos; e como as linhas AB, CD não podem ser, como

* Numer. 337.

se suppõem, parallelas, sem que se inclinem igualmente para FE, pois de outra sorte se juntarião em algum ponto, segue-se que o angulo ABF he igual ao angulo CDF, pois a linha AB se inclina tanto sobre EF, como a linha CD. *O Q. S. Q. D.*

## DEFINIÇÕES.

Figura 20. 355 Quando huma recta v. g. EF córta duas parallelas BA, CD, fórma com ella angulos, a que se dão differentes nomes, conforme a sua posição a respeito das mesmas linhas.

356 Os angulos taes como BGH, DHG, ou AGH, CHG, se chamão *internos*, ou *interiores da mesma parte.*

357 Os angulos BGE, DHF, ou AGE, CHF, se chamão *externos*, ou *exteriores da mesma parte.*

358 Os angulos, como AGE, DHF, tomados hum da parte direita, e outro da esquerda, fóra das parallelas AB, CD, se chamão *alternos externos*, assim como os angulos EGB, CHF.

359 Os angulos interiores, como AGH, DHG, tomados hum á direita, ou-

outro á eſquerda da ſecante EF, ſe chamão angulos *alternos internos*, como tambem os angulos BGH, CHG.

## PROPOSIÇÃO IX.

### THEOREMA.

360 Se huma linha EF cortar outras duas parallelas entre ſi, digo que fará 1.º os angulos alternos tanto internos, como externos iguaes: 2.º os angulos internos, ou externos para a meſma parte iguaes a dous rectos. Figura 20.

### DEMONSTRAÇÃO.

*Primeiro.* Devemos moſtrar que o angulo externo EGB he igual ao ſeu alterno CHF: por ſerem AB, CD parallelas, são igualmente inclinadas para a linha EF: logo o angulo EGB ſerá igual a GHD *; mas GHD = CHF verticalmente oppoſto *: logo EGB = CHF. Do meſmo modo ſe demonſtra o angulo AGE igual ao ſeu alterno DHF, e o angulo interno AGH igual ao ſeu alterno GHD, como tambem BGH igual ao ſeu alterno CHG. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 354.

* Numer. 353.

*Segundo.* Os angulos internos BGH, DHG da meſma parte da ſecante, ou os externos BGE, DHF juntos, ſão iguaes a dous rectos: por ſerem as rectas AB, CD parallelas, os angulos BGE, DHE para a meſma parte ſão iguaes entre ſi, como tambem BGH, DHF; * mas BGE + BGH = dous rectos *: logo tambem DHG + BGH = dous rectos. Do meſmo modo ſe demonſtra que os externos BGE + DHF valem dous rectos, como tambem os internos AGH + CHG, e tambem os externos da meſma parte AGE + CHF. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 354.
* Numer. 341.

## PROPOSIÇÃO X.

### THEOREMA.

Figura 20. 361 Suppondo que a recta EF córta duas AB, CD, digo que eſtas ſerão parallelas, ſe os alternos internos, ou alternos externos ſão iguaes, como tambem ſe os angulos internos, ou externos da meſma parte juntos valem dous rectos.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

*Primeiro.* Pela hypotheſe o angulo interno DHG = AGH ſeu alterno, e * AGH = BGE, que lhe he verticalmente oppoſto : logo o angulo DHG = BGE, e ſerão as rectas AB, CD parallelas, pois formão angulos para a meſma parte iguaes com a ſecante EF. * Numer. 353.

Do meſmo modo ſe demonſtrará que ſão parallelas, ſe fizerem os angulos alternos internos iguaes BGH=CHG, ou os alternos externos BGE = FHC, ou AGE = FHD. *O Q. S. Q. D.*

*Segundo.* Pela hypotheſe os angulos internos DHG + BGH da meſma parte da ſecante valem dous angulos rectos; mas * os dous BGH + BGE = dous rectos : logo DHG + BGH = BGH + BGE ; e tirando de cada membro da equação a meſma quantidade BGH, ficará DHG = BGE, o que moſtra que as linhas AB, CD ſão parallelas, pois fazem os angulos para a meſma parte da ſecante iguaes. *O Q. S. Q. D.* * Numer. 341.

PRO-

## PROPOSIÇÃO XI.

### PROBLEMA.

Figura 20. 362 Dada huma linha AB, e fóra della hum ponto H no meſmo plano, tirar por elle huma parallela a AB.

### SOLUÇÃO.

Do ponto H ſe tire qualquer recta HG, que córte a linha AB em hum ponto v. g. G: tomemos a medida do angulo KGH, deſcrevendo huma porção de circulo com o raio GH: do ponto H, como centro com o meſmo raio, ſe deſcreva hum arco de circulo, no qual ſe tome o arco GM igual ao arco HK, a linha HM ſerá a parallela, que ſe buſca.

### DEMONSTRAÇÃO.

Sendo iguaes os arcos de circulos iguaes, tambem são iguaes os angulos, que elles medem: logo o angulo KGH ſerá igual ao ſeu alterno GHM: logo pela propoſição precedente as linhas AB, MH são parallelas. *O Q. S. Q. D.*

He

He de notar que deſte meſmo modo ſe póde ſempre com qualquer linha fazer hum angulo igual a outro dado.

## PROPOSIÇÃO XII.

### PROBLEMA.

363 Dados trez pontos A, D, B no meſmo plano, achar o raio do circulo, que paſſa por eſtes trez pontos. Figura 21.

### SOLUÇÃO.

De huns pontos a outros ſe tirem as rectas AD, DB, e no meio da recta AB ſe levante a perpendicular indefinita EC: no meio de BD ſe levante ſemelhantemente a perpendicular FC *, que cortará a primeira no ponto C, digo que eſte ponto C he o centro do circulo, que paſſa pelos pontos A, B, C. * Numer. 348.

### DEMONSTRAÇÃO.

O ponto C, em quanto pertence á perpendicular EC ſobre AB, he igualmente diſtante dos extremos A, e B, pois EC pela conſtrucção divide AB pelo meio: o meſmo ponto C, em quanto

to pertence á recta CF perpendicular ao meio da linha BD, dista igualmente dos seus extremos B, e D: logo dista igualmente dos trez pontos ABD: logo C he o centro do circulo, que passar por esses pontos. *O Q. S. Q. D.*

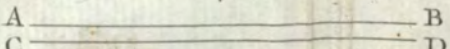
COROLLARIO.

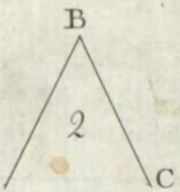
364 Se os pontos A, B, D estivessem dispostos de sorte que as perpendiculares FC, EC ficassem parallelas ao raio do circulo, seria este infinito, do que se póde concluir que o circulo não póde ter trez pontos em huma linha recta, menos que esta recta, em que tem os trez pontos, não seja infinitamente pequena a respeito do raio, no qual caso esta linha he hum dos lados do circulo, que se póde considerar como hum polygono de huma infinidade de lados: digo que nesta supposição os trez pontos estão em linha recta, pois he claro que as perpendiculares EC, FC não podem ser parallelas, sem que as rectas AB, BD fação huma linha recta.

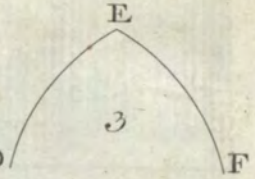
FIM DO TERCEIRO LIVRO.

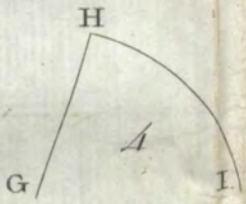
NO-

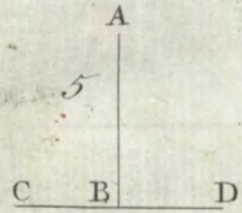
Fig. 1.

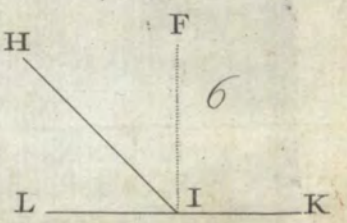


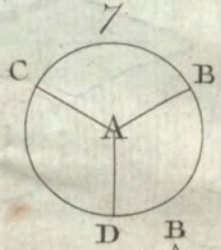



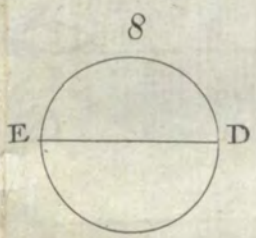



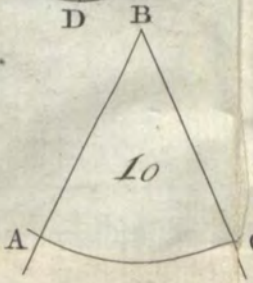



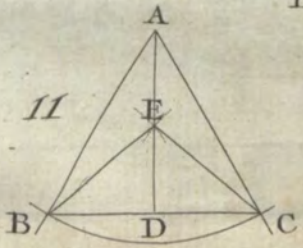



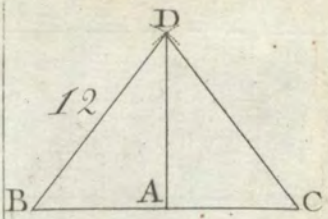


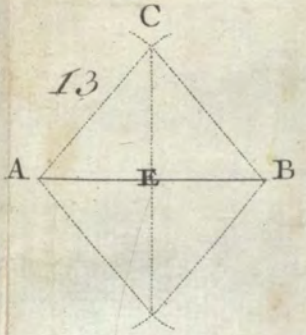



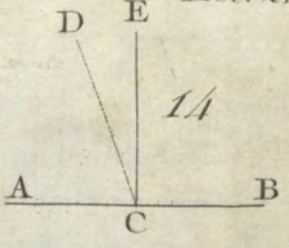


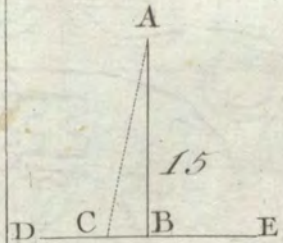

Silva sculp.t

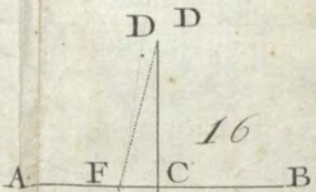
Est. 2.

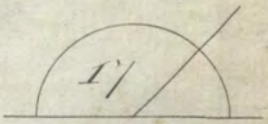

12
D
B
A
C

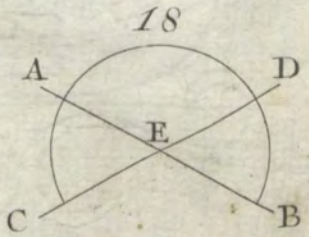

13
C
A
E
B

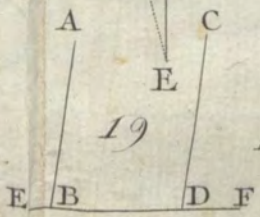

D
E
14
A
B
C

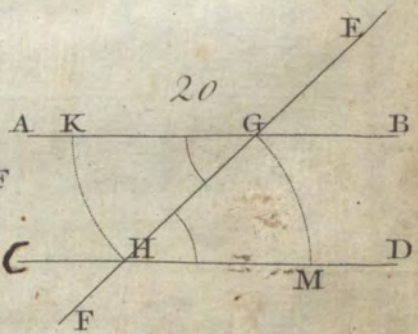

A
15
D
C
B
E


D
D
16
A
F
C
B


17


18
A
D
E
C
B


A
C
E
19
E
B
D
F


F
20
A
K
G
B
C
H
D
M
F

21
B
E
F
C
D
A

T.° 2.

# NOVO CURSO
DE
# MATHEMATICA.

## LIVRO IV.

*TRATA DAS PROPRIEDADES dos triangulos, e parallelogramos.*

### DEFINIÇÕES.

365
*IGURA rectilinea* he huma ſuperficie plana, terminada por linhas rectas, que ſe chamão *lados*. Eſtas figuras são de varias caſtas, e ſe lhes dão nomes particulares, conforme o numero de lados, e diſpoſições de huns a reſpeito de outros:

tros: a mais ſimples de todas he a que he terminada por trez lados, e ſe chama *triangulo*: chamão-ſe *quadrilateros* as que são terminadas de quatro lados, e geralmente polygonos todas as que tem mais de quatro lados.

366 O *triangulo*, conſiderado a reſpeito dos ſeus angulos, he de trez generos: *rectangulo*, que he aquelle, que tem hum angulo recto: *obtuſangulo*, ou *ambligonio*, que he o que tem hum angulo obtuſo: *acutangulo*, ou *oxigonio*, que he o em que todos os angulos são agudos, ou menores que rectos.

367 O *triangulo*, conſiderado a reſpeito dos lados, ſe divide em *equilatero*, que he o que tem os trez lados iguaes: *iſocele*, que he o que tem dous lados iguaes: e *eſcaleno*, que he o que tem todos os trez lados deſiguaes, do que ſe ſegue haver ſeis caſtas de triangulos.

368 A *baſe* de hum triangulo he aquelle lado do triangulo, ſobre que cahe a perpendicular, tirada do angulo oppoſto: eſta perpendicular ſe chama *altura* do triangulo: deſtas definições

ções se colhe facilmente que a base do triangulo ACB he o lado AB, e que a sua altura he CD: se os dous angulos sobre a base são agudos, a perpendicular cahirá sobre o lado AB: se hum dos angulos fosse obtuso, a perpendicular, ou altura cahiria sobre a base prolongada; e como em hum triangulo se póde tomar por base qualquer lado que quizerem, sempre se póde fazer cahir a perpendicular sobre o lado, que se toma por base: as partes, em que a perpendicular divide a base AB, se chamão *segmentos* da base. No triangulo rectangulo o lado opposto ao angulo recto se toma ordinariamente por base do triangulo, e se chama *hypotenusa*. Estamp. 3. Figura 1.

369 Chama-se *Trapesio* huma figura quadrilatera, que não tem algum dos lados opposstos parallelos, como G. Figura 2.

370 *Trapesoide* he hum quadrilatero, que tem dous lados opposstos parallelos, como H. Figura 3.

371 *Parallelogramo* he huma figura quadrilatera, da qual os lados opposstos são iguaes, e parallelos, como EF. Figura 4.

*Dia-*

372 *Diagonal* he huma linha recta como CD, tirada em hum parallelogramo, ou rectangulo de qualquer angulo v. g. C a D, que lhe fica opposto.

373 Se por qualquer ponto A da *Diagonal* CD se tira a linha BG parallela a ED, e outra HI parallela a DF, teremos dous parallelogramos AE, AF, que se chamão complementos do parallelogramo EF.

## PROPOSIÇÃO I.

### THEOREMA.

Figura 5. 374 O angulo exterior BDC de hum triangulo ABD he igual aos dous interiores oppostos, e os trez angulos do triangulo em somma valem dous angulos rectos.

### DEMONSTRAÇÃO.

*Primeiro.* Para provar que o angulo exterior BDC he igual aos dous interiores, oppostos em A, e B, tire-se pelo ponto D a recta DE parallela ao lado A B do triangulo ABD: * isto supposto o angulo BDE=ABD seu al-

* Numer. 362.

ter-

terno *: o angulo EDC=BAD, por ſerem as linhas AB, DE parallelas *: logo a ſomma dos angulos BDE+EDC, ou o angulo exterior BDC, he igual á ſomma dos interiores oppoſtos ABD+BAD. *O Q. S. Q. D.* * Numer. 360. * Numer. 354.

*Segundo.* Digo que os trez angulos do triangulo ABD juntos valem dous angulos rectos; porque a linha BD, cahindo obliquamente ſobre AC, faz os angulos BDA+BDC, que juntos valem dous rectos *; mas, como acabamos de moſtrar, o angulo exterior BDC he igual á ſomma dos dous interiores BAD+ABD: logo accreſcentando a eſta ſomma o angulo BDA, ficará BAD+ABD+BDA=BDC+BDA=dous rectos. *O Q. S. Q. D.* * Numer. 341.

## COROLLARIO I.

375 Segue-ſe daqui que a ſomma dos angulos de qualquer polygono vale tantas vezes dous angulos rectos, menos quatro, quantos são os lados do polygono. Seja o quadrilatero ABCD de hum ponto G, qualquer que ſeja, dentro no quadrilatero, ſe tirem as linhas Figura 2.

nhas GA, GB, GC, GD aos angulos A, B, C, D, que dividirão a figura em quatro triangulos, he evidente que os angulos á roda do ponto G com os angulos do quadrilatero são todos os angulos dos triangulos, em que se divide o quadrilatero: logo são oito angulos rectos, pois cada triangulo tem dous angulos rectos; mas a somma dos angulos á roda do angulo G vale quatro angulos rectos: logo os angulos do polygono valem tambem quatro rectos, ou $8-4$, isto he, tantas vezes dous rectos, menos quatro, quantos lados tem o polygono.

COROLLARIO II.

376 Logo a somma dos angulos exteriores de qualquer polygono não vale mais de quatro angulos rectos, porque todos os angulos exteriores são supplementos dos interiores: logo a somma de huns, e outros he tantas vezes dous rectos, quantos lados tem o polygono; mas os interiores com os angulos á roda do ponto G fazem a mesma somma: logo os angulos exterio-

riores são iguaes aos angulos no centro á roda do ponto G, isto he a quatro angulos rectos. A mesma demonstração se póde fazer em qualquer outro polygono.

## COROLLARIO III.

377 Desta proposição se segue, que conhecidos os dous angulos de qualquer triangulo, se póde conhecer o terceiro, tirando a somma dos angulos já conhecidos de dous rectos, e a differença será o valor do terceiro angulo, que se busca; assim conhecendo no triangulo EDF o angulo E de 50 gráos, e o angulo D de 70, para ter o valor do angulo F se sommarão 50, e 70, que fazem 120, que diminuidos de 180 gráos, a differença 60 será o valor, que se busca do angulo F. Figura 6.

## COROLLARIO IV.

378 Segue-se tambem que se dous triangulos tiverem dous angulos respectivamente iguaes cada hum ao seu, o terceiro do primeiro triangulo será igual ao terceiro do segundo; porque

se

Figura 6. se o angulo A he igual ao angulo D, e o angulo C ao angulo F, he certo que tantos gráos faltarão á somma dos angulos A + C para o valor de dous rectos, como á somma D + F para o mesmo valor; e estas differenças iguaes não são outra cousa mais que o valor do terceiro angulo, do que se segue que o angulo B será igual ao angulo E.

DEFINIÇÃO.

379 Dous triangulos se dizem *perfeitamente iguaes*, quando tem os trez angulos, e os trez lados respectivamente iguaes; e *simplesmente iguaes*, quando as superficies são iguaes, ainda que comprehendidas por lados, que não são iguaes respectivamente.

## PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

380 Dous triangulos são perfeitamente iguaes, quando os trez lados do primeiro são respectivamente iguaes aos trez lados do segundo.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

Para demonſtrar que o triangulo G, em que ſe ſuppõe os lados AB, BC, AC iguaes aos lados DE, EF, DF do triangulo H, he inteiramente igual a eſte ultimo triangulo, baſta moſtrar que a igualdade dos lados traz comſigo neceſſariamente a igualdade dos angulos oppoſtos aos lados iguaes: ſe o angulo D não he igual ao ſeu correſpondente A, ſerá ou maior, ou menor; mas iſto implica contradicção: logo, &c. Seja, ſe he poſſivel, o angulo D mais pequeno que o ſeu correſpondente A, e faça-ſe o angulo LAC igual ao angulo D, e ſobre o lado indefinito AL do novo angulo ſe tome AL=AB, ou DE, he evidente que o lado LC do triangulo LAC ſerá neſte caſo mais pequeno que o lado BC; pois ſendo o angulo mais pequeno, e os pontos L, e C igualmente diſtantes do vertice A que os pontos B, e C, devem eſtar mais perto hum do outro, do que ſendo maior o angulo, como CAB: logo no triangulo CAL o lado CL ſerá Figura 7.

mais pequeno que o lado CB: logo o triangulo DEF não póde ter o angulo D mais pequeno que A, ſem ter tambem o lado EF mais curto que o lado BC, o que he contra a hypotheſe. Tambem ſe não póde ſuppôr o angulo D maior que o angulo A ſem hum ſemelhante inconveniente: logo o angulo D he igual ao angulo A, como do meſmo modo ſe póde moſtrar o angulo F igual ao angulo C, e o angulo E igual ao angulo B: eſtes dous triangulos tem, além dos lados iguaes, os angulos comprehendidos por elles tambem iguaes, e são perfeitamente iguaes. *O Q. S. Q. D.*

381 Do que adiante ſe ſegue ſe verá que podem os trez angulos de hum triangulo ſer iguaes aos trez angulos do outro, cada hum ao ſeu correſpondente, ſem que os triangulos ſejão iguaes; aſſim ainda que da igualdade dos lados ſe ſiga a igualdade dos angulos, não ſe ſegue da igualdade dos angulos as dos lados. Tambem he de advertir que o triangulo he a unica figura, que tem eſta propriedade: dous

qua-

quadrilateros, por exemplo, podem ter os lados reſpectivamente iguaes, ſem terem os angulos, ou as ſuas ſuperficies iguaes, e ſem ſerem conſequentemente perfeitamente iguaes.

## PROPOSIÇÃO III.

### THEOREMA.

382 Dous triangulos G, H são totalmente iguaes, ſe tem hum angulo reſpectivamente igual ao do outro, v. g. B=E, comprehendido entre dous lados iguaes cada hum ao ſeu reſpectivo. Figura 7.

### DEMONSTRAÇÃO.

Para demonſtrar que o triangulo G he igual ao triangulo H, ſe o lado DE for igual ao lado BA, e o lado FE igual a BC, com o angulo B igual a E imaginemos que o lado DE ſe ſobrepõe ſobre AB, como são iguaes, cahirá o ponto D ſobre A; e porque o angulo E he igual ao angulo B, o lado EF cahirá ſobre BC, e o ponto F ſobre C, pois BC=EF: logo o lado DF cahirá ſobre AC, o que moſtra que os dous

triangulos ſe ajuſtão perfeitamente, e são inteiramente iguaes. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO IV.

### THEOREMA.

Figura 7. —383 Dous triangulos ABC, DEF são perfeitamente iguaes, ſe tem hum lado AC igual ao correſpondente DF com os angulos A, e C iguaes aos angulos D, e F, cada hum ao ſeu reſpectivo.

### DEMONSTRAÇÃO.

Se o lado AC do triangulo G he igual ao lado DF do triangulo H, e que o angulo A ſeja igual ao angulo D, e o angulo C ao angulo F, claramente ſe vê ſerem eſtes dous triangulos inteiramente iguaes; porque imaginando o lado AC ſobrepoſto ao lado DF, como são iguaes pela hypotheſe, pondo o ponto A ſobre D, cahirá o ponto C ſobre o ponto F. Além diſſo pela igualdade dos angulos A, e C, com os angulos D, e F, o lado AB cahirá ſobre o lado DE, e o lado CB ſobre o lado EF: logo eſtas duas linhas

nhas se cortarão no mesmo ponto E, e concordão os triangulos G, e H inteiramente, e são perfeitamente iguaes. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO V.

### THEOREMA.

384 Dous parallelogramos ABDC, EBDF são iguaes: se tem huma base commua, são comprehendidos entre as mesmas parallelas. Figura 82.

### DEMONSTRAÇÃO.

Os triangulos ABE, CDF são inteiramente iguaes; pois sendo ABDC hum parallelogramo, o lado AB do primeiro triangulo he igual ao lado CD do segundo *: pela mesma razão sendo EBDF parallelogramo, será BE=DF; e finalmente o terceiro lado AE=ao terceiro CF, porque AC=BD, e BD=EF, pois são lados oppostos dos parallelogramos AD, BF: logo AC=EF; e accrescentando a cada hum a linha CE, ficará AE=CF: do que se segue que os dous triangulos ABE, CDF

* Numerº 371.

são

* Numer. 380. são perfeitamente iguaes *: logo tirando-lhe a parte, que he commua CGE, ficará o trapesio ABGC = ao trapesio EGDF; e accrescentando-lhe a cada hum o triangulo BGD, ficará o parallelogramo ABDC, igual ao parallelogramo EBDF, comprehendido entre as mesmas parallelas. *O Q. S. Q. D.*

COROLLARIO.

385 Segue-se da proposição precedente que os parallelogramos, que tem iguaes bases, e estão entre as mesmas Figura 9. parallelas, são iguaes; pois para provar que o parallelogramo AD he igual ao parallelogramo GF, se as bases CD, EF são iguaes, não ha mais que tirar as linhas CG, DH, que formão o parallelogramo CH, que he igual a AD, pois tem a mesma base CD; e tambem he igual ao parallelogramo GF, porque tem a mesma base GH: logo he evidente que os parallelogramos AD, GF são iguaes, pois cada hum he igual ao mesmo terceiro.

PRO-

## PROPOSIÇÃO VI.

### THEOREMA.

386 Dous triangulos BCD, BFD são iguaes, ſe tem a meſma baſe commua BD, e são comprehendidos entre as meſmas parallelas BD, CF. Figura 10.

### DEMONSTRAÇÃO.

Tire-ſe pelo ponto D a linha DA parallela ao lado BC, e a linha DE parallela a BF, teremos os dous parallelogramos AB, BE, que ſerão iguaes, pois tem a meſma baſe, e são comprehendidos entre as meſmas parallelas.* Além diſſo eſtes parallelogramos são duplos dos triangulos BCD, BFD, porque os triangulos CAD, DEF tem cada hum os lados reſpectivamente iguaes a cada hum dos triangulos CBD, DBF: logo os triangulos CBD, DBF, ou metade dos parallelogramos AB, DE, são iguaes entre ſi. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 384.

### COROLLARIO I.

387 Segue-ſe deſta propoſição que ſe hum parallelogramo AD, e hum triangulo Figura 11.

an-

angulo AEC, comprehendidos entre as meſmas parallelas, tem a meſma baſe AC, o triangulo he metade do parallelogramo; porque o triangulo ABC, que lhe he igual, he metade do meſmo parallelogramo.

## COROLLARIO II.

Figura 11. 388 Como o triangulo BAC he igual ao triangulo AEC, he conſtante que tendo a meſma baſe, deve ter a meſma altura; e como a altura do primeiro he a perpendicular BA, a altura do ſegundo ſerá a meſma perpendicular BA, ou a ſua parallela EF, tirada do angulo E ſobre a baſe continuada AC, o que moſtra que a altura de hum triangulo inclinado he a perpendicular abaixada do ſeu vertice ſobre o prolongamento da ſua baſe; o meſmo ſuccederá nos parallelogramos inclinados.

## COROLLARIO III.

389 Sendo hum triangulo ABC me-
Figura 12. tade de hum parallelogramo AG, ſerá igual ao parallelogramo ADEC, do qual

qual a altura HF ſe ſuppõe metade da perpendicular BF, que ſerve de altura commua ao parallelogramo, e ao triangulo. Ora como para achar a ſuperficie do parallelogramo ADEC ſe deve multiplicar a baſe AC pela altura HF metade da perpendicular BF, ſegue-ſe que multiplicando a baſe de hum triangulo por metade da perpendicular, que determina a altura, ou, o que vem a ſer o meſmo, a altura inteira por metade da baſe, o producto ſerá a ſuperficie do triangulo.

## COROLLARIO IV.

390 Se hum triangulo ABC ſe imaginar compoſto de huma infinidade de linhas parallelas, que são os ſeus elementos, e que todas eſtas linhas, ſendo igualmente diſtantes, ſe excedem igualmente, ver-ſe-ha que ellas compõem huma progreſsão arithmetica de huma quantidade infinita de termos, do qual o primeiro he o, e a ſomma he expreſſada pela perpendicular BD. Ora como o valor do triangulo, ou por outros termos, a ſomma de todas eſtas pa- Figura 13.

parallelas se acha, multiplicando a maior, que he a base, por metade da quantidade, que expressa o numero dos termos, segue-se que se póde tirar deste discurso o seguinte principio: que a somma dos termos das quantidades infinitas em progressão arithmetica, começando por 0, he igual ao producto do maior termo por metade da quantidade, que expressa o numero dos termos, e he o que directamente mostramos. *

* Numer. 238.

Este corollario se deve procurar comprehender bem, pois ha de servir muito para o que temos adiante que demonstrar.

## PROPOSIÇÃO VII.

### THEOREMA.

Figura 4. 391 Os complementos AE, AF do parallelogramo EF são iguaes.

### DEMONSTRAÇÃO.

Para demonstrar que os complementos AE, e AF do parallelogramo EF são iguaes, imagine-se o parallelogramo

mo EF dividido em dous triangulos iguaes DEC, DFC, como tambem os parallelogramos BI, GH formados ſobre as partes AD, AC da diagonal CD: logo ſe ſe tirar do triangulo DEC os triangulos ADH, ABC, e do ſeu igual DCF as partes iguaes DAG, AIC, reſtará de huma parte o complemento AE igual ao complemento AF, que reſta da outra. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO VIII.

### THEOREMA.

392 Os parallelogramos, que tem a meſma altura, eſtão entre ſi como as ſuas baſes.

### DEMONSTRAÇÃO.

Digo que ſe os parallelogramos E, F tem a meſma altura, ou, o que quer dizer o meſmo, são comprehendidos entre parallelas, são entre ſi na razão das ſuas baſes. Para o provar ſeja *a* baſe do primeiro; *b* a do ſegundo; *c* a altura commua: a ſuperficie do primeiro ſerá *ac*; e a do ſegundo *bc*: he evi- Eſtamp. 4. Figura 14.

evidente que $ac:bc::a:b$, pois $abc = abc$. *O Q. S. Q. D.*

### COROLLARIO.

393 Deſta propoſição ſe ſegue que ſe dous triangulos ABC, CDB tem a meſma altura, ou o ſeu vertice no meſmo ponto, ſerão entre ſi na razão das ſuas baſes AC, CD; pois ſendo os triangulos metade dos parallelogramos correſpondentes com a meſma baſe, e meſma altura, ſerão eſtas metades como os ſeus todos.

Figura 15.

## PROPOSIÇÃO IX.

### THEOREMA.

394 Se os dous lados AB, AC do triangulo BAC ſe cortarem com huma linha DE parallela á baſe BC deſte triangulo, digo que os lados AB, AC eſtão cortados proporcionalmente, ou, o que vem a ſer o meſmo, haverá eſta proporção AD:DB::AE:EC.

Figura 16.

### DEMONSTRAÇÃO.

Para ſe demonſtrar eſta proporção, tirem-ſe as linhas BE, DC: iſto ſuppoſ-

posto, he evidente que os triangulos BDE, DCE são iguaes, pois tem a meſma baſe DE, e são comprehendidos entre as meſmas parallelas *; mas os triangulos ADE, DEC tem o meſmo vertice em D: logo são entre ſi como as baſes *, iſto he, AE : EC :: ADE : DEC, como tambem o triangulo ADE, e o triangulo BDE, que tem o meſmo vertice em E: logo ſerá AD : DB :: ADE : DEB; e porque DEB = DCE, ſerá AD : DB :: ADE : DEB :: ADE : DCE :: AE : EC; e como a ſerie das razões iguaes he ſeguida, ſe conclue que AD : DB :: AE : EC, iſto he, que os lados AB, AC eſtão cortados proporcionalmente. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 384.

* Numer. 393.

## COROLLARIO I.

395 Pois AD : DB :: AE : EC, ſerá compondo AD : AD+DB :: AE : AE+EC; e reduzindo AD : AB :: AE : AC, iſto he, que os lados AB, AC ſerão proporcionaes ás ſuas partes AD, AE. Figura 16.

## COROLLARIO II.

396 Segue-se daqui que dous triangulos são iguaes, quando tem hum angulo igual comprehendido entre lados reciprocos, isto he, quando os lados de hum são os extremos de huma proporção, de que os lados do outro são os meios; porque se aos triangulos iguaes BDE, DCE se accrescenta o mesmo triangulo ADE, teremos novos triangulos iguaes em superficie, que são ADC, AEB, que tem o angulo em A commum, e por consequencia igual: além disso pelo corollario precedente temos AD: AB :: AE: AC, no que se vê que os lados AD, AC do triangulo ADC são os extremos, e os lados AB, AE do triangulo BAE são os meios; e como os parallelogramos são duplos dos triangulos, segue-se tambem que dous parallelogramos são iguaes, quando tem hum angulo igual comprehendido de lados reciprocos.

Figura 16.

## COROLLARIO III.

397 Se pelo ponto E ſe tirar a linha EF parallela ao lado AB, os lados AC, CB ficarão cortados proporcionalmente, iſto he, ſerá AC:CE::BC:CF, e AE:AC::BF:BC; mas por ſerem BD, EF parallelas, ſerá BF igual a DE: logo AE:AC::DE:BC, iſto he, as partes AC, AE são proporcionaes ao lado BC, e á ſecante DE. Figura 16.

## DEFINIÇÃO.

398 Dous triangulos, ou geralmente quaeſquer duas figuras ſe dizem ſemelhantes, quando todos os angulos de huma são iguaes reſpectivamente a todos os angulos da outra, e os lados oppoſtos a iguaes angulos proporcionaes. Por exemplo: os dous triangulos M, N são ſemelhantes, ſe o angulo A he igual ao angulo D, o angulo C igual ao angulo F, e o angulo B ao angulo E; e além diſſo os lados AB, BC, AC proporcionaes aos lados DE, EF, DF. Figura 17.

AD-

ADVERTENCIA.

399 Deve-se advertir que o triangulo he a unica figura, que póde ser semelhante a outro, tendo só os trez angulos iguaes cada hum ao seu correspondente, ou os seus lados proporcionaes, de sorte que huma destas condições traz comsigo a outra: em outra qualquer figura podem todos os lados ser proporcionaes aos de outra figura, sem que os angulos sejão iguaes, como veremos depois.

## PROPOSIÇÃO X.

THEOREMA.

Figura 17. 400 Dous triangulos ABC, DEF são semelhantes, quando os trez lados AB, BC, AC do primeiro são proporcionaes aos trez lados DE, EF, DF do segundo.

DEMONSTRAÇÃO.

Para demonstrar esta proposição, basta mostrar que os angulos A, B, C do primeiro triangulo são iguaes aos angu-

gulos D, E, F do segundo, oppoſtos a lados proporcionaes aos do triangulo A, B, C: para iſto ſobre o lado AB, que he proporcional ao lado DE do triangulo DEF, ſe tome a linha BG igual a DE, e tire-ſe GK parallela a AC, Figura 17.

teremos * $AB : BG :: BC : BK = \frac{BC \times BG}{AB}$ * Numer. 394.

$= \frac{DE \times BC}{AB}$ *, pois pela conſtrucção $DE =$ * Numer. 206. BG; mas os trez lados são proporcionaes aos trez lados do ſegundo pela hypotheſe, ſerá $AB : DE :: BC : EF = \frac{DE \times BC}{AB}$: logo o lado BK do triangulo BGK he igual a EF do triangulo DEF. Do meſmo modo ſe demonſtra que o lado GK do triangulo BGK he igual a DF do triangulo DEF: logo eſtes triangulos são perfeitamente iguaes, pois tem os trez lados iguaes cada hum ao ſeu correſpondente *: logo os angulos D, e F são iguaes aos angulos G, e K, ou aos angulos A, e C, por ſer GK parallela a AC *: logo o triangulo DEF he ſemelhante ao triangulo ABC. *O. O. S. O. D.*

* Numer. 379.

* Numer. 354.

Co-

COROLLARIO.

401 Reciprocamente se dous triangulos são semelhantes, terão os lados proporcionaes; porque se fossem semelhantes, sem terem os lados proporcionaes, a proposição antecedente, que acabamos de demonstrar, seria falsa, o que implica.

## PROPOSIÇÃO XI.

THEOREMA.

Figura 17. 402 Dous triangulos ABC, DEF são semelhantes, quando tem hum angulo igual compreendido de lados proporcionaes.

DEMONSTRAÇÃO.

Supponhamos que o angulo E do triangulo DEF he igual ao angulo B do triangulo ABC, e que AB:BC::DE:EF, devemos mostrar que os angulos em A, e C são iguaes aos angulos em D, e F, e tambem AB:AC::DE:DF. Tomemos na linha AB o lado BG=DE, e BK=EF, por se supp-

pôr

pôr o angulo B igual ao angulo E, será o triangulo BGK perfeitamente igual ao triangulo DEF *: logo GK=DF, e o angulo D=G, como tambem o angulo K=F: logo AB:BC::BG:BK: logo os lados BA, BC estão cortados proporcionalmente: logo a linha GK he parallela a AC, e o triangulo BGK semelhante ao triangulo BAC: logo será AB:BG::AC:GK, ou AB:DE::AC:DF; e alternando AB:AC::DE:DF, do que se segue que os angulos do triangulo ABC são iguaes aos angulos do triangulo DEF; além disso os lados do triangulo DEF, oppostos a angulos iguaes, são proporcionaes aos oppostos aos mesmos angulos do triangulo ABC: logo o triangulo DEF he semelhante ao triangulo ABC. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 381.

## PROPOSIÇÃO XII.

### THEOREMA.

403 Dous triangulos ABC, DEF são semelhantes, quando os dous angulos de hum são iguaes aos dous angulos do outro. Figura 17.

DEMONSTRAÇÃO.

Figura 18. Supponhamos que o angulo A he igual ao angulo D, e que o angulo C he igual ao angulo F, ſobre o lado AC continuado ſe tome huma parte CD = DF, e pelo ponto C ſe tire a recta CE parallela ao lado AB, pelo ponto D a recta DE parallela ao lado CB, o triangulo CED ſerá inteiramente igual ao triangulo DEF *, porque eſtes triangulos tem dous angulos iguaes cada hum ao ſeu ſobre o meſmo lado, reſta moſtrar que o triangulo CED he ſemelhante ao triangulo ABC: para iſto continuem-ſe as linhas AB, DE até ſe encontrarem em hum ponto F, os lados AD, AF eſtarão cortados proporcionalmente pela linha BC, e ſerá AB: AC::BF:CD *; mas BF = CE por ſer CF parallelogramo *: logo ſerá AB: AC::CE:CD: logo o triangulo CDE, ou o ſeu igual DEF, tem os lados proporcionaes aos do triangulo ABC, e por conſequencia são ſemelhantes. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 383.

* Numer. 394

* Numer. 271.

Co-

## COROLLARIO I.

404 De tudo o que temos dito ſe ſegue, que quando houverem dous triangulos ſemelhantes, ſe poderá ſempre fazer huma proporção da comparação dos lados do primeiro aos lados do ſegundo. Por exemplo: ſe os triangulos M, N são ſemelhantes, e que ſe repreſentem os lados AB, e AC do primeiro por $a$, e $b$, e os lados DE, e DF correſpondentes do triangulo N por $c$, e $d$, ſerá $a : b :: c : d$: logo $ad = bc$, o que moſtra que com dous lados de dous triangulos ſemelhantes, e outros dous nos meſmos triangulos, ſe podem ſempre fazer rectangulos iguaes, com tanto que ſejão oppoſtos a angulos iguaes. Figura 17.

## COROLLARIO II.

405 Segue-ſe tambem que ſe tivermos dous triangulos ſemelhantes, de que ſe conhecem dous lados em hum, e hum lado do outro, ſe poderá achar eſte ſegundo lado; porque ſuppondo, por exemplo, que nos triangulos M, e N os lados $a$, e $b$ ſejão de 12 palmos, Figura 17.

e 8 palmos, e o lado *c* de 9 palmos, e que ſe queira conhecer o lado *d*, ſe fará huma regra de 3, dizendo, 12 : 8 :: 9 : $X = \frac{9 \times 8}{12} = 6$ *, que ſerá o valor do lado *d*: o meſmo em qualquer outro.

Tom. I. * Numer. 206.

DEFINIÇÃO.

406 Chamão-ſe nos triangulos ſemelhantes, e em todas as outras figuras *lados homologos*, ou *correſpondentes* aquelles, que são oppoſtos a iguaes angulos em hum, e outro triangulo, e a proporção ſe não póde formar ſenão com lados homologos, ou ſeja nos triangulos, ou em outra qualquer figura.

ADVERTENCIA.

As propoſições precedentes são as mais importantes da Geometria, pois são a ſua baſe, e fundamento, e por eſta razão deve pôr toda a applicação em comprehendellas bem todo aquelle, que quizer entender as que ſe ſeguem, e fazer algum progreſſo nas mais partes da Mathematica, em que eſtas propoſições são indiſpenſaveis.

PRO-

## PROPOSIÇÃO XIII.

### THEOREMA.

407 Se do angulo recto B do triangulo rectangulo ABC se tira huma perpendicular BD sobre a hypothenusa, esta dividirá o mesmo triangulo em outros dous triangulos ABD, BDC, que serão semelhantes entre si, e ao primeiro. Figura 19.

### DEMONSTRAÇÃO.

Para demonstrar que a perpendicular BD divide o triangulo ABC em outros dous semelhantes ABD, BDC, se deve advertir, que cada hum destes triangulos, além de hum angulo recto, tem hum angulo commum com o triangulo grande, a saber, angulo A no triangulo ABD, e no triangulo ABC; e o angulo C nos triangulos BDC, e ABC: logo cada hum delles he semelhante ao triangulo grande, e semelhantes entre si *. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 403.

PRO-

## PROPOSIÇÃO XIV.

### THEOREMA.

408 Em hum triangulo rectangulo
Figura 20. ABC, o quadrado da hypothenuſa AC he igual á ſomma dos quadrados dos outros dous lados.

### DEMONSTRAÇÃO I.

Tire-ſe do angulo recto a perpendicular BD ſobre a baſe AC, chamemos AC $a$, BC $c$, BA $b$, AD $x$, ſerá DC $a-x$: iſto ſuppoſto, devemos moſtrar que $AC^2$ $aa=AB^2+BC^2$ $bb+cc$.

Como a perpendicular divide o triangulo rectangulo em outros dous, que
* Numer. 407. lhe ſão ſemelhantes ADB, e BDC*, os lados homologos deſtes triangulos ſerão proporcionaes aos do triangulo
* Numer. 400. ABC*: logo ſerá AC $a$: AB $b$:: AB $b$ AD $x$, e AC $a$: BC $c$:: CB $c$ DC $a-x$,
Tom. I. de que ſe tirão eſtas equações $bb=ax$,
* Numer. 202. e $cc=aa-ax$*; e ſommando eſtas duas equações, teremos $ax+aa-ax=bb+cc$; e fazendo a reducção, ſerá $aa=bb+cc$, ou $AC^2=AB^2+BC^2$. *O Q. S. Q. D.*

Ain-

Ainda que eſtejamos muito certos em huma propoſição, ſempre o eſpirito, e principalmente a razão, appetece certificar-ſe com mais evidencia; e eſta evidencia ſe faz tanto mais appetecida, quanto as propoſições são de mais importancia.

E como eſta he huma das mais bellas propoſições, os maiores Geometras ſe tem applicado a dar della demonſtrações palpaveis, entre as quaes me parece a ſeguinte huma das melhores, e mais claras, que ſe podem dar, attendendo a que não ſuppõe mais que eſte principio: que os triangulos são iguaes em tudo, quando tem entre ſi todos os lados reſpectivamente iguaes.

## DEMONSTRAÇÃO II.

Continue-ſe o lado AB para K, de ſorte que ſeja BK=BC: do meſmo modo continue-ſe o lado BC, de ſorte que BL = AB: acabem-ſe os quadrados ſobre os lados BC, e AB, e continuem-ſe os lados KI, e HL até ſe encontrarem em hum ponto G: tire-ſe finalmente a recta GB, e a perpendicular BD,

BD, e faça-se o quadrado AFEC sobre a hypothenusa AC.

A recta BG he parallela a CE, porque o triangulo GBK he igual ao triangulo ABC, pois GK=BL=AB, e BK=BC; o angulo em K he recto: logo GB=AC=CE *: logo o angulo GBK igual ao angulo BCA, ou ao angulo ABD do triangulo ABD, semelhante ao triangulo ABC, isto he, GBK igual ao seu vertical opposto: logo as linhas GB, BD fazem huma linha recta; e esta linha GBD he parallela a CE, pois ambas são perpendiculares sobre o lado AC: logo GBCE será hum parallelogramo, como tambem ABGF, pois as linhas BC, GI são parallelas, como tambem as linhas BK, LG, e as rectas AF, GD, EC; mas estes parallelogramos tem as mesmas bases que os quadrados BI, BH, e são comprehendidos entre as mesmas parallelas: logo são iguaes a elles *. Resta mostrar que a somma destes parallelogramos, ou a figura ABCEGF he igual ao quadrado CF feito sobre AC, o que facilmente se vê, pois o lado FE

* Numer. 382.

* Numer. 384.

FE = AC; o lado GE = BC, e o lado GF = AB: logo tirando o triangulo GFE da figura ABCEGF, e accreſcentando em ſeu lugar o triangulo ABC, que lhe he igual, ſerá a ſomma dos parallelogramos GC, BF, ou dos quadrados BI, BH, igual ao quadrado da hypothenuſa AC. *O Q. S. Q. D.*

## DEMONSTRAÇÃO III.

Continue-ſe a perpendicular BD até encontrar em O o lado NM do quadrado feito ſobre a hypothenuſa, que ficará dividido em dous rectangulos DN, DM: do ponto B vertice do angulo recto ſe tirem aos pontos M, e N as rectas BM, BN: do ponto A ſe tire ao ponto I a recta AI; e do ponto C ao ponto H a recta CH, e ficarão os triangulos ACI, BCM iguaes, como tambem CHA, ABN, pois o angulo ACI he igual ao angulo BCM, por ſerem cada hum a ſomma de hum angulo recto, e de BCA commum: além diſſo o lado CI he igual ao lado BC, pois são lados do meſmo quadrado; e o lado AC do triangulo ACI he

pela

pela meſma razão igual ao lado CM: logo os dous triangulos são perfeitamente iguaes, por terem hum angulo igual comprehendido entre lados reſpectivamente iguaes *.

* Numer. 382.

He evidente que o triangulo ACI he metade do quadrado feito ſobre BC, pois tem a meſma baſe CI, e eſtão entre as meſmas parallelas AK, CI.* Tambem he evidente que o triangulo BCM he metade do rectangulo DM, porque tem a meſma baſe CM, e são comprehendidos entre as meſmas parallelas CM, BO*: logo o quadrado ſobre BC ſerá igual ao rectangulo DM. Do meſmo modo ſe demonſtra que o quadrado feito ſobre AB he igual ao rectangulo DN; mas a ſomma dos rectangulos DN, DM he igual ao quadrado feito ſobre a hypothenuſa: logo a ſomma dos quadrados feitos ſobre os dous lados AB, BC he igual ao quadrado da hypothenuſa. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 387.

* Numer. 387.

## COROLLARIO I.

409 Eſta propoſição he a famoſa 47. do liv. I. de Euclides, pelo deſcubrimen-

mento da qual offereceo Pythagoras ás Muſas hum ſacrificio de cem bois em agradecimento ao favor, que julgava ter recebido dellas. Para fazer algum conceito do uſo, que della depois havemos de fazer, he preciſo notar, que conhecendo os dous quadrados de hum triangulo rectangulo, ſe póde conhecer o do terceiro lado; porque ſe ſe conhece $AC^2$ $aa$, e $AB^2$ $bb$, vemos que ſempre teremos $AC^2 - AB^2$ $aa - bb =$ $BC^2$ $cc$, o que moſtra o valor do lado BC. Vê-ſe mais que conhecidos os dous lados, que comprehendem o angulo recto de hum triangulo rectangulo, ſe poderá conhecer a hypothenuſa, quadrando eſtes dous lados, e extrahindo a raiz dos dous membros da equação $aa = bb + cc$, e teremos $a = \sqrt{bb + cc}$: conhecendo a hypothenuſa, e outro lado, ſe ſe quizeſſe achar o terceiro, baſtava tirar do quadrado da hypothenuſa o quadrado do ſegundo lado, que ſe conhece, e a raiz quadrada da differença dará o valor do lado, que ſe procura; aſſim conhecidos os dous lados BC, e AC, ſe vê que $AB = \sqrt{aa - cc}$.

Co-

### COROLLARIO II.

410 Deſta propoſição ſe ſegue que a perpendicular, tirada do angulo recto de hum triangulo rectangulo ſobre a hypothenuſa, he meia proporcional entre as partes da hypothenuſa; porque como eſta perpendicular divide o triangulo ABC em outros dous triangulos ſemelhantes ABD, BDC*, comparando-os entre ſi, ſerá ∴ AD : DB : DC; aſſim conhecida a baſe de hum triangulo rectangulo, e os dous ſegmentos AD, DC da baſe, ſe conhecem os outros dous lados do triangulo, pois não tem mais que buſcar huma meia proporcional entre os dous ſegmentos dados, e ajuntar o quadrado deſta linha com o quadrado de cada ſegmento; e extrahindo as raizes das duas ſommas, ſerão os lados, que ſe procurão.

Figura 19. * Numer. 407.

## PROPOSIÇÃO XV.

### THEOREMA.

411 Em hum triangulo obtuſangulo ABC o quadrado do lado AC, oppoſ-

Figura 21.

posto ao angulo obtuso, he igual aos quadrados dos outros dous lados AB, e BC, e mais a dous rectangulos feitos do lado BC pela parte BD continuada no mesmo lado, até encontrar a perpendicular AD, isto he, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times DB$.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $AC = a$, $AB = c$, $BC = b$, $BD = x$, $AD = d$, devo mostrar que $aa = bb + cc + 2bx$, ou que $AC^2 = AB^2 + 2BC \times BD + BC^2$: no triangulo rectangulo ADC, $AC^2 = AD^2 + DC^2$, ou $aa = dd + bb + 2bx + xx$, porque $DC = BC + BD = b + x$: no triangulo rectangulo ADB: $AB^2 = AD^2 + DB^2$, ou $cc = dd + xx$; e diminuindo os dous membros desta segunda equação dos dous membros da primeira, teremos $aa - cc = dd + bb + 2bx + xx - dd - xx$; e reduzindo este ultimo membro, fica $aa - cc = bb + 2bx$; e fazendo passar $cc$ para o outro membro, temos $aa = bb + cc + 2bx$, ou $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times DB$. *O Q. S. Q. D.*

Co-

COROLLARIO.

412 Se tiveſſemos conhecido os trez lados de hum triangulo obtuſangulo ABC, ſe poderia por eſta propoſição achar a perpendicular AD, que determine a ſua altura; porque como temos $aa = bb + cc + 2bx$, fazendo paſſar $cc + bb$ do ſegundo membro para o primeiro, ſeria $aa - cc - bb = 2bx$; e dividindo por $2b$, teremos o valor de $x$, ou $\frac{aa-cc-bb}{2b} = x$, o que moſtra que ſe acha o valor da linha DB, tirando do quadrado do lado AC, oppoſto ao angulo obtuſo, os quadrados dos lados AB, e BC, e dividindo o reſto pelo dobro do lado BC; mas no triangulo ABD ſe conhece o lado AB pela hypotheſe, e pelo preſente corollario ſe conhece o lado DB: logo conhecer-ſe-ha o outro lado AD, ou a perpendicular, que determina a altura do triangulo, e teremos $AD^2 = AB^2 - BD^2$, ou $d = \sqrt{cc - xx}$: ſe o triangulo foſſe rectangulo a perpendicular, concordaria com o lado AD, e teriamos $\frac{aa-cc-bb}{2b} = 0$.

PRO-

## PROPOSIÇÃO XVI.

### THEOREMA.

413 No triangulo ABC o quadrado do lado AB, opposto ao angulo agudo, he igual aos quadrados dos lados AC, e BC, menos dous rectangulos, feitos de AC opposto ao maior angulo, sobre que cahe a perpendicular BD pela parte CD, comprehendida entre o angulo C opposto a AB, e a perpendicular DB, isto he, $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \times DC$. Figura 22.

### DEMONSTRAÇÃO.

Seja $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, $BD = d$, $DC = x$, será $AD = c - x$: isto supposto, no triangulo rectangulo BAD, $AB^2 = AD^2 + DB^2$ *, ou $aa = dd + cc - 2cx + xx$: pela mesma razão no triangulo BDC, $BC^2 = DB^2 + DC^2$, ou $bb = dd + xx$; e diminuindo os termos desta segunda equação dos da primeira, teremos $aa - bb = dd + cc - 2cx + xx - dd - xx = cc - 2cx$, reduzindo; e fazendo passar para o outro membro $bb$, teremos $aa = bb + cc - 2cx$, ou $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times DC$. *O Q. S. Q. D.* * Numer. 408.

Do meſmo modo ſe demonſtraria tambem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AD$.

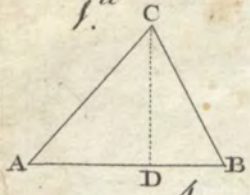
COROLLARIO.

414 Pois $aa = bb + cc - 2cx$, fazendo paſſar $-2cx$ para o primeiro membro, e $aa$ para o ſegundo, teremos $2cx = bb + cc - aa$, do que ſe tira $x = \frac{bb + cc - aa}{2c}$, o que moſtra que para achar o valor do ſegmento DC, ſe deve tirar da ſomma dos quadrados dos lados AC, BC o quadrado do lado AB oppoſto ao angulo C, e dividir o reſto por $2c$; do que ſe ſegue, que conhecidos os trez lados de qualquer triangulo, ſe póde conhecer a ſua ſuperficie, porque a ſuperficie de hum triangulo he o producto da baſe por metade da perpendicular, que ſe conhece, tirando o quadrado do ſegmento DC do quadrado de BC; e a raiz quadrada da differença, multiplicada por metade do lado AC, he a ſuperficie do triangulo.

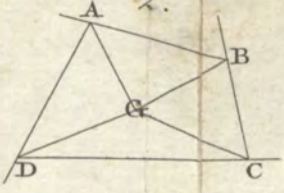
FIM DO QUARTO LIVRO.

NO-

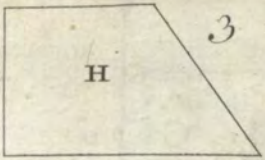
1.ª



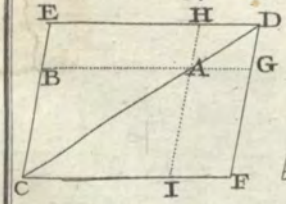

2.



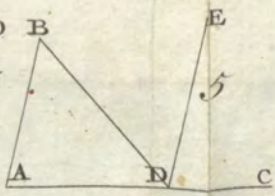

3



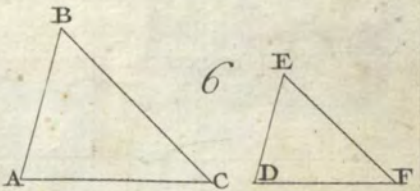

4



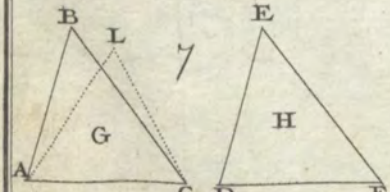

5



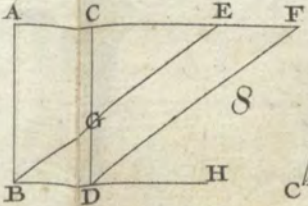

6



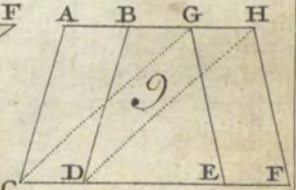

7



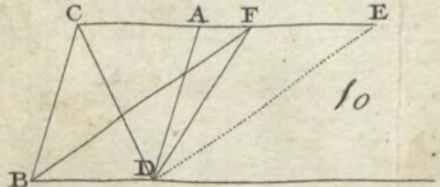

8



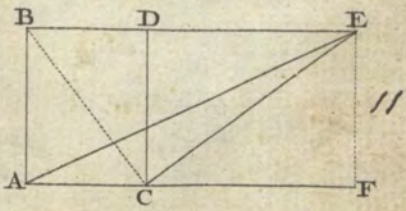

9



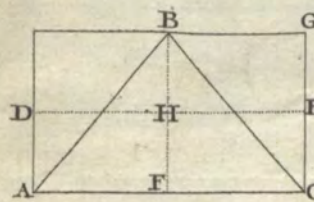

10



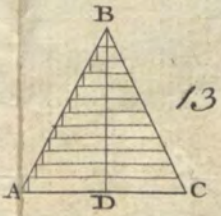

11



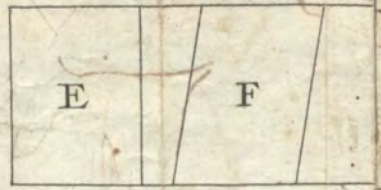

12



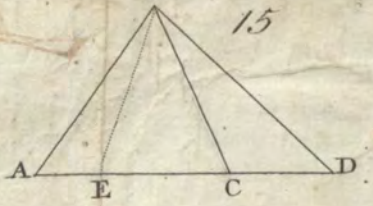

13



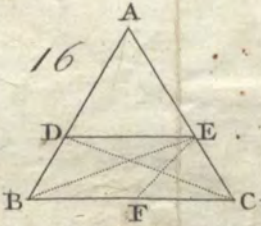
14




15

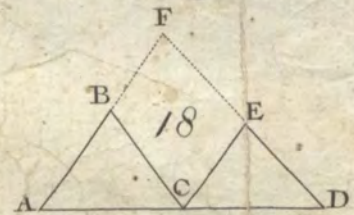



16



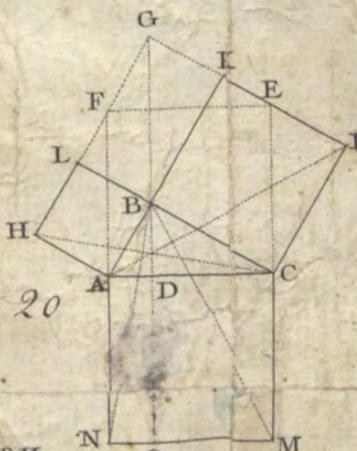
17

18




19

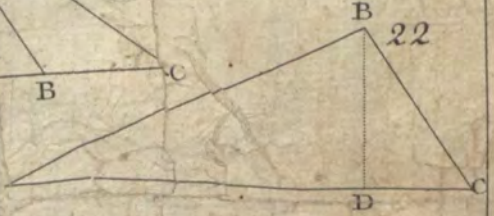
20



21




22




T.II.

# NOVO CURSO DE MATHEMATICA.

## LIVRO V.

*TRATÃO-SE AS PROPRIEDADES do circulo.*

### DEFINIÇÕES.

I.

415 CHAMÃO-SE *circulos concentricos* aquelles, que sendo descriptos do mesmo centro, tem as circumferencias parallelas, como os dous circulos, que tem o centro commum no ponto A. Estamp. 5. Figura 1.

II.

416 *Circulos excentricos* são aquelles, que sendo descriptos de diversos centros, não tem as circumferencias
Figura 2. parallelas, como B, e C.

III.

417 Chama-se *coroa* o espaço comprehendido entre as circumferencias de dous circulos concentricos, como
Figura 1. o espaço BB, comprehendido entre as circumferencias E, e F.

IV.

418 *Segmento de circulo* he huma parte da superficie de hum circulo terminada por huma linha recta, e parte da
Figura 3. sua circumferencia, como ABC: se a recta AC não passa pelo centro, o circulo ficará dividido em dous segmentos desiguaes.

V.

419 *Sector de circulo* he huma parte da sua superficie terminada por dous
Figura 4. raios DC, DE, e por huma parte da sua circumferencia CE.

VI.

420 *Arco de circulo* he huma parte da sua circumferencia maior, ou mais pequena que a semicircumferencia.

VII.

VII.

421 Chamão-se *cordas* todas as rectas, como AC, tiradas entre a circumferencia de hum circulo. Figura 33.

VIII.

422 Quando huma linha toca a circumferencia de hum circulo sem a cortar, esta linha se chama *tangente do circulo*, assim como a linha AB, que toca a circumferencia do circulo D no ponto *d*, e se chama *tangente do circulo* ao ponto *d*. Figura 5.

IX.

423 Se huma linha encontra a circumferencia de hum circulo, entrando para dentro delle, chama-se *secante*, como por exemplo a linha BE. Figura 5.

## PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

424 Se do centro de hum circulo se tirar huma perpendicular BD sobre huma corda AC, dividirá a corda em duas partes iguaes; e continuada, dividirá tambem em duas partes iguaes o arco AEC da mesma corda. Figura 33.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

Tirem-se aos extremos A, e C da corda AC os raios BA, BC, os triangulos rectangulos ABD, CBD são inteiramente iguaes, porque além do angulo recto tem iguaes entre si os lados BA, e BC, por serem raios do mesmo circulo; o lado BD he commum a ambos: logo a linha AD he igual a DC. Tambem esta proposição se póde demonstrar pela propriedade dos triangulos rectangulos, porque pela hypothese BD he perpendicular sobre AC, e será $AD^2 = AB^2 - BD^2$, e $DC^2 = BC^2 - BD^2$ * $= AB^2 - BD^2$: logo $AD^2 = DC^2$, ou $AD = AC$. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 408.

Por serem os triangulos ABD, CBD inteiramente iguaes, será o angulo ABD = CBD *; e continuando o lado BD até encontrar a circumferencia do circulo em E, os arcos AE, EC, que são a medida dos angulos ABE, CBE, serão iguaes, e consequentemente o arco AEC tambem está dividido no ponto E em dous iguaes. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 379.

PRO-

## PROPOSIÇÃO II.

### THEOREMA.

425 Se huma recta BD paſſa pelo centro, e divide a corda AC, ou o ſeu arco AEC em duas partes iguaes, ſerá perpendicular á corda. Figura 6.

### DEMONSTRAÇÃO.

Tirem-ſe os raios AB, BC aos extremos da corda AC: iſto ſuppoſto, pois a recta BD divide a corda AC em duas partes iguaes, o ponto D diſtará igualmente de A, e C da recta AC; e porque pela hypotheſe a meſma recta paſſa pelo centro B, o ponto B ſerá tambem igualmente diſtante dos meſmos extremos A, e C: logo BD ſerá perpendicular á corda AC. * Tom. I. *Num. 16.

Se ſe ſuppõe o arco AEC dividido em dous iguaes pela recta BD continuada para E, fica claro que os angulos ABE, EBC, medidos por eſtes arcos, são iguaes; e por ſer o ponto B centro do circulo, os raios BC, AB são tambem iguaes: logo os triangulos ABD, BDC terão hum angulo igual com-

comprehendido de lados iguaes: logo
* Numer. 382. serão perfeitamente iguaes *, e o angulo BDC será igual ao angulo BDA: logo a linha BD não inclina mais para hum lado, do que para outro da linha AC, e por conseguinte he perpendicular sobre AC. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO III.

### THEOREMA.

Figura 6. —426 Se huma recta EDB perpendicular a huma corda AC a divide, e o seu arco em duas partes iguaes, digo que esta linha passa pelo centro.

### DEMONSTRAÇÃO.

Por ser a linha EB perpendicular ao meio da corda AC, passa necessariamente por todos os pontos igualmente distantes de A, e C; mas o centro B dista igualmente dos pontos A, e C, que estão na circumferencia pela defi-
* Numer. 342. nição do circulo, e do seu centro *: logo a linha EDB passa necessariamente pelo centro B. *O Q. S. Q. D.*

Co-

### COROLLARIO.

427 Segue-se das trez precedentes proposições, que tomando quaesquer duas destas trez condições, *passar pelo centro*, *ser perpendicular a corda*, *e cortalla em duas partes iguaes*, se segue necessariamente a outra.

## PROPOSIÇÃO IV.

### THEOREMA.

428 Se do centro D de hum circulo se tira huma recta ao ponto C, em que a tangente AB toca o circulo, digo que esta linha será perpendicular á tangente. Figura 7.

### DEMONSTRAÇÃO.

Pois AB se suppõe ser tangente no ponto C, qualquer outro ponto desta linha, como F, ficará fóra do circulo; e a linha DF, tirada do centro D a este ponto, será maior que o raio DC: logo o raio DC he a mais curta de todas as linhas, que do ponto D se podem tirar á tangente AB: logo o raio

DC

DC he perpendicular á meſma tangente *. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 352.

COROLLARIO.

429 Reciprocamente ſe huma linha CB he perpendicular ao extremo do raio DC, ſerá tangente ao ponto C, porque toda outra linha DF v. g. he maior que o raio, e terá o ſeu extremo F fóra do circulo; e por conſequencia a linha AB, perpendicular ao extremo do raio, ſerá tangente ao meſmo ponto.

## PROPOSIÇÃO V.

THEOREMA.

Figura 8. 430 O angulo ABC, que tem o vertice na circumferencia do circulo, tem por medida metade do arco comprehendido entre os ſeus lados.

DEMONSTRAÇÃO.

Pelo vertice B do angulo ABC, e centro D ſe tire a linha BDE, e os raios DA, DC: he evidente que o angulo ABC he igual á ſomma dos dous angu-

gulos ABE, CBE: iſto ſuppoſto, o angulo CDE exterior ao triangulo *Iſoceles* CBD he igual aos dous interiores em B, e C*, ou duplo do angulo DBC: do meſmo modo o angulo ADE, ſendo exterior, a reſpeito do triangulo *Iſoceles* ADB, he igual á ſomma dos interiores oppoſtos em B, e A, ou duplo do angulo ABD: logo o total ADC he duplo do total ABC: logo o angulo da circumferencia não he mais que metade do angulo do centro. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 374.

431 Deſta propoſição ſe deduzem muitas conſequencias, que são de grande uſo. 1.° Que hum angulo tal como ABC he recto, quando eſtá ſobre o diametro, ou ſobre a ſemicircumferencia, pois tem por medida metade do arco AOC, iſto he, 90 gráos, ou a quarta parte da circumferencia do circulo. Figura 9.

432 2.° Que hum angulo como DEF no menor ſegmento de hum circulo he obtuſo, pois a ſua medida he hum arco maior que a quarta parte do circulo, porque eſtá ſobre o arco DOF, que he maior que a ſemicircumferencia. Figura 10.

Que

Estamp. 6. Figura 11. 433 3.º Que hum angulo como GHI, que está no maior segmento do circulo, he agudo, por ter por medida metade do arco GOI, que he menor que a quarta parte de hum circulo.

Figura 12. 434 4.º Que os angulos ABC, ADC, que estão no mesmo segmento, são iguaes, pois a medida de todos he metade do mesmo arco AOC.

Figura 10. 435 5.º Que dous angulos, que estão sobre huma mesma corda DF, hum de huma parte, outro da outra, são supplementos hum do outro, pois juntos tem por medida metade da circumferencia, como os angulos DEF, DOF.

## PROPOSIÇÃO VI.

### THEOREMA.

Figura 13. 436 Se tivermos hum angulo BAD formado por huma tangente, e por huma corda AD, este angulo terá por medida metade do arco DFA, comprehendido entre a corda, e a tangente.

### DEMONSTRAÇÃO.

Tire-se do centro o raio EA ao ponto do A, que será EA, perpendicular á tan-

á tangente AB, * e tire-se tambem do centro E a recta EF perpendicular sobre AD, que a dividirá em duas iguaes, como tambem o arco AFD*: isto supposto, no triangulo rectangulo AGE os angulos GAE+AEG valem hum angulo recto*: tambem os angulos GAE +DAB valem hum angulo recto: logo o angulo DAB he igual a AEG; mas o arco AF, comprehendido entre os lados dos angulos, he a medida do angulo AEG por ter o vertice no centro: logo tambem o angulo BAD, formado pela tangente, e pela corda, tem por medida o arco AF, metade do arco, comprehendido entre a corda, e tangente. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 428.

* Numer. 424.

* Numer. 374.

## PROPOSIÇÃO VII.

### THEOREMA.

437 Hum angulo AEC, que tem o vertice dentro na circumferencia em qualquer ponto E entre o centro, e a circumferencia, tem por medida metade do arco AC, sobre que se estriba, e mais metade do arco BD com-

Figura 14.

pre-

prehendido entre os lados AE, EC prolongados.

DEMONSTRAÇÃO.

Tire-se a linha recta BC do ponto B ao ponto C, o angulo AEC exterior a respeito do triangulo BEC he igual á somma dos angulos interiores BCE, EBC *; mas estes mesmos angulos, que tem o vertice na circumferencia, tem por medida metade dos arcos comprehendidos entre os seus lados, a saber, o angulo BCE, ou BCD seu igual, metade do arco BD, e o angulo CBE, ou CBA, metade do arco AC *: logo o angulo AEC, que he igual a estes dous, tem por medida metade destes dous arcos, isto he, metade do arco AC comprehendido entre os seus lados, e metade do arco BD comprehendido entre os mesmos lados continuados.

* Numer. 374.

* Numer. 430.

## PROPOSIÇÃO VIII.

THEOREMA.

Figura 15. 438 O angulo BAC, cujo vertice está fóra da circumferencia do circulo, e os

e os lados se terminão na parte concava da mesma circumferencia em B, e C, tem por medida metade do arco concavo BC, menos metade do arco convexo DE, comprehendido entre os mesmos lados.

DEMONSTRAÇÃO.

Tire-se a linha DC, o angulo BDC, sendo exterior a respeito do triangulo DAC, he igual aos angulos DAC+ ACD*: logo o angulo DAC, ou seu igual BAC, he igual ao angulo BDC —DCE; mas cada hum destes angulos tem por medida metade dos arcos comprehendidos entre os seus lados, a saber, o angulo BDC, metade do arco BC, e o angulo ACD, metade do arco DE*: logo o angulo BAC tem por medida metade da differença dos dous arcos, isto he, metade do arco concavo BC, sobre o qual se estriba, menos metade do arco convexo DE. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 374.

* Numer. 430.

COROLLARIO.

439 De tudo o que acabamos de dizer se segue, que se tivermos hum an-

Figura 15. angulo na circumferencia, como ADC, formado por huma corda DC, e huma recta AD, que continuada córte o circulo, eſte angulo terá por medida metade do arco comprehendido entre a corda DC, e mais metade do arco da corda AD continuada até a circumferencia do circulo para B; porque por ſer ADB huma linha recta, fórma com DC os angulos BDC+ADC, que juntos valem dous rectos *, e conſequentemente terão por medida metade da circumferencia; mas o angulo BDC, por ter o vertice na circumferencia, tem por medida metade do arco BC*: logo o angulo ADC deve ter por medida metade do arco BD, e mais metade do arco DC, que juntos fazem metade do reſto da circumferencia.

* Numer. 341.

* Numer. 430.

## PROPOSIÇÃO IX.

### THEOREMA.

440 Se duas rectas ſe cortão dentro no circulo no ponto E, digo que o rectangulo feito das partes de huma AE×EB he igual ao rectangulo feito das partes da outra EC×ED.

Figura 14.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

Tirem-se as cordas AC, DB, os triangulos ACE, EDB são semelhantes *, porque os angulos em E verticalmente oppostos são iguaes *, o angulo ACE he igual ao angulo EBD por estarem sobre o mesmo arco *: logo os lados oppostos a iguaes angulos são proporcionaes, e darão AE : ED :: EC : EB *: logo tomando os productos dos extremos, e dos meios, será AE×EB=ED×EC.* *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 403.
* Numer. 353.
* Numer. 346.
* Numer. 404.
Tom. I. * Numer. 202.

## PROPOSIÇÃO X.

THEOREMA.

441 Se do ponto A fóra do circulo sobre o mesmo plano se tirão duas linhas rectas AB, AC, que se vão terminar na parte concava da circumferencia, digo que o rectangulo comprehendido da secante inteira AB, e da sua parte exterior AD he igual ao rectangulo da outra secante inteira AC, e da sua parte exterior AE. Figura 15.

DEMONSTRAÇÃO.

Se se tirão as linhas BE, CD, teremos dous triangulos semelhantes ABE, e ACD *, porque o angulo A he commum, os angulos B, e C cada hum tem por medida metade do arco DE *: logo os lados oppostos a angulos iguaes serão proporcionaes *, e será AB:AC :: AE:AD, e consequentemente tomando os productos dos extremos, e dos meios *, será AB×AD=AC×AE. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 403.
* Numer. 430.
* Numer. 404.
Tom. I. * Numer. 202.

## PROPOSIÇÃO XI.

THEOREMA.

Figura 16. 442 Se de hum ponto B, qualquer que seja, na circumferencia ABC se tira huma perpendicular DB sobre o diametro AC, digo que o quadrado desta perpendicular he igual ao rectangulo das partes do diametro.

DEMONSTRAÇÃO.

Tirem-se as rectas AB, BC do ponto B aos extremos do diametro A, e C, o tri-

o triangulo ABC será rectangulo em B, pois o angulo ABC está sobre a semicircumferencia *, e estará dividido em outros dous triangulos ABD, BDC tambem rectangulos, e que lhe serão semelhantes *: logo comparados os lados homologos destes triangulos semelhantes *, será AD : DB :: DB : DC: logo tomando os productos dos extremos, e dos meios *, será $AD \times DC = BB^2$.

* Numer. 431.
* Numer. 407.
* Numer. 404.
Tom. I. * Numer. 202.

## COROLLARIO I.

443 Desta proposição se segue que a qualquer ponto do diametro, que se levante huma perpendicular, sempre he meia proporcional entre as duas partes do mesmo diametro, isto he o que nós adiante chamaremos propriedade principal do circulo, de que se deduz a sua equação.

## COROLLARIO II.

444 Segue-se tambem da demonstração precedente que qualquer corda he meia proporcional entre o diametro inteiro AC, e a parte comprehendida entre a origem desta corda,

e a perpendicular tirada da ſua extre-
Figura 16. midade, porque o triangulo rectangulo B A D he ſemelhante ao triangulo ABC, pois além do angulo recto tem
* Numer. 403. outro commum em A *: logo comparados os lados homologos *, ſerá AC:AB::
* Numer. 404. AB:AD: logo * $AC \times AD = AB^2$. Do
Tom. I. * Numer. 205. meſmo modo ſe demonſtra BC meia proporcional entre AC, e CD.

## COROLLARIO III.

Figura 16. 445 Eſta ultima propoſição podia demonſtrar-ſe, deduzindo-a da propoſição IX; porque como quaeſquer duas rectas, que ſe cortão dentro no circulo, ſe cortão de ſorte que os productos das ſuas partes são iguaes, quando huma das ſecantes for cortada ao meio pela recta AC, como a linha BF, o producto $BD \times DF$ ſeria o quadrado de BD; e ſe ſe ſuppõe tambem que a outra ſecante AC paſſa pelo centro, ou que he perpendicular ao meio da ſecante B F, eſta ſuppoſição nos dará exactamente a hypotheſe deſte ultimo theorema.

DE-

DEFINIÇÃO.

446 A perpendicular BD, tirada do ponto B da circumferencia do circulo ſobre o diametro AC, ſe chama *ordenada* a eſte diametro; e as partes do diametro determinadas pelo ſeu encontro em D, como AD, DC, ſe chamão *abciſas*, ou cortadas no meſmo diametro. Expreſſa-ſe o theorema precedente geralmente dizendo, que em hum circulo os quadrados das ordenadas são iguaes aos productos das abciſas. Figura 16.

## PROPOSIÇÃO XII.

PROBLEMA.

447 Dado hum circulo BE, e hum ponto D no meſmo plano, tirar delle a recta DB, que toque o circulo no ponto B. Figura 17.

SOLUÇÃO.

Pelo centro C, e o ponto dado D ſe tire a recta CD: ſobre eſta linha, como diametro, ſe deſcreva hum ſemi-

cir-

circulo CBD, que córte o circulo dado no ponto B: a linha BD ſerá a tangente, que ſe buſca, que toca o circulo ſó no ponto B.

DEMONSTRAÇÃO.

Para comprehender a razão deſta operação tire-ſe do ponto B ao centro C a linha BC, o angulo CBD he recto *, pois eſtá ſobre o diametro: logo a linha BD he perpendicular ao extremo do raio CB, e paſſa pelo ponto D: logo he a tangente, que ſe buſca.* *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 431.

* Numer. 429.

## PROPOSIÇÃO XIII.

THEOREMA.

Figura 18. 448 Se de hum ponto B fóra do circulo ſe tira huma tangente BA, e huma ſecante BC, digo que o quadrado da tangente AB he igual ao rectangulo feito da ſecante inteira BC pela ſua parte exterior BD.

DEMONSTRAÇÃO.

Tirem-ſe as cordas AC, AD do ponto do contacto A aos pontos C, e D, em

em que a ſecante BC encontra o circulo, os triangulos CAB, ADB são ſemelhantes *, pois tem o angulo em B commum; e o angulo ACB, formado pela corda AC, e ſecante CB, he igual ao angulo BAD da tangente AB, e da corda AD, porque cada hum tem por medida metade do arco AD comprehendido entre os ſeus lados *: logo eſtes triangulos são ſemelhantes, e conſequentemente tem os lados homologos proporcionaes * BC:AB::AB:BD: logo $AB^2 = BC \times BD$. * *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 403.

* Numer. 430, e 436.

* Numer. 404. Tom. I.

* Numer. 205.

COROLLARIO.

449 Segue-ſe daqui que ſe duas tangentes AB, BF ſe encontrão no ponto B, as partes AB, BF deſtas tangentes são iguaes entre ſi, porque do meſmo modo ſe demonſtra tambem que $BF^2 = BD \times BC$; e pois $AB^2 = BC \times BD$, ſerá $AB^2 = BF^2$, e conſequentemente AB = BF.

PRO-

## PROPOSIÇÃO XIV.

### THEOREMA.

Figura 19. — 450 Se huma tangente CD for perpendicular á extremidade do diametro AB, digo que tirando-se do ponto A á tangente quantas rectas quizerem, taes como AC, AD, o quadrado do diametro AB será igual ao producto da linha AC pela parte interior AE.

### DEMONSTRAÇÃO.

Tire-se a linha BE da extremidade B do diametro ao ponto E, em que a recta AC córta o circulo, e teremos dous triangulos semelhantes ABC, AEB, porque o primeiro he rectangulo em B por causa da tangente CD, perpendicular ao diametro AB *: o segundo AEB he rectangulo em E, estando este angulo sobre todo o diametro *: demais estes triangulos tem hum angulo commum em A: logo são semelhantes *, e os lados homologos nos dão AC:AB::AB:AE: logo $AB^2 = AC \times AE$. * *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 428.

* Numer. 431.

* Numer. 403. Tom. I.

* Numer. 205.

DE-

### DEFINIÇÃO.

451 Huma linha se diz estar dividida em meia, e extrema razão, quando a linha toda he para a maior parte, como a mesma parte maior he para a mais pequena: esta parte maior se chama *mediana*.

## PROPOSIÇÃO XV.

### PROBLEMA.

452 Dividir huma linha dada, v. g. AB, em meia, e extrema razão, isto he, de modo que seja ∴ AB : AF : FB. Figura 20.

### SOLUÇÃO.

No extremo B da linha AB se levanta a perpendicular BD igual á metade da mesma linha AB *: do ponto D com o intervallo de BD, como raio, se descreva o circulo EBC: pelo centro D ao ponto A se tire a secante AC, e tome-se AF igual á parte exterior AE da secante AC, digo que a linha AB ficará dividida no ponto F em meia, e extrema razão, isto he, que AB:AF::AF:FB. * Numer. 348.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

Chamemos á parte AF, ou AE $x$, AB $a$, será CE tambem $a$, e AC $a+x$, FB será $a-x$: isto supposto, será $\div$AC: AB:AE *, ou $\div$AC:AB:AF, e em termos analyticos $\div a+x:a:x$; e tomando o producto dos extremos, e dos meios *, será $aa=ax+xx$; e passando $ax$ do segundo membro para o primeiro, será $aa-ax=xx$, ou $a-x\times a=xx$, do que se deduz esta proporção * $a:x:x:a-x$, ou AB:AF::AF:FB. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 448.

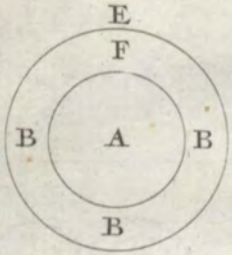
Tom. I. * Numer. 205.

Tom. I. * Numer. 212.

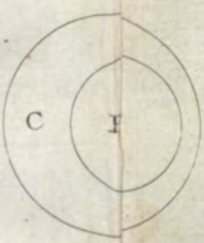
FIM DO QUINTO LIVRO.

NO-

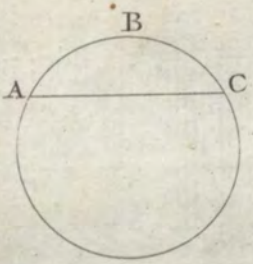
1.ª



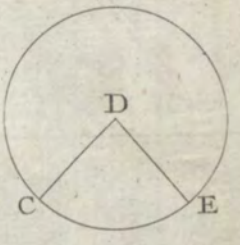

2



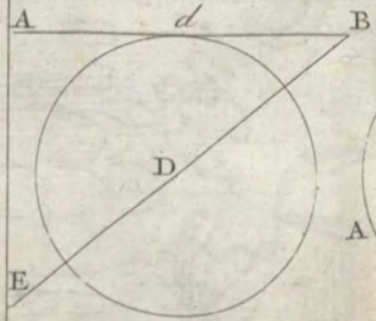

3.ª



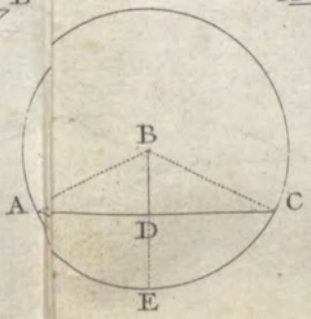

4.ª



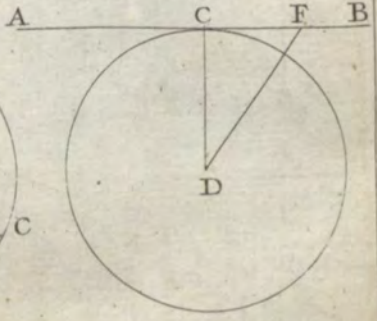

5.ª




6.ª




7.ª



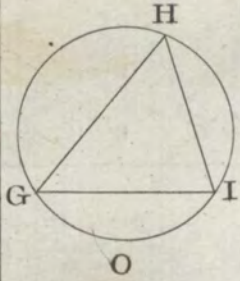

8.ª

9.ª

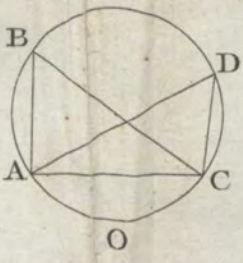
10

T.II.

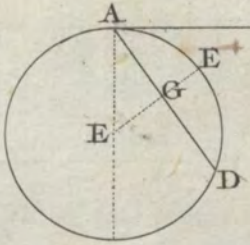
11



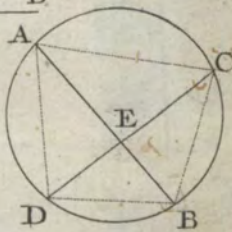

12



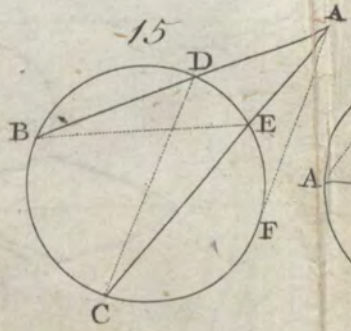

13



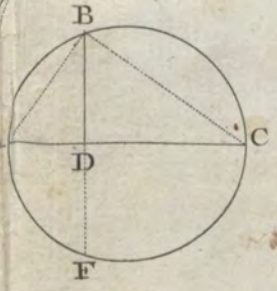

14



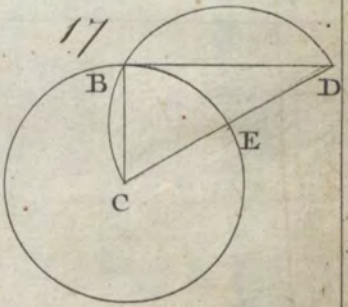

15



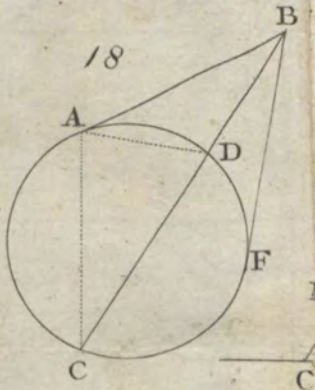

16



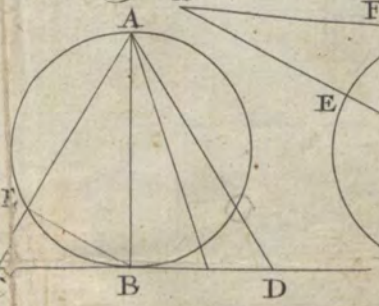

17



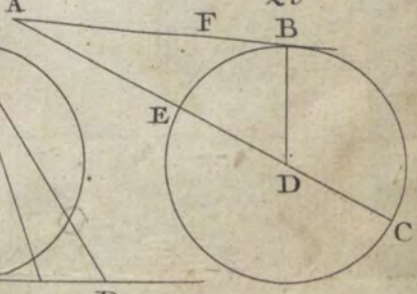

18




19




20



# NOVO CURSO DE MATHEMATICA.

## LIVRO VI.

*TRATA-SE DOS POLYGONOS regulares inſcriptos, e circumſcriptos no circulo.*

### DEFINIÇÕES.

I.

453 HUm polygono regular, ou irregular ſe diz eſtar *inſcripto* em hum circulo, quando os vertices dos ſeus angulos tocão a circumferencia do circulo.

II.

II.

454 Huma figura regular, ou irregular ſe diz *circumſcripta* em hum circulo, quando cada hum dos ſeus lados toca a circumferencia do circulo; ou por outros termos, quando cada lado he huma tangente do circulo.

III.

455 Chama-ſe *polygono regular* huma figura, que tem todos os lados, e angulos iguaes entre ſi; e *polygonos ſymetricos* aquelles, que tem os lados oppoſtos iguaes, e parallelos dous a dous.

IV.

456 Hum polygono regular, que tem ſinco lados, ſe chama *Pentagono*; quando tem ſeis, chama-ſe *Exagono*, *Eptagono* ſe tem ſete, e ſe tem oito *Octogono*, *Eneagono* o que tem nove, *Decagono* o que tem dez, finalmente *Undecagono*, e *Duodecagono* ſe tem onze, ou doze.

V.

457 Como todo o polygono regular ſe póde inſcrever em hum circulo, ſe diſtinguem em todo o polygono regular duas caſtas de angulos, angulos

do

do *centro*, e angulos do *polygono*, ou da *circumferencia*.

VI.

458 O angulo do centro he hum angulo, como BAC, formado por dous raios AB, AC, tirados do centro ás extremidades de hum dos lados do polygono. Eſtamp. 1 Figura 1.

VII.

459 O angulo do polygono he hum angulo, como BCD, formado pelo encontro dos dous lados BC, CD do meſmo polygono. Figura 1.

COROLLARIO.

460 Como o angulo do centro do polygono tem por medida o arco, de que hum dos lados do polygono he corda, achar-ſe-ha ſempre o valor deſte angulo dividindo 360, ou os gráos da circumferencia inteira pelo numero dos lados do polygono; aſſim para achar o angulo do centro de hum *Exagono*, divido 360 por 6, o quociente 60 he a medida do angulo que buſco; e como o angulo BCD do polygono he duplo do angulo ACB, he conſequentemente igual aos dous angulos da baſe do tri- Figura 1.

an-

LEMMA.

Figura 3. Se tivermos hum triangulo *Isoceles* ABC, no qual os angulos da baſe ſejão duplos do do vertice, digo que dividindo hum dos angulos da baſe BAC em dous igualmente por huma linha AD, que vai encontrar o lado oppoſto em D, eſta linha dividirá o meſmo lado em meia, e extrema razão no ponto D, de ſorte que ſerá ∴ BC:BD:DC.

DEMONSTRAÇÃO.

Os triangulos ABC, DAC são ſemelhantes *, porque tem hum angulo commum em C: o angulo DAC he igual ao angulo B, pois pela ſuppoſição o angulo B he metade do angulo BAC, de que tambem he metade o angulo DAC. Tambem o triangulo BDA he *Iſocele*, porque o angulo DBA he igual ao angulo BAD: logo os lados AD, BD são iguaes; iſto ſuppoſto, nos triangulos ſemelhantes ABC, DAC comparados os lados homologos *, ſerá BC:AC :: AC:DC; mas BD=AC: logo ſerá ∴ BC:BD:DC. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 403.

* Numer. 404.

Co-

## COROLLARIO I.

464 Desta proposição se deduz o modo de fazer hum triangulo *Isoceles*, cujos angulos da base sejão cada hum duplo do do vertice; porque para fazer, por exemplo, hum triangulo, como ABC, não ha mais que dividir o lado BC em meia, e extrema razão, e sobre a parte menor DC, como base, fazer hum triangulo *Isoceles* com duas secções da abertura do compasso igual á mediana BD, e teremos o ponto A, que serve para formar o triangulo ABC; e como a linha se não póde dividir em meia, e extrema razão em mais de hum ponto, não ha mais que hum triangulo com a propriedade, que acabamos de mostrar. Figura

## COROLLARIO II.

465 Segue-se tambem que se do ponto B, como centro, se descrever hum circulo, cujo raio seja BA, ou BC, a base AC do triangulo *Isocele* ABC será o lado do *Decagono* inscripto no circulo, porque pela construcção os dous Figura

angulos da baſe são duplos do do vertice, os trez em ſomma valem dous rectos *: logo a ſomma de todos trez juntos vale ſinco vezes o angulo do vertice: logo acharemos o angulo do vertice dividindo 180 por 5, que dará 36 gráos, valor do angulo B, o qual numero he a decima parte de 360 gráos, ou da circumferencia do circulo, e conſequentemente a corda AC da decima parte da circumferencia he o lado do *Decagono*.

* Numer. 374.

## PROPOSIÇÃO III.

### PROBLEMA.

466 Inſcrever hum *Decagono* em hum circulo.

### SOLUÇÃO, E DEMONSTRAÇÃO.

Figura 4. Para inſcrever hum *Decagono* em hum circulo, ſe divida o raio BC do circulo em meia, e extrema razão no ponto D, e a mediana BD ſerá o lado do *Decagono*; e applicando eſta linha dez vezes na circumferencia, dará os pontos para delinear o *Decagono*, o que he evi-

den-

dente, pois pelo corollario precedente a medida de huma linha, dividida em meia, e extrema razão, he o lado do *Decagono* inscripto no circulo, a que ella serve de raio.

## PROPOSIÇÃO IV.

### THEOREMA.

467 Se tivermos huma recta BD igual á somma dos lados do *Exagono*, e do *Decagono* inscriptos no mesmo circulo, estará dividida em meia, e extrema razão no ponto C da união dos dous lados. Figura 5.

### DEMONSTRAÇÃO.

Seja a linha BC igual ao lado do *Decagono* inscripto no circulo, cujo raio he BA, ou AC, continue-se BC para D, de sorte que DC=AC, pois o raio he o lado do *Exagono*, devemos mostrar que BD : DC :: DC : BC. Para isto tire-se a linha AD, e será o triangulo DCA *Isocele*, e o novo triangulo BDA semelhante ao triangulo BAC, pois estes triangulos tem o angulo B commum,

e o angulo BDA he igual ao angulo CAB ; pois ſendo o triangulo DCA *Iſocele*, o angulo exterior BCA he duplo do angulo CAD, ou CDA *; mas ſendo CB lado do *Decagono*, o meſmo angulo he duplo do angulo BAC no centro: logo o angulo BDA he igual ao angulo CAB: logo os triangulos BDA, BAC são ſemelhantes *, e tem os lados homologos proporcionaes *: logo ſerá BD:BA::BA:BC, mas DC =BA: logo ſerá ÷BD:DC:CB. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 374.

* Numer. 403.

* Numer. 404.

## PROPOSIÇÃO V.

### THEOREMA.

468 O quadrado do lado do *Pentagono* inſcripto em hum circulo he igual á ſomma dos quadrados dos lados do *Exagono*, e do *Decagono* inſcriptos no meſmo circulo.

### OPERAÇÃO.

Figura 6. Divida-ſe o arco ACB do lado do *Pentagono* em dous igualmente no ponto C, e a corda AC, ou CB ſerá o lado do

do *Decagono*, e o raio AD, ou BD o lado do *Exagono*, devo moſtrar que teremos $AB^2 = DB^2 + AC^2$. Para iſto ſe divida o arco AC em dous no ponto F, tire-ſe a linha FD, e do ponto E, em que córta o lado AB do *Pentagono*, ſe tire a recta EC.

DEMONSTRAÇÃO.

O triangulo AEC ſerá *Iſoceles*, e ſemelhante ao triangulo ACB, porque a recta DF córta o arco AC em duas partes iguaes, e paſſa pelo centro: cortará tambem a corda em duas partes iguaes, e he perpendicular *: logo todos os pontos da recta DF diſtão igualmente dos extremos A, C, e temos AE = EC: além diſſo eſte triangulo tem hum angulo commum com o triangulo *Iſoceles* ACB: logo são ſemelhantes *; e comparando os lados homologos, teremos AB : AC :: AC : AE *: logo $AC^2 = AB \times AE$. * Tambem o triangulo ADB he ſemelhante ao triangulo DEB, porque eſtes triangulos tem hum angulo commum em B, que he de 54 gráos; mas o angulo BDF tambem he

* Numer. 424, e 425.

* Numer. 403.

* Numer. 404. Tom. I.

* Numer. 202.

de

de 54 gráos, pois a ſua medida he o arco BF, que he igual a CB = 36 gráos + FC = 18 gráos, pois FC he metade do arco AC: logo o triangulo DEB ſerá *Iſoceles*, aſſim como o triangulo ADB; e comparando os lados homologos, teremos AB:BD :: BD:BE *, e ſerá $BD^2 = AB \times BE$ *; e ſommando os membros deſta equação com os da equação precedente, teremos $BD^2 + AC^2 = AB \times AE + AB \times BE$; mas $AB \times AE + AB \times BE = AB \times BE + AE = AB \times AB = AB^2$: logo $BD^2 + AC^2 = AB^2$. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 404. Tom. I.

* Numer. 202.

## PROPOSIÇÃO VI.

### PROBLEMA.

469 Inſcrever hum *Pentagono* em hum circulo.

### SOLUÇÃO.

Figura 7. Para inſcrever hum *Pentagono* em hum circulo, tire-ſe o raio CF perpendicular ſobre o diametro AB *, divida-ſe o ſemidiametro CB em duas partes iguaes no ponto E *: deſte ponto, como centro, com o intervallo EF ſe deſ-

* Numer. 348.

* Numer. 349.

descreva o arco DF, e a corda DF será o lado do *Pentagono* inscripto no circulo AFB.

DEMONSTRAÇÃO.

O triangulo DFC he rectangulo pela construcção, o lado FC he o lado do *Exagono*, falta demonstrar que o lado CD he o lado do *Decagono*; porque para DF ser lado do *Pentagono*, basta pelo theorema precedente que o quadrado deste lado seja igual ao do lado do *Decagono*, e do *Exagono*: para isto chamemos CF, ou CB $a$, e será CE $= \frac{1}{2}a$, a incognita DC seja $x$, e BD será $= a+x$, DE $= x+\frac{1}{2}a$: isto supposto, como EF he igual a ED, teremos, por ser o triangulo ECF rectangulo, $CE^2 + FC^2 = EF^2$*, ou em termos analyticos $aa+\frac{1}{4}aa = xx+ax+\frac{1}{4}aa$, ou $aa = xx+ax$, tirando de huma, e outra parte $\frac{1}{4}aa$, de que se tira esta proporção $a+x : a :: a : x$*, ou DB : CB :: CB : DC,

* Numer. 408.

Tom. I. * Numer. 202.

DC, o que moſtra que a linha DB eſtá dividida em meia, e extrema razão no ponto C, e por conſequencia * a linha DC he o lado do *Decagono*, pois BC he a do *Exagono*. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 467.

## PROPOSIÇÃO VII.

### PROBLEMA.

470 Inſcrever hum quadrado em hum circulo.

Figura 8. Para inſcrever hum quadrado em hum circulo, tire-ſe o diametro AB, no meio deſte diametro ſe levante outro CED perpendicular ao primeiro *, eſtes dous diametros cortarão a circumferencia em quatro partes iguaes nos pontos A, C, B, D, pelos quaes tiradas as rectas AC, CB, BD, DA, farão hum quadrado, pois todas eſtas linhas são iguaes, por ſerem cordas de arcos iguaes, e de mais cada hum dos angulos deſta figura he recto, pois eſtá ſobre todo o diametro. * *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 348.

* Numer. 431.

PRO-

## PROPOSIÇÃO VIII.

### PROBLEMA.

471 Inſcrever hum *Octogono* em hum circulo.

Para inſcrever hum *Octogono* em hum circulo, depois de ter dividido a circumferencia em quatro partes iguaes, como ſe quizeſſemos inſcrever hum quadrado, ſe divida cada quarto de circulo CB em duas partes, e a corda CF, ou FB ſerá o lado do *Octogono*. Eſtamp.

### ADVERTENCIA.

Não temos tratado do modo de inſcrever em hum circulo o *Eptagono*, o *Enneagono*, ou o *Ondecagono*, porque ſe não tem achado o modo de inſcrever geometricamente eſtes trez polygonos ſimplesmente com a regoa, e compaſſo, ſendo preciſo recorrer á Geometria compoſta, iſto he, á Geometria das curvas; e a ſolução dos problemas por meio das curvas não he tão ſimples, como o daquelles, que ſe achão ſó com a regoa, e compaſſo, e he o que tem cauſado toda a difficuldade neſtes proble-

blemas, como o da triſecção do angulo, em que ſe divide o angulo em trez partes iguaes, que he das equações do terceiro gráo; e como não fallamos neſte tratado deſta caſta de equações, vamos dar o modo de fazer huma curva, chamada *equatriz de Dinoſtrato* do nome de ſeu inventor, por meio da qual ſe poderão dividir os angulos, e arcos de circulo em quantas partes iguaes quizerem; mas para iſto ſe fazem primeiro preciſos os dous ſeguintes problemas.

## PROBLEMA I.

472 Dividir huma linha nas partes iguaes que quizerem.

Figura 9. Para dividir a linha AB, por exemplo, em nove partes iguaes, tire-ſe a linha AC, que faça qualquer angulo com AB: do ponto A, como centro, com o raio AB ſe deſcreva o arco BC, que ſerá a medida do angulo BAC: depois com a meſma abertura de compaſſo do ponto B ſe deſcreva o arco AD=BC, tire-ſe a linha BD, que fará o angulo ABD=CAB: iſto ſuppoſto,

to, notem-se no lado AC com o compasso hum numero de partes iguaes em quantas se quer dividir a linha AB, isto he, começando do ponto A se notem nove partes iguaes na linha AC, depois se fará o mesmo na linha BD, começando do ponto D: tirem-se depois as linhas 9A, 81, 72, &c., que dividirão a linha AB em nove partes iguaes, o que he evidente; porque como as linhas, que se tirarão, são parallelas entre si, farão semelhantes os triangulos A1EA9B *; o que mostra que assim como A1 he a nona parte de A9, tambem AE será a nona parte de AB, e assim as mais.

* Numer 394.

## PROBLEMA II.

473 Dividir hum arco de circulo em hum numero de partes iguaes, que sejão em numero par, isto he, que seja divisivel pelo numero 2, e suas potencias 4, 8, 16, 32, &c.

Se quizermos dividir, por exemplo, o quarto de circulo ABC em dezesseis partes iguaes, dos pontos A, e C com o mesmo intervallo de compasso se fa-

Estamp. Figura

ça

ça a secção D, tire-se a linha BD, que dividirá o arco AC em duas partes iguaes no ponto E: do mesmo modo se dividirá o arco EC em duas partes iguaes no ponto F, e o arco FC em dous iguaes no ponto G, como tambem o arco GC igualmente em H, e será o arco CH a decima sexta parte de AC, e assim as mais.

Deste modo se póde dividir geometricamente hum arco de circulo em hum numero infinito de partes iguaes, dividindo o arco todo, e depois as suas partes sempre de duas em duas.

*Modo de descrever a Quadratriz.*

Figura 11. 474 Para descrever esta curva se divida o raio AB em hum grande numero de partes iguaes, de modo que o quarto do circulo possa dividir-se no mesmo numero de partes iguaes: supponhamos pois que se dividio o quarto de circulo em dez, e seis partes iguaes, como tambem o raio AB, isto supposto, depois de ter tirado do centro B ás extremidades de cada huma das partes iguaes do quarto de circulo

as

as rectas BC, BD, BE, BF, &c., ſe tirem pelos pontos G, H, I, K das partes iguaes do raio parallelamente ao ſemidiametro BT as rectas GL, HM, IN, KO: pelos pontos L, M, N, O, &c. em que eſtas rectas encontrarem os raios, que dividem o quarto do circulo, ſe deſcreverá a curva AS, que ſe póde fazer muito mais exacta, dividindo o quarto do circulo, e o raio AB em maior numero de partes iguaes para ter os pontos L, M, N, O mais proximos huns aos outros; e que o ponto R, que he o do encontro do ultimo raio com a parallela, ſeja o mais proximo que he poſſivel ao ſemidiametro RF, para que fique inſenſivel o erro, que póde haver na continuação da curva AR, até encontrar o ſemidiametro.

Pela geração deſta curva ſe vê, que tirando as parallelas HM, KO, até encontrar a curva nos pontos M, e O, e tirando por eſſes pontos os raios BD, BF, &c., haverá a meſma razão entre o arco AD, e o arco DF, como entre a linha AH, e a linha HK, e neſta proporção conſiſte a natureza da curva.

PRO-

## PROPOSIÇÃO IX.

### PROBLEMA.

475 Dividir hum angulo em trez partes iguaes.

Figura 12. Suppondo ter-se descripto a curva AD do modo, que se acabou de ensinar, e gravada em hum papelão bem liso, ou em vista de lanterna, dão-nos para dividir o angulo OPQ em trez partes iguaes.

Para resolver este problema, supponhamos a curva com o quadrante AC,

Figura 13. faça-se o angulo ABE igual ao angulo dado: do ponto F, em que o raio BE córta a curva AD, se tire a perpendicular FG sobre o semidiametro AB *, e dará a parte AG, a qual se divida em tantas partes iguaes, quantas se quer o angulo dividido: neste exemplo se divida em trez partes iguaes nos pontos H, K, dos quaes tiro as parallelas KL, HI, que cortarão a curva nos pontos L, I, pelos quaes tirando os raios BM, BN, dividem o arco AE em trez partes iguaes nos pontos M, e N pela propriedade da curva, pois he AK:

* Numer. 348.

AG::

AG :: AM : AE; e como AK he a terça parte de AG, tambem o arco AM será a terça parte do arco AE.

Mas se nos dessem para dividir hum angulo obtuso com RST em trez partes iguaes, parece que isto teria sua difficuldade, pois o arco RT não póde ser conteúdo no arco AC por ser maior que elle, e neste caso deve dividir-se em dous igualmente o angulo obtuso para ter o angulo agudo BSV, que suppomos ser o mesmo que o angulo ABE; e assim dividindo o angulo agudo em trez partes iguaes nos pontos M, e N, não ha mais que tomar o arco AN, que sendo duplo da sexta parte do arco RT, será igual ao terço do mesmo arco RT. *O Q. S. Q. F. e D.* Figura 14.

## PROPOSIÇÃO X.

### PROBLEMA.

476 Inscrever hum *Enneagono* em hum circulo.

Para inscrever hum *Enneagono* em hum circulo, se applique primeiramente o raio seis vezes á circumferencia Figura 15.

pa-

para ter os pontos B, C, D, E, F, G, que a dividirão em seis partes iguaes; e tirando linhas do primeiro ponto ao terceiro, e do terceiro ao quinto, do quinto ao primeiro, teremos o triangulo equilatero BDF, que dividirá a circumferencia em trez partes iguaes: divida-se depois hum destes arcos, como BCD, em trez partes iguaes pelo problema precedente, e achar-se-ha a nona parte da circumferencia do circulo, cuja corda será o lado do *Enneagono*. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO XI.

### PROBLEMA.

477 Inscrever hum *Eptagono* em hum circulo.

Para inscrever hum *Eptagono* em hum circulo, divida-se o quarto do circulo em sete partes iguaes, e cada huma será a vigesima oitava parte da circumferencia: hum arco igual aos quatro setimos do quadrante, será a setima parte da circumferencia do mesmo circulo, e a sua corda o lado do *Eptagono*.

PRO-

## PROPOSIÇÃO XII.

### PROBLEMA.

478 Inſcrever hum *Undecagono* em hum circulo.

Para inſcrever hum *Polygono* de onze lados em hum circulo, divida-ſe o quarto do circulo em onze partes iguáes, e tome-ſe a corda do arco, que ſeja quatro undecimos do quadrante, e eſte ſerá o lado do *Undecagono*.

### ADVERTENCIA.

Chama-ſe *Quadratriz* a linha, que acabámos de deſcrever, porque contribue á quadratura mecanica do circulo, pois ſuppondo que ſe achou o ponto D, em que eſta curva encontra o raio BC, demonſtrão Pappo, Clavio, e outros Authores, que o ſemidiametro BC he meio proporcional entre a baſe BD da *Quadratriz*, e a circumferencia AEC do quadrante, de ſorte que temos eſta proporção BD:BC::BC:AEC; de que ſe ſegue, que conhecendo eſta baſe, ſe póde achar a circumferencia do quarto do circulo. Figura 13.

## PROPOSIÇÃO XIII.

### PROBLEMA.

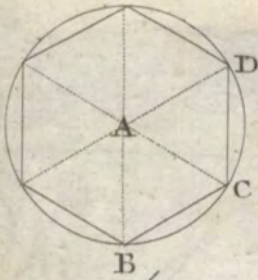
479 Circumeſcrever qualquer *Polygono* á roda de hum circulo.

Para circumeſcrever hum *Polygono* a hum circulo, deve-ſe primeiro inſcre-
Eſtamp. 7. ver hum ſemelhante *Polygono* no meſmo circulo: querendo v. g. circumeſcrever
Figura 16. hum *Exagono* a hum circulo BEC, deve-ſe primeiro inſcrever hum *Exagono* dentro no circulo, e dividir hum dos lados, v. g. BC, em dous com o raio AE, e ao extremo E tirar a tangente FG, que ſe terminará pelos raios AB, AC continuados, e FG ſerá o lado do *Exagono* circumeſcripto; e fazendo a meſma operação, ſe acharão os mais lados. Mas para ſe fazer mais depreſſa, depois de ter achado os pontos F, G, he melhor deſcrever hum circulo do centro A com o raio AG, na circumferencia do qual ſe podem marcar os pontos, que ſervem para deſcrever o *Polygono*, applicando-lhe com o compaſſo o comprimento do lado FG.

FIM DO SEXTO LIVRO.

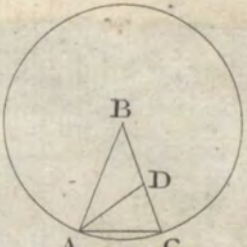
NO-

1.ª

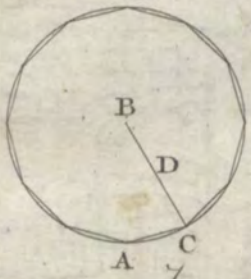



2.ª

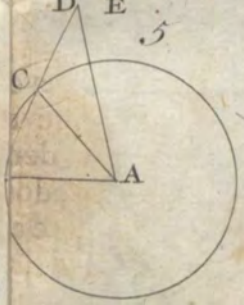
3.ª




4




5

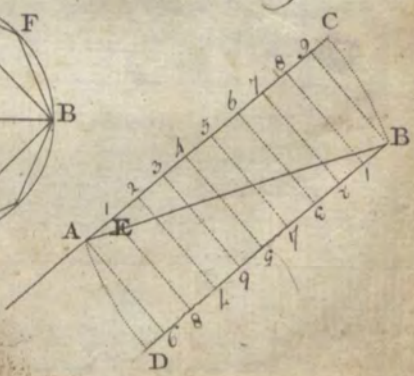


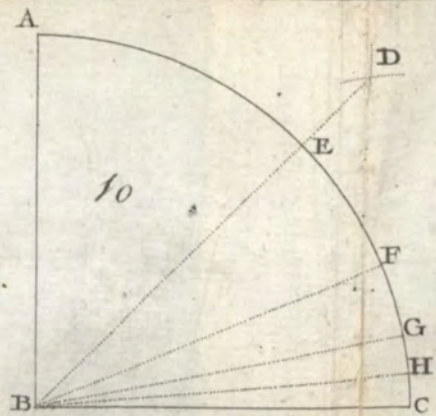

6

7

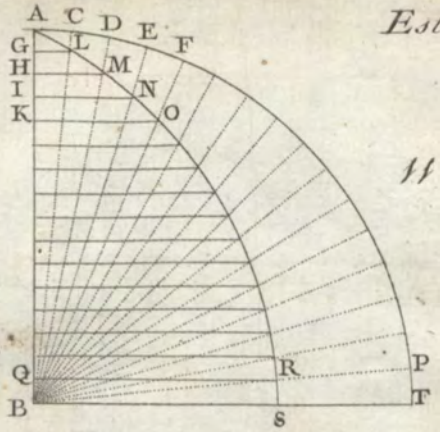
8

9



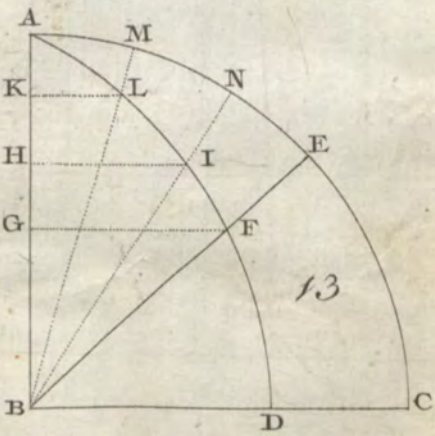



10

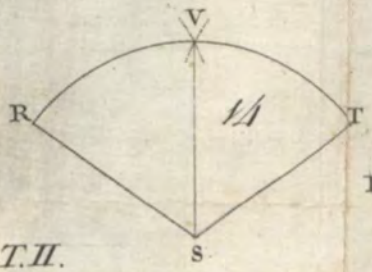



11

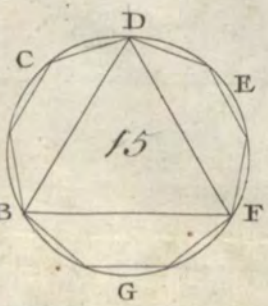
12




13




14




15

16

T.II.

# NOVO CURSO DE MATHEMATICA.

## LIVRO VII.

*EM QUE SE TRATA DA RAZÃO, que tem entre si os circuitos das figuras semelhantes, e a proporção das suas superficies.*

### DEFINIÇÕES.

480 DOus quadrilateros tem as baſes, e alturas reciprocas, quando a baſe do primeiro he para a baſe do ſegundo, como a altura deſte ſegundo he para a altura do primeiro; e geralmente ſe

diz, que quaeſquer duas grandezas são reciprocas a outras duas, quando as duas primeiras são os extremos, ou os meios de huma proporção, de que as outras duas são meios, ou extremos: por exemplo *a*, e *b* são reciprocos ás grandezas *c*, e *d*, ſe tivermos *a*:*c*::*d*:*b*.

## PROPOSIÇÃO I.

### THEOREMA.

481 Os circuitos de dous polygonos regulares, e ſemelhantes A, e B, v. g. o circuito do polygono A ao circuito do polygono B, são entre ſi como o raio AC ao raio BF.

Eſtamp. 9. Figura 1. e 2.

### DEMONSTRAÇÃO.

Seja CD *a*, FG *b*, AC *c*, BF *d*: iſto ſuppoſto, ſe cada polygono he hum exagono, o circuito do polygono A ſerá 6*a*, e o circuito do polygono B ſerá 6*b*, devemos moſtrar que 6*a*:6*b*::*c*:*d*. Os triangulos DAC, GBF são ſemelhantes, porque, por ſerem os polygonos ſemelhantes, os angulos, que compõem cada hum dos triangulos, são

reſ-

reſpectivamente iguaes, e os lados oppoſtos a angulos iguaes são proporcionaes *, e ſerá $a:b::c:d$; e multiplicando os termos $a$, e $b$ por 6, ſerá $6a:6b::c:d$. O Q. S. Q. D. * Numer. 404.

ADVERTENCIA.

Eſta propoſição he geral para todas as figuras ſemelhantes, regulares, ou irregulares, começando pelos triangulos; porque ainda que as figuras irregulares ſe não poſsão inſcrever no circulo, póde-ſe com tudo dizer que os contornos deſtes polygonos, ſuppoſtos ſemelhantes, são entre ſi como os raios de dous circulos, que paſſaſſem pelo vertice dos trez angulos iguaes, quaeſquer que ſe tomem em huma, ou outra figura, com tanto que eſtes circulos paſſem por angulos de dous triangulos ſemelhantes, e ſemelhantemente poſtos em huma, e outra figura.

COROLLARIO.

482 Segue-ſe deſta propoſição que as circumferencias dos circulos são entre ſi como os raios dos meſmos circu-

culos; porque ſe tomarmos os circu-
Figura 3. e 4. los X, e Y como polygonos ſemelhantes de hum numero infinito de lados, chamando *a* á circumferencia do primeiro, e *c* o ſeu raio, *b* á circumferencia do ſegundo, e *d* o ſeu raio, ſerá $a:b::c:d$.

## PROPOSIÇÃO II.

### THEOREMA.

Figura 1. e 5. —483 Se do centro A de hum polygono regular ſe tira huma perpendicular AE ſobre hum dos ſeus lados, digo que a ſuperficie deſte polygono ſerá igual ao triangulo rectangulo, que tiver por altura a linha IK igual á perpendicular AE, e por baſe huma linha KL igual ao circuito do polygono.

### DEMONSTRAÇÃO.

Se o polygono regular he hum exagono, e que ſe tirão do centro raios a todos os angulos, teremos tantos triangulos iguaes, quantos forem os lados do polygono; aſſim o polygono A ſerá compoſto de ſeis triangulos iguaes

iguaes a ACD; mas como os triangulos ACD, KIL tem a meſma altura, eſtão entre ſi na razão das baſes *; e como a baſe KL he ſextupla da baſe CD pela conſtrucção, ſerá tambem o triangulo KIL ſextuplo do triangulo CAD, e por conſequencia igual ao polygono. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 393.

## COROLLARIO.

484 Deſta propoſição ſe ſegue, que para achar a ſuperficie de hum polygono regular, ſe deve multiplicar metade do ſeu circuito pela perpendicular, tirada do centro do polygono ſobre hum dos ſeus lados, pois a ſuperficie do triangulo IKL, que he igual á deſte polygono, ſe acha multiplicando metade da baſe KL pela perpendicular IK. *

* Numer. 389.

# PROPOSIÇÃO III.

## THEOREMA.

485 A ſuperficie de hum circulo he igual á de hum triangulo, que tiver por altura o raio do circulo, e por baſe a circumferencia do meſmo circulo. Figura 6.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

Como o circulo he hum polygono de infinitos lados, póde-se tomar a sua circumferencia pela somma dos lados, e o raio pela perpendicular do polygono: logo a sua superficie será igual a hum triangulo, que tiver por altura o raio, e por base a linha NO igual á circumferencia. *O Q. S. Q. D.*

COROLLARIO I.

Figura 6. 486 Pois o triangulo MNO he igual ao circulo, e tambem he igual a hum rectangulo, que tivesse por base metade da linha NO, e por altura a linha MN *, segue-se que a superficie de hum circulo he igual a hum rectangulo, que tivesse por base metade da circumferencia, e o raio por altura, e que para se achar a sua superficie se deve multiplicar metade do diametro por metade da circumferencia.

* Numer. 389.

ADVERTENCIA I.

487 Se a superficie do circulo se considera como composta de huma infi-

finidade de circumferencias concentricas, cujos raios ſe excedão igualmente, todas eſtas circumferencias comporão huma progreſsão infinita arithmetica, do qual o centro ſerá o menor termo, e a circumferencia o maior; e como o ſemidiametro AB expreſſa o numero dos termos da progreſsão, ſegue-ſe que a ſua ſomma ſe achará multiplicando o maior termo, que he a circumferencia, por metade do raio AB. Figura 4.

## ADVERTENCIA II.

488 Parece que a propoſição precedente moſtra logo a quadratura do circulo, pois prova que hum circulo he igual a hum triangulo, que tiveſſe por baſe a circumferencia do circulo, e por altura o raio; mas como ainda ſe não tem achado geometricamente huma linha recta perfeitamente igual á circumferencia de hum circulo, ſegue-ſe que ſe não tem achado hum triangulo igual ao circulo: o que digo de hum triangulo ſe póde tambem entender de hum quadrado igual a hum circulo, porque ſe póde fazer geometri-

ca-

camente hum quadrado igual a hum triangulo, como veremos depois; mas para que não haja equivocação neſta palavra quadratura do circulo, he juſto que os principiantes ſaibão que a quadratura do circulo conſiſte em achar huma propoſição, que enſine o modo de fazer hum quadrado igual ao circulo, e que demonſtre que realmente eſtá feito.

Ainda que os Geometras não tenhão até agora achado huma linha perfeitamente igual á circumferencia de hum circulo, iſto não embaraça que praticamente ſe ſupponha poder-ſe iſto fazer, ſervindo-nos de algumas regras, que são approximações da quadratura do circulo, como vamos ver.

489 Arquimedes achou que a razão do diametro á circumferencia he quaſi 7 a 22, iſto he, que ſe o diametro contém ſete partes iguaes, a circumferencia conterá quaſi vinte e duas, ou, o que vem a ſer o meſmo, que a circumferencia tem trez diametros, e hum ſetimo. Ora como os diametros dos circulos eſtão na razão das ſuas circum-

cumferencias, * ſe tiveſſemos hum cir- * Numer. culo, cujo diametro foſſe, por exem- 482. plo, 28 palmos, para achar a circumferencia, diriamos: ſe 7, diametro de hum circulo, dá 22 por circumferencia do meſmo circulo, quanto dará 28, diametro de outro circulo, por circumferencia? e acharemos 88 palmos.

Mas ſe conheceſſemos a circumferencia de hum circulo, v. g. de 66 palmos, para lhe achar o diametro fariamos huma regra de 3, dizendo: ſe a circumferencia de hum circulo, que tiveſſe 22 palmos, dá 7 por diametro, de quantos ſeria o diametro de outro, cuja circumferencia foſſem 66 palmos? e acharemos 21 o diametro, que ſe buſca. Além da razão de 7 a 22, de que nos podemos ſervir, quando for preciſa maior exacção, podemos tambem uſar da de 113 a 355, que achou Metio, e he mais exacta que a precedente, e por iſſo ſerá util ſervir-nos deſta ultima nas operações, em que ſe preciſa mais exacção, do que nas operações ordinarias.

## COROLLARIO II.

490 Segue-se tambem disto que hum circulo he igual a hum rectangulo NSRQ, que tivesse por base a quarta parte da circumferencia, e por altura o diametro, pois este rectangulo he igual ao rectangulo NT, que tem por base metade da circumferencia, e por altura o raio; e consequentemente se tivessemos hum quadrado VXYZ feito sobre o diametro do circulo, tendo este quadrado a mesma altura que o rectangulo NR, que he igual á superficie do circulo, será para elle na razão das bases VZ, e NQ: póde-se logo dizer que a superficie do circulo he ao quadrado do diametro, como o diametro á quarta parte da circumferencia.

Figura 6.

## COROLLARIO III.

491 Se suppuzermos o diametro de hum circulo dividido em sete partes iguaes, e que a sua circumferencia contenha exactamente vinte e duas, (o que na pratica não póde causar erro sensivel) dobrando os membros, temos

mos 14, e 44 por diametro, e circumferencia; no que he de notar, que sendo o ultimo numero divisivel por 4, e dando 11 no quociente, se póde este quociente tomar pelo quarto da circumferencia, do que se segue pelo corollario precedente que a razão de 14 a 11 he a mesma do quadrado do diametro á superficie do circulo; assim para ter a superficie de hum circulo, de que conheço o diametro, que supponho $=a$, basta fazer esta regra de trez $14:11::aa:\frac{11aa}{14}$, ou, o que vem a ser o mesmo, para ter a arêa do circulo, bastará tomar os onze quatorze avos do quadrado do diametro do circulo.

## ESCHOLIO.

492 Os principiantes não desgostarão saber o modo, com que Arquimedes descubrio a razão, de que acabamos de fallar: o conhecimento dos primeiros axiomas da Geometria basta para nos dar a conhêcer claramente que a circumferencia de hum circulo he maior que o circuito de qualquer po-

polygono inſcripto no meſmo circulo, e menor que qualquer polygono circumſcripto no meſmo circulo: o meſmo ſe deve entender da ſuperficie do circulo, e dos polygonos inſcriptos, e circumſcriptos: iſto ſuppoſto, eis-aqui o que fez Arquimedes para conhecer a razão proxima do diametro á circumferencia: inſcreveo em hum circulo hum polygono de 96 lados, e circumſcreveo no meſmo circulo hum polygono ſemelhante de igual numero de lados: calculou depois pelas propriedades das linhas, ou cordas do circulo o comprimento de hum dos lados de cada polygono, e achou o contorno multiplicando o numero achado por 96. Suppondo pois que o diametro do circulo foſſe 1, achou que o perimetro do polygono inſcripto era + maior que $3\frac{10}{71}$ do diametro, e que o do polygono circumſcripto era + menor que $3\frac{10}{70}$, ou $3$, e $\frac{1}{7}$, de que ſe deve concluir que a ſuperficie entre eſtes dous contornos tambem he maior que $3\frac{10}{71}$,

e menor que $3\frac{10}{70}$; assim sendo 7 o diametro do circulo, a circumferencia deve ser maior que 21, e menor que 22, que he 3 vezes o diametro, e $\frac{1}{7}$, de modo que esta mesma circumferencia he muito mais proxima a 22, do que a 21. Facilmente se vê que Arquimedes dividio o circulo em quatro partes iguaes, ou, o que he o mesmo, que procurou o valor de huma corda de 90 gráos: depois buscou a corda do arco de 45 gráos para ter o lado do *Octogono*, depois o lado de hum polygono de 16 lados, e em fim o do polygono de 32 lados: depois do que buscou a corda de hum arco, terça parte do ultimo polygono de 32 lados, e esta corda he o lado do seu polygono de 96 lados, pois he evidente que $32 \times 3 = 96$.

## PROPOSIÇÃO IV.

### THEOREMA.

493 Se tivermos dous polygonos semelhantes A, e B, a superficie do primeiro será á do segundo, como o quadrado [illegible] Figura 1. c 2.

quadrado da perpendicular AE ao quadrado da perpendicular BH, ou como o quadrado do raio AC ao quadrado do raio BF.

Chamemos ao lado CD do primeiro polygono $a$, á perpendicular AE $b$, ao lado FG do outro polygono $c$, á perpendicular BH $d$, o circuito do primeiro polygono será $6a$, e o do segundo será $6c$; e multiplicando metade deſtes circuitos pelas perpendiculares, os productos darão as ſuperficies dos polygonos, $3ab$ a do primeiro A, e $3cd$ a do ſegundo B, devemos moſtrar que $3ab : 3cd :: bb : dd$.

DEMONSTRAÇÃO.

Para provar que $3ab : 3cd :: bb : dd$, baſta moſtrar que neſta proporção o producto dos extremos he igual ao producto dos meios, e que $3abdd = 3cdbb$ *: para iſto, por ſerem os triangulos ACD, BFG ſemelhantes, será $a : c :: b : d$: logo $ad = bc$ *; e pondo $ad$ no ſegundo membro da primeira equação em lugar de $bc$, teremos $3abdd = 3addb$. O Q. S. Q. D.

Tom. I. * Numer. 210.

Tom. I. * Numer. 202.

Co-

## COROLLARIO.

494 Por ſerem as figuras A, e B ſemelhantes, os triangulos, de que ellas ſe compõem, ſerão tambem; aſſim o triangulo ACE ſerá ſemelhante ao triangulo BFH, pois tem dous angulos iguaes cada hum ao ſeu reſpectivo *: logo ſerá AE:BH::AC:BF, e $AE^2$: $BH^2$::$AC^2$:$BF^2$; mas os polygonos eſtão entre ſi como os quadrados das perpendiculares AE, BH por eſta propoſição: logo tambem são entre ſi como os quadrados dos raios AC, BF, ou dos lados CD, FG, pois eſtes quadrados eſtão na meſma razão que os quadrados das perpendiculares. Figura 1ª e 2ª. *Numer. 403.

## ADVERTENCIA.

495 Eſta propoſição ſe deve entender não ſómente de todos os polygonos regulares ſemelhantes, que ſe podem inſcrever em hum circulo, mas tambem de todos os outros polygonos irregulares ſemelhantes, que são entre ſi como os quadrados das perpendiculares, tiradas de hum ponto ſemelhan-

temente posto em huma, e outra figura sobre lados homologos: em huma palavra, as superficies de quaesquer dous polygonos semelhantes são entre si como os quadrados dos lados homologos, das linhas tiradas nas figuras por angulos iguaes, das perpendiculares tiradas sobre os dous lados correspondentes, e geralmente de todas as linhas semelhantemente postas.

## PROPOSIÇÃO V.

### THEOREMA.

496 As superficies de dous circulos são entre si como os quadrados dos raios.

Figura 3. e 4. Se tivermos dous circulos $x$, e $y$, chamemos $a$ a circumferencia do circulo $x$, e $c$ o seu raio, $b$ a circumferencia do circulo $y$, e $d$ o seu raio, a superficie do primeiro será $\frac{ac}{2}$, a superficie do segundo será $\frac{bd}{2}$ *: isto supposto, devemos mostrar que $\frac{ac}{2} : \frac{bd}{2} :: cc : dd$.

* Numer. 486.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

Para demonſtrar que $\frac{ac}{2} : \frac{bd}{2} :: cc : dd$, baſta moſtrar que o producto dos extremos deſtas quatro quantidades he igual ao producto dos meios, ou que $\frac{acdd}{2} = \frac{bdcc}{2}$ *. Para iſto ſe deve advertir, que ſendo as circumferencias dos circulos entre ſi como os raios *, ſerá $a : b :: c : d$, do que ſe tira $ad = bc$ *: logo pondo no ſegundo membro da primeira equação $ad$ em lugar de $bc$, teremos $acdd = addc$. *O Q. S. Q. D.*

Tom. I. * Numer. 210.

* Numer. 482. Tom. I. * Numer. 202.

COROLLARIO.

497 Por ſerem os raios dos circulos entre ſi como as cordas de arcos de igual numero de gráos, e como os diametros, ou como os lados dos polygonos ſemelhantes inſcriptos nos meſmos circulos, ſegue-ſe que as ſuperficies dos circulos, que são como os quadrados dos raios, são tambem como os quadrados dos diametros, como os quadrados das cordas de hum meſmo

numero de gráos, e como os quadrados dos lados dos polygonos ſemelhantes inſcriptos, ou circumſcriptos no circulo.

ADVERTENCIA.

Eſta propoſição, como tambem a precedente, são de grande uſo na Geometria, e parece pouca toda a applicação, que ſe puzer para bem ſe comprehender. Ainda que a propoſição, que ſe ſegue, ſe poſſa deduzir da precedente, vamos demonſtralla particularmente de outro modo differente; advertindo que deſta meſma propoſição, que ſe ſegue, ſe podião deduzir todas as propriedades das figuras ſemelhantes, pois pela definição das figuras ſemelhantes todos os polygonos ſemelhantes são compoſtos de triangulos ſemelhantes.

## PROPOSIÇÃO VI.

THEOREMA.

Figura 7. n. 8. 498 Dous triangulos ſemelhantes ABC, DEG são entre ſi como os quadrados dos ſeus lados homologos, iſto

to he, que teremos ABC : DEG :: $AB^2$ : $DE^2$, ou :: $AC^2$ : $DG^2$.

DEMONSTRAÇÃO.

Tirem-se dos angulos C, e G as perpendiculares CH, GF *: o triangulo ACB he igual ao producto da ſua baſe AB por metade da perpendicular CH; do meſmo modo o triangulo DGE he igual ao producto da baſe DE por metade da perpendicular GF *: logo teremos $ACB = AB \times \frac{CH}{2}$, e $DGE = DE \times \frac{GF}{2}$; e fazendo huma proporção com os termos deſta equação, ſerá ACB : DGE :: $AB \times \frac{CH}{2}$ : $DE \times \frac{GF}{2}$; mas por ſerem eſtes triangulos ſemelhantes, o ſerão tambem os triangulos rectangulos ACH, DFG, tendo hum angulo igual além do angulo recto *, pois o angulo A de hum he igual ao angulo D do outro: logo ſerá CH : GF :: CA : GD, e nos primeiros triangulos teremos CA : GD :: AB : DE : logo AB : DE :: CH : GF *: tambem ſerá AB : DE :: $\frac{AB}{2}$ : $\frac{DE}{2}$ *: lo-

* Numer. 347.

* Numer. 389.

* Numer. 403.

Tom. I. * Numer. 219.

Tom. I. * Numer. 224.

logo multiplicando ordenadamente as duas ultimas proporções, teremos $AB^2$:

Tom. I. * Numer. 225. $DE^2 :: CH \times \frac{AB}{2} : GF \times \frac{DE}{2}$ *: logo será

$ACB : CGE :: AB^2 : DE^2$. *O Q. S. Q. D.*

ADVERTENCIA.

Figura 9. 499 Esta proposição tambem póde servir para demonstrar que o quadrado da hypothenusa he igual aos quadrados dos outros dous lados em qualquer triangulo rectangulo, como ABC; porque abaixando do angulo recto a perpendicular BD, teremos trez triangulos semelhantes ABC, ADB, BDC; e tomando as hypothenusas por lados homologos, teremos ABC:ADB:BDC :: $AC^2$ : $AB^2$ : $BC^2$; mas o triangulo ABC he igual aos dous, ou á somma dos dous triangulos ADB + BDC: logo tambem o quadrado $AC^2$ da hypothenusa AC será igual aos quadrados das outras hypothenusas AB, BC, que são lados do mesmo triangulo ABC.

PRO-

## PROPOSIÇÃO VII.

### THEOREMA.

500 Os parallelogramos eſtão em razão compoſta das baſes, e alturas, iſto he, como os productos das ſuas baſes pelas ſuas alturas.

### DEMONSTRAÇÃO.

Sejão os parallelogramos G, e H: chamemos *a* a baſe do primeiro, e *b* a ſua altura, *c* a baſe do ſegundo, e *d* a ſua altura: o primeiro G ſerá igual ao producto *ab*, e o ſegundo H ſerá igual ao producto *cd* da baſe pela altura, aſſim ſerá G:H::*ab*:*cd*. O Q. S. Q. D. Eſtamp. 10 Figura 10. c 11.

### COROLLARIO I.

501 Como os triangulos são metades dos parallelogramos da meſma baſe, e da meſma altura, ſerão tambem entre ſi como os productos das ſuas baſes pelas ſuas alturas.

### COROLLARIO II.

502 Se os productos *ab*, *cd* das baſes pelas alturas são iguaes, os paral-

le-

lelogramos G, e H, que são como eſtes productos, ſerão tambem iguaes, como tambem os triangulos, que são metades deſtes parallelogramos ; donde ſe deduz eſta propoſição geral : dous parallelogramos, ou dous triangulos, são iguaes, quando tem baſes reciprocas ás ſuas alturas ; e reciprocamente ſe dous triangulos, ou dous parallelogramos são iguaes, tem as baſes reciprocas com as ſuas alturas ; porque pois $ab = cd$, ſerá $a:c::b:d$ *.

Tom. I. * Numer. 212.

$a:c::d:b$

## COROLLARIO III.

503 Segue-ſe tambem deſta propoſição, que ſe dous triangulos, ou dous parallelogramos são ſemelhantes, ſerão entre ſi como os quadrados das ſuas baſes, ou das ſuas alturas ; porque pois os triangulos ſe ſuppõem ſemelhantes, as baſes, e alturas ſerão proporcionaes, e aſſim ſerá $a:c::b:d$, e $a:c::a:c$; multiplicando eſtas duas proporções ordenadamente, teremos $aa:cc::ba:cd$ *, mas a razão de $a^2 : c^2$ he igual á de $ab$ a $cd$: logo teremos $G:H::a^2:c^2$, iſto he, os parallelogramos ſemelhantes,

Tom. I. * Numer. 225.

ou

ou os triangulos, que são metades, são entre si como os quadrados de suas bases, ou, como expressão os Geometras, na razão duplicada das suas bases.

## PROPOSIÇÃO VIII.

### THEOREMA.

504 Se tivermos trez linhas em proporção contínua, digo que o quadrado feito sobre a primeira ao quadrado feito sobre a segunda, como a primeira linha he á terceira, isto he, representando estas linhas por letras $a, b, c$: se $\dot{=} a:b:c$, será $a^2:b^2::a:c$.

### DEMONSTRAÇÃO.

Para provar que $aa:bb::a:c$, mostraremos que o producto dos extremos he igual ao producto dos meios, ou que $aac=bba$ *. Estando pela hypothese as trez linhas em proporção contínua, será $a:b::b:c$, de que se segue $ac=b^2$ *: logo multiplicando cada membro desta equação por $a$, será $a^2c=b^2a$, que he exactamente o producto dos extremos, e dos meios da proporção, que queriamos provar.

* Tom. I. Numer. 210.

* Tom. I. Numer. 205.

Co-

COROLLARIO.

505 Segue-ſe deſta propoſição, que ſe tivermos trez linhas proporcionaes, não ſómente o quadrado feito ſobre a primeira he ao quadrado feito ſobre a ſegunda, como a primeira á terceira; mas todos os polygonos ſemelhantes, regulares, ou irregulares, feitos ſobre eſtas duas linhas, são entre ſi como a primeira á terceira; porque como os polygonos ſemelhantes são entre ſi como os quadrados dos ſeus raios, ou dos lados homologos deſtes polygonos ſemelhantes, o primeiro polygono ſerá ao ſegundo, como o quadrado da primeira linha ao quadrado da ſegunda, ou como a primeira á terceira; do que ſe ſegue, que tendo a ſuperficie de dous polygonos ſemelhantes, ſe podem ſempre achar duas linhas, que ſejão entre ſi como eſtas ſuperficies.

## PROPOSIÇÃO IX.

THEOREMA.

506 Se nos derem duas linhas rectas, a que chamaremos *a*, e *b*, digo que

que o rectangulo feito deſtas duas linhas he meio proporcional entre os quadrados das meſmas linhas, iſto he, que ſerá $aa : ab :: ab : bb$.

DEMONSTRAÇÃO.

He evidente que póde ter lugar a proporção $aa : ab :: ab : bb$, pois o producto dos extremos, e dos meios dá $aabb = aabb$ *. *O Q. S. Q. D.* Tom. I. * Numer. 210.

## PROPOSIÇÃO X.

PROBLEMA.

507 Achar huma meia proporcional entre duas linhas dadas. Figura 12.

Para achar huma meia proporcional entre as duas linhas A, e B, ſe juntem eſtas linhas de ſorte que fação huma ſó CD, notando o ponto E, em que ellas ſe juntão, depois ſe divida a linha inteira em duas igualmente no ponto F *, e deſte ponto como centro ſe deſcreva hum ſemicirculo: ſe do ponto E ſe levanta huma perpendicular EH, que ſe termine na circumferencia do circulo, ſerá a meia proporcional, * Numer. 349.

nal, que ſe buſca, o que he evidente,
* Numer. 443. pois pela propriedade do circulo * toda a perpendicular AE he meia proporcional entre as partes CE, ED do diametro: aſſim ſuppondo que a linha K ſeja igual a HE, teremos trez linhas proporcionaes A, K, B.

508 Se quizeſſemos hum meio proporcional entre dous numeros dados, como 4, e 9, ſe multiplicarião eſtes dous numeros hum pelo outro, e ſe extrahiria a raiz 6 do producto 36, que he o quadrado do meio proporcional, que ſe buſca, pois eſte quadrado do meio he igual ao producto dos extremos 4, e 9, o que dá 4:6::6:9.

Se o producto de dous numeros dados não he quadrado, o que ſuccede todas as vezes que hum dos numeros, ou ambos não são quadrados, poderſe-ha achar o medio, que ſe buſca por approximação, ſervindo-nos das decimaes para extrahir a raiz do producto. Tambem he de notar que a Geometria nos dá exactamente eſtas linhas, ainda que ſejão das que chamão incommenſuraveis, iſto he, que não tenhão algu-

guma commua medida, por mais pequena que ſeja, com as linhas propoſtas: por exemplo, ainda que poſſa ſucceder que o numero das partes da linha A não ſeja hum numero quadrado, como tambem o das partes de B, achaſe com tudo o comprimento exacto da media K, o que neſta ſuppoſição ſe não poderia determinar em numeros.

## PROPOSIÇÃO XI.

### PROBLEMA.

509 Achar huma terceira proporcional a duas linhas dadas.

Se ſe quizer huma terceira a duas linhas dadas M, e N, de ſorte que a primeira M ſeja a ſegunda N, como a meſma ſegunda N a terceira, que ſe buſca, faça-ſe qualquer angulo ABC, e ſobre o lado BC ſe tome a parte BD igual á primeira linha M, e a parte DF igual á ſegunda N: no lado BA tome-ſe a parte BE igual á meſma ſegunda N, tire-ſe a linha ED, e do ponto F a linha FG parallela a ED, digo que a linha EG ſerá a terceira proporcional, que ſe buſca. Figura 13.

DEMONSTRAÇÃO.

Os dous lados BG, BF do triangulo BGF eſtão cortados proporcionalmente pela linha DE parallela á baſe FG pela conſtrucção, e conſequentemente * ſerá BD:DF::BE:EG, mas BE he igual a DF pela conſtrucção: logo BD:DF::DF:EG; e fazendo a linha O igual a EG, ſerão as trez linhas M, N, O continuamente proporcionaes.

* Numer. 394.

510 Se ſe quizeſſe achar hum terceiro proporcional a dous numeros, ſe quadraria o ſegundo, e o quociente deſte quadrado dividido pelo primeiro numero ſeria o terceiro proporcional, que ſe buſca: ſe o ſegundo não he diviſivel pelo primeiro, o ſeu quadrado tambem não ſerá diviſivel por eſte primeiro numero, e ſe não póde achar o terceiro proporcional ſenão por approximação, ſervindo-nos dos quebrados decimaes: ſobre que tambem he de notar a differença da Geometria á Arithmetica na determinação das quantidades, que a primeira dá exactamente

te o comprimento das linhas, que ſe buſcão, ſem determinar o valor das ſuas partes; e a ſegunda dá em certos caſos o valor exacto, e determinado; e em outros não o póde dar, ſenão por huma approximação, que ſe póde continuar infinitamente, ſem já mais dar o verdadeiro valor.

Eſte ultimo problema ſe poderia tambem reſolver de outro modo, ſervindo-nos do circulo. Queremos, por exemplo, achar huma terceira proporcional ás linhas B, e K, faremos a linha CE igual a B, e ſobre eſta linha ſe levantará a perpendicular EH igual a K *: tire-ſe a linha CH, ſobre a qual no ſeu extremo ſe levantará a perpendicular HD, que irá encontrar a linha CE continuada no ponto D, e determinará a linha ED, que ſerá a terceira proporcional, que ſe buſca; por quanto he claro, que ſendo CHD recto, a recta EH ſerá meia entre os ſegmentos da baſe, o que vem a ſer o meſmo que ſer a recta ED a terceira proporcional ás linhas CE, EH, ou ás ſuas iguaes B, K. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 348.

PRO-

## PROPOSIÇÃO XII.

### PROBLEMA.

511 Achar huma quarta proporcional a trez linhas dadas.

Figura 14. e 15. Para achar huma quarta proporcional a trez linhas P, Q, R, faça-se, como no problema antecedente, hum angulo CSX, qualquer que seja, depois tome-se sobre o lado CS a parte SV igual á linha P, a parte VZ sobre o mesmo lado igual á linha Q, e sobre o outro lado SX se tome ST igual á linha R, e tire-se a linha TV, e a esta do ponto Z huma parallela XZ, e dará a linha TX igual á quarta proporcional, que se busca.

### DEMONSTRAÇÃO.

Os lados do triangulo XSZ, cortados pela linha TV parallela á base XZ, darão * SV : VZ :: ST : TX; e assim fazendo a linha Y igual a TX, ficarão as quatro proporcionaes P, Q, R, Y. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 394.

512 Para achar hum quarto numero proporcional a trez numeros dados, se

se deve fazer a regra de 3 ordinaria, pois esta regra não he outra cousa mais que a arte de achar huma quarta grandeza proporcional a trez outras dadas.

Nos problemas seguintes vamos mostrar o uso, que se póde fazer dos precedentes, e as propriedades das linhas proporcionaes.

## PROPOSIÇÃO XIII.

### PROBLEMA.

513 Fazer hum quadrado igual a hum rectangulo.

Para fazer hum quadrado igual a hum rectangulo AC, se deve buscar huma meia proporcional entre os lados desiguaes AB, e BC do rectangulo dado, e o quadrado desta meia proporcional será igual ao rectangulo, pois por ser a linha DE meia proporcional entre os lados AB, BC do rectangulo AC, he certo que o seu quadrado DF será igual ao rectangulo AC, pois este rectangulo he igual ao producto dos extremos AB, BC. Figura 10. e 11.

COROLLARIO.

514 Como já moſtrámos que hum circulo he igual a hum rectangulo feito de metade da circumferencia por metade do diametro *, ſegue-ſe que o quadrado de huma linha, que foſſe meia proporcional entre o ſemidiametro, e a ſemicircumferencia, ſerá igual ao circulo.

* Numer. 486.

## PROPOSIÇÃO XIV.

PROBLEMA.

Eſtamp. 11 Figura 16. e 17.

515 Achar hum quadrado, que ſeja a outro em huma razão dada.

Para achar hum quadrado, que ſeja ao quadrado CB em certa razão, v. g. de 3 a 5, faço huma linha GH igual aos trez quintos do lado AB, depois entre as linhas AB, e GH buſco huma meia proporcional EF, e o quadrado IF feito ſobre ella ſerá os trez quintos do quadrado CB; porque como eſtas linhas AB, EF, GH eſtão em proporção contínua, ſerá $AB^2 : EF^2 :: AB : GH$ *; mas GH pela conſtrucção he os trez

* Numer. 504.

trez quintos de AB: logo tambem $EF^2$ ſerá os trez quintos de $AB^2$.

516 Eſta propoſição ſe deve entender não ſó dos quadrados, mas de todas as outras figuras. Por exemplo: ſe quizeſſemos fazer qualquer pentagono irregular ſemelhante a outro pentagono irregular, que tiveſſe com elle huma certa razão, ſe buſcaria huma meia proporcional entre qualquer lado do pentagono propoſto, e huma linha, que tiveſſe com eſte lado a razão dada; e ſobre eſta media aſſim determinada, como lado homologo, ſe deſcreva o pentagono, e os outros lados ſe acharão por huma regra de trez, ſervindonos dos triangulos ſemelhantes. Deſta propoſição ſe tira o modo de reduzir quaeſquer figuras de grande em pequena, e de pequena em grande em qualquer razão.

## PROPOSIÇÃO XV.

### THEOREMA.

517 Achar a razão, que tem duas figuras ſemelhantes.

Figura 18. e 19. Para achar a razão de duas figuras ſemelhantes A, e B, ſe deve buſcar huma terceira proporcional, como GH, aos ſeus lados homologos CD, EF, a razão da linha CD á linha GH ſerá a meſma que a do polygono A ao polygono B.

Para ſe demonſtrar baſta advertir, que ſendo os polygonos A, e B ſemelhantes, ſerá A : B :: $CD^2$ : $EF^2$ *; e ſendo as trez linhas CD, EF, GH continuamente proporcionaes, ſerá $CD^2$ : $EF^2$ :: CD : GH *: logo A : B :: CD : GH. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 494.

* Numer. 504.

## PROPOSIÇÃO XVI.

### PROBLEMA.

518 Fazer com hum lado determinado hum rectangulo igual a outro.

Figura 20. e 21. Pede-ſe hum rectangulo igual ao rectangulo BC, de ſorte que tenha hum dos ſeus lados igual á linha DE: buſque-ſe huma linha, que ſeja quarta proporcional á linha DE, e aos dous lados AC, e AB do rectangulo *, depois faça-ſe hum rectangulo com a linha DE,

* Numer. 511.

e

e com a quarta proporcional achada, eſte rectangulo ſerá igual ao rectangulo BC.

DEMONSTRAÇÃO.

No rectangulo GH o lado FG he igual á proporcional achada, o lado FH he igual a DE: logo teremos FH: AC :: AB : FG: logo FG×FH = AB× AC. * *O Q. S. Q. D.* Tom. I. * Numer. 202.

COROLLARIO I.

519 Deſta propoſição ſe ſegue, que havendo muitos rectangulos, cujas baſes, e alturas ſejão deſiguaes, ſe podem reduzir á meſma altura, e depois fazer hum ſó igual a todos juntos, dando lhe por baſe huma linha igual á ſomma de todas as baſes, e a altura commua.

COROLLARIO II.

520 Como todas as figuras rectilineas ſe podem reduzir a triangulos, e de cada triangulo ſe póde fazer hum rectangulo, ſegue-ſe tambem que dando-ſe a meſma altura aos rectangulos, que procedem de cada triangulo, ſe po-

poderão reduzir todos a hum ſó, e fazer hum quadrado igual a huma figura rectilinea, compoſta de hum grande numero de lados, como tambem á ſomma de muitas figuras rectilineas, pois não ha mais que buſcar huma meia proporcional entre os lados do rectangulo igual á figura rectilinea propoſta, ou á ſomma das figuras dadas.

ESCHOLIO.

521 Toda a theorica das razões das figuras ſemelhantes, e não ſemelhantes he fundada nas propoſições, que acabamos de demonſtrar; mas como todas as figuras geometricas, rectas, ou curvas ſe compõem de triangulos, para fazer eſta parte mais completa accreſcentaremos dous theoremas ácerca das propriedades dos triangulos, conſiderados a reſpeito das ſuas ſuperficies, cujo conhecimento não póde deixar de ſer muito util na Geometria prática. O primeiro, que tirei de hum livro de Mr. Scooten, Commentador de Geometria de Deſcartes, e que ſe não encontra em livro algum de elementos,

ſe

ſe póde contar entre as propoſições mais geraes, que ſe dão ácerca das razões dos triangulos. Eu teria começado por eſta propoſição o tratado das razões das figuras geometricas, e deduzido della todas as mais propoſições, que acabamos de demonſtrar, ſe iſto me não obrigára a fazer huma mudança mui conſideravel, e julguei melhor tratallo aqui em poucas palavras, pois póde ſervir de confirmar os principiantes neſta parte, que he abſolutamente neceſſaria para comprehender o mais que ſe ſegue. Tambem deſta propoſição ſe póde fazer hum grande uſo na Geodeſia, ou divisão dos campos. Não ha couſa, que mereça mais a noſſa attenção, como a ſimplicidade, com que Mr. Scooten revolve muitos problemas, que ſem o ſoccorro deſta propoſição parecerião muito embaraçados. O ſegundo theorema dá o modo de achar a ſuperficie de qualquer triangulo, de que ſe conhecem os trez lados. Já vimos que eſte conhecimento baſta para achar a ſuperficie, pois os trez lados determinão a perpendicular, que ſe deve

mul-

multiplicar por metade da baſe para
* Numer. 389. ter a area do triangulo. *

## PROPOSIÇÃO XVII.

### THEOREMA.

—522 Dous triangulos, quaeſquer
Figura 22. & 23. que ſejão, BAC, DEF, que tem hum angulo igual A, e D, comprehendido entre quaeſquer dous lados, são entre ſi como os productos dos lados, que comprehendem o angulo igual.

### DEMONSTRAÇÃO.

Sobre o lado AC do triangulo BAC ſe tome a parte AH=DF, e ſobre AB a linha AL=DE, tirem-ſe as rectas LH, BH, os triangulos LAH, EDF tendo pela hypotheſe hum angulo igual comprehendido entre lados iguaes, pela
* Numer. 382. conſtrucção sãc inteiramente iguaes *: iſto ſuppoſto os triangulos AHL, AHB, que tem o meſmo vertice em H, e os triangulos ABH, ABC, que tem o meſmo vertice em B, eſtão entre ſi na
* Numer. 393. razão das ſuas baſes *, e teremos as ſeguintes proporções AHL : AHB :: AL :

AL : AB, e ABH : ABC :: AH : AC : logo multiplicando estas duas proporções ordenadamente *, será ALH×ABH : AHB×ABC :: AL×AH, ou ED×DF :: AC×AB ; e dividindo os dous primeiros termos pela mesma quantidade ABH, e pondo em lugar do triangulo ALH o seu igual DEF, teremos * DEF : ABC :: ED×DF : AB×AC. *O Q. S. Q. D.*

* Tom. I. Numer. 225.

* Tom. I. Numer. 224.

## OUTRA DEMONSTRAÇÃO.

Dos vertices B, e E de cada hum dos triangulos se tirem sobre as bases AC, DF as perpendiculares BK, EM ; sendo os triangulos proporcionaes aos productos das bases por metade da altura, o serão tambem aos productos das bases pelas alturas, e será ABC : DEF : AC×BK : DF×EM ; mas os triangulos ABK, DEM são semelhantes por terem, além do angulo recto, hum angulo igual em cada hum, isto he, o angulo A do primeiro igual ao angulo D do segundo * : logo AB : DE :: BK : EM ; e multiplicando os dous antecedentes por AC, e os dous consequentes por DF, será * AB×AC : DE×DF :: BK×AC :

* Numer. 403.

* Tom. I. Numer. 223.

EM

EM×DF ; mas acabamos de moſtrar que ABC:DEF :: AC×BK:DF×EM: logo * ABC:DEF ::AB×AC:DE×DF. *O Q. S. Q. D.*

Tom. I. * Numer. 219.

## COROLLARIO I.

523 Segue-ſe das duas precedentes demonſtrações que tambem a propoſição he verdadeira, no caſo que os angulos dos dous triangulos ſejão ſupplemento hum do outro. Para ſe provar, continue-ſe a linha DF para G, de modo que GD=DF, e tire-ſe EG, os triangulos GED, DEF, tendo baſes iguaes, e o vertice no meſmo ponto, ſerão iguaes em ſuperficie * : logo ſendo ABC:DEF::AB×AC:DE×DF, ſerá tambem, pondo em lugar do triangulo DEF o ſeu igual GDE, e em lugar de DE×DF o ſeu igual DE×DG, ABC:GDE :: AB×AC:GD×DE.

* Numer. 386.

## COROLLARIO II.

524 Como os parallelogramos são duplos dos triangulos da meſma baſe, e da meſma altura, ſegue-ſe que quaeſquer dous parallelogramos, que tem hum

hum angulo igual, ou he ſupplemento hum do outro, são entre ſi como os productos dos lados, que comprehendem eſte angulo.

### COROLLARIO III.

525 Se os lados, que comprehendem o angulo igual, são reciprocos, iſto he, ſe tivermos eſta analogia AB: DE:: DF: AC, os rectangulos AB×AC, e DE×DF são iguaes: logo os triangulos, ou os parallelogramos, que eſtiverem na razão deſtes rectangulos, ſerão tambem iguaes, do que ſe vê que o Art. 396 he corollario mui ſimples deſta propoſição: póde-ſe logo geralmente eſtabelecer que dous triangulos, ou dous parallelogramos são iguaes, quando tem hum angulo igual, ou angulos, que são complemento hum do outro entre lados reciprocos.

### COROLLARIO IV.

526 Deſta propoſição ſe podia tambem deduzir a propriedade commua a todas as figuras ſemelhantes de ſerem entre ſi como os quadrados dos lados ho-

homologos; porque ſendo as figuras ſemelhantes, compoſtas de triangulos ſemelhantes, e tendo os triangulos ſemelhantes os lados homologos proporcionaes, os que contiverem angulos iguaes ſerão homologos: logo por ſerem os triangulos entre ſi como os productos deſtes lados, ſerão tambem na razão dos quadrados dos meſmos lados, porque he evidente que ſe AB:AC::DE:DF, ſerá tambem AB:AB::DE:DE: logo multiplicando ordenadamente, ſerá $AB^2 : AB \times AC :: DE^2 : DE \times DF$ *; e alternando $AB^2 : DE^2 :: AB \times AC : DE \times DF$ *; mas pela preſente propoſição ABC:DEF::AB×AC:DE×DF: logo ſendo os triangulos ſemelhantes, ſerá $ABC : DEF :: AB^2 : DE^2$.

Tom. I. * Numer. 225.

Tom. I. * Numer. 213.

## COROLLARIO V.

Figura 22. 527 Póde-ſe tambem uſar deſta propoſição para achar hum triangulo ALH, que com hum lado determinado AL ſobre o lado AB do triangulo ABC tenha com o triangulo ABC huma certa razão. Por exemplo: ſe ſe quizer o triangulo ALH a terça parte do trian-

gu-

gulo ABC, seja $AB=a$, $AC=b$, $AL=c$, e $AH=x$, pela presente proposição será $ab:cx::3:1$: logo $3cx=ab$; e desembaraçando a incognita, será $x=\frac{ab}{3c}$ *, segue-se que para ter $x$ se deve buscar huma quarta proporcional ás linhas 3 AL, AB, AC, porque da equação $3cx=ab$ se tira a proporção $3c:a::b:x$. *

Tom. I. * Numer. 294.

Tom. I. * Numer. 212.

ADVERTENCIA.

Para facilitar a intelligencia da seguinte proposição, que para os principiantes será hum pouco embaraçada, vamos explicar nos dous lemmas seguintes tudo o que he necessario saber-se para se comprehender facilmente.

## LEMMA I.

### PROBLEMA.

528 Inscrever hum circulo DFE em hum triangulo BAC. Figura 24.

Facilmente se vê que tudo se reduz a achar dentro no triangulo hum ponto G, que seja tal, que abaixando delle sobre cada lado as perpendiculares GD,

GD, GE, GF, eſtas linhas ſejão iguaes entre ſi; porque eſtando o circulo inſcripto no triangulo, cada lado ſerá huma tangente deſte circulo, e por conſequencia perpendicular á extremidade dos raios GD, GE, GF. Por hum pouco ſupponhamos que o ponto G he o que ſe buſca, e que eſtejão tiradas as perpendiculares GD, GE, GF aos lados AB, AC, BC, já vimos * que as partes AE, AD das tangentes comprehendidas entre o ponto A, em que ſe encontrão, e os pontos E, e D do contacto ſão iguaes entre ſi; mas as rectas EG, DG ſão tambem: logo os triangulos rectangulos AGD, AGE ſão totalmente iguaes, pois os trez lados de hum ſão iguaes aos trez lados do outro *: logo os angulos EAG, DAG ſão iguaes, e por conſequencia o centro do circulo ſe achará em alguma parte da linha AG, que divide o angulo BAC em duas partes iguaes. Do meſmo modo ſe moſtrará que os triangulos rectangulos BEG, BFG ſão iguaes, e que o centro do circulo ſe achará na linha BG, que divide o angulo BAC em dous igualmente:

* Numer. 449.

* Numer. 380.

te: logo será no ponto da interſecção das linhas AG, BG: aſſim para ter o centro G baſta dividir quaeſquer dous angulos A, e C, ou tambem A, e B, cada hum em dous iguaes; e o ponto G, em que ſe cortarem as linhas da divisão, será o que ſe buſca: abaixando pois deſte ponto a perpendicular GD ſobre o lado AC, teremos o raio, com que ſe deſcreva o circulo, que ſe pede.

## LEMMA II.

529 Suppondo tudo como no problema precedente, ſe ſe continua o lado AB, e ſe toma BK=FC, digo primeiro, que a linha AK será igual á ſimiſomma dos trez lados: ſegundo, que AK será a ſomma das trez differenças da ſimiſomma dos trez lados a cada hum dos meſmos lados.

### DEMONSTRAÇÃO.

*Primeiro.* Pois temos AE=AD, e BE=BF, DC=CF, a ſomma dos trez lados será 2AE+2BE+2CF, ou 2AE +2BE +2BK, por ſer BK=CF pela conſtrucção: logo a ſimiſomma dos trez la-

lados será AE+EB+BK=AK. *O Q. S. Q. D.*

*Segundo.* Por ser AK igual á semisomma dos trez lados, he evidente que BK he o excesso da semisomma ao lado AB. Tambem AE he o excesso da semisomma a BE+BK, ou ao seu igual BF+FC, isto he, o lado BC; e finalmente BE he o excesso da semisomma a BK+AE, ou aos seus iguaes DC+AD, ou ao terceiro lado AC: logo AK he a somma das trez differenças dos trez lados á semisomma dos mesmos lados. *O Q. S. Q. 2.º D.*

530 Tambem se deve notar que o triangulo BAC está dividido pelas linhas BG, GC, GA em trez triangulos AGC, AGB, BGC, que todos tem por altura o raio do mesmo circulo: logo a superficie deste triangulo será igual á somma dos trez triangulos, isto he, haverá esta igualdade $BAC=\frac{AB}{2}\times EG+\frac{AC}{2}\times GE+\frac{BC}{2}\times GE=\frac{AB+AC+BC}{2}\times GE=AK\times GE$. Esta reflexão he absolutamente necessaria para a intelligencia do seguinte theorema.

PRO-

## PROPOSIÇÃO XVIII.

### THEOREMA.

531 A ſuperficie de hum triangulo, qualquer que ſeja, por exemplo a do triangulo BAC, he igual á raiz quadrada de hum producto de quatro dimensões, feito da ſomma dos trez lados pelas differenças de cada hum dos lados á meſma ſomma. Figura 24.

### DEMONSTRAÇÃO.

Sobre o lado BC ſe tome huma parte BM igual á linha FC, e ficará CM igual a BF, tirando das linhas iguaes a parte commua FM: continue-ſe o lado AC, e ſe lhe accreſcente a parte CH igual a BF, ou CM, e teremos AH igual a AK, por ſerem as partes, que compõem eſta linha iguaes: levantem-ſe dos pontos K, M, H ſobre cada huma das linhas, que lhe correſpondem, as perpendiculares KI, MI, HI, que ſe encontrarão todas em hum ſó, e no meſmo ponto I, e ſerão todas iguaes entre ſi, porque BM he igual a BK; e tirando a linha BI, os

triangulos rectangulos BMI, BKI ſerão iguaes, por quanto tem, além do angulo recto, dous lados reſpectivamente iguaes, que são o lado MB igual a BK, e o lado BI commum: logo o lado KI ſerá igual ao lado MI. Do meſmo modo ſe moſtra MI igual a HI, pois as linhas CM, e CH são iguaes: depois ſe continuará a linha AG, que tambem irá ao ponto I, como he evidente, por ſerem os quadrilateros AEGD, AKIH ſemelhantes, pois as linhas GD, GE são iguaes entre ſi, e parallelas ás linhas IH, IK, tambem iguaes entre ſi; e as linhas AD, AE tambem são iguaes entre ſi, como tambem as linhas AH, AK.

Suppoſta eſta conſtrucção, facilmente ſe vê que os quadrilateros EGBF, MBKI são ſemelhantes, por ter cada hum dous angulos rectos, e os lados EG, FG iguaes entre ſi, do meſmo modo que os lados BK, BM; o angulo EBF do primeiro igual ao angulo em I do ſegundo, pois cada hum delles he o ſupplemento do meſmo angulo KBM, e em todo o quadrilatero os

qua-

quatro angulos valem quatro rectos: logo os triangulos GEB, BKI, que são metades deſtes quadrilateros, são ſemelhantes, e com os ſeus lados homologos ſe póde formar eſta proporção IK:KB::BE:GE, do que ſe ſegue, por ſerem iguaes os productos dos extremos, e dos meios, IK×GE =BK×BE; mas $GE^2$:IK×GE::GE:IK; e por ſerem os triangulos AEG, AKI ſemelhantes, ſerá GE:IK::AE:AK: logo $GE_2$:IK×GE, ou BK×BE::AE:AK; e tomando os productos dos extremos, e dos meios, ſerá $GE^2$ × AK=BK×BE×AE; e multiplicando ambos os membros deſta equação por AK, ſerá $GE^2 \times AK^2$=BK×BE×AE×AK, do que ſe deduz, tomando a raiz de huma, e outra parte dos membros da equação GE×AK, ou *a ſuperficie do triangulo BAC=$\sqrt{BK \times BE \times AE \times AK}$; mas eſtas fracções, que ficão de baixo da radical, são as trez differenças da ſemiſomma dos lados a cada hum dos lados, multiplicadas pela meſma ſemiſomma AK: logo a ſuperficie do triangulo BAC he igual á

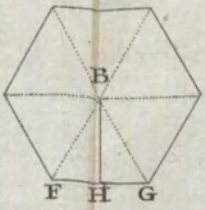
raiz quadrada de hum producto de quatro dimensões, feito da semisomma dos trez lados, multiplicado pela differença da mesma semisomma a cada hum dos lados. *O Q. S. Q. D.*

## FIM DO SETIMO LIVRO.

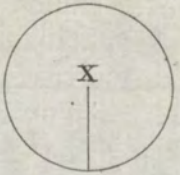
NO-

1

2

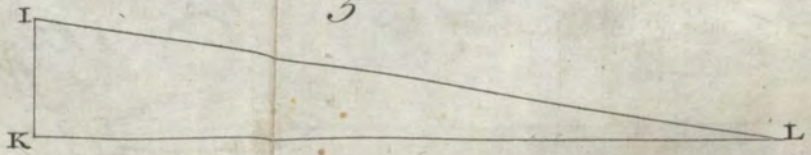



3



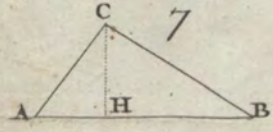

4

5



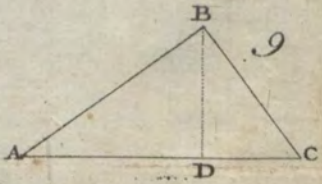

6

7



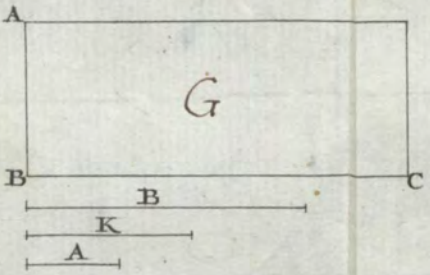

8

9




T.II.

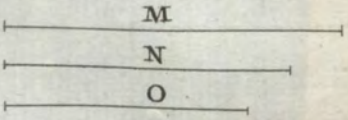
10



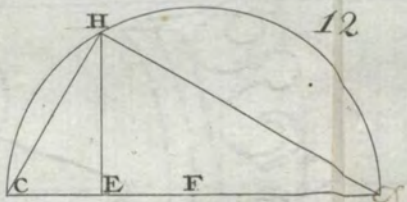




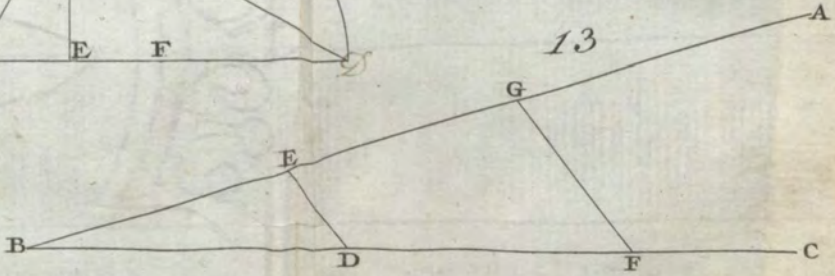
11



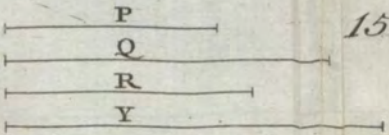

12



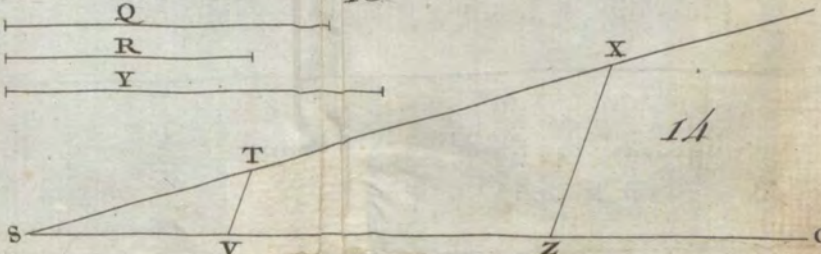

13

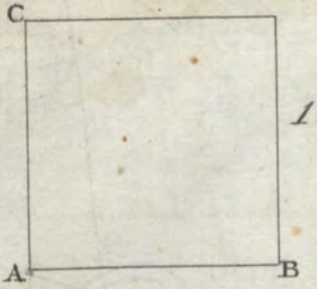



15

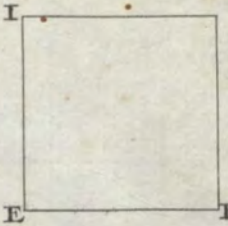



14

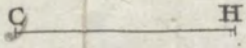


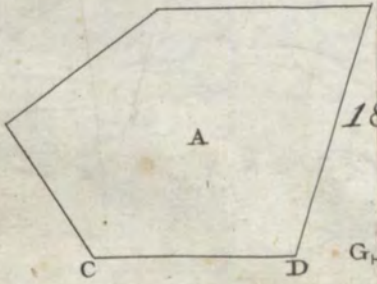



16

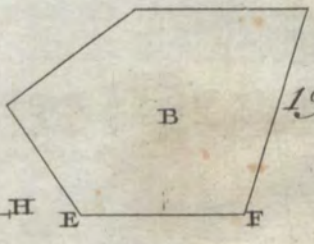



17

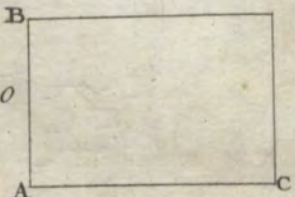


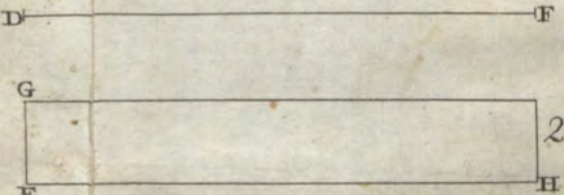

18




19



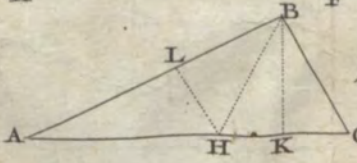

20



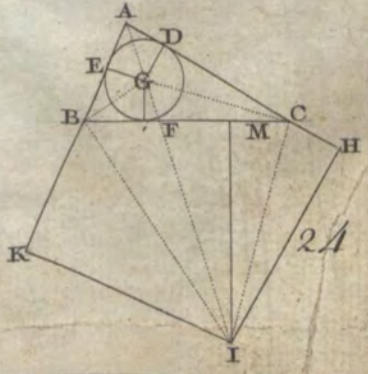




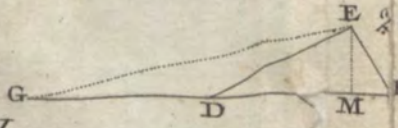
21




22




24




23

# NOVO CURSO DE MATHEMATICA.

## LIVRO VIII.

*TRATÃO-SE AS PROPRIEDADES dos corpos a respeito da sua superficie, e solidez.*

### DEFINIÇÕES.

I.

532 *PRISMA* he hum solido terminado por dous polygonos semelhantes iguaes, e parallelos entre si, e por tantos parallelogramos, quantos são os lados do poly- Estamp. 12 Figura 1.

lygono, que lhe ſerve de baſe: tal he o ſolido A. Chama-ſe *eixo do priſma* huma recta, como CB, tirada do centro C do polygono, que lhe ſerve de baſe, ao centro B do polygono ſuperior: ſe eſta linha he perpendicular á baſe do priſma, ſe chama *priſma recto*; e ſe chama *priſma obliquo*, ou *inclinado*, quando eſta linha he inclinada ſobre o plano da baſe.

II.

Figura 2. 533 Chama-ſe *cylindro* hum ſolido gerado pelo movimento de hum circulo, que ſe move parallelamente a ſi meſmo por huma linha AB: o circulo inferior deſte ſolido ſe chama *baſe do cylindro*, ou *circulo gerador*: a linha CD tirada do centro do circulo gerador, ou inferior ao centro do circulo ſuperior, ſe chama *eixo do cylindro*: ſe eſta linha he perpendicular ao circulo inferior, o cylindro ſe chama recto; e ſe eſta linha he inclinada ſobre a baſe, chama-ſe *cylindro obliquo*. Deſta geração do cylindro ſe ſegue, que ſe hum cylindro ſe córta por hum plano parrallelo á baſe do cylindro, o córte re-

pre-

preſentará hum circulo, pois o circulo gerador neceſſariamente paſſou por eſte plano para gerar o cylindro.

III.

534 Se de qualquer ponto A fóra do polygono ſe tirão as rectas AB, AC, AD, AE a todos os angulos do polygono, reſulta hum ſolido, que ſe chama *pyramide*, cuja baſe he o polygono dado, e ſe termina por tantos triangulos, quantos são os lados do polygono: os ſolidos repreſentados pelas figuras 3, e 4 são pyramides: o ponto A, de que ſe tirão as linhas aos angulos da baſe, ſe chama *vertice da pyramide*: ſe a baſe da pyramide he hum polygono regular, a linha AH, tirada do centro H da baſe ao vertice da pyramide, ſe chama *eixo da pyramide*: quando eſte eixo he perpendicular á baſe, a pyramide he recta; ſe he obliqua, he inclinada. Figura 3.

IV.

535 Se o polygono, que ſerve de baſe á pyramide, he hum circulo, dá-ſe-lhe então o nome de *pyramide conica*, ou *cone*: póde-ſe pois imaginar o co-

cone formada pelo movimento de hu-
Figura 5. ma recta CA fixa em C, que o ſeu extremo inferior volta á roda de hum circulo ADBA, fóra do qual eſtá o ponto C. O circulo ADBA ſe chama *baſe do cone*, o ponto C *vertice do cone*, a linha CE tirada do centro da baſe ao vertice ſe chama *eixo*: ſe o eixo he perpendicular á baſe do cone, chama-ſe *recto*: ſe o eixo he inclinado á meſma baſe, chama-ſe *cone obliquo*. Eſtes cones são repreſentados nas Fig. 5, e 6.

Tambem ſe póde imaginar o cone recto formado pelo movimento de hum triangulo rectangulo AEC á roda de hum dos lados do angulo recto CE; mas o cone obliquo não ſe póde ſuppôr formado pela revolução de hum triangulo obliquangulo á roda de algum dos ſeus lados, e por iſſo ſe deve preferir a primeira definição por ſer mais geral.

V.

536 Chama-ſe cone *truncado recto* hum ſolido formado pela revolução de
Figura 7. hum trapeſoide rectangulo, como FG HI á roda de hum dos ſeus lados GF,

que

que eſtá entre os dous angulos rectos. Tambem ſe póde dizer que o cone truncado he o que reſta de hum cone ABC, depois de delle ſe ter tirado o pequeno cone BDE, que ſe cortou por hum plano parallelo á baſe do cone.

VI.

537 A *eſfera* he hum ſolido terminado por huma ſuperficie curva, a que ſe chama *ſuperficie eſferica*, como AB CD, dentro do qual ha hum ponto chamado *centro da eſfera*, do qual todas as linhas rectas tiradas á ſuperficie são iguaes entre ſi. Póde-ſe imaginar a eſfera gerada do movimento do ſemicirculo á roda do diametro, o ſemicirculo gera o ſolido da eſfera, e a ſemicircumferencia a ſuperficie da meſma eſfera. Figura 8.

VII.

538 *Segmento eſferico*, ou porção da eſfera he hum ſolido comprehendido de huma parte da ſuperficie da eſfera, e da de hum circulo; ou huma das duas partes deſiguaes da eſfera, cortada por hum plano, que não paſſa pelo centro: ſe o plano da ſecção paſ-

ſa

ſa pelo centro da esfera, a divide em dous ſegmentos iguaes, a que chamão *hemisferios*: póde-ſe imaginar o ſegmento esferico gerado da revolução de hum ſegmento de circulo á roda de huma linha, que divide a corda deſte ſegmento em duas partes iguaes, e lhe he perpendicular.

VIII.

539 Chama-ſe *Zona* huma parte
Figura 9. ABCD da ſuperficie de huma esfera, terminada por dous circulos BC, AD da meſma esfera parallelos entre ſi.

IX.

Eſtamp. 13 540 O *ſector da esfera* he hum ſolido terminado em ponta no centro da esfera, que tem por baſe huma parte
Figura 10. da ſuperficie da esfera, como COH: póde-ſe imaginar o ſector esferico como produzido da revolução de hum ſector de circulo á roda de huma linha, que paſſa pelo centro, e divide a corda em duas partes iguaes.

X.

Figura 11. 541 *Orbe* he hum corpo esferico, terminado por duas ſuperficies esfericas concentricas, huma concava, e outra

tra convexa, como o corpo, que ſe comprehende entre as duas ſuperficies eſfericas, huma convexa BCDE, e outra concava FGHT; do que fica claro que o orbe he o reſto, quando de huma eſfera maior, como BCDE, ſe tira outra menor concentrica FGHI. O orbe ſe póde conceber como formado pela revolução de huma coroa á roda do ſeu diametro.

542 Como hum orbe, v. gr. X, ſe póde conceber de huma groſſura infinitamente pequena, ſegue-ſe que a eſfera póde ſer conſiderada como compoſta de infinitos orbes, de que o maior he a ſuperficie da eſfera, e o menor o que ſe termina em o no centro da eſfera. Figura 11.

## XI.

543 *Angulo ſolido* he o que he formado de muitos planos, que ſe encontrão no meſmo ponto, como por exemplo o angulo E, que ſe fórma com os planos BEA, AED, DEC, BEC. Para melhor comprehender eſta definição, deve-ſe conſiderar o vertice das pyramides, os cantos dos cubos, e dos pa- Figura 12.

parallelipipedos, que são angulos solidos. Para formar hum angulo solido, são precisos ao menos trez planos, assim como para se formar hum angulo plano se precisão duas linhas.

## PROPOSIÇÃO I.

### THEOREMA.

544 A superficie de qualquer prisma recto, sem comprehender a sua base, he igual á de hum rectangulo, que tivesse por base huma linha FG igual á somma dos lados da base do prisma, e por altura huma linha GH igual á altura DE do prisma.

Figura 13. e 14.

### DEMONSTRAÇÃO.

Se o prisma recto tem por base hum exagono regular, será comprehendido por seis rectangulos taes, como DH: logo se a linha FG igual á somma dos lados do polygono juntos, será sextuplo do lado AD; e como os rectangulos HD, FH tem a mesma altura, o rectangulo FH será sextuplo do rectangulo HD, e por consequencia he igual á superficie do prisma. *O Q. S. Q. D.*

Co-

### COROLLARIO.

545 Como o cylindro tem por baſe hum circulo, que ſe póde conſiderar como hum polygono de infinitos lados, ſegue-ſe que o rectangulo, que tiver por baſe huma recta igual á circumferencia do circulo, que lhe ſerve de baſe ao cylindro, e por altura a do cylindro, que ſe ſuppõe recto, ſerá igual á ſuperficie do meſmo cylindro.

Do meſmo modo ſe demonſtraria que a ſuperficie de qualquer priſma recto, cuja baſe foſſe hum polygono irregular, como quizermos, he igual á de hum rectangulo, que tiveſſe a meſma altura do priſma, e a baſe foſſe igual á ſomma dos lados do polygono.

## PROPOSIÇÃO II.

### THEOREMA.

546 A ſuperficie de qualquer pyramide recta, como ABC, he igual á de hum triangulo, que tiver por baſe huma linha GI igual á ſomma dos lados do polygono regular, que lhe ſer- Figura 15. e 16.

ve de baſe, e por altura huma linha GH igual á perpendicular BF, tirada do vertice da pyramide ſobre hum lado DE.

DEMONSTRAÇÃO.

Supponhamos que a pyramide ABC ED tem por baſe hum exagono regular, como ſe ſuppõe ſer recta, ſerá terminada por ſeis triangulos iguaes ao triangulo DBE: logo ſe tivermos hum triangulo GHI, cuja baſe HI ſeja ſextupla da baſe DE do triangulo DBE, e a altura foſſe igual á do meſmo triangulo, a ſuperficie deſte ultimo triangulo GHI ſerá ſextupla da do triangulo DBE: logo ſerá igual á ſuperficie da pyramide, ſem comprehender a ſua baſe. *O Q. S. Q. D.*

547 Se a baſe da pyramide não foſſe polygono regular, a perpendicular tirada do vertice da pyramide ſobre cada lado não ſeria a meſma em todos os triangulos, ainda que a pyramide foſſe recta, e iſto ſuccederia ainda no caſo que a pyramide tiveſſe por baſe hum polygono regular, ſenão foſſe recta.

Neſ-

Neſtes dous caſos ſe deve buſcar a ſuperficie de cada hum dos triangulos em particular, e a ſomma deſtas ſuperficies ſerá a ſuperficie da pyramide.

COROLLARIO.

548 Como hum cone recto ſe póde conſiderar como huma pyramide recta de infinitos lados, ſegue-ſe que a ſua ſuperficie ſerá igual á de hum triangulo, que tiveſſe por baſe huma linha igual á circumferencia do circulo, que lhe ſerve de baſe, e por altura huma linha igual ao lado do cone.

## PROPOSIÇÃO III.

THEOREMA.

549 Os parallelipipedos, e priſmas rectos eſtão entre ſi na razão compoſta das razões das ſuas trez dimensões, ou como os productos das ſuas trez dimensões.

DEMONSTRAÇÃO.

Já vimos que para achar a ſolidez dos parallelipipedos era preciſo multi-

tiplicar o producto das dimensões das ſuas baſes pelas alturas : logo ſe tivermos dous priſmas, dos quaes hum ſeja A, e outro B, e as dimensões do primeiro ſejão *abc*, as do ſegundo *def*, o ſolido do primeiro priſma, ou o meſmo priſma, ſerá *abc*; e o ſolido do ſegundo priſma, ou o meſmo priſma, ſerá *def*: logo ſerá A:B::*abc*:*def*; mas a razão de *abc* a *def* he compoſta das trez razões de *a* a *d*, de *b* a *e*, e de *c* a *f*: logo os priſmas eſtão entre ſi em razão compoſta das ſuas trez dimensões, ou como os productos das ſuas dimensões. *O Q. S. Q. D.*

## COROLLARIO.

550 Segue-ſe tambem que a razão dos ſolidos da meſma eſpecie ſe achará multiplicando as ſuas baſes pelas ſuas alturas: por ſolidos da meſma eſpecie entendo, por exemplo, pyramides, cones, &c.; porque ainda que não enſinaſſemos o modo de achar a ſolidez das pyramides, e dos cones, iſto não embaraça, para que aſſentemos que eſta depende dos productos das ſuas trez di-

dimensões; porque se para achar o solido de huma pyramide se deve multiplicar a base pelo terço, v. gr. ou pela metade da altura, he certo que para achar o solido de outra pyramide tambem será preciso multiplicar a base pelo terço, ou metade da sua altura; assim multiplicando do mesmo modo as trez dimensões de huma pyramide, e as trez da outra, se estes productos não dão a sua solidez, ao menos darão a razão, que tem as pyramides entre si.

## PROPOSIÇÃO IV.

### THEOREMA.

551 Toda a pyramide ABCDE, v. gr. he o terço de hum prisma da mesma base, e da mesma altura. Figura 17.

Suppondo a base AC ser hum quadrado, chamaremos AD, ou DC $a$, AH, ou EF $b$, e a perpendicular EG $\frac{1}{2}a$, pois he metade de IK, ou AD.

### DEMONSTRAÇÃO.

Imagine-se que do prisma AK se tira a pyramide ABCDE, o resto são

outras duas pyramides taes como AHI EB, que tem cada huma por baſe hum dos rectangulos AHIB da ſuperficie do priſma, e por altura huma perpendicular igual a EG. Ora ſe multiplicarmos *aa*, que he a baſe AC da pyramide AEC, pela ſua altura EF, que he *b*, teremos *aab* producto das trez dimensões; e multiplicando tambem *ab*, que he a baſe da pyramide AHEB, pela altura EG, que he $\frac{1}{2}a$, ſerá o producto $\frac{aab}{2}$ das trez dimensões: aſſim a pyramide ABCDE he á pyramide AHIEB, como *aab* he a $\frac{aab}{2}$: logo a primeira he dupla da ſegunda *, pois eſtas pyramides são entre ſi, como os productos das trez dimensões; mas como ha quatro pyramides iguaes a $\frac{aab}{2}$, a ſua ſomma ſerá $\frac{4aab}{2}$, ou $2aab$; e juntando a eſta ſomma a pyramide ABCDE $= aab$, teremos o ſolido inteiro $= 3aab$: logo a pyramide AEC ſerá o terço do ſolido, ou priſma recto AK. O Q. S. Q. D.

* Numer. 550.

Co-

## COROLLARIO I.

552 Sendo a pyramide ABCDE o terço do prisma AK, se se cortar esta pyramide por hum plano BED, que passe pelo vertice E, e pelos angulos oppostos da base, este plano dividirá a pyramide total em outras duas pyramides iguaes, pois cada huma dellas tem a mesma base, e a mesma altura: logo sendo a pyramide total a terça parte do prisma total, será a pyramide triangular a terça parte do prisma triangular; do que se segue, que qualquer pyramide he o terço de hum prisma da mesma base, e da mesma altura, porque hum prisma pentagonico, por exemplo, se póde imaginar como composto de sinco prismas triangulares, e huma pyramide pentagonica tambem como composta de sinco pyramides triangulares; e como cada huma dellas he o terço do prisma correspondente, a pyramide total será tambem o terço do prisma total.

## COROLLARIO II.

553 Segue-se desta proposição, que para achar a solidez de huma pyramide tal como ABCDE, que tem por base hum quadrado, se deve multiplicar a base, isto he, o quadrado AD pelo terço da altura da pyramide, que he a perpendicular CH, ou tambem multiplicar a base por toda a altura, e tomar o terço do producto.

## COROLLARIO III.

Estamp. 14 Figura 18. 554 Se a pyramide recta ACD se córta por hum plano FCG, que passando pelo eixo seja parallelo a hum dos lados da base, a secção será hum triangulo Isoceles FCG, do qual todos os elementos, como IK, estão em proporção arithmetica; mas como todos estes elementos são outras tantas linhas iguaes aos lados dos quadrados, que compõem a pyramide, segue-se que a pyramide se compõe de hum numero infinito de quadrados, dos quaes os lados todos estão em progressão arithmetica; e como para achar a somma

deſtes quadrados ſe deve multiplicar o quadrado AD pelo terço da perpendicular CH, póde-ſe tirar deſte diſcurſo hum principio geral, e he, que ſe tivermos huma progreſsão arithmetica infinita, compoſta de linhas, das quaes a mais pequena ſe termine em o, a ſomma dos quadrados de todas eſtas linhas ſe achará, multiplicando o quadrado da maior pela terça parte da grandeza, que expreſſa o numero das linhas, ou dos quadrados. Como a ſerie de numeros naturaes he huma ſerie de grandezas, que ſe augmentão em progreſsão arithmetica, póde-ſe por eſta propoſição moſtrar que a ſomma dos quadrados de todos os numeros poſſiveis, depois da cifra até o infinito, he igual ao terço do cubo do ultimo numero, que ſe póde imaginar, ou tambem ao terço do cubo infinito.

A comprehensão deſte corollario he de ſumma importancia, pois delle nos havemos de ſervir nas demonſtrações, que ſe ſeguem.

Co-

## COROLLARIO IV.

Figura 19. 555 Segue-se disto, que para achar a solidez de huma pyramide recta ABC, que tem por base qualquer polygono AC, se deve multiplicar a base pelo terço do eixo BD; porque como esta pyramide he composta de huma infinidade de polygonos semelhantes á base, e todos estes polygonos semelhantes estão em razão dos quadrados dos seus lados homologos *, ou dos seus raios, como EF, AD, os quaes são os mesmos elementos do triangulo ABD, póde-se dizer que estes polygonos estão na razão dos quadrados das linhas de huma progressão infinita arithmetica, e consequentemente para achar o valor será preciso multiplicar o maior polygono AC pelo terço da perpendicular BD.

* Numer. 493.

## COROLLARIO V.

Figura 21. 556 Como o cone ABC he composto de huma infinidade de circulos, cujos raios são os elementos, como EF, AD do triangulo ABD, segue-se que

que estando estes circulos na mesma razão que os quadrados dos seus raios *, será preciso para achar o valor de todos estes circulos, de que se compõe o cone, multiplicar o maior circulo AC pelo terço da perpendicular BD, que determina a sua quantidade.

* Numer. 496.

## PROPOSIÇÃO V.

### THEOREMA.

557 Se tivermos duas pyramides ABC, HIK, e a altura da primeira for igual á altura LO da segunda, digo, que ellas serão entre si na razão da base AC á base HK. Figura 19. e 20.

Suppondo que a base AC seja hum exagono regular, e a base KH hum quadrado, chamemos o lado MN $a$, a perpendicular DG $b$, o lado HI, ou IK $c$, a altura BD, ou LO $d$: isto supposto, a base AC será $6\frac{ab}{2}$, ou $3ab$, a base KH será $cc$; e multiplicando estas duas bases pelo terço da altura, que he commua, isto he, por $\frac{d}{3}$, teremos $3\frac{abd}{3}$

va-

valor da primeira pyramide, e $\frac{ccd}{3}$ valor da pyramide HKL *: devemos logo mostrar que $abd : \frac{ccd}{3} :: 3ab : cc$.

*Numer. 555.

## DEMONSTRAÇÃO.

Esta proporção he evidentemente boa, pois o producto dos extremos he igual ao producto dos meios, porque $abdcc = \frac{3abdcc}{3} = abdcc$. * O Q. S. Q. D.

Tom. I. * Numer. 210.

## COROLLARIO.

558 Sendo os cones pyramides de huma infinidade de lados, segue-se que quando tiverem a mesma altura, estarão na razão das suas bases. O mesmo serão os prismas, e cylindros, que são triplos das pyramides, ou cones da mesma base, e da mesma altura; porque se as partes são entre si como os todos, reciprocamente os todos serão entre si como as suas partes do mesmo nome.

PRO-

## PROPOSIÇÃO VI.

### THEOREMA.

559 Se tivermos dous prismas X, e Y, cujas bases, e alturas sejão reciprocas, digo que são iguaes. Figura 22, e 23.

### DEMONSTRAÇÃO.

Para se demonstrar supponhamos *ab* a base do prisma *x*, *cd* a base do prisma *y*, *e* a altura do prisma *y*, e *f* a altura do prisma *x*: isto supposto, pela hypothese temos $ab : cd :: e : f$: logo $abf = cde$*; mas o primeiro membro desta equação he o producto das trez dimensões do prisma *x*, e o segundo o producto das trez dimensões do prisma *y*: logo estes prismas são iguaes. *O Q. S. Q. D.* Tom. I. * Numer. 202.

### COROLLARIO.

560 Segue-se desta proposição que os cylindros, as pyramides, e os cones, que tem as bases, e alturas reciprocas, são iguaes entre si, e a demonstração he a mesma precedente.

PRO-

## PROPOSIÇÃO VII.

### THEOREMA.

Figura 24. 561 Huma pyramide truncada, v. gr. ABEH, he igual a huma pyramide, que tiveſſe por baſe hum plano igual aos dous quadrados BE, e AH juntos, e mais hum plano, que foſſe meio geometrico entre eſtes dous quadrados, e por altura o eixo FG.

Figura 25. Conſiderando a figura HKIL como córte de huma pyramide truncada, cortada por hum plano perpendicular á ſua baſe, e que paſſaſſe pelo ſeu vertice, e o triangulo HMI como o córte da pyramide inteira, chamemos ao lado AD $a$, KL, ou BC $b$, o eixo MG $c$, e o pequeno eixo MF da pyramide KML $d$; aſſim o eixo da pyramide truncada ſerá $c-d$, e teremos $aa+bb+ab$ por baſe da pyramide, que queremos demonſtrar, igual á pyramide truncada, porque $ab$ he meio proporcional entre $aa$, e $bb$ *: aſſim falta provar que o producto de $aa+bb+ab$ por $\frac{c-d}{3}$, que he $\frac{aac+bbc+abc-aad-bbd-abd}{3}$, he igual ao ſolido da pyramide truncada.

*Numer. 506.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

A pyramide truncada he igual á differença da pyramide inteira á pyramide, que se cortou: o solido da pyramide inteira HMI he $\frac{aac}{3}$, a pequena pyramide he $\frac{bbd}{3}$; e tirando a pequena da maior, a differença será o valor da pyramide truncada $\frac{aac-bbd}{3}$, o que deve ser igual ao producto $\frac{aac+bbc+abc-aad-bbd-abd}{3}$, o que dá esta equação $\frac{aac-bbd}{3}=\frac{aac+bbc+abc-aad}{3}$ $\frac{-bbd-abd}{3}$, que se deve demonstrar.

Por serem os triangulos HMI, KML semelhantes, será HI : KL :: MG : MF, ou $a:b::c:d$, o que dá $ad=bc$ *: pondo pois $bc$ em lugar de $ad$ no quarto, e sexto termo do segundo membro da equação, teremos esta $\frac{aac-bbd}{3}=\frac{aac+bbc}{3}$ $\frac{+abc-abc-bbd-bbc}{3}$, na qual tirando os ter-

Tom. I. * Numer. 202.

termos, que se destroem, teremos $\frac{aac - bbd}{3} = \frac{aac - bbd}{3}$. *O Q. S. Q. D.*

## COROLLARIO I.

562 Segue-se desta proposição, que para achar o valor de huma pyramide truncada, se deve multiplicar o lado da base inferior desta pyramide pelo lado da base superior para ter o plano *ab* meio entre os dous; e juntando a este plano a somma das duas bases inferior, e superior, multiplicar tudo pelo terço da perpendicular FG.

## NOTA.

563 Se a base da pyramide não fosse hum quadrado, para achar o plano medio seria preciso multiplicar os dous planos hum por outro, e extrahir a raiz; mas este plano se póde achar de outro modo mais simples, que vamos mostrar. Supponhamos que a base da pyramide he hum pentagono regular, a base superior da pyramide será tambem hum pentagono regular semelhante ao da base inferior, porque a pyra-

mi-

mide se suppõe cortada por hum plano parallelo á base: seja *2a* o contorno do primeiro polygono, e *b* a perpendicular, que mede a altura do triangulo: seja tambem *2c* o contorno do polygono, que he base da pyramide, que se cortou, e *d* a perpendicular, que mede a altura de hum triangulo, a superficie do primeiro polygono será metade do circuito multiplicada pela altura de hum triangulo: do mesmo modo a superficie do segundo polygono, ou da base superior, será a sua perpendicular multiplicada por metade do circuito *: logo a base inferior será *ab*, e a base superior será *cd*: multiplicando estas duas superficies huma por outra, o producto será *abcd*, cuja raiz dará o meio entre as duas bases; mas sendo estes polygonos semelhantes, os seus contornos, ou metade delles serão entre si como as perpendiculares: logo será $a:b::c:d$, do que se tira $ad=bc$ *: logo se no producto *abcd* se põe em lugar de *bc* o producto *ad*, que lhe he igual, o quadrado do plano meio geometrico entre as duas bases será *aadd*,

* Numer. 484.

Tom. I. * Numer. 202.

cu-

cuja raiz *ad* ſe póde logo conhecer, e ſerá o meſmo plano geometrico: do que ſe ſegue, que para achar hum polygono ſemelhante a outros dous polygonos ſemelhantes entre ſi, o qual ſeja meio geometrico entre eſtes dous polygonos, ſe deve multiplicar metade do circuito do maior pela perpendicular do outro, ou metade do circuito do menor pela perpendicular do maior. Inſiſti neſta reflexão, porque dá hum methodo mui facil de achar huma ſuperficie media geometrica entre duas ſuperficies ſemelhantes, e que ſe não acha nos outros elementos. Por exemplo: para achar hum circulo meio geometrico entre dous circulos dados, cujos raios são *a*, e *b*, as circumferencias 2*c*, e 2*d*, o circulo medio ſerá ou *ad*, ou *bc*, que ſe acha logo, ſem ſer preciſo extrahir raizes.

## COROLLARIO II.

564 Como hum cone truncado ſe compõe de huma infinidade de circulos, que todos eſtão na razão dos quadrados, que compõem huma pyramide trun-

truncada, ſegue-ſe que para lhe achar a ſolidez ſe deve buſcar hum circulo medio entre os dous circulos oppoſtos, e ajuntar eſta em ſomma com os dous circulos, que ſervem de baſe, e multiplicar tudo pelo terço do eixo comprehendido entre os dous circulos. O meſmo ſe deve entender de qualquer outra pyramide truncada, ou a baſe ſeja regular, ou irregular.

LEMMA.

565 Huma linha meia proporcional entre as partes EG, e GF do diametro EF de hum circulo, ſerá o raio de hum circulo igual á coroa X. Figura 26.

DEMONSTRAÇÃO.

Pela natureza do circulo GH * he meia proporcional entre as partes EG, GF do diametro; e por ſer o triangulo DGH rectangulo, teremos $GH^2 = DH^2 - DG^2$ *; e como os circulos eſtão na meſma razão que os quadrados dos ſeus raios, ſerá o circulo de GH igual ao circulo de DH, menos o circulo de DG; mas a coroa tambem he igual á dif- * Numer. 443. * Numer. 409.

differença dos dous circulos descriptos com o raio DH, e com o raio DG: logo a coroa he igual ao circulo, cujo raio he GH, ou de huma linha meia proporcional entre as partes do diametro.

## PROPOSIÇÃO VIII.

### THEOREMA.

Figura 27. 566 Se tivermos huma meia esfera AED inscripta em hum cylindro AB CD, digo que a meia esfera he igual aos dous terços do cylindro.

Continue-se o diametro BC para F, de sorte que BF seja igual á BA, e tire-se a linha FA, que dará o triangulo Isocele ABF.

### DEMONSTRAÇÃO.

Se se suppõem a meia esfera, e o cylindro cortados por hum plano GL parallelo á base AD, esta secção formará a coroa GH: abaixe-se do ponto H a perpendicular HI sobre o diametro AD, que pelo lemma precedente será o raio do circulo igual á coroa GH, pois he meia proporcional entre as partes AI, ID,

ID *, ou GH, HL, que lhe são iguaes; mas como as linhas HI, GA, GK são iguaes pela conſtrucção, ſegue-ſe que a coroa GH ſerá igual ao circulo, cujo raio for a linha correſpondente GK, que he hum dos elementos do triangulo ABE; e como o triangulo ſe compõe de tantos elementos, quantas coroas ha no eſpaço entre a meia esfera, e o cylindro, ſendo a ſomma das coroas, e dos elementos expreſſada pela linha BA, ſegue-ſe que todos os circulos, cujos raios forem os elementos dos triangulos, em ſomma são iguaes a todas as coroas; e como para achar o valor de todos eſtes circulos he preciſo multiplicar o circulo do maior elemento EB pelo terço da linha BA *, para achar a ſomma de todas as coroas ſerá preciſo multiplicar a maior B, que he o circulo, que ſerve de baſe ao cylindro, pelo terço da linha AB, altura do cylindro; do que ſe ſegue que em ſomma são iguaes ao terço do cylindro, e que por conſequencia a meia eſfera he os dous terços do cylindro. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 443.

* Numer. 556.

COROLLARIO I.

567 Pois a meia esfera he os dous terços do cylindro, em que ella está
Figura 27. inscripta, isto he, da mesma base, e da mesma altura, segue-se que para achar a solidez se deve multiplicar o seu maior circulo AD pelos dous terços do raio ME.

COROLLARIO II.

568 Sendo a meia esfera os dous terços de hum cylindro da mesma base, e da mesma altura, será a esfera os dous terços do cylindro, que tiver por base o circulo maximo da esfera, e a altura o diametro: assim para achar a solidez de huma esfera, deve-se multiplicar o circulo maximo pelos dous terços do diametro, ou tambem multiplicar o circulo maximo pelo diametro, e tomar os dous terços do producto.

COROLLARIO III.

Figura 28. 569 Se imaginarmos o quarto de circulo composto de hum numero infini-

nito de elementos, como DE, veremos que se o quarto do circulo se mover á roda do raio AB, descreverá huma meia esfera como X, que será composta de huma infinidade de circulos, dos quaes todos os elementos do quarto do circulo serão raios; e como estes circulos estão na mesma razão que os quadrados dos seus raios *, e para achar o valor de todos os circulos, cujos raios são os elementos do quarto do circulo, se deve multiplicar o circulo, que tem o raio maior BC, pelos dous terços do semidiametro AB *, segue-se que para achar os quadrados de todos os elementos do quarto do circulo AC, he preciso multiplicar o quadrado do maior elemento pelos dous terços da linha AB, e que deste discurso se póde tirar este principio geral: Que em huma serie de elementos infinitos do quarto do circulo a somma de todos os elementos será igual ao producto do quadrado do maior elemento, isto he, do raio pelos dous terços do mesmo raio.

Figura 29.

* Numer. 496.

* Numer. 567.

## PROPOSIÇÃO IX.

### THEOREMA.

570 A ſolidez das eſferas eſtão entre ſi na meſma razão que tem os cubos dos ſeus diametros.

Figura 30. Chamemos o diametro AB $a$, a ſua circumferencia $b$; o diametro CD $c$, a ſua circumferencia $d$, a ſuperficie do circulo maximo da primeira eſfera ſerá $\frac{ab}{4}$, pois para a ſuperficie do circulo ſe deve multiplicar metade da circumferencia pelo raio *; do meſmo modo a ſuperficie do circulo maximo da eſfera ſegunda he $\frac{cd}{4}$: depois multiplicando cada huma deſtas ſuperficies pelos dous terços do ſeu diametro, teremos $\frac{2a^2b}{12}$, ou $\frac{a^2b}{6}$, ſolido da primeira eſfera *, e pela meſma razão $\frac{c^2d}{6}$ ſolido da ſegunda eſfera: devemos agora moſtrar que $\frac{aab}{6} : \frac{ccd}{6} :: a^3 : c^3$.

* Numer. 486.

* Numer. 568.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

Baſta moſtrar que o producto dos extremos deſtes quatro termos $\frac{aab}{6} : \frac{ccd}{6} :: a^3 : c^3$ he igual ao producto dos meios, iſto he, que $\frac{aabc^3}{6} = \frac{a^3ccd}{6}$: como os diametros dos circulos tem a meſma razão que as circumferencias *, ſerá $a:b::c:d$, do que ſe tira $ad = bc$; e pondo $ad$ em lugar de $bc$ no primeiro membro da equação precedente, ſerá, multiplicando tambem cada membro por 6, $aaadcc = aaadcc$. O Q. S. Q. D.

* Numer. 482.

DEFINIÇÃO.

571 Chamão-ſe corpos, ou ſolidos ſemelhantes aquelles, do qual todas as dimensões são proporcionaes, como, por exemplo, duas pyramides são ſemelhantes, quando cada huma dellas tem por baſe polygonos ſemelhantes, e que os ſeus eixos eſtão diſpoſtos do meſmo modo a reſpeito do plano da ſua baſe, e são proporcionaes aos ſeus raios, e aos lados homologos das baſes ſe-

ſemelhantes, pois he preciſo fazer reflexão que os eixos das duas pyramides podem ſer, como tambem as alturas, proporcionaes aos ſeus raios, ou aos lados homologos das baſes ſemelhantes, ſem que eſtas pyramides ſejão corpos ſemelhantes, como ſuccederia ſe huma das pyramides foſſe recta, e a outra obliqua.

COROLLARIO.

572 Da definição precedente, e da ultima propoſição ſe ſegue, que todas as pyramides, priſmas, cylindros, ou cones ſemelhantes são entre ſi como os cubos das dimensões homologas, por exemplo, dos ſeus eixos, das ſuas alturas, ou, como ſe explicão os Geometras, na razão triplicada das dimensões homologas.

ADVERTENCIA.

Poderia ſucceder, como já advertimos, que dous corpos, que tem baſes ſemelhantes, foſſem entre ſi como os cubos das ſuas alturas, ſem que daqui ſe pudeſſe concluir que elles foſſem ſe-

me-

melhantes. Imaginemos dous prismas, que tenhão cada hum por base pentagonos semelhantes, e as alturas proporcionaes aos lados homologos destes pentagonos, mas o primeiro recto, o segundo obliquo: seja $2a$ o circuito da base do primeiro, $b$ a perpendicular, que mede a altura de hum dos triangulos da base, $c$ a altura do prisma. Tambem seja $2d$ o contorno do polygono, que serve de base ao segundo prisma, $f$ a altura de hum triangulo, e $g$ a altura do prisma, a solidez do primeiro será $abc$, a do segundo $dfg$, pois se deve multiplicar a base de cada hum pela sua altura, e teriamos $abc : dfg :: a^3 : d^3$, o que facilmente se prova, mostrando o producto dos extremos igual ao dos meios, ou $abcd^3 = dfga^3$; pois como os polygonos, que lhe servem de base, são semelhantes, os seus contornos, ou metade delles são proporcionaes ás perpendiculares, que medem as alturas dos triangulos: logo $a : b :: d : f$: logo $af = bd$; e porque as alturas destes prismas são proporcionaes aos circuitos das bases, será

$a$:

$a:c::d:g$: logo $ag=cd$; e ſe no primeiro membro da equação, que pertendemos provar, puzermos $af$ em lugar de $bd$, e $ag$ em lugar de $cd$, teremos eſta $a^3dfg=a^3dfg$, o que moſtra que eſtes priſmas eſtão entre ſi como os cubos dos lados das ſuas baſes, ou dos ſeus raios, ainda que não ſejão ſemelhantes: logo he verdade dizer, que quando dous ſolidos são ſemelhantes, eſtão entre ſi como os cubos dos lados homologos, das ſuas baſes, ou como os cubos das ſuas alturas; mas de dous ſolidos eſtarem entre ſi, como os cubos dos ſeus lados homologos, ou das ſuas alturas, não ſe ſegue que ſejão ſemelhantes.

Suppuzemos neſta reflexão, e no que a precede que hum priſma obliquo he igual ao producto da ſua baſe pela ſua altura, ou, o que vem a ſer o meſmo, que dous priſmas são iguaes, quando são comprehendidos entre dous planos parallelos. Para ſe convencer deſta verdade baſta fazer reflexão, que hum priſma póde ſer gerado do movimento de hum parallelogramo, que ſe move pa-

rallelamente a ſi meſmo; e como os parallelogramos inclinados são iguaes ao rectangulo da meſma baſe, comprehendido entre as meſmas parallelas, ſegue-ſe que os priſmas rectos, e obliquos, gerados pelos movimentos deſtas ſuperficies, ſerão tambem iguaes, pois as ſuperficies geradoras são iguaes, e correm o meſmo eſpaço parallelamente a ſi meſmas.

## PROPOSIÇÃO X.

### THEOREMA.

573 A ſuperficie de huma meia eſfera he igual á do cylindro ABCD, na qual eſtá inſcripta. Figura 31. e 32.

Suppondo que o cylindro AC, e o cone GHI tem a meſma baſe, e a meſma altura, chamemos *a* ás linhas iguaes FE, FD, KI, KH, e *b* ás circumferencias AD, GI: iſto ſuppoſto, ſerá $\frac{ab}{2}$ o valor do circulo AD, ou GI *, que multiplicado pelos dous terços de FE $\frac{2a}{3}$, dará $\frac{2aab}{6} = \frac{aab}{3}$, valor da meia eſfe- * Numer. 486.

* Numer. 568. fera *; e multiplicando $\frac{ab}{2}$ pelo terço de HK $\frac{a}{3}$, será $\frac{aab}{6}$ a solidez do cone GHI.* * Numer. 556.

DEMONSTRAÇÃO.

Se imaginarmos a meia esfera como composta de huma infinidade de pequenos cones, que tem as bases iguaes na superficie da esfera, e todos os vertices se terminão no centro F, e por altura commua o raio, póde-se dizer que todos estes cones juntos são iguaes a hum só, que tivesse por base a superficie da esfera, e o raio por altura; mas o valor deste cone igual á meia esfera he $\frac{aab}{3}$, e a do cone GHI he $\frac{aab}{6}$, e ambos tem a mesma altura: logo estão na razão das bases, isto he, como o circulo GI á superficie da esfera, que se achará, dizendo: como $\frac{aab}{6}$, valor do cone GHI, a $\frac{aab}{3}$, valor do cone igual á esfera, assim $\frac{ab}{2}$ base do cone GHI á base do segundo cone, ou á superficie

da

da esfera, que se acha ser $\frac{6a^3b^2}{6a^2b} = ab$, que he hum rectangulo igual á superficie do cylindro, pois he feito da altura *a* pela circumferencia *b*. *O Q. S. Q. D.*

OUTRA DEMONSTRAÇÃO.

Imagine-se tirar-se do cylindro AC o cone BFC, que he a terça parte delle, o solido residuo ABFCD será os dous terços; e como a meia esfera inscripta tambem he os dous terços do cylindro, consequentemente será igual a este solido residuo; mas imaginando-se este solido residuo composto de huma infinidade de pequenas pyramides, cujas bases todas estejão na superficie do cylindro, e a altura commua he o raio FD, segue-se que sendo todas as pyramides da meia esfera iguaes a todas as pyramides do solido residuo, as bases de todas as pyramides de huma serão juntas iguaes á somma de todas as bases do outro, pois todas estas pyramides tem a mesma altura; mas as bases todas de huma parte são iguaes á superficie da esfera, e todas as bases Figura 31.

da

da outra parte são iguaes á ſuperficie do cylindro: logo a ſuperficie da eſfera he igual á ſuperficie do cylindro, que lhe he circumſcripto. *O Q. S. Q. D.*

## COROLLARIO I.

574 Tendo a ſuperficie do cylindro AC por baſe a circumferencia do circulo maximo da eſfera, e por altura o raio, ſegue-ſe que a ſuperficie de huma meia eſfera he igual ao rectangulo feito de huma recta igual á circumferencia do ſeu circulo maximo pelo raio, e conſequentemente a ſuperficie de huma eſfera ſerá igual ao rectangulo feito de huma linha igual á circumferencia do circulo maximo pelo eixo; e aſſim para achar a ſuperficie de huma eſfera, deve-ſe multiplicar o diametro do ſeu circulo maximo pela ſua circumferencia.

## COROLLARIO II.

575 Sendo o circulo maximo da meia eſfera metade do rectangulo comprehendido da circumferencia, e do raio, ſegue-ſe que a ſuperficie de huma

ma meia esfera he dupla do seu circulo maximo, e consequentemente a superficie da esfera inteira he quadrupla do mesmo circulo maximo.

## COROLLARIO III.

576 Como os circulos estão na mesma razão que os quadrados dos seus raios, segue-se que hum circulo, que tiver o raio duplo do outro, terá quadrupla a superficie, e por consequencia a superficie de huma esfera he igual á de hum circulo, que tiver o raio igual ao eixo da esfera.

## COROLLARIO IV.

577 Como as superficies das esferas são iguaes aos circulos, que tiverem os raios iguaes aos diametros das esferas, e os circulos são entre si como os quadrados dos seus raios, que aqui são os diametros das esferas, segue-se que as superficies das esferas são entre si como os quadrados dos seus diametros.

PRO-

## PROPOSIÇÃO XI.

### THEOREMA.

Figura 33. — 578 A ſolidez de huma zona ABCD he igual aos dous terços do cylindro AEFD do circulo maior AD, e mais ao terço do cylindro GBCH do circulo menor BC.

### DEMONSTRAÇÃO.

Como o valor de todas as coroas, que ha entre a zona, e o cylindro AEFD, ſe acha multiplicando a coroa maior EB pelo terço da linha EA, ou OI, ſegue-ſe que eſte producto he igual ao terço do eſpaço EG, ou FH entre os dous cylindros AEFD, GBCH, e que por conſequencia a parte ABG da zona á roda do cylindro he os dous terços. Ora ſe deſte cylindro ſe tira o cone BIC, que he hum terço, fica o ſolido reſiduo GBICH, que ſerá os dous terços, aſſim a parte ABICD da zona valerá os dous terços do cylindro AEFD; mas como o cone BIC, que he huma parte da zona, he a terça parte do cylindro GBCH, deve-ſe accreſcentar

eſte

eſte cone com os dous terços do cylindro AEFD para ter a ſolidez da zona, e ſerá eſta ſolidez igual aos dous terços do cylindro AEFD, e mais ao terço do cylindro GBCH. *O Q. S. Q. D.*

## COROLLARIO I.

579 Segue-ſe deſta propoſição que ſe a meia esfera inſcripta em hum circulo ſe cortar por hum plano FG parallelo á baſe AE, a parte ABCDE (que he a differença da meia esfera ao ſector esferico CBHD) he igual ao ſolido reſiduo AFCGE do cylindro correſpondente AG, pois hum, e outro são os dous terços do meſmo cylindro AG. Figura 32. Cylindro

## COROLLARIO II.

580 Segue-ſe tambem que a ſolidez de hum ſector esferico, como CIBP, he igual aos dous terços do cylindro EFLK, que tem por baſe o circulo maximo da esfera, e por altura a flexa PO do ſegmento esferico PBC, mais o terço do cylindro inſcripto GBCH; porque ſendo a esfera os dous terços do cylindro, que lhe he circumſcripto, e a zo- Figura 33.

Erro porq̃ he só os 2 do cylindro de cima, porq̃ o 3 ſolido reſiduo he os 2/3 de AEFD.

a zona ABCD os dous terços do cylindro AEFD, mais o terço do cylindro GBCH, deve o ſector CIBP ſer os dous terços do cylindro EKLF, e mais o terço do cylindro GBCH.

## COROLLARIO III.

Figura 33. 581 Segue-ſe deſta propoſição que o ſegmento eſferico PBC he igual aos dous terços do cylindro EKLF, menos o terço do cylindro GBCH; porque ſendo a ſemiesfera inteira os dous terços do cylindro AKLD, ſerá tambem os dous terços dos cylindros AEFD, EKLF, que são em ſomma iguaes ao cylindro circumſcripto; mas a zona he igual aos dous terços do cylindro AEFD, e mais ao terço do cylindro GBCH: logo tirando a zona da meia eſfera, fica o ſolido do ſegmento igual aos dous terços do cylindro EKLF, menos o terço do cylindro GBCH: do que ſe ſegue que o ſolido de hum ſegmento eſferico he os dous terços de hum cylindro, que tiver por baſe o circulo maximo da eſfera, de que he ſegmento, e por altura a flexa PO do

meſ-

meſmo ſegmento, menos hum cone, que tenha por baſe o circulo, ou baſe do ſegmento, e por altura o raio IP, menos a flexa PO.

## PROPOSIÇÃO XII.

### THEOREMA.

582 Se ſe córta huma meia esfera inſcripta em hum cylindro por hum plano FG parallelo á baſe AE, digo que a ſuperficie da zona ABDE he igual á do cylindro correſpondente AG. Figura 3

### DEMONSTRAÇÃO.

Sendo o ſolido AFCGE igual á parte ABCDE da zona *, ſe eſte ſolido ſe imaginar compoſto de huma infinidade de pyramides, que todas tenhão as ſuas baſes na ſuperficie do cylindro AG, e por altura o raio CE, e a parte ABCDE da meia esfera como compoſta de pequenas pyramides, de que as baſes eſtão na ſuperficie da zona, e que tem por commua altura o raio CE, ſeguir-ſe-ha (ſendo todas as pyramides de huma parte iguaes a to- * Numer. 579.

das as da outra, e tendo todas a meſma altura) que todas as baſes de huma parte ſerão iguaes a todas as baſes da outra, e que aſſim a ſuperficie da zona ABDE ſerá igual á do cylindro AFGE. *O Q. S. Q. D.*

### COROLLARIO I.

583 Como a ſuperficie da ſemiesfera AHE he igual á do cylindro AI, e que a ſuperficie da zona ABDE he igual á do cylindro AG, ſegue-ſe que a ſuperficie do ſegmento BHD da esfera he igual á do cylindro correſpondente FI, ou tambem ao rectangulo comprehendido de huma linha igual á circumferencia do circulo maximo da esfera, e da parte HK.

### COROLLARIO II.

584 Segue-ſe tambem deſta propoſição, que ſe a meia esfera inſcripta em hum cylindro ſe córta por hum plano parallelo á baſe, as partes da ſuperficie da meia esfera ſerão iguaes ás zonas correſpondentes do cylindro.

Co-

### COROLLARIO III.

585 As ſuperficies dos cylindros FI, e AG, tendo as baſes iguaes, ſerão na meſma razão que as ſuas alturas HK, e KC; e como o meſmo cylindro he igual á parte da ſuperficie BHD da meia esfera, e o ſegundo á parte ABDE, ſegue-ſe que as partes da ſuperficie da meia esfera eſtão na meſma razão que as partes HK, e KC do ſemidiametro, ſendo a meia esfera cortada por hum plano BD parallelo ao ſeu circulo maximo.

586 Póde-ſe tambem dizer, que ſe ſe córta huma esfera por hum plano perpendicular ao eixo, as partes da ſuperficie esferica ſerão na meſma razão que as partes do eixo.

## PROPOSIÇÃO XIII.

### THEOREMA.

587 Quando trez linhas *a*, *b*, *c* eſtão em proporção contínua, o parallelipipedo feito deſtas trez linhas he igual ao cubo feito da meia; aſſim de-

vemos provar que se temos $a:b::b:c$, será $abc=bbb$.

DEMONSTRAÇÃO.

Tom. I. * Numer. 202. Pela hypothese $a:b::b:c$, será $ac=bb$*; assim pondo na equação $abc=bbb$, $ac$ em lugar de $bb$, será $abc=abc$. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO XIV.

THEOREMA.

588 Quando quatro linhas estão em progressão geometrica, o cubo feito da primeira he ao cubo da segunda, como a primeira linha á quarta, isto he, que se ∴ $a:b:c:d$, teremos tambem $aaa:bbb::a:d$.

DEMONSTRAÇÃO.

Tom. I. * Numer. 202. Na primeira progressão ∴ $a:b:c:d$ os trez primeiros termos dão $ac=bb$*, pois temos $a:b::b:c$; e teremos tambem $ad=bc$, pois $a:b::c:d$: assim para provar que $a^3:b^3::a:d$, basta mostrar que o producto dos extremos he

Tom. I. * Numer. 210. igual ao dos meios $a^3d=b^3a$*: para isto bas-

basta pôr *ac* em lugar de *bb* no segundo membro da equação, e *bc* em lugar de *ad* no primeiro, e teremos *aabc* = *aabc*. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO XV.

### PROBLEMA.

589 Achar duas meias proporcionaes entre duas linhas dadas.

### SOLUÇÃO.

Para achar duas meias proporcionaes entre duas linhas dadas AB, CD, se deve fazer hum rectangulo como as duas linhas, de sorte que EF seja igual a CD, e EG = AB: continuem-se indefinitamente os lados EF, EG, e do centro I do rectangulo se descreva hum circulo, de sorte que continuadas as linhas GK, FL cortem a circumferencia: do ponto K ao ponto L se tire a linha KL, que toque sómente o angulo H, e as linhas GK, FL serão as meias proporcionaes entre GE, e EF, isto he, entre as linhas AB, e CD. Estamp. 16 Figura 34.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

Abaixem-se as perpendiculares IM, e IN, e ficará a corda OL dividida no ponto M em duas partes iguaes *, como tambem a linha EF, e será OE = LF, e ficando tambem KP dividida pelo meio no ponto N, como tambem GE, e será GK = EP: isto supposto, por serem os triangulos OEP, HFL, KGH semelhantes, será HF : FL :: EO : EP; mas por ser OE = FL, será ∴ HF : FL : EP; e sendo os dous triangulos EOP, GHK semelhantes, será OE : EP :: GK : GH; e pondo em lugar de EP GK = EP, será ∴ OE : GK : GH, o que mostra haver a mesma razão de HF a FL, que de FL a GK, e de GK a GH, e por consequencia as linhas FL, GK são meias proporcionaes entre GE, e EF. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 424.

ADVERTÊNCIA.

590 Este problema he ao que commummente se chama duplicação do cubo, pois serve para fazer hum cubo duplo do outro, ou que tenha a elle hu-

huma razão dada : seria muito util achar-se a resolução geometrica deste problema, pois pela construcção precedente se conhece que he preciso descrever muitos circulos antes de achar hum, cuja circumferencia, cortando nos pontos K, e L das linhas continuadas, se possa por estes pontos tirar a linha KL, que toque sómente o angulo H. He verdade que este problema se póde resolver de outro modo, que veremos nas secções conicas; mas ainda que o methodo, que lá havemos de dar, seja mais geometrico que este, não deixa de ter suas difficuldades; e como praticamente nos servimos de melhor vontade de numeros, do que das linhas, vamos mostrar no problema seguinte o modo, com que se podem achar em numeros duas meias proporcionaes geometricas entre dous numeros dados.

## PROPOSIÇÃO XVI.

### PROBLEMA.

591 Dados dous numeros, achar dous meios proporcionaes entre elles.

Pa-

Para achar dous numeros meios proporcionaes entre outros dous, ſe deve fazer o cubo do primeiro numero, e fazer depois huma regra de 3, que tenha por primeiros dous termos os dous numeros dados, o terceiro o cubo do primeiro, e o quarto numero que ſahir ſerá o cubo da primeira meia proporcional; aſſim para achar eſte primeiro meio proporcional, ſe deve tirar a raiz cubica do quarto termo: para achar depois o ſeguinte meio proporcional, ſe deve buſcar hum meio entre o primeiro achado, e o ultimo numero dado.

Aſſim para achar dous meios proporcionaes entre 2, e 16, faço o cubo do primeiro numero 2, que he 8, e faço eſta proporção $2:16::8:\frac{8\times16}{2}=4\times16=64$, cuja raiz cubica he 4, que he o primeiro dos dous meios proporcionaes: para ter o ſegundo buſco hum meio proporcional entre eſte primeiro 4, e o ultimo 16, fazendo $4:x::x:16$, do que ſe ſegue $xx=64$, e $x=8$, pois tomando a raiz dos dous meios ſerá 4, e 8, e fica a progreſsão $\div 2:4:8:16$.

Se

Se os numeros dados foſſem taes, que nas operações ſe lhes não poſſa extrahir as raizes cubicas, e quadradas exactamente, neſte caſo ſer-nos-hia preciſo ſervir das decimaes, conforme os methodos explicados, para approximar as raizes o mais que he poſſivel, e fazer o mais exacto que póde ſer as pedidas medidas. Como os principiantes poderão não entender de ſi meſmo a razão deſtas operações, que acabamos de explicar, para achar dous numeros meios proporcionaes entre outros dados, vamos dar a demonſtração.

Já vimos * que quando quatro linhas eſtão em proporção geometrica, o cubo da primeira linha he ao cubo da ſegunda, como a primeira linha á quarta: logo invertendo ſerá a primeira á quarta, como o cubo da primeira he ao cubo da ſegunda; e conhecendo a primeira linha, e a quarta, e o cubo da primeira, temos os trez primeiros termos de huma proporção, e podemos achar o cubo da ſegunda, cuja raiz cubica he a meſma ſegunda; e achado o ſegundo termo, não ha mais que buſcar

* Numer. 588.

car hum meio proporcional entre o ſegundo, e o quarto, (que he o ſegundo numero dado) e teremos o terceiro dos quatro proporcionaes, que ſerá o ſegundo dos dous incognitos, que ſe buſcão. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO XVII.

### PROBLEMA.

592 Fazer hum cubo, que ſeja para outro em huma razão dada.

Figura 35. e 36. Para fazer hum cubo, que ſeja ao cubo C em huma razão dada, v. gr. de 2 a 3 por exemplo, iſto he, hum cubo, que ſeja os dous terços do cubo C, divida-ſe o lado AB do cubo C em trez partes iguaes, e faça-ſe a linha DE igual ás duas partes deſtas: buſque-ſe depois entre AB, DE duas meias proporcionaes FG, e HI, e o cubo K feito do lado FG, primeira deſtas duas meias proporcionaes, ſerá o cubo, que ſe pede, e vamos provar que he os dous terços do cubo C.

DEMONSTRAÇÃO.

Eſtando as quatro linhas AB, FG, HI, DE em proporção contínua, ſerá o cubo da primeira ao cubo da ſegunda, como a primeira á quarta *; mas pela conſtrucção a quarta he os dous terços da primeira: logo o cubo da ſegunda FG he os dous terços do cubo C. O Q. S. Q. D. * Numer. 588.

Se o lado do cubo ſe expreſſa em numeros, ſe tomará tambem os dous terços, e entre o todo, e os dous terços ſe buſcarão duas meias proporcionaes, e o cubo da primeira ſerá o que ſe pede.

COROLLARIO.

Como as eſferas eſtão na razão dos cubos dos diametros, ou dos raios *, como tambem os cylindros, priſmas, pyramides, e cones ſemelhantes, ſegue-ſe que para achar qualquer deſtes ſolidos, que eſteja ao ſeu ſemelhante em huma razão dada, ſe deve obrar a reſpeito das ſuas dimenſões homologas, dos eixos por exemplo, como acabámos de fazer a reſpeito dos lados * Numer. 570.

dos

dos cubos; e depois de ter achado a dimensão homologa, que aqui he o eixo, baſta fazer o eixo de hum ſolido ſemelhante ao ſolido propoſto, buſcando as outras dimensões, que ſejão todas proporcionaes ás dimensões correſpondentes, e na razão do eixo do primeiro ao eixo do ſegundo.

## PROPOSIÇÃO XVIII.

### PROBLEMA.

593 Fazer hum cubo igual a hum parallelipipedo.

Para fazer hum cubo igual ao paral-
Figura 37. lelipipedo AE, ſe as trez dimensões do parallelipipedo são deſiguaes, como aqui ſe ſuppõe, buſque-ſe huma meia proporcional entre as duas me-
* Numer. 507. nores AB, BC *, e ſeja por exemplo FG: com eſta linha ſe faça o quadrado FH para ſervir de baſe ao parallelipipedo FI, que tenha a meſma altura que o parallelipipedo AE, pois o rectangulo AC, que lhe ſerve de baſe, he igual ao quadrado FH, que ſerve de baſe ao ſegundo. Iſto ſuppoſto, buſ-

quem-

quem-se duas meias proporcionaes entre FG, e GK *, e será por exemplo NO, e PQ: digo que o cubo de NO he igual ao parallelipipedo FI, ou AE. * Numer. 589.

Para o provar tomemos GD=FG para ter o cubo GO: chamemos FG, ou GH, ou GD *a*, GK *b*, NO *c*, e será o parallelipipedo FI *aab*, o cubo FM será *aaa*, o cubo de NO será *ccc*, resta mostrar *aab* = *ccc*.

DEMONSTRAÇÃO.

O cubo FM, e o parallelipipedo FI, que tem a mesma base FH, estarão na razão das suas alturas GD, e GK, do que se segue *aaa*: *aab*:: *a*: *b*; e por serem as quatro proporcionaes, teremos o cubo *aaa*: *ccc*:: *a*: *b*, isto he, o cubo da primeira ao da segunda, como a primeira á quarta *; e como estas duas proporções tem a mesma razão a huma terceira, será *aaa*: *aab*:: *aaa*: *ccc*; mas $a^3 = a^3$: logo *aab* = *ccc*. O Q.S.Q.D. * Numer. 588.

Se as dimensões do parallelipipedo se expressarem em numeros, bastará, para achar hum cubo igual ao parallelipipedo, multiplicar as trez dimensões

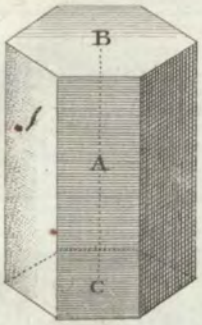
sões humas por outras para ter o solido do parallelipipedo, e extrahir a raiz cubica do producto, que será o lado do cubo pedido.

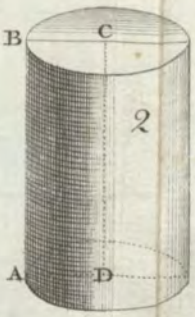
COROLLARIO.

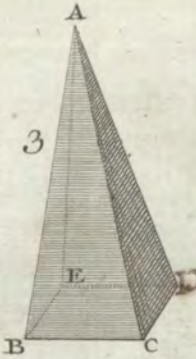
594 Desta proposição se vê que não ha solido, que se não possa reduzir a cubo; porque como os cones, esferas, cylindros, pyramides, e prismas se podem reduzir, mudando-se as bases dos cylindros, e prismas em quadrados, que lhes sejão iguaes, ficarão parallelipipedos, que facilmente se reduzem a cubos pelo problema, que acabamos de resolver.

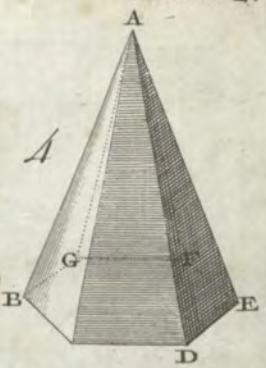
FIM DO OITAVO LIVRO.

NO-


1
B
A
C

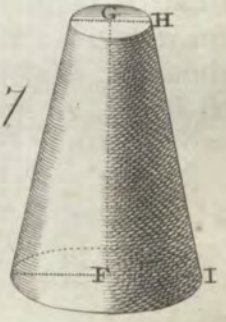

2
B
C
A
D


3
A
E
B
C


4
A
G
F
B
E
D

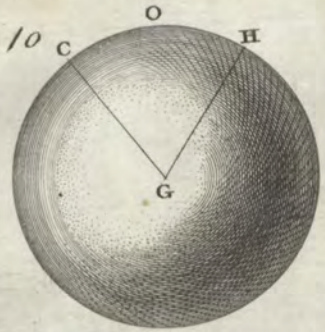
5
C
D
A
E
B

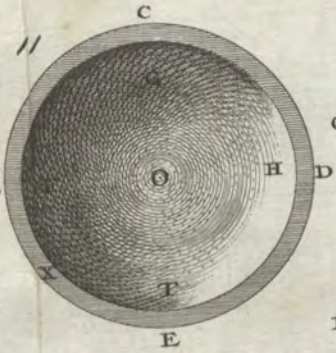
6
B
D
E
A
G
C

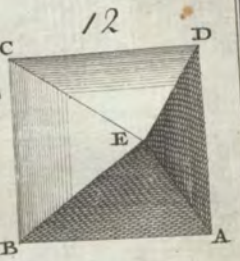

7
G
H
F
I

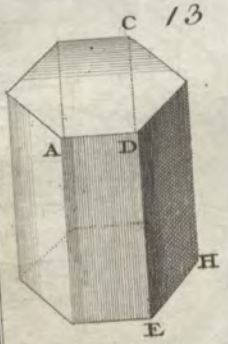
9
B
C
A
D

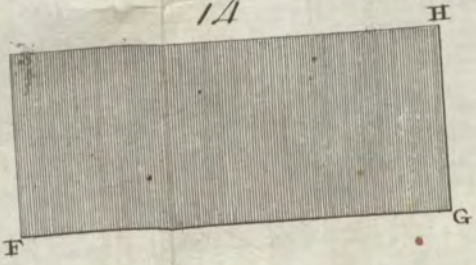
8
B
A
C
D

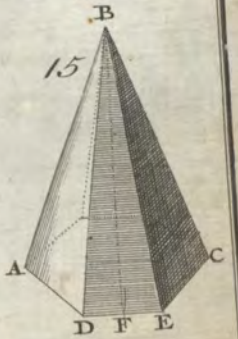

10
O
C
H
G

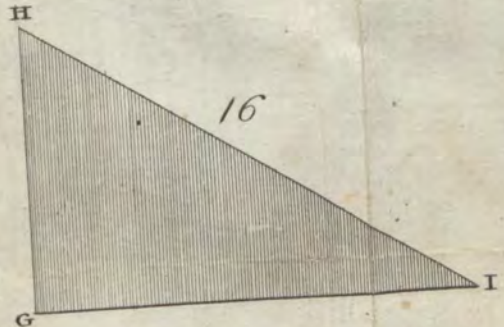

11
C
B
O
H
D
X
T
E

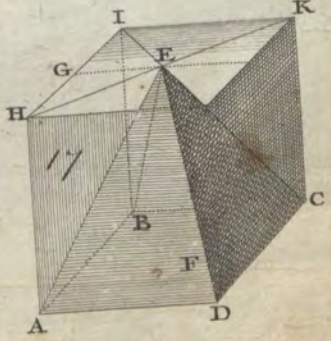

12
C
D
E
B
A


13
C
A
D
H
E


14
H
F
G

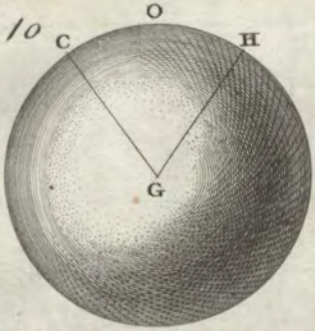

15
B
A
C
D
F
E


H
16
G
I

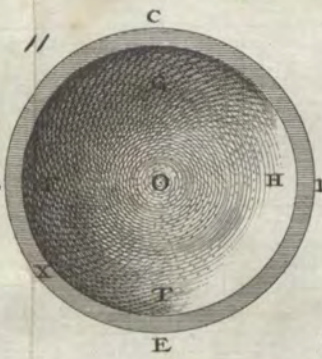

I
K
G
E
H
17
B
C
F
A
D

T. II.

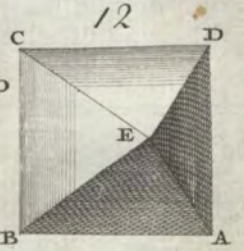
10



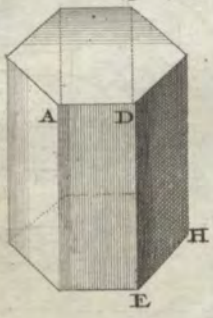

11



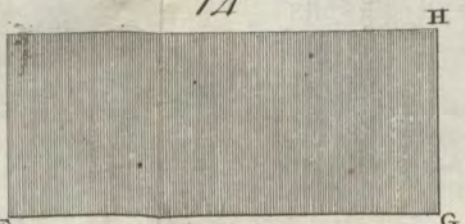

12



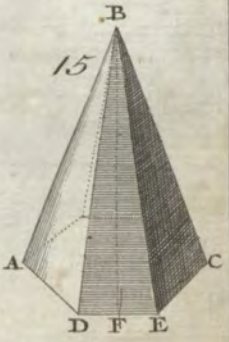

13



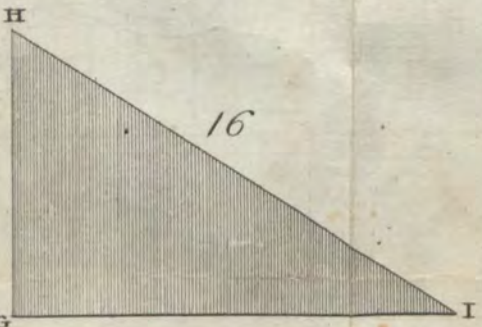

14



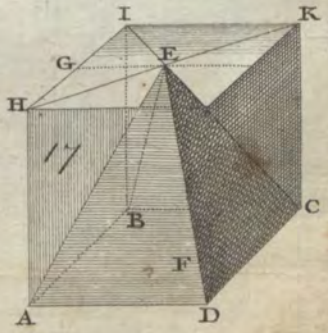

15

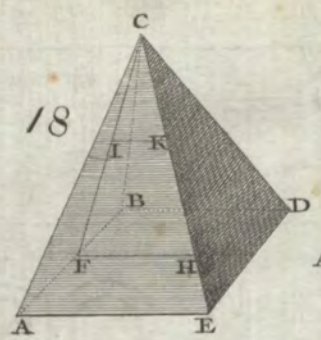


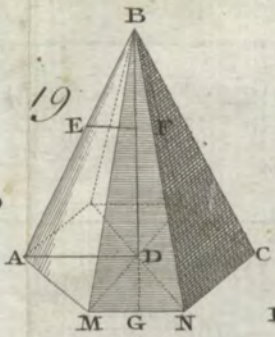

16

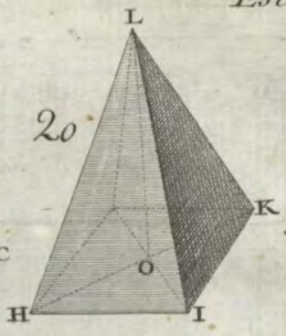


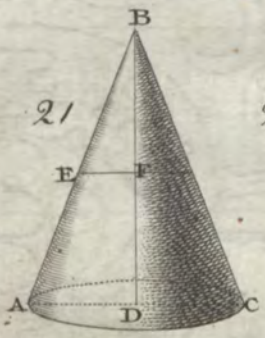

17

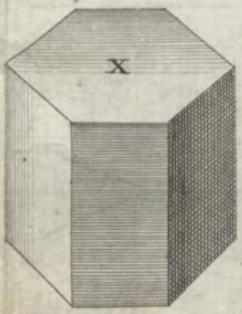


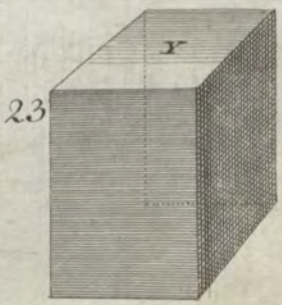

18
C
I
K
B
D
F
H
A
E

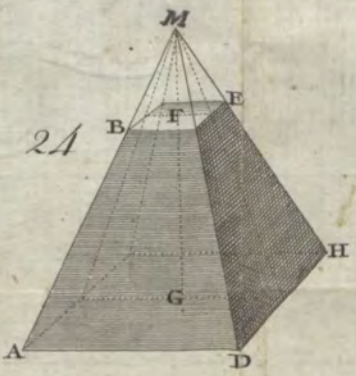

19
B
E
F
A
D
C
M
G
N

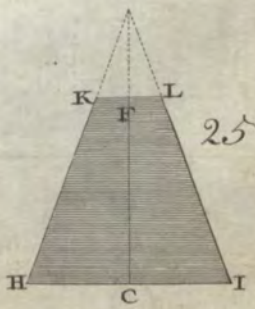

20
L
K
O
H
I


21
B
E
F
A
D
C

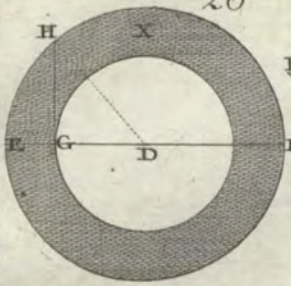

22
X


23
Y

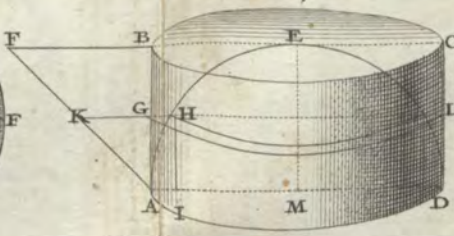

24
M
B
F
E
H
G
A
D


25
K
L
F
H
C
I

26



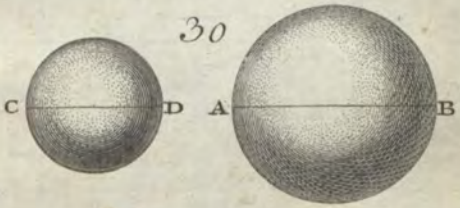

27



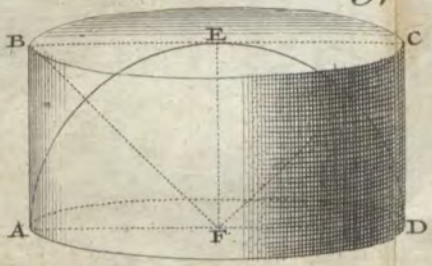

28

29

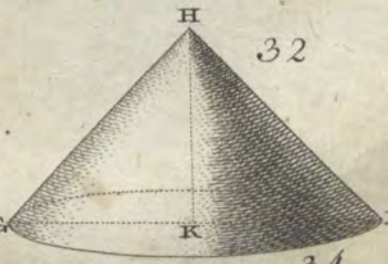
30



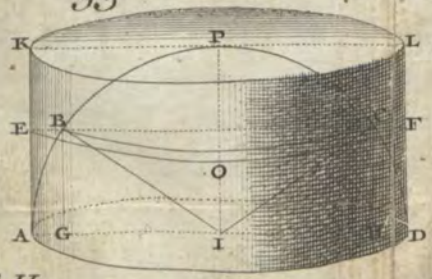

31



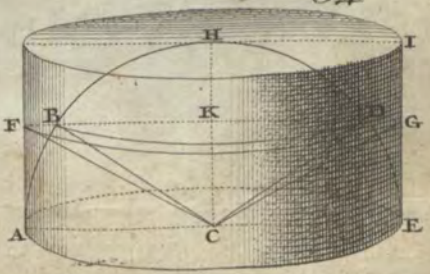

32




33




34



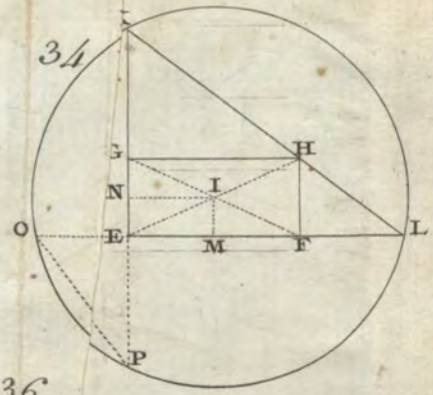
A B

F L

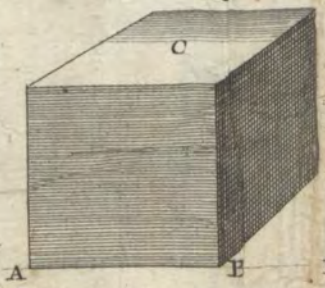
G K

C D

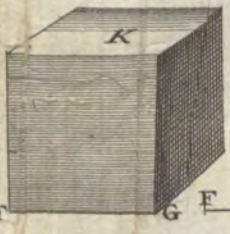
34




35




36




F G H I

D E

37

38

39

F G N O P Q G K

TII.

# NOVO CURSO DE MATHEMATICA.

## LIVRO IX.

### *DAS SECÇÕES CONICAS.*

COMO ordinariamente os que escrevem elementos de Geometria não tratão das secções conicas, a maior parte dos que estudão por elles se contentão com os simplices elementos, sem se cançarem em buscallas em outra parte, por julgarem o seu estudo mais curioso que necessario, e só proprio para aquelles, que se querem inteiramente applicar ás Mathe-

thematicas. He porém tão util o ſabellas, que ſem iſſo he impoſſivel reſolver problemas, ainda mui ordinarios, da Geometria prática no quotidiano exercicio de hum Official Engenheiro, ou Artilheiro; pois ſe o primeiro quizer calcular huma abobeda abatida, deve ſaber ao menos como ſe acha a ſuperficie de huma elypſe, vulgarmente chamada oval, que he huma das ſecções conicas; e baſta ler a applicação da Geometria á prática para ſe convencerem ambos da neceſſidade, que tem de ſaber ao menos as principaes propriedades das ſecções conicas.

Seria com tudo couſa muito pouco attendivel ſe o ſeu eſtudo ſe limitaſſe ao que temos dito, pois he tão neceſſario áquelles, que ainda ſem aſpirar a grandes Geometras, querem ter hum mediano conhecimento deſta ſciencia, que não as póde perder hum momento de viſta, pois na reſolução de hum problema hum pouco compoſto encontrará equações, para que lhe he preciſo ſervir-ſe de curvas na conſtrucção da figura, que dá a ſolução do problema,

cu-

cujo conhecimento depende deſte eſtudo.

Não fallo neſta obra deſtes problemas, em que trato ſó as principaes propriedades das ſecções conicas, pois tenho por objecto dallas a conhecer aos que eſtudão Geometria com mais alguma applicação para lhes excitar o appetite de proſeguirem, e tambem para me ſervir dellas em algumas partes, em que são inevitaveis. Se encontrar porém com algum daquelles, que ſe não contentão com ver hum ſó livro, lhes aconſelho que leião o excellente tratado de ſecções conicas do Marquez do Hoſpital, que he o melhor que temos neſte genero; e como neſte tratado ſigo hum methodo muito ſemelhante ao ſeu, não duvido que comprehendendo bem o que ſe ſegue, ſe entenderá facilmente aquelle tratado, a que eſte póde de algum modo ſervir de inſtrucção.

## CAPITULO I.

*Que trata as propriedades da parabola.*

DEFINIÇÕES.

I.

Eſtamp. 17 Figura 1.

595 SE tivermos huma recta AB perpendicular ſobre outra OP, na qual ſe tomem as partes AC, e CD iguaes entre ſi, e de C para B ſe tirem pela linha AB muitas parallelas á linha OP, como EF, GH, &c., e que DE, ou DF ſe faça igual a AK, e DG, ou DH igual a AI, continuando a achar quantidade de pontos taes, como E, G, M, de ſorte que ſempre ſeja DM igual a AL, a curva, que paſſar por todos eſſes pontos, ſe chama *parabola*.

II.

596 A linha ACB he o eixo da parabola.

III.

597 O ponto A ſe chama *ponto gerador*, a linha OP *directriz*, e o ponto D *fóco*.

IV.

598 O ponto C ſe chama *origem do eixo*, ou *vertice da parabola*, porque he o ponto, em que ſe ſuppõe terem co-

me-

meçado as parallelas, que formão a parabola.

V.

599 Cada huma das perpendiculares, como KE, ou IG, ou LM, se chama *ordenada ao eixo* AB.

VI.

600 As partes CK, CI, CL do eixo, comprehendidas entre o vertice, e o encontro de huma ordenada, se chamão *abcisas*, ou *cortadas do eixo* CB.

VII.

601 Se do vertice da curva se lançar huma perpendicular CN ao eixo AB, que seja quadrupla de AC, se chama *parametro da parabola*.

VIII.

602 Huma linha recta, que não encontra a parabola em mais de hum ponto, e que continuada para ambas as partes a não córta, se chama *tangente*.

## PROPOSIÇÃO I.

### THEOREMA.

603 Na parabola o rectangulo feito da abcisa CI, e do parametro CN he igual ao quadrado da ordenada GI.

Chamemos AC, ou CD $a$; as indeterminadas, ou variaveis CI $x$; e GI $y$; AI, ou DG, que pela definição da curva lhe he igual, será $x+a$; e DI, ou CI$-$CD será $x-a$; o parametro CN pela definição será $4a$: resta provar que $CI \times CN = GI^2$, ou que $4ax = yy$.

DEMONSTRAÇÃO.

Sendo o triangulo GID rectangulo, será $GD^2 = GI^2 + DI^2$, do que se segue $GI^2 = GD^2 - DI^2$; mas $GD = AI = x+a$ será $GD^2 = x^2 + 2ax + a^2$, e $DI = a-x$: logo $DI^2 = x^2 - 2ax + a^2$, e $GI^2 = yy$: logo teremos esta equação $yy = x^2 + 2ax + a^2 - x^2 + 2ax - a^2$; e tirando as quantidades, que se destroem, ficará $yy = 4ax$. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

— 604 Na parabola os quadrados das ordenadas EK, GI são entre si como as suas abcisas CK, CI; ou, o que vem a ser o mesmo, os quadrados de quaesquer duas ordenadas, e as suas abcisas farão esta proporção $EK^2 : GI^2 :: CK : CI$.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

Sendo eſtes quadrados iguaes aos rectangulos feitos das abciſas pelo parametro, ſerão entre ſi como os rectangulos, a que são iguaes; mas todos eſtes rectangulos tem a meſma altura commua, que he o parametro: logo eſtarão na razão das ſuas baſes, e ſerá $EK^2 : GI^2 :: CK : CI$. *O Q. S. Q. D.*

COROLLARIO I.

605 Se á origem do eixo CB ſe tira huma perpendicular CS, e dos pontos E, G, M da curva ſe levantão perpendiculares ſobre a linha CS, ſegue-ſe que o quadrado $CQ^2$ ao quadrado $CR^2$ terá a meſma razão que a linha QE á linha RG, porque as linhas CQ, e CR são iguaes ás ordenadas KE, e IG, e as linhas QE, e RG são iguaes ás abciſas CK, e CI. Depois nos ſerviremos deſte corollario para moſtrar que as ballas, e as bombas deſcrevem no ſeu movimento parabolas no eſpaço que correm do lugar, de que ſe deitão até o lugar, em que vão cahir.

Co-

### COROLLARIO II.

606 Como os quadrados das ordenadas, que eſtão para huma, e outra parte do eixo na meſma linha, são iguaes ao rectangulo da meſma abciſa pelo meſmo parametro, ſegue-ſe que são iguaes entre ſi, como tambem as ordenadas: logo o eixo divide o eſpaço indefinito terminado pela curva em duas partes iguaes, pois divide em duas igalmente todas as ordenadas, que lhe são perpendiculares, e que ſe podem tomar como elementos deſta ſuperficie.

### COROLLARIO III.

607 Como a linha CL ſe póde tomar da grandeza que ſe quizer, e determinar ſempre o ponto M do meſmo modo, fazendo DM=CL, ſegue-ſe que a curva ſe póde eſtender infinitamente, e que os ſeus dous lados ſe apartão continuamente do eixo.

PRO-

## PROPOSIÇÃO III.

### THEOREMA.

608 Por hum ponto dado tirar huma tangente á parabola.

Para tirar huma tangente a hum ponto E dado na parabola, se tire deste ponto ao fóco C a linha EC, e do mesmo ponto a linha DE parallela ao eixo, que será perpendicular á directriz AH, e a encontrará no ponto D: juntem-se os pontos D, e C, e a linha EG, que passa pelo meio I da linha DC, e pelo ponto dado E, será tangente á parabola; ou, o que vem a ser o mesmo, não a tocará mais que no ponto E. Tirem-se as linhas FD, FC, e por quaesquer dous pontos da linha EI as parallelas FH, FH ao eixo AK, como tambem a linha EK perpendicular ao mesmo eixo. Figura 2.

### DEMONSTRAÇÃO.

Por estar o ponto E na parabola, será a linha EC tirada ao fóco C, igual á linha AK pela definição da parabola; ou tambem será igual á linha ED, que he igual AK por causa do rectangulo

ED

EDAK. Além disso pela construcção a linha EG divide em duas igualmente a linha DC no ponto I: logo esta linha he perpendicular a DC, pois tem dous pontos E, e I igualmente distantes dos seus extremos: logo passará por todos os pontos igualmente distantes dos seus extremos, como são os pontos F, F; mas nos triangulos DFH a hypothenusa DF = FC he maior que hum dos lados FH: logo FC he maior que FH, ou que AC, e assim o ponto F não está na parabola; e como se póde demonstrar o mesmo de qualquer outro ponto, segue-se que a linha EG toca a parabola só no ponto E, e por consequencia he tangente a esta. *O Q. S. Q. D.*

## COROLLARIO I.

609 Desta construcção se segue que Figura 3. o angulo DEC está dividido em dous igualmente pela tangente EG, pois esta linha divide a linha DC em duas partes iguaes: do que tambem se segue que o angulo REL formado pela tangente EG, e o diametro DER tira-

rado pelo ponto do contacto, he igual ao angulo CEI formado pela meſma tangente, e a linha tirada do ponto da contingencia ao fóco C; porque, como acabamos de ver, o angulo CEI=DEI; mas DEI=LER, que lhe he verticalmente oppoſto: logo CEI=LER.

## COROLLARIO II.

610 Segue-ſe do ultimo corollario que ſe no fóco C ſe puzer hum ponto luminoſo, todos os raios, que delle ſahirem, reflectirão a encontrar a parabola por linhas parallelas ao eixo, porque he hum dos principios da Captotrica, que todo o raio reflexo faz com o plano da reflexão o angulo da reflexão igual ao da incidencia, mas he viſivel que a tangente ao ponto E póde repreſentar o plano da reflexão; e conſequentemente o raio, que ſahe do fóco C pela linha CE, reflectirá, ſeguindo a linha ER. Reciprocamente todos os raios parallelos ao eixo de huma parabola, cortados pelo parametro deſta curva, reflectirão para o fóco C: o meſmo ſe deve entender de qualquer outro

tro corpo elaſtico differente da luz: aſſim huma pequena bola de marfim, que ſe lançar pela linha RE, ſe moveria, encontrando a curva pela linha EC.

DEFINIÇÃO.

Figura 3. 611 Se do ponto do contacto E ſe tira a ordenada EK ao eixo da parabola, a linha GK ſe chama *ſubtangente*.

## PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

Figura 3. 612 Se ſe tirar a perpendicular EM ao ponto do contacto E, e deſte meſmo ponto ſe tirar huma ordenada EK ao eixo BM, digo que a parte KM do eixo ſerá ſempre igual á metade do parametro deſta parabola, iſto he, a 2*a*.

DEMONSTRAÇÃO.

Como as linhas DC, e EM são pela conſtrucção perpendiculares a LG, ſerão parallelas entre ſi, como tambem as linhas EK, e AD, que tambem são perpendiculares ao eixo: logo os triangulos rectangulos DAC, EKM são inteiros

teiramente iguaes : logo AC=KM, ou á metade do parametro, que he $2a$. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO V.

### THEOREMA.

613 A ſubtangente GK he dupla da abciſa BK. Figura 3.

### DEMONSTRAÇÃO.

Por ſer o parametro deſta parabola $4a$ *, ſerá KM $2a$ pela propoſição antecedente ; e por ſerem os triangulos KGE, EKM ſemelhantes *, teremos eſta proporção KM $2a$ : KE $y$ :: KE $y$ : $\frac{KE^2}{KM}$ $\frac{yy}{2a}$ = KG ; e ſe na equação KG = $\frac{yy}{2a}$ ſe puzer $4ax$ em o lugar de $yy$, a que he igual *, teremos KG = $\frac{4ax}{2a}$ = $2x$. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 601.

* Numer. 605.

* Numer. 604.

### COROLLARIO.

614 Deſta propoſição ſe tira hum modo mui facil de tirar huma tangente

á

á parabola; porque para tirar a linha LG, por exemplo, que seja tangente á parabola no ponto E, bastará tirar do ponto E a perpendicular EK ao eixo BM, e fazer a linha BG igual á abcisa BK, e tirar pelos pontos G, e E a linha GEL.

DEFINIÇÃO.

Figura 4. 615 Se do ponto A, em que huma recta toca a parabola, se tira huma linha AO parallela ao eixo MN, esta linha he hum diametro da parabola.

## PROPOSIÇÃO VI.

THEOREMA.

Figura 4. 616 Se se tira huma linha CD parallela á tangente NB, digo que o diametro AO a dividirá em duas partes iguaes no ponto E.

Tire-se do ponto A a ordenada AG, e dos pontos E, C, D as linhas CI, EF, DL parallelas á ordenada AG: continue-se o diametro AO até encontrar a linha HC: isto supposto, chamemos MF *m*, IF, ou HE *t*, FL, ou EK *u*,

af-

assim FI será $m-t$, e ML $m+u$. Chamemos tambem MG $x$, e AG $y$, GF será $m-x$: devemos provar que EC he igual a ED, ou que HE $t$ = EK $u$, o que he o meſmo; porque ſe HK eſtá dividida em duas igualmente no ponto E, a recta CD o eſtará tambem no meſmo ponto.

DEMONSTRAÇÃO.

Os triangulos BGA, EHC, EKD são ſemelhantes, porque tem lados reſpectivos parallelos, e dão as duas proporções ſeguintes BG $2x$ : AG $y$ :: EK $u$ : DK $\frac{uy}{2x}$, e BG $2x$ : AG $y$ :: EH $t$ : CH $\frac{ty}{2x}$; e determinado deſte modo o valor das linhas DK, e CH, teremos o valor das ordenadas CI, DL, porque CI $=$ IH $-$ CH, ou AG $-$ CH $= y - \frac{ty}{2x}$: do meſmo modo DL $=$ KL $+$ DK $=$ AG $+$ DK $= y + \frac{uy}{2x}$; mas pela propriedade da parabola os quadrados das ordenadas CI, AG, DL são entre ſi como as ſuas abciſas *, o que dá as ſeguintes pro- * Numer. 604.

por-

porções $AG^2\ yy : CI^2\ yy - \frac{ty^2}{x} + \frac{ttyy}{4xx} ::$ $MG\ x : MI\ m - t$; e $AG^2\ yy : DL^2\ yy + \frac{uy^2}{x} + \frac{uuyy}{4xx} ::$ $MG\ x : ML\ m + u$, de que se tirão as seguintes duas equações $myy - tyy = xyy - ty^2 + \frac{ttyy}{4x}$, e $myy + uyy = xyy + uy^2 + \frac{uuyy}{4x}$; e tirando a primeira equação da segunda, isto he, o primeiro membro da primeira do primeiro membro da segunda, e o segundo membro da primeira do segundo membro da segunda, teremos $myy + uyy - myy + tyy = xyy + uyy + \frac{uuyy}{4x} - xyy + tyy - \frac{ttyy}{4x}$; e reduzindo o primeiro, e segundo membro, tirando de cada hum as quantidades iguaes $uyy + tyy$, fica $0 = \frac{uuyy}{4x} - \frac{ttyy}{4x}$; e transpondo, será $\frac{uuyy}{4x} = \frac{ttyy}{4x}$, de que se tira ser $uu = tt$; e tirando as raizes, dividindo cada membro pela fracção $\frac{yy}{4x}$, ficará $u = t$. *O Q. S. Q. D.*

DE-

## DEFINIÇÃO I.

617 Toda a linha, como EC, ou ED, tirada parallelamente á tangente AB, se chama *ordenada ao diametro* AO.

## DEFINIÇÃO II.

618 Se se busca huma terceira proporcional ás linhas BM, e á tangente AB, esta linha se chamará o *parametro do diametro* AO.

## COROLLARIO.

619 Da definição precedente se segue, que se se tira do fóco P ao ponto do contacto A huma linha quadrupla AP, será igual ao parametro de AO.

Para se provar supponhamos que o ponto S he o ponto gerador, e será GS = PA *; e chamando SM, ou MP $a$, MG $x$, AG $y$, teremos SG, ou AP = $x+a$, e pela proposição primeira $4ax = yy$: isto supposto, chame-se $p$ o parametro do diametro AO, pela definição precedente * será MB $x$ : AB :: AB : $p$ : logo $px = AB^2$; mas por ser rectangulo o triangulo ABG, será $AB^2 = AG^2 + GB^2$

* Numer. 595.

* Numer. 618.

$GB^2 = 4ax + 4xx$: logo $px = 4ax + 4xx$; e dividindo tudo por $x$, será $p = 4a + 4x = 4AP$. *O Q. S. Q. D.*

## PROPOSIÇÃO VII.

### THEOREMA.

620 O quadrado de qualquer ordenada EC a hum diametro AO he igual ao rectangulo da abciſa AE pelo parametro do diametro AO, ou, o que he o meſmo, por huma linha quadrupla de AP.

Fica tudo como na propoſição precedente, e ſe chamarão as linhas com as meſmas letras, excepto a linha AE, a que chamaremos $z$, que ſendo igual a FG, ſerá $m - x$.

### DEMONSTRAÇÃO.

Sommemos as duas equações, que achamos pela propoſição antecedente, pondo $t$ em lugar de $u$, que lhe he igual, o que dará $myy + tyy + myy - tyy = xyy + tyy + \frac{ttyy}{4x} + xyy - tyy + \frac{ttyy}{4x}$; e fazendo a reducção, fica $2myy = 2xyy + \frac{ttyy}{2x}$

e desvanecendo a fracção, fica $4mxyy = 4xxyy + ttyy$; e dividindo tudo por $yy$, dá $4mx = 4xx + tt$; e fazendo passar $4xx$ do segundo para o primeiro membro, $4mx - 4xx$, ou $m - x \times 4x = tt$; e como $m - x = z$, teremos $4xz = tt$; e por ser rectangulo o triangulo EHC, teremos $EC^2 = EH^2 + CH^2 = tt + \frac{ttyy}{4xx}$; e pondo $4xz$ em lugar de $tt$, e $4ax$ em lugar de $yy$, será $EC^2 = 4xz + \frac{4xz \times 4ax}{4xx}$, ou $4xz + 4az = z \times 4x + 4a$, ou $EC^2 = 4AP \times AE$. *O Q. S. Q. D.*

## COROLLARIO I.

621 Por este theorema se vê a generalidade da proposição primeira, pois não sómente o quadrado de huma ordenada ao eixo he igual ao rectangulo comprehendido do parametro do eixo, e da abcisa, mas tambem que o quadrado de toda a ordenada a qualquer diametro he igual ao rectangulo da abcisa correspondente, e do parametro deste diametro. Para que isto se entenda melhor, supponhamos RT tangente ao pon-

ponto M extremidade do eixo, todas as ordenadas ao eixo ſerão parallelas a eſta tangente, e pela propoſição primeira o quadrado de cada huma deſtas ordenadas ſerá igual ao rectangulo comprehendido da abciſa correſpondente, e de huma linha quadrupla de PM, que he a diſtancia do foco ao ponto do contacto: logo ſe imaginarmos que o eixo ML ſe mova parallelamente a ſi meſmo até o ponto A, ou que ſeja o diametro AO, e que a tangente RT tenha eſcorregado pela parabola, não a tocando ſempre em mais de hum ponto, até que o ponto M ſeja o ponto A, então a tangente RT ſerá a linha NB, e a linha PM ficará na linha PA, e por conſequencia ſerá a quarta parte do parametro do eixo, que he o diametro AO; e as ordenadas, que ſe tiveſſem tirado parallelas á tangente RT, taes como VX, ſerão ſempre parallelas á tangente, e acompanharão o eixo; e ſe a abciſa MV he igual á abciſa AE, a ordenada VX ſerá a ordenada EC, e ſerá ſempre o quadrado de EC igual ao rectangulo comprehendido por huma linha

nha quadrupla da diſtancia do ponto do contacto A ao foco P, como ſe demonſtrou na propoſição precedente.

Póde-ſe notar que ſe o ponto A ſe approximaſſe mais do ponto M, poderia ſucceder que o ponto C cahiſſe para lá do eixo ML, e que tambem cahiria, ſe ſe tomaſſe huma abciſa AE maior ſobre o diametro, ſuppoſto ſempre o meſmo ponto A; mas iſto não embaraçaria que ſubſiſtiſſe do meſmo modo tudo o que temos demonſtrado, de qualquer modo que a linha DC poſſa achar-ſe na parabola, pois ſempre eſtará dividida em duas igualmente pelo diametro, ſendo parallelo á tangente.

## COROLLARIO II.

622 Segue-ſe tambem do que temos viſto, e notado antecedentemente: primeiro, que o parametro do eixo he o menor de todos os parametros: ſegundo, que ſe ſobre o eixo, e ſobre qualquer diametro ſe tomão abciſas iguaes, as ordenadas ao diametro ſerão maiores que as do eixo, pois os ſeus quadrados ſão iguaes aos rectan-

gulos feitos de huma meſma abciſa por parametros differentes, e o parametro de qualquer diametro he maior que o do eixo.

COROLLARIO III.

623 Por ſer o quadrado de huma ordenada a hum diametro qualquer igual ao producto da abciſa pelo parametro, que he huma grandeza conſtante para cada diametro, e variavel, conforme os diverſos diametros, ſegue-ſe que chamando $p$ ao parametro de qualquer diametro, e $x$ á abciſa, tomada no meſmo diametro, começando da origem do diametro, e $y$ á ordenada correſpondente, teremos ſempre a equação $yy=px$, o que contém as propriedades da parabola, ou ſeja a reſpeito dos diametros, ou a reſpeito do eixo: ſe ſe ſuppõe que a abciſa ſe tome no eixo, e ſeja igual ao quarto do parametro, teremos eſta equação $yy=\frac{1}{4}pp$, de que ſe tira $y=\frac{1}{2}p$, e dobrando $2y=p$, o que moſtra que o dobro da ordenada, que

que paſſa pelo fóco, he igual ao parametro; o que tambem he verdade a reſpeito de qualquer diametro, como ſe póde facilmente averiguar, entendido bem o que fica já explicado. * * Numer. 621.

## PROPOSIÇÃO VIII.

### THEOREMA.

624 Se ſe córta hum cone por hum plano parallelo a hum de ſeus lados, a ſecção ſerá huma parabola.

Corte-ſe o cone ABC por hum plano parallelo a hum de ſeus lados BC, digo que a ſecção, que ſerá por exemplo DEI, fará na ſuperficie do cone huma curva DHEKI, que ſerá huma parabola. Supponhamos que o cone foi cortado pelo plano LM parallelo á ſua baſe, a ſecção ſerá hum circulo, do qual as linhas FK, e FH ſerão perpendiculares ao diametro LM, e ao meſmo tempo ordenadas á curva, porque ſe ſuppõe que o plano EDI, que córta, he perpendicular ao plano do triangulo ABC, que ſe chama triangulo pelo eixo. Iſto ſuppoſto, tomemos no lado BC Figura 5.

BC a parte BO igual a FM, e do ponto O se tire ON parallela a FM, que será o parametro da parabola; porque demonstraremos que o rectangulo feito de NO pela abcisa EF he igual ao quadrado da ordenada FK, chamando ás linhas BO, ou MF $a$, NO $p$, FE $x$, e FK $y$.

DEMONSTRAÇÃO.

Os triangulos BNO, EFL, tendo os lados respectivos parallelos, são semelhantes, e darão BO $a$: ON $p$ :: EF $x$: FL $\frac{px}{a}$, de que se tira BO $\times$ LF, ou FM $\times$ FL = ON $\times$ ET *, e analiticamente $px = \frac{apx}{a}$; mas pela propriedade do circulo FM $\times$ FL = FK$^2$: logo $px = yy$. *O Q. S. Q. D.*

Tom. I. * Numer. 202.

COROLLARIO.

625 Se o triangulo pelo eixo he equilatero, a linha FM comprehendida entre o eixo da parabola, e o lado BC do cone será igual ao parametro da parabola, porque he evidente que a abcisa LF neste caso será igual á abcisa EF.

PRO-

## PROPOSIÇÃO IX.

### PROBLEMA.

626 Dado o parametro, deſcrever huma parabola.

Para deſcrever huma parabola, de que a linha AB ſeja o parametro, to- Figura 6.
mem-ſe em huma linha, v. gr. EK, as partes EC, e CF, cada huma igual á quarta parte do parametro AB: depois ſe tire á linha EK hum numero indeterminado de perpendiculares, como GH, e ſe fação as linhas FG, FH, cada huma igual á linha EI; ou, o que he o meſmo, do ponto F, como centro, com o raio EI ſe deſcreva hum arco de circulo, que córte as linhas GH nos pontos determinados H, e G, a curva, que paſſar por eſtes pontos, ſerá huma parabola. A demonſtração he a meſma que a da primeira propoſição.

## PROPOSIÇÃO X.

### PROBLEMA.

627 Dada huma parabola, achar-lhe o eixo.

Pa-

Para achar o eixo de huma parabola,
Figura 7. v. gr. CLI, baſta tirar por quaeſquer pontos que quizerem da parabola duas linhas AB, CD, v. gr. parallelas entre ſi; e dividindo pelo meio eſtas linhas nos pontos E, e F, tirando por elles a linha GFH, ſerá hum diametro, pois divide igualmente duas linhas parallelas: depois do ponto C ſe tire a linha CI perpendicular a GK; e dividindo eſta linha pelo meio no ponto K, levantando neſte ponto huma perpendicular KL, ſerá o eixo da parabola.

DEMONSTRAÇÃO.

Sendo as linhas AB, e CD ordenadas ao diametro GH, e a linha CI perpendicular ao diametro, ſerá tambem perpendicular ao eixo, pois o eixo he parallelo ao diametro, e eſta meſma linha ſerá huma dupla ordenada ao eixo: logo a linha KL, que paſſa pelo meio, he o eixo, que ſe pede, pois o eixo divide em duas igualmente as duplas ordenadas.

PRO-

## PROPOSIÇÃO XI.

### PROBLEMA.

628 Dada huma parabola, achar-lhe o parametro.

Para achar o parametro de huma parabola dada, he preciso buscar huma terceira proporcional a qualquer abcisa, v. gr. LM, e á ordenada correspondente MN *, que será por exemplo OP, e esta linha OP será o parametro que se pede, pois o rectangulo feito de LM, e OP será igual ao quadrado da ordenada MN. * Figura 7. * Numer. 601. * Numer. 603.

## PROPOSIÇÃO XII.

### PROBLEMA.

629 Dada huma parabola, de que se conhece o parametro, achar-lhe o fóco.

Para achar o fóco de huma parabola se tome no eixo LK huma parte LQ igual ao quarto do parametro OP, e o ponto Q será o fóco, que se busca; o que he evidente, pois pela geração da parabola o parametro he quadruplo Figura 7.

plo da diſtancia do fóco Q ao vertice L da parabola.

## CAPITULO II.

### *Da Ellipſe.*

DEFINIÇÕES.

I.

Eſtamp. 18 Figura 8.

630 TEndo tirado em hum plano duas linhas rectas deſiguaes AB, e CD, que ſe cortem pelo meio com angulos rectos no ponto E: ſe ſe deſcrever hum ſemicirculo, cujo diametro ſeja a maior AB, e ſobre eſte diametro ſe levantarem muitas perpendiculares, v. gr. FG, IK, &c., e depois ſe tomar FH quarta proporcional ás linhas AB, CD, FG, e tambem IL quarta proporcional a AB, CD, IK, &c., e ſe continuar a achar deſte meſmo modo huma quantidade de pontos taes como H, e L, a curva, que paſſar por todos eſtes pontos, ſerá chamada *Ellipſe*.

II.

631 A linha AB ſe chama *eixo maior* da Ellipſe; e a linha CD, que ſe

ſup-

ſuppõe perpendicular ao meio de AB, ſe chama *eixo menor*: á linha CD ſe lhe chama tambem *eixo conjugado* ao eixo AB; e reciprocamente o eixo AB *conjugado* ao eixo CD.

III.

632 As linhas FH, IL perpendiculares ao eixo AB ſe chamão *ordenadas ao meſmo eixo*; as linhas IK, FG ſe chamão *ordenadas do circulo*; e comparando-as com as ordenadas da Ellipſe, de que são parte, ſe chamão todas *ordenadas correſpondentes*: do que ſe ſegue que a Ellipſe he huma curva, da qual as ordenadas tem ſempre ás ordenadas de hum circulo deſcripto ſobre o maior eixo huma conſtante razão, que he a do eixo maior AB ao ſeu conjugado CD, de que ſe tira eſta analogia para qualquer ordenada, v. gr. FH; AB: CD :: FG : FH.

IV.

633 Buſcando-ſe huma terceira proporcional aos eixos AB, e CD, v. gr. MN, eſta linha ſe chama *parametro do eixo*, que he o primeiro termo da proporção contínua.

V.

V.

634 O ponto, em que os eixos ſe cortão em angulos rectos, ſe chama *centro* da Ellipſe.

VI.

Figura 9. 635 Se no eixo maior de huma Ellipſe ſe tomão os pontos K, K apartados cada hum dos extremos do eixo menor á linha KD=AE, iſto he, a diſtancia de metade do eixo, eſtes pontos ſe chamão *fócos* da Ellipſe.

VII.

636 As partes AF, BF de hum eixo, feitos pelo encontro da ordenada FG a eſte eixo, ſe chamão *abciſas*, ou *cortadas do eixo*, a reſpeito da ordenada FG; e chamão-ſe tambem algumas vezes *abciſas* as partes comprehendidas entre o centro, e o encontro de huma ordenada, como EF, e então ſe diz que as abciſas tem no centro a ſua origem.

## PROPOSIÇÃO I.

### THEOREMA.

637 Tirada na Ellipſe huma ordenada FH ao primeiro eixo, digo que o

Figura 9.

re-

rectangulo das abcisas AF, FB deste eixo he ao quadrado da ordenada FH, como o quadrado do primeiro eixo AB he ao quadrado do segundo CD; ou, o que vem a ser o mesmo, como o quadrado de AE ao quadrado de DE.

Chamemos AE, ou BE $a$, CE, ou ED $b$, as indeterminadas EF $x$, FH $y$, FG $s$, será AF $a-x$, e FB $a+x$: isto supposto, devemos mostrar que $AF \times FB : FH^2 :: AB^2 : CD^2$, ou $:: AE^2 : ED^2$, ou que $aa-xx : yy :: a^2 : b^2$.

DEMONSTRAÇÃO.

Como pela definição da Ellipse cada huma das ordenadas he quarta proporcional ao eixo maior AB, ao pequeno CD, e á ordenada FG, será $AB : CD :: FG : FH$, ou $2a : 2b :: s : y$: logo $AB^2 : CD^2 :: FG^2 : FH^2$, ou $4a^2 : 4b^2 :: ss : yy$; mas pela propriedade do circulo o quadrado da ordenada FG he igual ao producto das abcisas, ou $AF \times FB = FG^2$, e analiticamente $ss = aa-xx$: logo pondo esta expressão em lugar de $ss$ na antecedente proporção, será $4a^2 : 4b^2 :: aa-xx : yy$; e invertendo, será $aa-xx :$

$yy :: 4a^2 : 4b^2 :: a^2 : b^2$, dividindo por 4 os termos da ſegunda razão. *O Q. S. Q. D.*

## COROLLARIO I.

Figura 8. 638 Havendo duas ordenadas FH, e IL, teremos pela propoſição precedente $AF \times FB : FH^2 :: AB^2 : CD^2$, e $AI \times IB : IL^2 :: AB^2 : CD^2$ : logo $AF \times FB : FH^2 :: AI \times IB : IL^2$, ou alternando $AF \times FB : AI \times IB :: FH^2 : IL^2$, iſto he, os quadrados das ordenadas FH, IL são entre ſi, como os productos das ſuas abciſas.

## COROLLARIO II.

Figura 9. 639 Segue-ſe tambem que ſe do ponto H ſe tira a ordenada HI ao ſegundo eixo CD, o rectangulo comprehendido das partes IC, ID he ao quadrado da ordenada IH, como o quadrado do meſmo eixo CD ao quadrado do ſeu conjugado AB.

Como $FH = EI$, ſerá $EI = y$; e ſendo $FE = HI$, ſerá $HI = x$, ſerá ID $b - y$, CI ſerá $b + y$: iſto ſuppoſto, pela propoſição precedente ſerá $aa - xx : yy :: a^2 : b^2$; e tomando os productos dos extremos,

mos, e meios *, teremos $aabb - xxbb = yyaa$; e fazendo paſſar $-xxbb$ do primeiro membro ao ſegundo, e $aayy$ do ſegundo para o primeiro, teremos $aabb - aayy = bbxx$, de que ſe tira eſta proporção $bb - yy : xx :: bb : aa$ *, iſto he, ID × DC : IH² :: DE² : AE²; no que ſe vê claramente que as propriedades das ordenadas ao eixo menor da Ellipſe são inteiramente as meſmas que as do grande eixo; de que ſe póde concluir que as ordenadas ao eixo menor da Ellipſe são terceiras proporcionaes á metade do eixo menor, á metade do maior, e á ordenada IN de hum circulo deſcripto ſobre o eixo menor, o que he facil de comprehender, ſe attendermos que na proporção ID×CD : IH² :: AE² : DE² ſe póde pôr em lugar do rectangulo ID×DC o quadrado da ordenada IN, que lhe he igual, de que ſe deduz, tomando as raizes, e fazendo a razão inverſa DE : AE :: IH : IN. Póde-ſe logo definir a Ellipſe, dizendo, que he huma curva, da qual todas as ordenadas creſcem, ou diminuem proporcionalmente: creſcem, quando o cir-

* Tom. I. Numer. 202.

* Tom. I. Numerò 212.

circulo ſe deſcreve ſobre o eixo menor; e ſe encurtão, quando ſe deſcreve ſobre o eixo menor.

### COROLLARIO III.

640 Chamando $a$ ao primeiro eixo de huma Ellipſe, e $b$ ao ſegundo, $p$ o parametro do primeiro eixo, teremos * $a : b :: b : p$, e * $aa : bb :: a : p$; mas pela propriedade da Ellipſe he $aa - xx : yy :: aa : bb$: logo ſerá tambem $aa - xx : yy :: a : p$, de que ſe tira $yy = aa - xx \times \frac{p}{a}$, iſto he, o quadrado de qualquer ordenada he igual ao producto das ſuas abciſas, multiplicado pela razão do parametro ao eixo; e aſſim ſe ſe ſabe que o parametro he os dous terços do eixo, o quadrado de cada ordenada ſerá igual aos dous terços do rectangulo das abciſas correſpondentes.

* Numer. 633.
* Numer. 502.

### NOTA I.

Figura 8.

641 He de notar que por ſer $AF \times FB : FH^2 :: AI \times IB : IG^2$, ſe em lugar dos rectangulos $AF \times FB$, e $AI \times IB$ ſe põem os quadrados das ordenadas FG, e IK,

e IK, que lhe são iguaes pela propriedade do circulo *, teremos $FG^2 : FH^2 :: IK^2 : IL^2$; e tirando as raizes de cada termo, será $GF : FH :: IK : IL$; e alternando, $FG : IK :: FH : IL$, o que mostra que se as linhas FH, e IL se tomarem por elementos da superficie do quarto da Ellipse EAD, e as linhas FG, e IK por elementos do quarto de circulo EAM, os elementos do quarto da Ellipse estão na mesma razão que os elementos do quarto de circulo, que lhe he correspondente.

* Numer. 442.

## NOTA II.

642 Já vimos que em huma progressão composta de elementos infinitos, v. gr. FG, IK de hum quarto de circulo, a somma dos quadrados de todos estes elementos seria igual ao producto do quadrado do maior elemento EM pelos dous terços da linha AE, que expressa o numero; e como os elementos da Ellipse tem todos a mesma razão com os elementos correspondentes do quarto de circulo, segue-se que terão a mesma propriedade das do cir-

culo; e por conſequencia ſe houver huma progreſsão compoſta de infinitos termos dos elementos de hum quarto da Ellipſe EAD, a ſomma dos quadrados de todos os elementos taes como FH, IL he igual ao producto do quadrado do maior elemento ED pelos dous terços da quantidade, que expreſſa o numero, iſto he, pelos dous terços da linha AE.

Eſtas duas advertencias nos hão de ſervir muito na Geometria prática, e por iſſo precisão eſtudallas com todo o cuidado para ſe comprehenderem bem.

## DEFINIÇÃO I.

Figura 10. 643 Chamão-ſe diametros de huma Ellipſe a duas linhas, como CD, e EF, que paſſando pelo centro da Ellipſe, ſe terminão na curva.

## DEFINIÇÃO II.

644 Tendo tirado de qualquer ponto C da Ellipſe hum diametro CD, e huma ordenada CK ao eixo, ſe fizermos GO terceira proporcional, a GK, e GA, o diametro EF, que ſe tirar paral-

rallelo a CO, ſe chama diametro conjugado ao diametro CD, e reciprocamente o diametro CD ſe diz conjugado ao diametro EF.

DEFINIÇÃO III.

645 Toda a linha, como HI, tirada de qualquer ponto H do diametro CD parallelamente ao ſeu conjugado EF ſe chama ordenada ao diametro CD.

DEFINIÇÃO IV.

646 Huma terceira proporcional aos diametros conjugados CD, EF ſerá o parametro do diametro, que he o primeiro termo da proporção.

COROLLARIO.

647 Pois * ſe fez GK:GA::GA:GO, ſegue-ſe que ſe chamarmos GK $x$, GA $a$, KO $z$, teremos GK $x$:GA $a$ :: GA $a$:GO $x+z$, do que ſe ſegue $xx+xz=aa$ *; e paſſando $xx$ do primeiro ao ſegundo membro, teremos $xz=aa-xx$, ou OK×KG=AK×KB. Eſte corollario ſe deve comprehender bem, pois nos ha de ſervir de muito nas ſeguintes propoſições.

* Numer. 644.

* Tom. I. Numer. 202.

## PROPOSIÇÃO II.

### THEOREMA.

648 Se dos extremos C, e E dos dous diametros conjugados CD, EF ſe tira ao eixo AB as ordenadas CK, EP, digo que o quadrado da parte GP ſerá igual ao rectangulo de KA por KB.

Tendo $AG=a$, $GP=f$, $GK=x$, $KO=z$, ſerá $GO=x+z$: iſto ſuppoſto, moſtraremos que $AK\times KB$ $aa-xx$, ou $xz$ * $=ff$.

* Numer. 647.

### DEMONSTRAÇÃO.

* Numer. 638. Pela propriedade da Ellipſe * $AK\times KB$ $xz$: $AP\times PB$ $aa-ff$ :: $KC^2$ $PE^2$; e ſe em lugar de $aa$ no ſegundo termo da proporção ſe põe $xx+zx$, que lhe he igual *, e em lugar de $KC^2$, e $PE^2$ ſe põem $KO^2$ $zz$, e $PG^2$ $ff$, que eſtão na meſma razão por cauſa dos triangulos ſemelhantes COK, EGP, que dão CK : PE :: KO : PG, teremos $AK\times KB : AP\times PB :: KO^2 : PG^2$, ou $xz : xx+xz-ff :: zz : ff$: logo o producto dos extremos, e dos meios dá eſta equação $xxzz+xz^3-f^2z^2=f^2zx$ *; e tranſpondo $ffzz$ do

* Numer. 647.

Tom. I. * Numer. 202.

do primeiro membro para o ſegundo, teremos $xxzz+xz^3=f^2z^2+f^2zx$: dividindo ambos os numeros da equação por $z$, teremos $xxz+z^2x=ffz+ffx$; e tornando a dividir ambos os membros por $z+x$, ficará $xz=ff$, ou $AK\times KB=GP^2$. *O Q. S. Q. D.*

### COROLLARIO.

649 Como temos $xx+xz=aa$ *, ſegue-ſe deſta propoſição, que pondo $ff$ em lugar de $xz$, que lhe he igual, teremos $xx+ff=aa$; e paſſando $ff$ do primeiro para o ſegundo membro, ſerá $GK^2$ $xx=AP\times PB$ $aa-ff$. * Numer. 647.

## PROPOSIÇÃO III.

### THEOREMA.

650 O rectangulo feito das partes CH, HD do diametro CD he ao quadrado de huma ordenada HI, como o quadrado deſte meſmo diametro he ao do ſeu conjugado FE.

Depois de ter tirado as linhas IN, HL parallelas a CK, e a linha HM parallela a AB, chamaremos GK $x$, CK $y$, AG $a$, KO $z$, MH, ou LN $c$, GL $g$, GC $s$.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

He evidente que os triangulos GKC, GLH são ſemelhantes, e ſerá GK $x$: KC $y$ :: GL $g$ : LH $\frac{gy}{x}$; e os triangulos COK, IHM, que são tambem ſemelhantes, pois tem os lados parallelos cada hum ao ſeu, nos dão OK $z$: KC $y$ :: HM $c$ : IM $\frac{cy}{z}$, do que ſe tira IM + HL = IM + MN, ou IN = $\frac{gy}{x} + \frac{cy}{z}$, cujo quadrado he $\frac{ggyy}{xx} + \frac{2cgy^2}{xz} + \frac{ccyy}{zz}$: além diſſo LN − LG = GN = $c - g$, cujo quadrado he $cc - 2cg + gg$: iſto ſuppoſto, buſque-ſe outro valor de IN, que ſe achará pela propriedade da Ellipſe *, porque AK × KB : AN × NB, ou $GB^2 - GN^2$ *:: $CK^2 : IN^2$, ou analiticamente $aa - xx : aa - cc + 2cg - gg :: yy : yy \times \frac{aa - cc + 2cg - gg}{aa - xx} = IN^2$, ou fazendo a multiplicação, ſerá $\frac{aayy - ccyy + 2cgyy - ggyy}{aa - xx}$; e fazendo huma equação com eſtes dous va-

* Numer. 638. Tom. I.
* Numer. 62.

valores, será $\frac{ggyy+2cgy^2+ccyy}{xx} = \frac{a^2y^2}{zz}$ $\frac{-c^2yy+2cgy^2-g^2y_2}{aa-xx}$; mas $aa-xx=xz$ será $\frac{ccyy}{zz}+\frac{2cgyy}{xz}+\frac{ggyy}{xx} = \frac{aayy-ccyy+2cgyy}{zx}$ $-ggy^2$, ou tirando de cada membro o termo igual $\frac{2cgyy}{xz}$; e dividindo depois tudo por $yy$, fica $\frac{cc}{zz}+\frac{gg}{xx}=\frac{aa-cc-gg}{aa-xx}$: multiplique-se tudo por $xx$ para livrar $gg$ de quebrado, e ficará $\frac{ccxx}{zz}+gg = \frac{aaxx-ccxx-ggxx}{aa-xx}$: depois faça-se passar $gg$ do primeiro ao segundo membro, e se reduza a quebrado, cujo denominador seja $aa-xx$, e teremos esta equação $\frac{ccxx}{zz}$, ou $\frac{c^2x^4}{x^2z^2} = \frac{aaxx-ccxx-aagg+ggxx-ggxx}{aa-xx}$, e porque o primeiro membro $\frac{ccxx}{zz}$ he o mesmo que $\frac{c^2x^4}{x^2z^2}$, pois não se fez mais que multiplicar os dous termos de cada quebrado pela mesma grande-

deza $xx$; mas o primeiro membro deſta equação eſtá dividido pelo quadrado de $xz$, ou de $aa-xx$, que he o diviſor do ſegundo membro: logo deſvanecer-ſe-ha toda a fracção, multiplicando o numerador do ſegundo membro por $aa-xx$, e teremos $ccx^4=aaxx-ccxx-aagg \times aa-xx=a^4x^2-c^2a^2x^2-a^4g^2-a^2x^4+c^2x^4+a^2g^2x^2$; e tirando de huma parte, e outra $c^2x^4$, e tranſpondo $a^2c^2x^2$ do ſegundo membro para o primeiro, ficará $a^2c^2x^2=a^4x^2-a^4g^2-a^2x^4+a^2g^2x^2$; e dividindo por $a^2x^2$, dará $cc=a^2-x^2+g^2-\frac{a^2g^2}{x^2}=LN^2=HM^2$: iſto ſuppoſto, por ſerem os triangulos GKC, e GLH ſemelhantes, ſerá $GKx:GCs::GLg:GH\frac{gs}{x}$, e por conſequencia $GD^2-GH^2$, ou $CH\times HD$ *$=ss-\frac{g^2s^2}{x^2}=\frac{s^2x^2-g^2s^2}{x^2}$. Para examinar ſe he verdadeira a proporção dada no theorema, he preciſo advertir que as quatro grandezas ſeguintes $CH\times HD$, $HM^2$, $CG^2$, $GP^2$ eſtão em proporção, pois diſpondo-as em expreſsões ana-

Tom. I. * Numer. 62.

analiticas, ſe acha ſer o producto dos extremos igual ao dos meios, ou, o que vem a ſer o meſmo, $CH \times HD \frac{ssxx-ggss}{xx}$: $KM^2 a^2 - x^2 + g^2 - \frac{a^2 g^2}{x^2} :: GC^2 ss : GP^2 aa-xx$: logo ſubſtituindo em lugar dos conſequentes as quantidades, que lhes são proporcionaes, a ſaber, $HI^2$, e $GE^2$, como he evidente por cauſa dos triangulos HIM, PEG ſerem ſemelhantes, ſerá $CH \times HD : HI^2 :: CG^2 : GE^2$. *O Q. S. Q. D.*

## COROLLARIO I.

651 Daqui ſe vê que o meſmo que na propoſição primeira ſe demonſtrou a reſpeito dos ſeus eixos, ſe entende por eſta propoſição a quaeſquer dous diametros; porque ſe ſe applica o meſmo diſcurſo da parabola á Ellipſe *, ver-ſe-ha que a tangente HI ao extremo A do eixo AB, tendo eſcorregado ao longo da curva ao lugar QR, e tendo-ſe movido o eixo AB a occupar o lugar FG, a ordenada KL, que ſempre a acompanharia parallela á tangente HI, ſe- * Numer. 621. Figura 11.

ſerá a ordenada OP; e como tambem o eixo conjugado CD ſe teria movido parallelamente á tangente HI, virá a ſer o diametro conjugado MN; e por conſequencia ficando todas as linhas com a meſma razão de humas a outras, ſegue-ſe que o rectangulo feito das abciſas OF, OG he ao quadrado da ordenada OP, como o quadrado do diametro FG ao quadrado do ſeu conjugado MN.

COROLLARIO II.

Fig. 11

652 Segue-ſe tambem que para tirar por hum ponto F huma tangente QR á Ellipſe, he preciſo baixar deſte ponto huma perpendicular FS ao eixo AB, e fazer EQ terceira proporcional as rectas ES, EA * para ter o ponto Q, do qual ſe tire a tangente pelo ponto dado.

* Numer. 644.

COROLLARIO III.

653 Segue-ſe tambem deſta propoſição que toda a linha parallela á tangente RQ eſtá dividida igualmente pelo diametro FG, por quanto o rectan-

ctangulo de FO por OG he ao quadrado de OP, como o quadrado de FG ao quadrado de MN: tambem o rectangulo de FO por OG he ao quadrado de OT, como o quadrado de FG ao quadrado de MN; de que ſe ſegue que o quadrado de OP he igual ao quadrado de OT, e conſequentemente OT = OP.

## COROLLARIO IV.

654 Segue-ſe tambem que os quadrados das ordenadas a hum meſmo diametro ſão entre ſi como os rectangulos das abciſas correſpondentes, do que ſe vê que chamando-ſe a qualquer diametro $2a$, e ao ſeu conjugado $2b$, o parametro do primeiro $p$, $x$, e $y$ a abciſa, e ordenada correſpondentes, teremos como nos eixos $yy = \frac{aa - xx \times p}{2a}$, iſto he, que o quadrado de huma ordenada a qualquer diametro he igual ao rectangulo das abciſas, multiplicado pela razão do parametro ao diametro: ſe o diametro he maior que o ſeu parametro, o quadrado de qualquer ordenada ſerá maior que o rectangulo

menor das

das abciſas: ſe os dous diametros são iguaes, o parametro ſerá igual ao diametro, e por conſequencia o rectangulo das abciſas ſerá igual ao quadrado de cada ordenada, e então ſerão as ordenadas iguaes á de hum circulo deſcripto ſobre hum dos diametros, mas obliquas a eſte diametro, porque neſta curva ſó as ordenadas ao eixo he que podem ſer a angulos rectos, como he facil de conhecer, attendendo a que ſendo as ordenadas ſempre parallelas, as tangentes neceſſariamente devem fazer com os ſeus diametros os meſmos angulos que as tangentes.

## PROPOSIÇÃO IV.

### THEOREMA.

655 Os quadrados dos dous diame-
Figura 10. tros conjugados CD, e EF são iguaes em ſomma aos quadrados dos ſeus eixos AB, QR.

### DEMONSTRAÇÃO.

Conſervando a meſma conſtrucção
* Numer. 648. antecedente, teremos * $GP^2 = aa - xx$,

e * $GA^2 - GP^2$, ou $AP \times BP = GK^2 = xx$; mas pela propriedade da Ellipse será $GA^2 : GR^2 :: AP \times PB : PE^2$, ou analiticamente $a^2 : b^2 :: xx : \frac{bbxx}{aa} = PE^2$, e tambem $GA^2 : GR^2 :: AK \times KB : : CK^2$, e em letras $a^2 : b^2 :: aa - xx : \frac{aabb - xxb^2}{a^2}$. Nos triangulos rectangulos GPE, GKC será $EG^2 = EP^2 + PG^2 = \frac{bbxx}{aa} + aa - xx$, ou $EG^2 = \frac{a^4 - aaxx + bbxx}{aa}$, e tambem $CG^2 = CH^2 + GK^2 = \frac{aabb - bbxx}{a^2} + xx = \frac{aabb - bbxx + aaxx}{a^2}$: logo $EG^2 + CG^2 = \frac{a^4 - aaxx + b^2x^2 + b^2a^2 - b^2x^2 + a^2x^2}{a^2} = \frac{a^4 + a^2b^2}{a^2}$; e dividindo por $a^2$, será $aa + bb = EG^2 + CG^2$, que quadruplicando os termos de cada membro, será $AB^2 + RQ^2 = CD^2 + EF^2$. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 649.

## COROLLARIO.

656 Segue-se desta proposição que não póde haver em huma Ellipse mais que

que dous diametros conjugados, que ſejão iguaes; porque como a ſomma dos quadrados dos dous ſemidiametros conjugados he igual á dos quadrados dos dous meios eixos, ſe ſe toma a expreſsão geral deſtes diametros pelo quadrado de hum dos dous diametros conjugados iguaes, por exemplo, á de $CG^2$, teremos eſta equação $\frac{2aabb-2bbx^2}{aa} + 2a^2x^2 = aa + bb$; e multiplicando tudo por $aa$, ſerá $2a^2b^2-2b^2x^2+2a^2x^2 = a^4 + a^2b^2$, do que ſe deduz, deſtruindo $a^2b^2$ em cada membro, $a^2b^2 - 2b^2x^2 + 2a^2x^2 = a^4$, ou tranſpondo $aabb - a_4 = 2bbxx - 2aax^2$, dividindo tudo por $bb-aa$, ficará $a^2 = 2xx$, ou $x^2 = \frac{aa}{2}$, de que ſe deduz eſta proporção $\frac{1}{2}a : x :: x : a$, o que moſtra que a abciſa, que determina os dous diametros conjugados iguaes, he meia proporcional entre metade, e a quarta parte do eixo maior; e como entre duas grandezas não póde haver mais que huma meia pro-

por-

porcional, segue-se que na Ellipse não póde haver mais que dous diametros conjugados, que sejão iguaes.

## PROPOSIÇÃO V.

### THEOREMA.

657 Se pelo extremo A do eixo AB se tira huma tangente, que vá encontrar nos pontos N, F os dous diametros conjugados MG, IH continuados quanto for necessario, digo que o rectangulo das partes AN, AF he igual ao quadrado da metade do eixo CD, e vamos a provar que $AN \times AF = CE^2$. Figura 123

### DEMONSTRAÇÃO.

$AL \times LB = EK^2 = xx$ *, e consequentemente $AE^2\ aa : EC^2\ bb :: AL \times CB\ xx : LM^2\ \frac{bbxx}{aa}$; e como este ultimo termo he quadrado perfeito, extrahindo-lhe a raiz, será $LM = \frac{bx}{a}$; mas * $AK \times KB = LE^2$ será $CE^2 : AE^2 :: IK^2 : AK \times KB$, ou $EL^2$, e analiticamente $bb : aa :: yy : \frac{aayy}{bb} = LE^2$; e extrahindo tambem a raiz

* Numer. 649.

* Numer. 648.

raiz a eſta quantidade por ſer quadrado perfeito, teremos $EL = \frac{ay}{b}$: iſto ſuppoſto, por ſerem os triangulos EAF, ELM ſemelhantes, teremos eſta proporção EL:LM::EA:AF; e pondo os valores analiticos, que achamos ſer $\frac{ay}{b} : \frac{bx}{a} :: \frac{aabxb}{aay} = \frac{bbx}{ay} = AF$, tambem por ſerem ſemelhantes os triangulos EAN, e EKI, ſerá EK:EA::IK:AN, ou $x : a :: y : \frac{ay}{x} = AN$: logo $AN \times AF = \frac{bbx}{ay} \times \frac{ay}{x} = bb = CE^2$. *O Q. S. Q. D.*

COROLLARIO.

658 Por eſta propoſição ſe podem facilmente determinar na Ellipſe os diametros conjugados iguaes, pois para iſto baſta tomar ſobre a perpendicular AN da origem do eixo huma parte AR igual CE metade do eixo menor, e pelo centro E, e ponto R tirar a linha ER, da qual a parte comprehendida entre o centro, e a curva he hum dos ſemidiametros conjugados iguaes; porque como ſempre AN×AF

=

$= CE^2$, quando os diametros conjugados são iguaes, serão iguaes as partes AN, AF, e por consequencia deve ser AR = CE.

## PROPOSIÇÃO VI.

### THEOREMA.

659 Se hum cone se cortar por hum plano obliquo á base, de modo que os dous lados do cone fiquem cortados entre o vertice, e a base, a secção será huma Ellipse. Figura 14.

Se o cone X se cortar pelo plano AB obliquo á sua base, e perpendicular ao plano do triangulo NOX, que passa pelo eixo do cone, a secção BEAF será huma Ellipse.

Supponhamos o cone cortado tambem por hum plano CM parallelo á base, que passe pelo meio da linha AB, que he a intersecção dos planos NOX, AEBF no eixo da curva, e tambem cortado por hum plano LD tambem parallelo á base, que passe por qualquer ponto I do eixo da curva: como estas duas secções são circulos, tiremos as linhas

EF, KH, que cortarão os diametros LD, CM a angulos rectos nos pontos G, I, e a linha EF ſerá o eixo menor da Ellipſe, e as linhas IK, e IH ſerão ordenadas: iſto ſuppoſto, ſeja AG, ou GB $=a$, EG, ou FG $=b$, GM $=c$, CG $=d$, IG $=x$, IK $=y$, ſerá IB $=a+x$, AI $=a-x$: moſtraremos agora que AI $\times$ IB $aa-xx$ : IK$^2$ $yy$ :: AG$^2$ $aa$ : GF$^2$ $bb$.

DEMONSTRAÇÃO.

Por ſerem os triangulos GMB, BID ſemelhantes, ſerá BG : BI :: GM : ID, ou $a : a+x :: c : \frac{ac+cx}{a}$ : tambem por ſerem ſemelhantes os triangulos ALI, ACG, ſerá AG : AI :: CG : LI, ou $a : a-x :: d : \frac{da-dx}{a}$ : logo multiplicando eſtas duas proporções termos por termos, teremos * $aa : aa-xx :: cd : \frac{ac+cx}{a} \times \frac{ad-ax}{a}$, ou AG$^2$ : AI $\times$ IB :: CG $\times$ GM : LI $\times$ ID; mas nos circulos CEMF, KDHL teremos GC $\times$ GM $=$ GE$^2$, ou GF$^2 = bb$, e ID $\times$ IL $=$ IH$^2$, ou IK$^2 = yy$: logo teremos AG$^2$ : IA $\times$ IB :: IH$^2$ : EF$^2$, ou inver-

Tom. I. * Numer. 225.

vertendo, e alternando $AI \times IB : IH^2 :: AG^2 : EF^2$, ou $aa - xx : yy :: aa : bb$.

GE²

## PROPOSIÇÃO VII.

### THEOREMA.

660 Se hum cylindro se córta por hum plano obliquo á base, a secção he huma Ellipse. Figura 15.

### DEMONSTRAÇÃO.

Para entender que a secção BEAT do cylindro Y he huma Ellipse, basta ler a demonstração do theorema precedente; e onde se encontrar o nome de cone substituir o de cylindro, a demonstração he a mesma.

## PROPOSIÇÃO VIII.

### THEOREMA.

661 Se de qualquer ponto, v. gr. G da Ellipse, se tirar as rectas GF, GE aos fócos E, e F, a somma destas duas linhas, tomadas de qualquer ponto, será sempre igual ao eixo maior AB. Figura 16.

DEMONSTRAÇÃO.

Os fócos E, e F se determinão descrevendo do ponto D, extremo do eixo menor, como centro, hum arco de circulo com o raio DF igual á metade do eixo maior, o qual circulo córte o eixo maior nos pontos E, e F, de que se segue que ED + DF = AB. Para mostrar esta mesma propriedade de qualquer ponto G differente do ponto D, façamos AI = $a$, ID = $b$, EI = $c$, IK = $x$, GK ordenada ao eixo = $y$: isto supposto, por ser o triangulo EKG rectangulo, será $EG^2 = EK^2 + GK^2$; mas EK he $c + x$: logo o quadrado he $cc + 2cx + xx$; e sendo GK ordenada ao eixo, será $GK^2 = bb - \frac{bbxx}{aa}$: logo $EG^2 = cc + 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$; e tirando as raizes de cada membro, será $EG = \sqrt{cc + 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{a^2}}$. Do mesmo modo por ser o triangulo FKG rectangulo, será $FG^2 = FK^2 + KG^2$; mas FK $= c - x$: logo $FK^2 = cc - 2cx + xx$, e

$FG^2$

$FG^2 = cc - 2xc + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$; e tirando as raizes de cada membro, ſerá $FG = \sqrt{cc - 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}}$. Preſentemente ſe a ſuppoſição da propoſição he verdadeira, igualando a ſomma das duas linhas com o eixo maior $2a$, chegaremos a algum principio evidente, que nos ſegure da verdade da ſuppoſição, ou encontraremos algum abſurdo, que nos moſtre que a ſuppoſição he falſa: faço pois eſta equação $2a = \sqrt{cc + 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}} + \sqrt{cc - 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}}$, do que tiro, tranſpondo $2a - \sqrt{cc - 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}} = \sqrt{cc + 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}}$; e quadrando ambos os membros, ſerá $4a^2 - 4a \times \sqrt{cc - 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}} + cc - 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa} = cc + 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$; e tirando de huma, e outra parte

te as quantidades iguaes, e tranſpondo a quantidade $-2cx$ do primeiro para o ſegundo membro, teremos $4a^2 - 4a\sqrt{cc - 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}} = 4cx$; e fazendo paſſar $4cx$ para o primeiro membro, e o termo radical para o ſegundo, depois de dividido por 4, ſerá $a^2 - cx = a\sqrt{cc - 2cx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}}$; e quadrando cada membro da equação, teremos eſta $a^4 - 2a^2cx + ccxx = a^2c^2 - 2a^2xc + a^2x^2 + a^2b^2 - bbx^2$, na qual deſtruindo de cada termo as quantidades iguaes $-2a^2cx$, ſerá $a^4 + c^2x^2 = a^2c^2 + a^2b^2 + a^2x^2 - b^2x^2$; e finalmente ſe neſta ultima equação puzermos em lugar de $c^2$ o ſeu valor, que he $aa - bb$, como he evidente, por cauſa do triangulo rectangulo EID, teremos $a^4 + a^2x^2 - b^2x^2 = a^4 - a^2b^2 + a^2x^2 + a^2b^2 - bbxx$, do que ſe deduz, tirando de huma, e outra parte as quantidades iguaes, e reduzindo o ſegundo membro $0 = 0$, o que moſtra a verdade da propoſição.

ADVERTENCIA.

662 Huma ſemelhante expreſsão 0=0 talvez pareça aos principiantes bem eſtranho, e ſe acharão embaraçados em comprehender como neſta equação ſe poſſa fundar a verdade de hum theorema, ou de qualquer outra propoſição. Para comprehender iſto ſe deve attender a que todas as demonſtrações ſe fundão em axiomas, e baſta moſtrar a connexão de huma propoſição com algum axioma para eſtabelecer a ſua verdade; e fazendo reflexão em todas as operações que fizemos, ver-ſe-ha que trabalhando ſobre a meſma ſuppoſição, chegamos a eſte axioma, que nada he igual a nada, que tambem ſe podia eſtabelecer por hum dos primeiros axiomas, pois eſta verdade não ſe póde conceber de outro modo do que foi expreſſada: logo a noſſa propoſição he verdadeira, pois tem huma connexão com o axioma. Os que lerem os Authores, que tem eſcrito muito ſobre as Mathematicas, verão de quanto uſo he eſte principio nas demonſtrações de gran-

grande numero de theoremas; e fallando com propriedade, póde-ſe dizer que he o melhor methodo de demonſtrar as propoſições, e deſcubrir as verdades da Algebra, porque baſta ſuppôr que he aſſim; e ſe depois eſta ſuppoſição nos conduz a algum abſurdo, conclue-ſe que he falſa, e que he verdadeira ſe daqui ſe chega a algum axioma, ou outra verdade de ſi meſmo evidente, ou já demonſtrada.

## PROPOSIÇÃO IX.

### PROLBEMA.

— 663 Dados os dous eixos conjugados AB, e CD de huma Ellipſe, deſcrever a Ellipſe com hum movimento ſeguido. Figura 16.

### SOLUÇÃO.

Do ponto D, como centro, e com o intervallo AI igual á metade de AB eixo maior, ſe deſcreva hum arco de circulo, que córte o meſmo eixo nos pontos E, e F, que ſerão os fócos da Ellipſe. Tome-ſe depois hum fio do comprimento do meſmo eixo AB, cujos ex-

extremos ſe prenderão nos pontos E, e F, e com a ponta de huma eſtaca, que tenha ſempre o fio forte, ſe moverá do ponto A ao ponto D, e do ponto D ao ponto B, deſcrevendo a meia Elipſe ADB; e fazendo paſſar a eſtaca para a outra parte do eixo AB, ſe deſcreverá do meſmo modo a outra metade ACB. A demonſtração deſta prática ſe tira do que demonſtrámos na propoſição precedente, que a ſomma das duas linhas, tiradas de hum dos pontos da Elipſe aos fócos, he igual ao grande eixo, e ſe podia tambem definir a Elipſe com eſta propriedade, da qual ſe podião deduzir as outras todas.

## PROPOSIÇÃO X.

### PROBLEMA.

664 Dada huma Elipſe, achar-lhe o centro, e os dous eixos conjugados. Figura 13.

### SOLUÇÃO.

Tirem-ſe por quaeſquer dous pontos A, C as linhas parallelas AB, e CD, que ſe dividirão ambas pelo meio nos pon-

pontos E, e F, para ter as ordenadas ao diametro GH *, que paſſando pelos pontos E, e F, paſſará tambem pelo centro da Ellipſe; e dividindo eſta linha GH pelo meio no ponto I, ſerá eſte ponto o centro da Ellipſe, do qual deſcrevendo o arco GL, dará dous pontos na curva igualmente diſtantes do centro, que ſervirão para delles ſe fazer a ſecção M; e tirando a linha MI, a parte NO deſta linha comprehendida pela curva ſerá o eixo maior; e para termos o eixo menor, levantaremos no ponto I huma perpendicular á linha NO. Eſta propoſição eſtá baſtantemente demonſtrada pelo que temos dito antecedentemente.

* Numer. 653.

## CAPITULO III.

### *Da Hyperbole.*

Fig.ª 17.

DEFINIÇÕES.

I.

665 TIrando em hum plano duas rectas AB, DE, que ſe cortem a angulos rectos no ponto C, levante-ſe no

no extremo B a perpendicular BS; e tendo continuado AB infinitamente para O, e para P, tome-ſe ſobre BO hum numero de partes iguaes, v. gr. BG, GL, para do ponto C, como centro, deſcrever os ſemicirculos GQI, LRK, &c., que cortarão a perpendicular BS nos pontos F, e N: buſque-ſe depois ás linhas AB, DE, BF huma quarta proporcional GH, que ſe levantará perpendicular no ponto G: do meſmo modo buſque-ſe huma quarta proporcional LM ás linhas AB, DE, BN, que ſe levantará perpendicular no ponto L; e continuando deſte modo a buſcar hum numero de pontos H, M, &c., a curva, que paſſar por eſtes pontos, ſe chama *Hyperbole*.

II.

666 Se ao meſmo tempo ſe deſcreverem duas Hyperboles, huma do extremo A, outra do extremo B, chamar-ſe-hão ambas *Hyperboles oppoſtas*.

III.

667 A linha AB ſe chama *primeiro eixo*, e a linha DE *ſegundo eixo* de cada huma das Hyperboles oppoſtas.

IV.

IV.

668 Os dous eixos AB, DE ſe chamão *conjugados*, de ſorte que o primeiro AB ſe chama *conjugado ao ſegundo* DE, e reciprocamente o ſegundo DE *conjugado ao primeiro* AB.

V.

669 O ponto C, em que ſe cortão os dous eixos a angulos rectos, ſe chama *centro da Hyperbole*, ou *das Hyperboles oppoſtas*.

VI.

670 Todas as linhas perpendiculares ao eixo AB continuado, como GH, LM, &c., ſe chamão *ordenadas ao primeiro eixo* AB; e toda a linha, como TV, tirada perpendicularmente ao ſegundo eixo ED, ſe chama *ordenada ao meſmo eixo menor*.

VII.

671 As partes AG, BG do eixo, e do eixo prolongado ſe chamão *abciſas da ordenada* correſpondente GH, como tambem AL, BL, que ſão *abciſas da ordenada* ML.

VIII.

672 Huma linha terceira proporcional aos dous eixos ſe chama *Parame-*

*metro* do eixo, que he o primeiro termo da proporção.

## PROPOSIÇÃO I.

### THEOREMA.

673 Na Hyperbole o rectangulo das abciſas AG, BG do eixo AB he ao quadrado da ordenada GH correſpondente, como o quadrado do eixo maior AB ao quadrado do ſeu conjugado DE.

Chamemos CA, ou CB $a$, CD, ou CE $b$, BF $c$, as indeterminadas GC, ou CI $x$, GH $y$, ſerá AG $x+a$, BG $x-a$.

### DEMONSTRAÇÃO.

Pela definição da Hyperbole AB:DE :: BF:GH, ou $2a:2b::c:y$: logo quadrando os termos deſta proporção, ſerá $4aa:4bb::cc:yy$; mas pela natureza do circulo $BF^2$, ou $cc=IB\times BG$, ou $AG\times BG=a+x\times x-a=xx-aa$; e pondo eſta expreſsão em lugar da de $cc$, ſerá $4aa:4bb::xx-aa:yy$, ou tambem $xx-aa:yy::4aa:4bb$, iſto he, $AG\times BG:GH^2::AB^2:DE^2$. *O Q. S. Q. D.*

Co-

## COROLLARIO I.

674 Segue-ſe deſta propoſição que os quadrados das ordenadas são entre ſi como os rectangulos das ſuas abciſas, porque tendo $AG \times BG : GH^2 :: AB^2 : DE^2$, teremos pela meſma razão $AL \times BL : LM^2 :: AB^2 : DE^2$; e como as duas razões são iguaes a huma terceira *, ſerá $AG \times BG : GH^2 :: AL \times BL : LM^2$; e alternando $AG \times BG : AL \times BL :: GH^2 : LM^2$: logo, &c.

Tom. I. * Numer. 219.

## COROLLARIO II.

675 Segue-ſe deſta propoſição, que ſe ſe tira huma ordenada TV ao ſegundo eixo DE, o quadrado deſta ordenada ſerá ao quadrado de TC, e mais ao de DC, metade do ſegundo eixo, como o quadrado do ſeu conjugado AB ao quadrado do meſmo eixo DE, porque $TV = GC = x$, e $TC = v.gr. = y$; mas $xx - aa : yy :: 4aa : 4bb$ *: logo podemos tirar eſta equação * $4a^2yy = 4bbxx - 4aabb$; e paſſando $-4aabb$ do ſegundo membro para o primeiro, teremos $4a^2yy + 4aabb = 4bbxx$, do que ſe tira

* Numer. 673. Tom. I. * Numer. 202.

$xx$:

$xx : yy + bb :: 4aa : 4bb$, ou $TV^2 : CT^2 + CD^2 :: AB^2 : DE^2$.

REFLEXÃO.

676 Como achámos pelo corollario antecedente $4aayy = 4bbx^2 - 4a^2b^2$, dividindo cada membro da equação por $4aa$, teremos $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$, que he huma equação, que nos ha de ſervir de muito ao diante.

DEFINIÇÃO.

677 Se pelo extremo B do eixo AB ſe tira huma recta FG parallela ao ſegundo eixo DE, de ſorte que BF, ou BG ſeja cada huma igual á metade do meſmo eixo, e do centro C ſe tirar pelos extremos F, G as linhas CF, CG continuadas indefinitamente, eſtas linhas ſe chamarão *aſymptotas da Hyperbole* LBM; e ſe ſe continúa tambem infinitamente para a outra parte do centro, ſerão *aſymptotas* da outra *Hyperbole oppoſta*. Figura 18.

PRO-

## PROPOSIÇÃO II.

### THEOREMA.

678 Se tirarmos huma recta HI parallela ao ſegundo eixo DE, de ſorte que córte huma das Hyperboles, e ſe termine nas aſymptotas, digo que o rectangulo de HK por KI ſerá igual ao quadrado de CD, ou FB, metade do ſegundo eixo DE.

Chamemos a CB $a$, CD, ou BF $b$, as indeterminadas CP $x$, PK $y$, devemos provar que $DC^2$, ou $FB^2 = KH \times KI$.

### DEMONSTRAÇÃO.

Por ſerem ſemelhantes os triangulos CBF, CPH, ſerá CB : BF :: CP : PH, ou analiticamente $a : b :: x : \frac{bx}{a} =$ PH, e aſſim ſerá $HP - PK = \frac{bx}{a} - y$, e $PI + PK = \frac{bx}{a} + y$: logo $HP - PK \times HP + PK$, ou $HK \times KI = \frac{bx}{a} - y \times \frac{bx}{a} + y$, ou fazendo a multiplicação $\frac{bbxx}{aa} - yy =$

HK

HK×HI; mas * $yy=\frac{bbxx}{aa}-bb$ : logo * Numer. 666. 676 ſubſtituindo eſte valor em lugar de $yy$, ſerá $\frac{bbxx}{aa}-\frac{bbxx}{aa}+bb=HK\times KI$, ou $bb=FB^2=HK\times KI$. *O Q. S. Q. D.*

## COROLLARIO I.

679 Segue-ſe daqui que ſe ſe tirão as linhas TS, QR parallelas ao ſegundo eixo DE, e terminadas nas aſymptotas, os rectangulos TO×OS, HK×KI, e QD×QR são iguaes entre ſi, pois cada hum deſtes rectangulos he igual ao quadrado de FB, de que ſe tirão eſtas proporções OS:HK::KI:OT, e KH:QL::LR:KI.

## COROLLARIO II.

680 Segue-ſe tambem diſto que as partes MR, QL comprehendidas entre as aſymptotas são iguaes entre ſi, porque do meſmo modo ſe demoſtra $MR\times MQ=FB^2$; e como as ordenadas são iguaes, devem tambem as linhas MR, QL ſer iguaes.

### COROLLARIO III.

681 Segue-ſe daqui que por mais que ſe continue a curva, e as ſuas aſymptotas, nunca eſtas duas linhas ſe encontrarão, pois ſempre ſerá $QL \times LR = FB^2$, o que não ſuccederia, ſe eſtas duas linhas ſe encontraſſem, pois neſte caſo QL ſeria igual a nada, e por eſta razão eſtas linhas CQ, CR ſe chamão aſymptotas, iſto he, que não podem tocar a hyperbole.

## PROPOSIÇÃO III.

### THEOREMA.

682 Se por quaeſquer dous pontos
Figura 18. K, O de duas hyperboles oppoſtas ſe tirão duas rectas VX, e YZ parallelas entre ſi, e terminadas nas aſymptotas, digo que o rectangulo de VO por OX he igual ao de YK por KZ.

### DEMONSTRAÇÃO

Tirem-ſe pelos pontos O, K as linhas TOS, HKI parallelas entre ſi, e ao ſegundo eixo DE para ter os trian-

gu-

gulos semelhantes OSX, YHK, OTV, e KIZ, de que se tirão as seguintes proporções OS: HK :: OX: KY, e OT: KI :: OV: KZ: logo multiplicando estas duas proporções termos por termos, teremos OS×OT: KH×KI :: OX×OV: IK×KZ; mas * OS×OT = KH×KI: logo OX×OV = KY×KZ. *O Q. S. Q. D.* 679.

* Numer.

## PROPOSIÇÃO IV.

### THEOREMA.

683 Se por quaesquer dous pontos A, e C de huma Hyperbole, ou de Hyperboles oppostas se tirão duas rectas AB, e CD parallelas entre si, e outras duas AE, CF tambem parallelas, e terminadas nas asymptotas, digo que o rectangulo AE×AB será igual ao de FC×CD.

Figura 19.

### DEMONSTRAÇÃO.

Tirem-se pelos pontos A, e C as linhas GAH, ICK parallelas entre si: por serem semelhantes os triangulos EAG, FCI, BAH, DCK, será AG: AE :: CI: CF, e AH: AB :: CK: CD: logo

multiplicando ordenadamente eſtas proporções, teremos AG×AH : AE× AB :: CI×CK : FC×CD; mas * AG× AH = IC×CK: logo tambem AE×AB = CF×CD. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 679.

## COROLLARIO I.

684 Segue-ſe deſta propoſição que ſe por quaeſquer pontos A, e C de huma Hyperbole, ou de Hyperboles oppoſtas ſe tirão as linhas AP, e CO, AE, e CF parallelas ás aſymptotas, os rectangulos AE×AP, e CF×CO ſerão iguaes entre ſi, porque ſendo parallelas ás aſymptotas, são parallelas entre ſi, e por conſequencia eſtão no caſo das linhas AB, e CD.

## COROLLARIO II.

685 Como o ponto L, extremo do eixo, he hum dos pontos da Hyperbole, ſegue-ſe que tirando as linhas LM, LN parallelas ás aſymptotas, teremos tambem LM×LN = EA×AP, ou LM×LN = CF×CO; mas como LM×LN he o quadrado de ML, chamando a LM *a*, AP *x*, AE *y*, ſerá ſempre

pre AP×AE, ou CF×CO $xy = LM^2$ $aa$, que he huma equação, que expreſſa perfeitamente a propriedade da Hyperbole, e por meio da qual ſe podem determinar os ſeus pontos.

## PROPOSIÇÃO V.

### PROBLEMA.

686 Dado hum ponto, tirar por elle huma tangente a huma Hyperbole, de que temos os aſymptotas.

Para tirar huma tangente a huma Hyperbole por hum ponto v. gr. A, tireſe deſte ponto a linha AB parallela á aſymptota oppoſta EF, faça-ſe BD = BE, e a linha DAC tirada do ponto D pelo ponto A ſerá a tangente, que ſe buſca ao ponto A, porque por ſerem ſemelhantes os triangulos DCE, DAB, ſerá AC = AD; e ſe quizeſſemos que a Hyperbole tocaſſe tambem eſta linha no ponto H, far-ſe-ha AC = HD, o que he impoſſivel, menos que o ponto H não coincidiſſe com o ponto A: logo eſta linha he tangente ao ponto A. *O Q. S. Q. D.* Figura 21.

Co-

COROLLARIO.

687 Como ſó a linha CD terminada nos aſymptotas póde ſer cortada em duas igualmente no ponto A, ſegue-ſe que ſe huma recta CD, terminada pelas aſymptotas de huma Hyperbole, he tangente ao ponto A, em que eſtiveſſe cortada por huma linha IK, eſtaria dividida por eſta linha em duas partes iguaes AC, e AD.

DEFINIÇÃO I.

Figura 20. 688 Se tivermos duas linhas AB, CD, que ſe cortem no centro da Hyperbole, ou das Hyperboles oppoſtas, das quaes huma AB ſe tire pelo ponto do contacto B, meio de huma tangente FG, e a outra CD parallela, e igual á meſma tangente, eſtas duas linhas ſe chamão *diametros das Hyperboles*, e ambos juntos *diametros conjugados* hum do outro.

DEFINIÇÃO II.

689 Se por qualquer ponto, v. gr. H, da Hyperbole ſe tira huma linha HKI,

HKI, terminada de huma, e outra parte na curva, e parallela á tangente FG, eſta linha ſe chama *dupla ordenada* ao diametro EB, do qual a linha KH ſerá a ordenada: as partes EK, BK do diametro ſe chamão *abciſas* da ordenada HK.

## PROPOSIÇÃO VI.

### THEOREMA.

690 O quadrado de qualquer ordenada KH parallela a huma tangente FG he para o rectangulo AK×KB das ſuas abciſas, como o quadrado do diametro CD he ao quadrado do diametro AB. Figura 20.

Pelo extremo B dô diametro AB ſe tirem as rectas BC, e BD, e a tangente FG parallela ao diametro CD, e por conſequencia pelo precedente corollario ſerá dividida em duas igualmente no ponto B: continue-ſe a linha HI até as aſymptotas, o que dará as partes iguaes KM, KL: ſeja AE, ou EB $=a$, CE, ou DE $=b$, EK $=x$, HK, ou KI $=y$, do que ſe tira BK $=x-a$, e AK $=x+a$.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

He evidente que os triangulos EBF, EBD são iguaes, como tambem os triangulos EBG, CBE, porque eſtes triangulos tem os lados parallelos cada hum ao ſeu, e hum lado commum: logo FB=EC, ou ED=$b$: iſto ſuppoſto, os triangulos EBF, EKL são ſemelhantes, e ſerá EB:BF::EK:KL, ou $a:b::x:\frac{bx}{a}$=KL: logo LH=KL $-$KH=$\frac{bx}{a}-y$, e HM=KM, ou KL $+$KH=$\frac{bx}{a}+y$; mas pela propriedade das aſymptotas KM$\times$HL=FB$^2$: logo $\frac{bx}{a}+y\times\frac{bx}{a}-y=bb$, ou $\frac{bbxx}{aa}-yy=bb$, de que ſe tira $yy=\frac{bbxx}{aa}-bb=\frac{bbxx}{aa}-\frac{aabb}{aa}$, ou $aayy=bbxx-aabb$, o que dá eſta proporção $xx-aa:yy::aa:bb$, ou AK$\times$KB:KH$^2$::AB$^2$:CD$^2$. *O Q. S. Q. D.*

COROLLARIO.

691 Segue-ſe que o que temos demonſtrado na propoſição primeira a reſ-

reſpeito dos dous eixos de huma Hyperbole, ſe eſtende por eſta a todos, e quaeſquer dous diametros conjugados AB, CD, como tambem todas as outras propriedades, que ſe moſtrárão de huma Hyperbole com as ſuas aſymptotas, do que ſe convencerá facilmente aquelle, que tornando a ler os articulos precedentes, puzer a palavra *diametro* em toda a parte, em que encontrar o termo *eixo*, porque ſubſiſtirá do meſmo modo, ou o angulo EBF ſeja recto, ou não.

## PROPOSIÇÃO VII.

### THEOREMA.

692 Se hum cone recto ABC ſe cortar por hum plano parallelo ao eixo BQ, digo que a curva FHDKG ſerá huma parabola. *Hyperbole.* Figura 225

Continue-ſe o lado CB do cone para P, de ſorte que BP ſeja igual a BD: a linha PD ſerá o primeiro eixo da Hyperbole; e a linha BN, tirada do ponto B perpendicular ao meio da linha PD, ſerá metade do ſegundo eixo, de ſor-

ſorte que ſe fizermos ON = BN, ſerá OB o ſegundo eixo: chamem-ſe as dadas NP, ND $a$, NO, ou NB $b$, as indeterminadas NI $x$, IK, ou IH $y$, DI ſerá $x-a$, e PI $x+a$: vamos moſtrar que $xx-aa : yy :: 4aa : 4bb$, ou $PI \times ID : IK^2 :: PD^2 : BO^2$.

DEMONSTRAÇÃO.

Os triangulos PNB, PIM são ſemelhantes, e ſerá PN : NB :: PI : IM, ou $a : b :: a+x : \frac{a+x \times b}{a} =$ MI. Tambem por ſerem os triangulos DNB, DIL equiangulos, ſerá DN : NB :: DI : IL, ou $a : b :: x-a : \frac{x-a \times b}{a} =$ IL : logo multiplicando eſtas duas razões termos por termos, ſerá $aa : bb :: xx-aa :$ MI $\times$ IL; mas pela propriedade do circulo IM $\times$ IL = $IK^2$, ou $IH^2$, ou $yy$: logo ſerá $aa : bb :: xx-aa : yy$, e tambem $4aa : 4bb :: xx-aa : yy$, e invertendo $PI \times ID : IK^2 :: PD^2 : BO^2$. *O Q. S. Q. D.*

Não fallámos neſte tratado dos differentes modos de delinear a Hyperbole, porque nunca nos ſervimos deſ-

ta

ta curva na Geometria prática, e por eſta razão baſta tocar eſta materia para paſſarmos ao que vamos tratar depois, que he o mais importante de tudo o a que ſe chama Geometria prática, ſobre tudo daquella Geometria, que pertence particularmente ao Official Engenheiro.

## ADVERTENCIA.

Aquelles, que naturalmente goſtão das Mathematicas, não ſe contentão com ler os ſimples elementos, baſta que elles lhes moſtrem que ſe póde ir muito mais adiante para lhes mover o appetite de livros, que enſinem couſas novas; porque os que tem genio de Geometras, procurão intreter-ſe com as verdades de huma ſciencia, que difficultoſamente ſe conhece ſem a amar. Procurão informar-ſe de quaes são os melhores livros Mathematicos, que não tem ainda viſto; mas muitas vezes de quem ſe hão de informar? Terei o goſto de apontar aqui as melhores obras de Mathematica, por onde poſſão eſtudar. Só fallarei dos principaes li-

livros, que tem ſahido de França; pois ſe houveſſe de citar todos os outros, que tem ſido impreſſos em outras partes, principalmente na Inglaterra, ſerme-hia preciſo hum volume ſó para fazer a relação.

Independentemente de tudo o que tenho tratado de Algebra neſtes elementos de Geometria para ſaber perfeitamente todas as operações, ſe poderá recorrer ao livro da Sciencia do calculo do R. P. Reyneau. Eſta obra ſerve de introducção a outra do meſmo Author, intitulada *Analyſe demonſtrada*, que he a couſa melhor que temos da Algebra, e eſtá impreſſo em dous volumes em quarto. No primeiro ſe enſina a reſolução dos problemas, que ſe reduzem a equações ſimplices, ou compoſtas, que he o unico objecto da Analyſe. No ſegundo ſe achão novos calculos, iſto he, o calculo differencial, e o integral, que he outro genero de Algebra. Depois ſe applicão os calculos á reſolução de grande numero de problemas Fyſico-Mathematicos, que moſtrão a belleza dos

cal-

calculos, e huma parte dos bellos descubrimentos, que se fizerão nestes ultimos tempos.

Depois disto se póde ver o livro dos infinitamente pequenos do Marquez do Hospital, que trata unicamente do calculo differencial applicado á Geometria das curvas. Esta obra he a melhor que temos em França; e como he hum pouco abstracta, se poderá recorrer ao Commentario, que lhe fez Mr. de Crouses, que servirá muito a ajudar os principiantes.

Ainda que no tratado das Secções conicas fallei de Mr. do Hospital, persuado-me que devo recommendar outra vez aos principiantes estudem seriamente esta obra, se querem fazer progresso, e lello tambem immediatamente depois de terem estudado o primeiro tomo da *Analyse demonstrada*, porque se confirmarão, e terão o espirito melhor disposto para verem o segundo tomo da Analyse.

Tambem ha outro livro de Mr. Larré ácerca do calculo integral, que he huma applicação deste calculo á medida

das

das ſuperficies, e ſolidos, e ao modo de achar o centro da gravidade, &c., o que tambem he bom ſaber para conhecer o uſo do calculo.

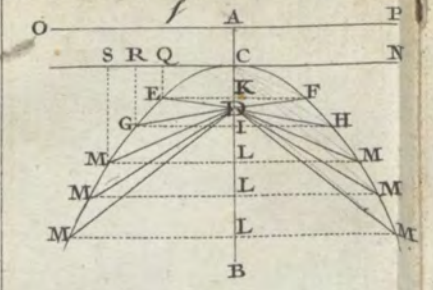
## PROPOSIÇÃO VIII.

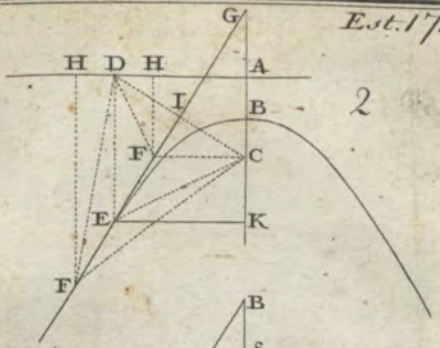
### PROBLEMA.

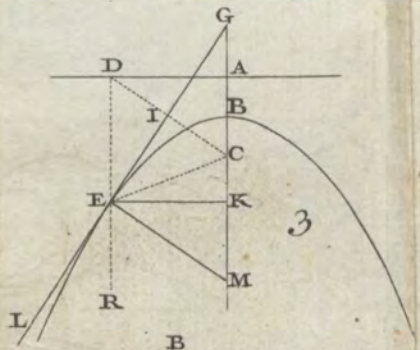
693 Achar duas meias proporcionaes entre duas linhas dadas.

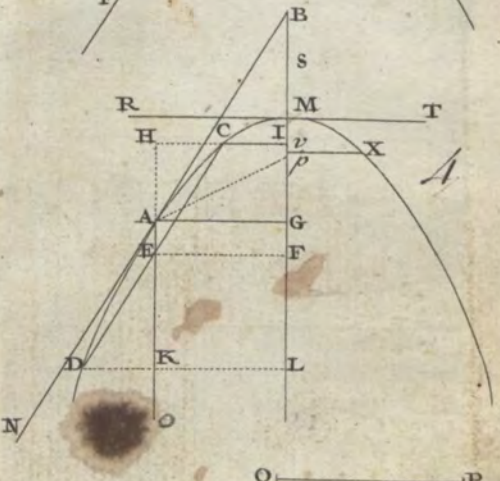
Para achar duas meias proporcionaes entre duas linhas M, e N, farei AD = N, e AB = M: divido pelo meio a linha AD em H, e deſſe ponto levanto GH igual á metade da maior AB: do extremo G da perpendicular deſcrevo hum circulo com o intervallo GA, e depois deſcrevo huma parabola com a linha AD, que lhe deve ſervir de parametro; e do ponto C, em que a parabola córta o circulo, abaixo huma perpendicular CE ſobre a linha AB, digo que as linhas CE, e AE ſão meias proporcionaes entre as duas AB, e AD. Figura 23.

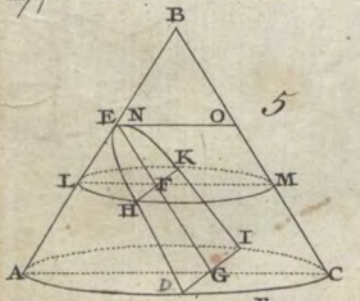
Chamemos AD $a$, CE $y$, AE $x$, FE $z$, DE ſerá $x-a$: abaixando a perpen-

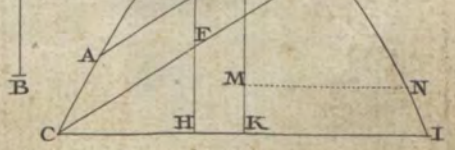

1
O
A
P
S R Q
C
N
E
K
F
G
D
I
H
M
L
B


G
H D H
A
I
B
2
F
C
E
K
F


G
D
A
I
B
C
E
K
3
M
L
R


B
S
R
M
T
H
C
I
v
X
ρ
4
A
G
E
F
D
K
L
N
O

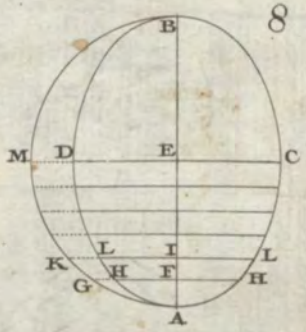

B
E N O
5
K
L
F
M
H
I
A
D
G
C


O
P


A
B
G
L
B
Q
D
7
E
F
A
M
N
C
H
K
I

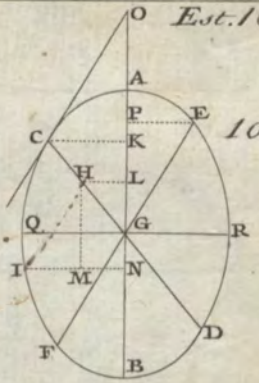
E
c
G
I
H
6
G
F
H
I
G
I
H

8




9

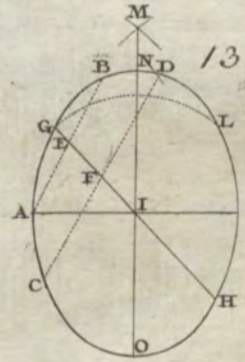
10



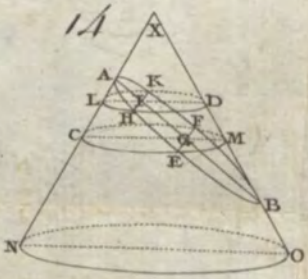

11

12

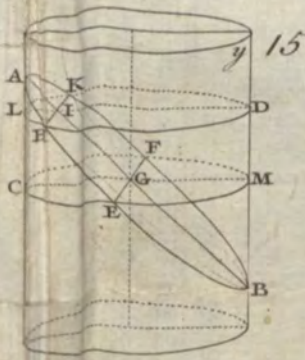
13



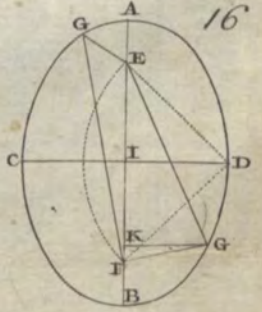

14




15




16

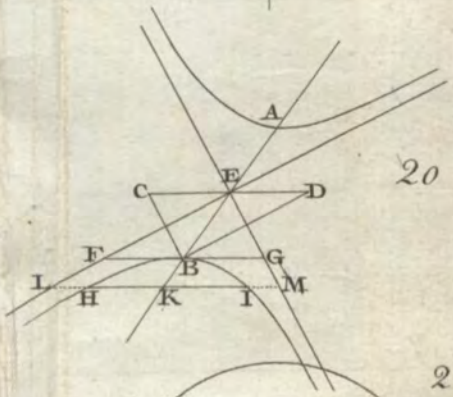


17

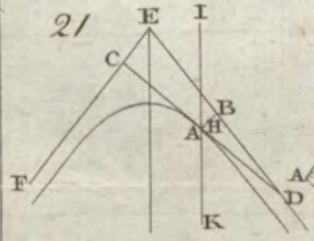
18

19

20

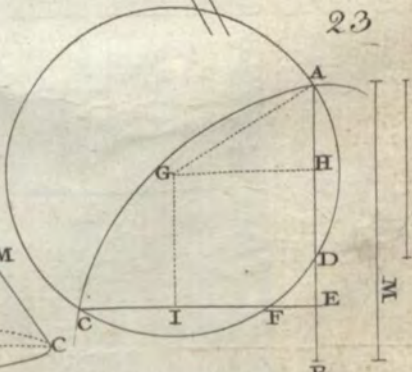



21




22

23



pendicular GI, teremos CE+EF $y+z$ = AB: devemos moſtrar que $a:y::y:x::x:y+z$.

DEMONSTRAÇÃO.

Pela propriedade da parabola * $a:y::y:x$, e pela do circulo * $x:y::z:x-a$, de que ſe tirão eſtas duas equações $yy=ax$, e $xx-xa=yz$, ou tambem $xx=yz+xa$ *; e pondo $yy$ em lugar de $ax$, teremos $xx=yz+yy$, de que ſe tira eſta proporção $y:x::x:y+z$; e juntando os dous ultimos termos deſta proporção aos dous da ſeguinte $a:y::y:x$, teremos $a:y::y:x::x:y+z$. *O Q. S. Q. D.*

* Numer. 673.
* Numer. 442. Tom. I.
* Numer. 203.

FIM DO NONO LIVRO.

IN-

# INDICE
## DAS MATERIAS, QUE SE comprehendem neſte ſegundo Tomo.

## LIVRO III.
Das differentes poſições das linhas rectas a reſpeito das outras rectas.

*Definições.* Pag. 3.
Prop. I. Probl. *Tirar de hum ponto huma perpendicular a huma linha*, pag. 9.
Prop. II. Probl. *Levantar de hum ponto ſobre huma linha huma perpendicular*, pag. 10.
Prop. III. Probl. *Dividir huma linha pelo meio*, pag. 11.
Prop. IV. Theor. *De hum ponto não ſe póde ſobre huma linha levantar mais de huma perpendicular*, pag. 12.
Prop. V. Theor. *De hum ponto fóra de huma linha não ſe póde abaixar mais de huma perpendicular*, pag. 13.
Prop. VI. Theor. *A perpendicular he a mais curta de todas as linhas, que de hum ponto ſe póde tirar ſobre outro*, p. 14.

Prop. VII. Theor. *Duas rectas, que ſe cortão, formão os angulos verticalmente oppoſtos iguaes*, pag. 16.
Prop. VIII. Theor. *Duas parallelas cahindo ſobre outra, fazem os angulos para a meſma parte iguaes*, pag. 17.
*Definições*, pag. 18.
Prop. IX. Theor. *Huma recta cortando duas parallelas, faz primeiro os angulos alternos iguaes: ſegundo os internos, ou externos para a meſma parte iguaes a dous rectos*, pag. 19.
Prop. X. Theor. *Se huma recta, cortando outras duas, faz os angulos alternos iguaes, ou os dous internos, ou externos iguaes a dous rectos, eſtas duas ſerão parallelas*, pag. 20.
Prop. XI. Probl. *Tirar por hum ponto huma parallela a outra linha*, pag. 22.
Prop. XII. Probl. *Dados trez pontos, achar o raio do circulo, que paſſaſſe por elles*, pag. 23.

## LIVRO IV.

Das propriedades dos triangulos, e parallelogramos.

*Definições.* Pag. 25.
Prop. I. Theor. *O angulo exterior de qualquer triangulo he igual aos dous interiores oppoſtos, e todos trez iguaes a dous rectos*, pag. 28.
Prop. II. Theor. *Dous triangulos são iguaes, quando tem os ſeus trez lados reſpectivamente iguaes*, pag. 32.
Prop. III. Theor. *Dous triangulos são iguaes, quando tem hum angulo igual comprehendido entre lados reſpectivamente iguaes*, pag. 35.
Prop. IV. Theor. *Dous triangulos são iguaes, quando tem hum lado igual ao que lhe correſponde no outro, e os angulos ſobre elle reſpectivamente iguaes*, p. 36.
Prop. V. Theor. *Dous parallelogramos, que tem a meſma baſe, e eſtão entre as meſmas parallelas, são iguaes*, p. 37.
Prop. VI. Theor. *Dous triangulos, que tem a meſma baſe, e eſtão entre as meſmas parallelas, são iguaes*, pag. 39.

Prop.

Prop. VII. Theor. *Os complementos de hum parallelogramo são iguaes*, p. 42.
Prop. VIII. Theor. *Os parallelogramos, que tem a meſma altura, eſtão entre ſi como as ſuas baſes*, pag. 43.
Prop. IX. Theor. *Se os lados de hum triangulo ſe cortarem por huma linha parallela á baſe, os lados ficão cortados proporcionalmente*, pag. 44.
Prop. X. Theor. *Dous triangulos são ſemelhantes, quando os trez lados de hum são proporcionaes aos trez lados do outro*, pag. 48.
Prop. XI. Theor. *Dous triangulos são ſemelhantes, quando tem hum angulo igual comprehendido de lados proporcionaes*, pag. 50.
Prop. XII. Theor. *Dous triangulos são ſemelhantes, quando os dous angulos de hum são iguaes aos dous angulos do outro*, pag. 51.
*Definição*, pag. 54.
Prop. XIII. Theor. *Em hum triangulo rectangulo a perpendicular, tirado do angulo recto ſobre a hypothenuſa, o divide em dous triangulos ſemelhantes entre ſi, e ao primeiro*, pag. 55.

Prop. XIV. Theor. *Em hum triangulo rectangulo o quadrado da hypothenuſa he igual em ſomma aos quadrados dos outros dous lados*, pag. 56.

Prop. XV. Theor. *No triangulo obtuſangulo o quadrado do lado, oppoſto ao angulo obtuſo, he igual aos quadrados dos outros dous lados, e mais a dous rectangulos feitos do lado oppoſto ao angulo, de que ſe tira a perpendicular pela parte do meſmo lado continuado até encontrar a perpendicular*, pag. 62.

Prop. XVI. Theor. *No triangulo acutangulo o quadrado do lado, oppoſto ao angulo agudo, he igual aos quadrados dos outros dous lados, menos dous rectangulos, feitos do lado oppoſto ao angulo maior, ſobre que cahe a perpendicular pela parte comprehendida entre o outro angulo, e a perpendicular*, pag. 65.

LI-

# LIVRO V.

Das propriedades do Circulo.

DEfinições. Pag. 67.
Prop. I. Theor. *Huma perpendicular, tirada do centro de hum circulo ſobre huma corda, divide-a pelo meio; e continuada, dividirá tambem pelo meio o arco, de que he a corda*, pag. 69.
Prop. II. Theor. *Se huma recta paſſa pelo centro, e divide a corda, ou o arco em duas partes iguaes, ſerá perpendicular á corda*, pag. 71.
Prop. III. Theor. *Se huma recta perpendicular á corda a divide, e o ſeu arco pelo meio, paſſará pelo centro*, pag. 72.
Prop. IV. Theor. *Se do centro de hum circulo ſe tira huma recta ao ponto, em que a tangente toca o circulo, ſerá perpendicular á tangente*, pag. 73.
Prop. V. Theor. *O angulo, que tem o ſeu vertice na circumferencia do circulo, tem por medida metade do arco comprehendido entre os ſeus lados*, pag. 74.
Prop. VI. Theor. *O angulo formado pela tangente, e pela corda tem por metade*

do

*do arco comprehendido entre a corda, e a tangente*, pag. 76.

Prop. VII. Theor. *O angulo, que tem o vertice entre o centro, e a circumferencia do circulo, tem por medida metade do arco, ſobre que ſe eſtriba, e mais metade do arco comprehendido pelos ſeus lados continuados para a parte de fóra*, pag. 77.

Prop. VIII. Theor. *O angulo, cujo vertice eſtá fóra da circumferencia, e os lados ſe terminão na parte concava da meſma circumferencia, tem por medida metade do arco concavo, menos metade do arco convexo comprehendido entre os ſeus lados*, pag. 78.

Prop. IX. Theor. *Se duas rectas ſe cortão dentro no circulo, o rectangulo feito das partes de huma he igual ao rectangulo feito das partes da outra*, pag. 80.

Prop. X. Theor. *Se de hum ponto fóra do circulo ſe tirão duas rectas, que ſe terminão na parte concava da circumferencia, o rectangulo feito de huma pela ſua parte exterior he igual ao rectangulo feito da outra ſecante pela ſua parte exterior*, pag. 81.

Prop.

Prop. XI. Theor. *Se de qualquer ponto na circumferencia de hum circulo ſe tira huma perpendicular ſobre o diametro, o quadrado da perpendicular he igual ao rectangulo feito das partes do diametro*, pag. 82.

Prop. XII. Probl. *Dado hum ponto fóra de hum circulo, tirar delle huma tangente ao circulo*, pag. 85.

Prop. XIII. Theor. *Se de hum ponto fóra do circulo ſe tirão huma tangente, e huma ſecante, o quadrado da tangente he igual ao rectangulo da ſecante inteira pela parte exterior*, pag. 86.

Prop. XIV. Theor. *Se huma tangente for perpendicular ao extremo do diametro, ſe do outro extremo ſe tirarem ſobre a tangente quantas rectas quizerem, ſempre o quadrado do diametro ſerá igual ao rectangulo de qualquer das ſecantes pela parte exterior*, pag. 88.

Prop. XV. Probl. *Dividir huma linha em meia, e extrema razão*, pag. 89.

LI-

# LIVRO VI.

Dos Polygonos regulares inſcriptos, e circumſcriptos no circulo.

*Definições.* Pag. 91.
Prop. I. Probl. *Inſcrever hum Exagono em hum circulo*, pag. 94.
Prop. II. Probl. *Inſcrever hum Duodecagono em hum circulo*, pag. 95.
Lemma. *Em hum triangulo Iſoceles, cujos angulos da baſe ſejão duplos do do vertice, a linha, que dividir em dous igualmente hum dos angulos da baſe, dividirá o lado, que lhe fica oppoſto, em meia, e extrema razão*, pag. 96.
Prop. III. Probl. *Inſcrever hum Decagono em hum circulo*, pag. 98.
Prop. IV. Theor. *Huma recta, compoſta dos lados do Exagono, e Decagono, inſcriptos no meſmo circulo, eſtará dividida em meia, e extrema razão no ponto da união dos dous lados*, pag. 99.
Prop. V. Theor. *O quadrado do lado do Pentagono, inſcripto em hum circulo, he igual á ſomma dos quadrados dos lados*

*dos do Exagono, e Decagono inſcriptos no meſmo circulo*, pag. 100.
Prop. VI. Probl. *Inſcrever hum Pentagono em hum circulo*, pag. 102.
Prop. VII. Probl. *Inſcrever hum quadrado em hum circulo*, pag. 104.
Prop. VIII. Probl. *Inſcrever hum Octogono em hum circulo*, pag. 105.
Probl. I. *Dividir huma linha nas partes iguaes que quizerem*, pag. 106.
Probl. II. *Dividir hum arco em hum numero de partes iguaes em numero par*, pag. 107.
*Modo de deſcrever a quadratriz*, pagin. 108.
Prop. IX. Probl. *Dividir hum angulo em trez partes iguaes*, pag. 110.
Prop. X. Probl. *Inſcrever hum Enneagono em hum circulo*, pag. 111.
Prop. XI. Probl. *Inſcrever hum Eptagono em hum circulo*, pag. 112.
Prop. XII. Probl. *Inſcrever hum Undecagono em hum circulo*, pag. 113.
Prop. XIII. Probl. *Circumſcrever qualquer Polygono a hum circulo*, pag. 114.

LI-

# LIVRO VII.

Da razão, que tem entre ſi os circuitos das figuras ſemelhantes, e proporção das ſuas ſuperficies.

*Definições.* Pag. 115.
Prop. I. Theor. *Os circuitos de dous Polygonos regulares, e ſemelhantes são entre ſi como os ſeus raios*, pag. 116.
Prop. II. Theor. *A ſuperficie de hum Polygono he igual á de hum triangulo, que tiver por baſe huma linha igual ao circuito do Polygono, e altura igual a huma perpendicular, tirada do centro do Polygono ſobre hum dos lados*, pag. 118.
Prop. III. Theor. *A ſuperficie de hum circulo he igual á de hum triangulo, que tiver a baſe igual á circumferencia, e o raio por altura*, pag. 119.
Prop. IV. Theor. *As ſuperficies de dous Polygonos ſemelhantes são entre ſi como os quadrados das perpendiculares, ou como os quadrados dos raios*, pag. 127.
Prop. V. Theor. *As ſuperficies de dous circulos são entre ſi como os quadrados dos ſeus raios*, pag. 130.

Prop.

Prop. VI. Theor. *Dous triangulos ſemelhantes são entre ſi como os quadrados dos ſeus lados homologos*, pag. 132.
Prop. VII. Theor. *Os parallelogramos eſtão entre ſi na razão compoſta das ſuas baſes, e alturas*, pag. 135.
Prop. VIII. Theor. *Dadas trez linhas em proporção contínua, o quadrado da primeira ſerá ao quadrado da ſegunda, como a primeira linha á terceira*, p. 137.
Prop. IX. Theor. *O rectangulo de duas linhas he meio proporcional entre os quadrados das meſmas linhas*, pag. 138.
Prop. X. Probl. *Achar huma linha meia proporcional entre outras duas dadas*, pag. 139.
Prop. XI. Probl. *Achar huma terceira proporcional a duas linhas dadas*, pag. 141.
Prop. XII. Probl. *Achar huma quarta proporcional a trez linhas dadas*, pag. 144.
Prop. XIII. Probl. *Fazer hum quadrado igual a hum rectangulo*, pag. 145.
Prop. XIV. Probl. *Achar hum quadrado, que ſeja a outro em huma razão dada*, pag. 146.
Prop. XV. Probl. *Achar a razão, que tem duas figuras ſemelhantes*, pag. 147.

Prop.

Prop. XVI. Probl. *Fazer ſobre huma linha dada hum rectangulo igual a outro*, pag. 148.

Prop. XVII. Theor. *Dous triangulos, que tem hum angulo igual, são entre ſi como os productos dos lados, que comprehendem o angulo igual*, pag. 152.

Lemma I. Probl. *Inſcrever hum circulo em hum triangulo*, pag. 157.

Lemma II. *Inſcripto o triangulo no circulo, achar a ſemiſomma dos lados, e a ſomma das trez differenças da ſemiſomma dos lados a cada hum dos meſmos lados*, pag. 159.

Prop. XVIII. Theor. *A ſuperficie de qualquer triangulo he igual á raiz quadrada do producto da ſomma dos trez lados pelas differenças da meſma ſomma a cada hum dos lados*, pag. 161.

LI-

# LIVRO VIII.

Das propriedades dos Corpos, ſuas ſuperficies, e ſolidez.

*Definições.* Pag. 165.

Prop. I. Theor. *A ſuperficie de hum priſma, não comprehendendo a ſua baſe, he igual á de hum rectangulo feito da ſomma dos lados do priſma pela altura do meſmo priſma*, pag. 172.

Prop. II. Theor. *A ſuperficie de qualquer pyramide recta he igual á de hum triangulo, cuja baſe foſſe igual á ſomma dos lados do polygono regular, que lhe ſerve de baſe, e a altura huma linha igual á perpendicular, tirada do vertice da pyramide ſobre hum dos lados*, pagin. 173.

Prop. III. Theor. *Os priſmas, e parallelipipedos eſtão entre ſi na razão compoſta das razões das ſuas trez dimensões, ou como os productos das trez dimensões*, pag. 175.

Prop. IV. Theor. *Toda a pyramide he o terço de hum priſma, que tiver a meſma baſe, e altura*, pag. 177.

Prop.

Prop. V. Theor. *Duas pyramides com a meſma altura eſtão entre ſi na razão das ſuas baſes*, pag. 183.

Prop. VI. Theor. *Dous priſmas, cujas baſes, e alturas são reciprocas, são iguaes*, pag. 185.

Prop. VII. Theor. *Huma pyramide truncada he igual a huma pyramide, cuja baſe foſſe igual aos dous planos ſuperior, e inferior, e mais hum plano meio geometrico entre elles, e a altura do eixo*, pag. 186.

Lemma. *Huma linha meia proporcional entre as duas partes do diametro do circulo maior da coroa, cortado na parte interior da coroa, he o raio de hum circulo igual á coroa*, pag. 191.

Prop. VIII. Theor. *A meia eſfera inſcripta em hum cylindro he igual aos dous terços do cylindro*, pag. 192.

Prop. IX. Theor. *A ſolidez das eſferas ſegue a razão dos cubos dos ſeus diametros*, pag. 196.

Prop. X. Theor. *A ſuperficie de huma meia eſfera he igual á de hum cylindro, em que ella he inſcripta*, pag. 201.

Prop. XI. Theor. *A ſolidez de huma Zona*

*na he igual aos dous terços do cylindro do circulo maior, e mais ao terço do cylindro do circulo menor*, pag. 200.

Prop. XII. Theor. *Se huma meia esfera, inſcripta em hum circulo, ſe corta por hum plano parallelo á ſua baſe, a ſuperficie da Zona he igual á do cylindro correſpondente*, pag. 209.

Prop. XIII. Theor. *Dadas trez linhas em proporção continua, o parallelipipedo feito deſtas trez linhas he igual ao cubo feito da media*, pag. 211.

Prop. XIV. Theor. *Dadas quatro linhas em progreſsão Geometrica, o cubo feito da primeira he para o cubo da ſegunda, como a primeira para a quarta*, pag. 212.

Prop. XV. Probl. *Achar duas meias proporcionaes entre duas linhas dadas*, p. 213

Prop. XVI. Probl. *Achar dous numeros meios proporcionaes entre dous numeros dados*, pag. 215.

Prop. XVII. Probl. *Fazer hum cubo, que ſeja para outro em huma razão dada*, pag. 218.

Prop. XVIII. Probl. *Fazer hum cubo igual a hum parallelipipedo*, pag. 220.

LI-

# LIVRO IX.

## Das Secções Conicas.

CAP. I. *Das propriedades da parabola.* Pag. 226.
*Definições*, ibid.
Prop. I. Theor. *Na parabola o rectangulo da abciſa pelo parametro he igual ao quadrado da ordenada*, pag. 227.
Prop. II. Theor. *Na parabola os quadrados das ordenadas são entre ſi como as ſuas abciſas*, pag. 228.
Prop. III. Theor. *Tirar por hum ponto huma tangente á parabola*, pag. 231.
*Definição*, pag. 234.
Prop. IV. Theor. *Se ſe tirar huma perpendicular ao ponto do contacto, e delle huma ordenada ao eixo, a parte do eixo, comprehendida entre a ordenada, e a perpendicular, he igual á metade do diametro da parabola*, ibid.
*Definição*, pag. 236.
Prop. V. Theor. *A ſubtangente he dupla da abciſa*, pag. 235.
Prop. VI. Theor. *Huma linha parallela á tan-*

*tangente fica dividida pelo meio do diametro*, pag. 236.
*Definições*, pag. 239.
Prop. VII. Theor. *O quadrado de qualquer ordenada a hum diametro he igual ao rectangulo da abciſa pelo parametro do meſmo diametro*, pag. 240.
Prop. VIII. Theor. *A ſecção de hum cone por hum plano parallelo a hum dos ſeus lados he huma parabola*, pag. 245.
Prop. IX. Probl. *Dado o parametro, deſcrever huma parabola*, pag. 247.
Prop. X. Probl. *Dada huma parabola, achar-lhe o eixo*, ibid.
Prop. XI. Probl. *Dada huma parabola, achar-lhe o parametro*, pag. 249.
Prop. XII. Probl. *Dada huma parabola, de que ſe conhece o parametro, achar-lhe o fóco*, ibid.
CAP. II. *Da Ellipſe*, pag. 750.
*Definições*, ibid.
Prop. I. Theor. *Tirada huma ordenada ao primeiro eixo da Ellipſe, o rectangulo das abciſas do meſmo eixo he ao quadrado da ordenada, como o quadrado do primeiro eixo ao quadrado do ſegundo*, pag. 253.

Prop. II. Theor. *Se dos extremos dos dous diametros ſe tirão ordenadas ao eixo, o quadrado de huma das abciſas correſpondentes, ſahindo do centro, he igual ao rectangulo das partes do meſmo eixo feitas pela outra ordenada*, pag. 260.

Prop. III. Theor. *O quadrado de huma ordenada a qualquer diametro he ao producto das ſuas abciſas, como o quadrado do diametro parallelo ás ordenadas ao do diametro das abciſas*, p. 261.

Prop. IV. Theor. *Os quadrados de dous diametros conjugados são em ſomma iguaes aos quadrados dos ſeus eixos*, pag. 268.

Prop. V. Theor. *Se pelo extremo do eixo ſe tira huma tangente, que vá encontrar os dous diametros conjugados continuados quanto for neceſſario, o rectangulo das partes deſta tangente he igual ao quadrado de metade do eixo*, pag. 271.

Prop. VI. Theor. *Se hum cone ſe cortar por hum plano obliquo á baſe, de modo que os dous lados do cone fiquem cortados entre o vertice, e a baſe, a ſecção ſerá huma Ellipſe*, pag. 273.

Prop.

Prop. VII. Theor. *Se hum cylindro ſe córta por hum plano obliquo á baſe, a ſecção he huma Ellipſe*, pag. 275.
Prop. VIII. Theor. *Se de qualquer ponto da Ellipſe ſe tirão rectas aos fócos, a ſomma deſtas duas linhas he igual ao eixo maior*, pag. 275.
Prop. IX. Theor. *Deſcrever a Ellipſe com hum movimento ſeguido, dados os ſeus dous eixos conjugados*, pag. 280.
Prop. X. Theor. *Dada huma Ellipſe, achar-lhe o centro, e os dous eixos conjugados*, pag. 281.
CAP. III. *Da Hyperbole*, pag. 282.
*Definições*, ibid.
Prop. I. Theor. *Na Hyperbole o rectangulo das abciſas he ao quadrado da ordenada correſpondente, como o quadrado do eixo maior ao quadrado do ſeu conjugado*, pag. 285.
Prop. II. Theor. *Se huma recta, parallela ao ſegundo eixo, córta a Hyperbole em dous pontos, o quadrado do ſegundo eixo he igual ao rectangulo das partes deſta linha, terminada nas aſymptotas*, pag. 288.

Prop. III. Theor. *Os rectangulos de duas linhas parallelas, terminadas nas aſymptotas, são iguaes*, pag. 290.

Prop. IV. Theor. *Se por quaeſquer dous pontos de huma Hyperbole, ou de Hyperboles oppoſtas ſe tirão quatro linhas, cada duas parallelas entre ſi terminadas nas aſymptotas, os rectangulos das partes deſtas linhas ſerão reſpectivamente iguaes*, pag. 291.

Prop. V. Probl. *Tirar por hum ponto huma tangente a huma Hyperbole*, pag. 293.

Prop. VI. Theor. *O quadrado de huma ordenada a qualquer diametro he ao producto das ſuas abciſas, como o quadrado do diametro parallelo á ordenada ao quadrado do diametro, ſobre que ſe tomão as abciſas*, pag. 295.

Prop. VII. Theor. *Se hum cone ſe córta por hum plano parallelo ao eixo, a curva ſerá Hyperbole*, pag. 297.

Prop. VIII. Probl. *Achar duas meias proporcionaes entre duas linhas dadas*, pagin. 302.

# AVISO AO LIVREIRO.

*As 19. Eſtampas deſte Tomo II. ſe devem encadernar pela ordem ſeguinte.*


Eſtampa 1. e 2. - - - - - - - Pag. 24.

Eſtampa 3. e 4. - - - - - - - Pag. 66.

Eſtampa 5. e 6. - - - - - - - Pag. 90.

Eſtampa 7. e 8. - - - - - - - Pag. 114.

Eſtampa 9. 10. e 11. - - - - Pag. 164.

Eſtampa 12. 13. 14. 15. e 16. Pag. 222.

Eſtampa 17. 18. e 19. - - - Pag. 303.

# AVISO AO LIVREIRO.

As 19 Estampas deste Tomo II. se devem encadernar pela ordem seguinte.


Estampa 1. e 2. - - - - - - - Pag. 24.

Estampa 3. e 4. - - - - - - - Pag. 66.

Estampa 5. e 6. - - - - - - - Pag. 90.

Estampa 7. e 8. - - - - - - - Pag. 114.

Estampa 9. 10. e 11. - - - - - Pag. 146.

Estampa 12. 13. 14. 15. e 16. Pag. 222.

Estampa 17. 18. e 19. - - - Pag. 303.