369 DRO

NOVO CURSO DE MATHEMATICA

PARA USO DOS OFFICIAES Engenheiros, e Artilheria

POR

MONSIEUR BELLIDOR,

Coronel de Infanteria, Socio das Reaes Academias de França, Inglaterra, e Prussia,

Que traduzido no idioma Portuguez

DEDICA, E OFFERECE

AO

ILL.mo E EXC.mo SENHOR

CONDE DE OEIRAS,

Ministro, e Secretario de Estado, &c. &c. &c.

MANOEL DE SOUSA,

Capitão de Infanteria, com exercicio de Engenheiro, Socio da Arcadia de Lisboa.

TOMO I.

COMMANDO GERAL DE ARTILHARIA * BIBLIOTHECA *

LISBOA,

Na Officina de Miguel Manescal da Costa, Impressor do Santo Officio. Anno 1764.

DIRECÇÃO DA ARMA DE ARTILHARIA

Nº. 369

BIBLIOTECA

ILL.mo E EXC.mo SENHOR.

AVENDO de buſcar Patrono, de baixo de cuja protecção principiaſſe, e proſeguiſſe os meus eſtudos, não me occorreo, nem podia occorrer, ou-

tro mais digno que V. EXCELLENCIA. Eu bem ſei que a mão poderoſa de V. EXCELLENCIA he capaz de ſuſpender a roda da minha contraria fortuna; mas não he eſte o primeiro impulſo, que me leva a buſcar a protecção de V. EXCELLENCIA, mas o incanſavel zelo, com que V. EXCELLENCIA promove quanto póde fazer grande a Monarquia; e como para iſto conduz em grande parte o eſtudo da Mathematica, que Patrono devia eu buſcar, que não foſſe V. EXCELLENCIA? E ſeria injuſtiça, que vendo os vindouros os prodigioſos effeitos da reſtauração deſta ſciencia, não leſſem logo neſte Livro o amavel nome de V. EXCELLENCIA.

Não ſó a Fortificação, e a Guerra, mas ainda a Agricultura, a Navegação, o Commercio,

as

as Manufacturas, em poucas palavras, tudo aquillo, que depois da Religião, e Justiça faz florecentes, e abundantes os Estados, pede indispensavelmente os subsidios da Mathematica. E como V. EXCELLENCIA cuida dias, e noites, e se emprega todo com zelo extraordinario, e trabalho incansavel no bem, e augmento da nossa Monarquia, (não quero dizer mais dos louvores de V. EXCELLENCIA, pois não menos que as outras virtudes lhe admiramos huma singular modestia) por isso estima tanto as Mathematicas, e protege tão especialmente os que a ellas se applicão.

Outros muitos são os motivos, que me conduzem á presença de V. EXCELLENCIA com a tenuidade desta offerta, e confesso que a sua mesma multiplicidade me em-

ba-

baraça; mas entre tantos he impossivel que, como Portuguez, ingrato me esqueça dos beneficios, com que V. EXCELLENCIA tem honrado a Patria, e feito célebre o seu ministerio. Que perigo, que infelicidade temos tido, onde não fosse V. EXCELLENCIA o nosso reparo? O Senhor abalou a terra nos seus fundamentos, e visitou o seu povo com o terremoto de 1755.; e V. EXCELLENCIA soube fazer mais leve o pezo da tribulação, e nos fez, quanto podem as forças humanas, menos infelices.

A aleivozia invenenou os corações daquelles, que pelo estado, e pelo sangue devião ser os melhores, a conjurarem contra a vida do nosso Principe, contra as nossas delicias; e V. EXCELLENCIA soube de hum só golpe cortar os laços,

ços, que tinhão formado os inimigos do bem público, aquellas viboras da Patria.

Aquelle monſtro devorador dos Imperios, a guerra, entrava a dar os primeiros formidaveis paſſos; e as ſabias maximas de V. EXCELLENCIA triunfárão, conſervando o decóro da Nação, a honra da Monarquia na extensão dos ſeus Dominios. Ceſſem de vangloriar-ſe as memorias dos outros Miniſtros, pois V. EXCELLENCIA não ſó faz famoſo eſte ſeculo, mas ha de ſer a portentoſa maravilha dos noſſos faſtos.

He V. EXCELLENCIA em fim aquelle Miniſtro, que o grande Rei, que nos governa, aquella dadiva do Ceo, tanto eſtima ao ſeu lado: aquelle Monarca verdadeiramente grande, cujas obras põem em eſquecimento todas as dos ſeus vi-

cto-

Gloriosos predecessores, escolheo para ser por quem mandasse a seus vassallos tanta felicidade.

EXCELLENTISSIMO SENHOR, as obrigações, em que considero toda a Nação, me fizerão esquecer daquella virtude, com que V. EXCELLENCIA suspende as pennas dos eloquentes desta idade. Feliz a posteridade, que sem receio de offender tanta modestia, sem escrupulo de se avaliar lisonjeira, ha de fazer eterna a memoria de V. EXCELLENCIA. Então dirão as Historias, então soarão as Lyras o delicioso nome de Pai da Patria. O Ceo guarde a V. EXCELLENCIA para complemento de todas as nossas felicidades.

DE V. EXCELLENCIA

Humilde venerador, e criado

Manoel de Sousa.

PRE-

PREFAÇÃO.

AINDA que me parece que o titulo desta Obra mostra bastantemente o que ella trata, e seja bem conhecida nas diversas edições, que tem havido, nem por isso me julgo dispensado de dar aqui conta da Obra de algum modo mais circumstanciado, e das consideraveis addições, que lhe fiz. Persuadido, e convencido com huma longa experiencia que os Officiaes, e Engenheiros Militares não devem estudar as Mathematicas do mesmo modo que huma pessoa, que se quer inteiramente entregar a ellas, e fazer o seu estudo principal, procurei colligir tudo, o que lhe era absolutamente necessario, ajuntando-lhe, quanto me foi possivel, a applicação dos principios, que estabeleço, a exemplos sensiveis, e que se fazem necessarios nas operações, que elles são obrigados a fazer nos empregos, que exercitão, ao que sem dúvida posso attribuir o successo, que tem tido; e para o fazer mais interessante, tenho sem-

pre

pre trabalhado ſobre eſte meſmo plano. Quaſi todas as addições, que lhe fiz, tem por objecto queſtões, ou methodos uteis na pratica, de que a exacção deve ſer o fim dos eſtudos de hum Engenheiro. Se o amor das Mathematicas não tiveſſe feito tão admiraveis progreſſos ha quarenta annos, contentar-me-hia de corrigir neſta impreſsão as faltas, que eſcapárão na primeira, e dar demonſtrações mais rigoroſas, e ordenadas de certas propoſições, ſem accreſcentar nada de novo; mas attendendo ao que actualmente ſe pede dos Engenheiros, fiz todas as addições, que me parecêrão abſolutamente neceſſarias para fazer eſta Obra completa no ſeu genero: huma reſumida Theorica, mas rigoroſamente demonſtrada com hum pequeno numero de principios, e primeiros elementos de cada parte da Mathematica, analóga a Arte de Guerra com tudo o de que depende; e he ao que ſe devem limitar os eſtudos de hum bom Militar. Se depois diſto ſe applicar a todas as outras ſciencias, alheias da ſua profiſsão,

ain-

ainda que dependentes da Mathematica, isto só lhe póde servir de ornar o espirito, sem por isso ser mais util ao estado, que não póde tirar utilidade alguma destas sublimes verdades, mais proprias para fazer brilhar o engenho em huma Assemblea de Sabios, do que de fazer serviços importantes ao Principe na occasião arriscada.

Esta Obra está dividida em dezeseis Livros: no primeiro dou os primeiros elementos da Algebra, depois de ter dado as definições das proposições, de que se serve a Geometria, e dos termos, que são de mais uso nesta sciencia. Trata depois do calculo Arithmetico respectivamente á multiplicação, e divisão, servindo-me do que se chama commummente partes aliquotas; e foi huma das primeiras addições, que me pareceo necessaria, para mostrar aos principiantes o modo de abbreviar estas operações, que são muito extensas, seguindo as regras geraes, quando o multiplicando, e multiplicador são numeros complexos. Daqui passo ao calculo dos quebrados Numericos, e Al-

ge-

gebraicos, ao qual accrescento a Pratica, e Theorica das fracções decimaes, que demonstro pelo principio da enumeração. Esta parte me pareceo indispensavelmente necessaria, para que hum Engenheiro entendesse os livros, de que precisa usar. Todos sabem que as taboas dos Senos, de que se servem frequentemente na Trigonometria, são feitas por meio das decimaes, e as operações se fazem com maior segurança, quando se conhece a natureza dos numeros, com que se faz a operação. Tambem o mesmo Livro tem hum uso mui preciso das decimaes na approximação das raizes quadradas, e cubicas, que em certas occasiões he preciso determinar com toda a possivel exacção. Accrescentei hum completo Tratado do calculo dos expoentes, que puz antes do Capitulo da formação das potencias, com que neste calculo tem huma directa connexão.

No segundo Livro trato das razões, ou respeitos Arithmeticos, e Geometricos, e das progressões, e proporções, que resultão, e de que demons-

monſtro as principaes propriedades. Da comparação da progreſsão Arithmetica dos expoentes de huma letra á progreſsão Geometrica das potencias da meſma letra, deduzo a natureza, e principaes propriedades dos Logarithmos, de que ſomos obrigados a fazer uſo em hum grande numero de queſtões, e de que os Engenheiros devem neceſſariamente ſervir-ſe nos calculos Trigonometricos, para determinar com precisão as diſtancias inacceſſiveis. Eſta parte, de que não tinha fallado na outra edição, ſe acha demonſtrada com toda a brevidade poſſivel, e julgo que ſe comprehenderá ſem difficuldade. Daqui paſſo ás regras geraes do methodo Analitico de buſcar as verdades. Neſta parte, que he a mais importante da Mathematica, e eſſencialmente inſeparavel deſta ſciencia, moſtro a applicação de tudo o que fica dito na Arithmetica, ou na Algebra. Depois dou hum grande numero de exemplos dos Problemas, que podem ſer preciſos em differentes operações Militares a hum Engenheiro. Accreſcento algumas ſolu-

luções geraes para coſtumar os principiantes a eſtas expreſsões indeterminadas, e idéas abſtractas, e para lhes fazer melhor conhecer a grande ventagem, que ſe póde tirar do eſtudo da Algebra, acabando finalmente eſte Livro por hum completo Tratado das equações do ſegundo gráo, de que apenas tinha fallado na primeira edição. Neſta parte examinei a natureza das raizes poſitivas, e negativas, e moſtro a differença de humas a outras; os caſos, em que as raizes negativas são as que reſolvem o Problema no ſentido, em que ſe tinha propoſto: de que ſe ſegue que as raizes negativas ſe não devem confundir com aquellas, que não reſolvem o Problema no ſentido que ſe pedia. Como na ſolução das equações do ſegundo gráo ſuccede muitas vezes chegar a radicaes muito embaraçadas, accreſcentei-lhe hum pequeno Tratado do calculo das incommenſuraveis.

No terceiro Livro começo a tratar da Geometria: ao principio examino as differentes poſições das linhas rectas

hu-

humas a reſpeito das outras, o que me conduz a examinar as propriedades dos angulos, e linhas parallelas. Neſte Livro accreſcento alguns Problemas, que me parecêrão neceſſarios, para entender melhor o que hei de dizer nos Livros ſeguintes.

O quarto Livro trata das propriedades das ſuperficies em geral; e como não ha ſuperficie, que ſe não poſſa reduzir a triangulo, começo, explicando por extenſo tudo o que pertence aos triangulos, e parallelogramos. Tambem neſta parte accreſcento muitas propoſições ácerca da razão, que tem os triangulos comparados entre ſi, ou ſe trate de huma ſimples ſemelhança, ou de huma perfeita igualdade.

No quinto Livro examino as propriedades do circulo, principalmente a reſpeito da medida dos angulos, e daqui deduzo a das ſecantes interiores, ou exteriores, a das tangentes, e faço a applicação a alguns Problemas, cuja ſolução depende deſtas meſmas propriedades.

O ſexto Livro he hum Tratado de in-

inſcrever, e circumſcrever as figuras regulares no circulo. Depois examino relativamente a eſte objecto as propriedades da quadratriz, de que dou a conſtrucção, e por meio da qual reſolvo de hum modo facil os Problemas, que ſe podem propôr ácerca da divisão dos arcos de circulo, ou dos differentes ſectores em muitas partes iguaes.

No ſetimo Livro ſe applica a doutrina das proporções ás figuras planas: explica-ſe a razão dos perimétros das figuras ſemelhantes com a das ſuas ſuperficies: depois ſe dá o modo de os ſommar, diminuir, multiplicar, e dividir em qualquer razão dada, o que ſe faz pela invenção das linhas proporcionaes a outras linhas de grandeza dada. Neſta parte accreſcentei dous Theoremas curioſos: hum a reſpeito de dous triangulos comprehendidos entre lados deſiguaes, que he de hum grande uſo na Geodezia; e o outro ſobre o modo de achar a area de hum triangulo, de que ſe conhecem os trez lados; e a demonſtração que dou, he huma das mais ſimplices, que póde ſer, e o Leitor

pó-

póde julgar, comparando-a com as da mesma proposição, que se achão nos outros Livros.

Depois de ter examinado as principaes propriedades das linhas, e superficies, passo no oitavo Livro á Theorica dos solidos, ou corpos, a que busco as propriedades das superficies, e solidez. Ensino o modo de medir não sómente os prismas, pyramides, cones, e esferas, mas tambem as differentes porções destes corpos. Fallando da pyramide truncada, dou hum methodo geral para achar huma superficie plana semelhante a duas propostas, e meia geometrica entre ellas, sem ser preciso extrahir raizes quadradas. Depois trato do modo de achar os solidos, que tenhão entre si huma razão, e mostro donde vem a solução dos Problemas deste genero, que todos dizem respeito á duplicação do cubo. O methodo, que segui neste Livro, he inteiramente differente do que se acha nos outros elementos; e he tão simples, que dezeseis proposições comprehendem tudo o melhor que Arquimedes tem descu-

berto ſobre a esfera; e da minha Theorica dou a perceber a de medir toda a caſta de abobedas em volta inteira, que tenhão por baſe quaesquer poligonos regulares.

Eſtes oito Livros primeiros fazem como huma primeira parte do Curſo Mathematico; e para moſtrar a utilidade, puz depois de cada propoſição os corollarios, que moſtrão a ſua fecundidade, e ſe vê com admiração a extensão da Geometria, de que baſta ſaber os primeiros elementos para deſcubrir as verdades, que per ſi meſmas pareceſſe ſe repreſentão ao noſſo eſpirito, para confirmar ainda mais a utilidade, e importancia dos primeiros principios, e que parecem empenhar-ſe a ſatisfazer-nos do diſvelo, com que procurámos chegar ao conhecimento deſtas primeiras verdades.

Como os ſimplices elementos, comprehendidos nos primeiros oito Livros, não baſtão para a intelligencia de muitas couſas intereſſantes, que ſe tratão nos ſeguintes, principalmente a Theorica de lançar as bombas, a medição das

abo-

abobedas, que pede hum conhecimento ao menos elementar das ſecções conicas, dou no nono Livro hum pequeno Tratado, em que explico as principaes propriedades deſtas curvas a reſpeito dos ſeus diametros, de que buſco as tangentes, ácerca das quaes dou alguns Problemas.

O decimo Livro, que comprehende a Trigonometria, e o Nivelamento, póde ter-ſe por hum dos mais neceſſarios a hum Engenheiro, pois toda a ſua arte depende deſtas duas partes, a primeira na guerra, e a ſegunda na paz, em que póde ſer encarregado da execução de projectos muito importantes, e que abſolutamente dependem da ſciencia do Nivelamento. Neſte Livro ſe enſina o uſo das taboas dos Senos, Tangentes, e Secantes, e dos ſeus Logarithmos: a Theorica do calculo dos triangulos, que depois ſe applica a medir as alturas, e diſtancias inacceſſiveis, ou acceſſiveis, ao modo de calcular as partes de huma fortificação, para depois a marcar ſobre o terreno. Como a medida das diſtancias he de ſumma im-

portancia nos trabalhos Militares, dou novos Problemas ácerca do modo de as determinar com certas linhas conhecidas, que ſe achão já determinadas. Eſtes Problemas, cuja ſolução depende dos principios precedentes, merecem a attenção daquelles, para quem eſcrevo, aſſim farão muito bem eſtudallos com applicação.

O undecimo Livro he hum Tratado do calculo ordinario das obras de alvenaria, onde ao meſmo tempo explico a medição da madeira. Eſta parte tambem he preciſa aos Engenheiros, que algumas vezes são obrigados a fazer o orſamento de tudo o que deve entrar na execução das obras neceſſarias a huma fortificação. Trata-ſe de hum modo tão claro, e facil, que os principiantes poderão em poucos dias fazer-ſe ſenhores deſta caſta de calculo.

No duodecimo Livro ſe faz huma geral applicação da Geometria á medida dos ſolidos regulares, e irregulares, que ſe podem encontrar na pratica: por exemplo enſina-ſe o modo de medir as abobedas em volta inteira, ou

em

em terço de ponto: a das abobedas elipticas abatidas, ou remontadas. Tambem accrescentei hum Tratado da medição das superficies das abobedas arrincoadas em volta inteira, e das abobedas em lunetas, sem recorrer mais que á propriedade do circulo. Depois se applicão os mesmos principios a medir os revestimentos de fortificação, por exemplo os orelhões, os flancos curvos, o redondo das contra-escarpas, e as pyramides truncadas, que se achão nos angulos das mesmas obras: e acabo finalmente esta parte com a explicação de hum principio geral para achar as superficies, e solidos gerados do movimento de huma linha recta, ou curva, ou huma superficie rectilinea, ou curvilinea á roda de hum eixo da revolução pelo centro da gravidade destas linhas, ou superficies geradoras. Este descubrimento se póde ter por hum dos mais uteis, e importantes, que se tem feito na Geometria, e todos convem que se deve ao P. Guildin; de sorte que este principio se chama commummente a regra do P. Guildin.

O

O decimo terceiro Livro he tambem huma applicação dos mesmos principios á Geodezia, ou divisão dos campos em partes, que tenhão entre si razões determinadas, qualquer que seja a figura do terreno, que se quer repartir, começando a divisão por linhas tiradas de hum ponto a outro. Daqui passo á explicação de huma maquina conhecida em todo o mundo com o nome de compasso de proporção, porque a fabrica deste instrumento se funda inteiramente sobre a natureza, e propriedades da proporção. Póde ser de grande uso para abbreviar as operações em muitos casos, como para achar linhas proporcionaes a outras dadas, dividir as linhas dadas em partes iguaes, conhecer os gráos de hum arco, de que temos a corda, ou tambem para dividir qualquer angulo em muitas partes iguaes, e finalmente para achar superficies, ou solidos, que tenhão razões determinadas, com outras superficies, ou solidos propostos, o que póde ter huma applicação, quando se quer determinar o calibre das balas pelos seus

pe-

pezos, ou reciprocamente. Dou depois hum Problema mui curioſo ácerca da Analyſe da fundição de cada eſpecie de metal, de que ſe compõe o canhão, e com iſto faço ver como ſe podem applicar á artilheria queſtões, que pareceſſem alheias, como o Problema de Hieron, que ſó differe deſte no nome. Termino em fim eſte Livro com huma diſſertação, em que buſco o comprimento, que devem ter as peças relativamente ao ſeu calibre, para que a força da bala ſeja a maior que he poſſivel; onde trago huma noticia das experiencias, que depois tenho feito por ordem do Rei, para reconhecer ſe eſta Theorica era bem fundada, onde accreſcentei hum modo mui curioſo ao que tinha dito na antiga edição ácerca de contar as balas em pilhas nos arcenaes, ſobre o que ſe poderá notar huma propriedade dos numeros triangulares, que me pareceo digna de attenção para a ſomma dos numeros quadrados.

O decimo quarto trata inteiramente do modo de lançar as bombas. Como eſta Theorica diz reſpeito directamen-

mente ao movimento dos corpos, explico primeiro as bellas experiencias de Galileo ácerca dos corpos, que cahem em virtude do ſeu pezo, depois de haver explicado as regras principaes do choque dos corpos duros, porque eſta parte tambem diz reſpeito directamente ás bombas, pois ſe preciſa ſaber a força, que a bomba adquire pela velocidade da quéda, para conhecer os effeitos, que produzirá, e proporcionar as obras, que devem ſer a prova de bomba á força do choque. Tambem dou algumas ſoluções Geometricas, e Algebraicas dos differentes Problemas, que dizem reſpeito a lançar as bombas, para moſtrar como concorda a Analyſe com a conſtrucção Geometrica, e para moſtrar aos principiantes a applicação da Algebra á Geometria.

No decimo quinto Livro explico as principaes propriedades das maquinas, uſando do principio de Mr. de Varignon, e algumas vezes tambem do de Deſcartes, ainda que o primeiro ſeja mais geometrico. Depois de haver examinado as maquinas ſimplices, que são

o ob-

o objecto da mecanica em geral, depois de tratar o modo de calcular as forças, se dão diversos usos, para que ellas são proprias, ou na manobra da artilheria, ou na pratica das artes. Estes mesmos principios geraes se applicão depois á construcção dos armazens para a polvora, ou outro qualquer edificio, em que se examina a differença das cargas das abobedas em volta inteira das abatidas, ou em terço de ponto. Determina-se depois qual he o choque das bombas, e balas de canhão, que encontrão superficies horizontaes, ou inclinadas, e que elevação se deve dar ao morteiro, para que a bomba, cahindo sobre hum armazem de polvora, caia sobre a abobeda com todo o seu pezo absoluto.

Em fim o decimo sexto Livro he huma continuação do precedente. Examina-se o equilibrio dos fluidos entre si, ou com os solidos, que estão mergulhados, as velocidades das aguas, que sahem por diversas aberturas, o choque dos mesmos fluidos contra superficies, ou quietas, ou em movimento,

to, conforme as velocidades, denſidades, e ſituação dos corpos expoſtos ás correntes. Accreſcentei huma reſumida Theorica do choque de hum fluido contra qualquer ſuperficie diſpoſta como quizerem, ſuppondo que os córtes horizontaes deſte fluido tem velocidades, que ſeguem as razões das raizes quadradas das alturas. Termino em fim eſte Livro com hum Diſcurſo ácerca da natureza, e propriedades do ar, em que ſe moſtra como o pezo deſte fluido produz todos os effeitos, que em outro tempo ſe attribuião ao horror do vacuo. Póde-ſe depois ver na noſſa Arquitectura Hydraulica o que reſpeita ao elaſterio do ar, e força prodigioſa da dilatação, confirmada por muitas experiencias, que ſe achão explicadas na meſma Obra.

NO-

NOVO CURSO DE MATHEMATICA

PARA USO DOS OFFICIAES Engenheiros, e Artilheria.

LIVRO I.

INTRODUCCÃO A' GEOMETRIA.

DEFINIÇÕES.

I.

1

GEOMETRIA he huma ſciencia, que conſidera a extensão não tanto como ella he em ſi, como a comparação, que póde ter com outra da ſua meſma natureza.

II.

II.

2 Tudo aquillo, que póde entrar em questão, se chama *Proposição*, que he de muitos generos, e muda de nome, conforme o seu objecto, como por exemplo.

III.

3 *Axioma* he huma proposição tão clara, e evidente, que para se lhe conhecer a verdade não precisa demonstração, como as seguintes proposições: *O todo he maior que huma das suas partes. Duas cousas iguaes a huma terceira são iguaes entre si. Se a quantidades iguaes se accrescentão iguaes, os todos que resultão são iguaes.* Estas proposições ainda que pareção muito simplices, são de grande uso na Geometria.

IV.

4 *Theorema* he huma proposição, cuja verdade precisa demonstrada.

V.

5 *Problema* he huma proposição, na qual se trata de fazer alguma cousa com certas condições, e depois se prova estar feito o que se tinha proposto.

VI.

VI.

6 *Lemma* he huma proposição, que se põe antes de outra, para lhe facilitar a intelligencia, e demonstração.

VII.

7 *Corollario* he huma proposição, que não he mais que huma consequencia da proposição antecedente. Como todas estas proposições tem por objecto a extensão, vamos declarar a idéa, que della se deve formar.

VIII.

8 Chama-se extensão, ou grandeza tudo aquillo, que póde ter augmento, ou diminuição. A Geometria considera trez sortes de grandezas, ou dimensões, *Comprimento*, *Largura*, e *Profundidade*, ou *Altura*.

IX.

9 O *Comprimento* só, considerado sem largura, nem altura, se chama *Linha*.

X.

10 O *Comprimento*, e *Largura* considerados juntos, sem attender á grossura, ou altura, se chama *Superficie*. Diz-se *Superficie Plana*, quando nenhum

nhum dos ſeus pontos he mais elevado que outro, como nas ſuperficies chatas, e lizas, quaes são as dos vidros, ou eſpelhos.

XI.

11 O *Comprimento*, *Largura*, e *Altura*, conſideradas todas juntas, fazem o *Corpo*, ou *Solido*. O *Comprimento*, *Largura*, e *Altura* tudo são grandezas da meſma natureza, e ſe lhes dá differentes nomes, conforme o modo, com que ſe conſiderão no corpo.

XII.

12 O *Ponto* he o extremo do corpo, da ſuperficie, e da linha, e ſe conſidera como indiviſivel, e ſem medida, iſto he, ſem ſe lhe dar comprimento, largura, ou altura: eſta a razão, porque o ponto não póde ſer objecto da Geometria, que conſidera ſó a extenſão, com a qual o ponto não póde ter comparação.

XIII.

13 *Linha recta* he a mais curta de todas as que ſe podem tirar de hum ponto A a outro B, como AB. Diſto ſe ſegue primeiro, que não ha mais o

hun

hum Caminho, q. seja o mais
curto entre dous pontos: segundo,
q. dous pontos só bastão a de-
terminar a posição de huma linha:
terceiro, q. se duas rectas tem dous
pontos communs, concordão inteira-
mente, e fazem huma linha.

XIV.

14 A linha curva he aquella, que
não he a mais curta entre dous pon-
tos, Como C D. Haverá logo en-
tre dous pontos huma infinidade
de curvas, pois entre dous pon-
tos ha infinitos Caminhos, que
não são o mais curto entre os mes-
mos pontos.

XV.

15 A linha mixta he aquella, q.
he parte curva, e parte recta, Como
E F.

XVI.

16 Linha perpendicular he huma
linha recta C D. que cahindo sobre
ou-

Fig. 4.

outro AB, naõ inclina mais para huem que para o outro lado.

XVII.

Fig.ª 5.ª 17. Quadrado he huma figura reta linea formada por quatro lados iguaes, que cahem perpendicularmente huns sobre outros.

XVIII.

Fig.ª 2.ª 18. Rectangulo he huma quadrilatero, que naõ tem todos os lados iguaes, mas sómente saõ iguaes os que saõ opposto, e cahem tambem perpendicularmente huns sobre outros.

XIX.

Fig.ª 3.ª 19. Cubo he hum corpo da figura de hum dado de jogar, terminado por seis quadrados iguaes com todas as dimensoens entre si iguaes. Todos os sólidos se reduzem na sua medição a esta figura por ser a mais simples

ples de todas, e por isso quando se trata de achar a solidez de hum Corpo, usamos do termo Cubicar, que vem a ser o mesmo.

XX

20. Parallelipipedo he hum solido terminado por seis Rectangulos, cujos lados opposto~~s~~ são iguaes, mas não tem as tres dimensoens iguaes. Fig.ª 5.ª

21. As tres especies de extensão, a saber, linha, superficie, e solido, ou Corpo, se concideraõ de hum modo muito proprio para se explicar muitas couzas na Geometria, e vem a ser, imaginando a linha composta de huma infinidade de pontos, a superficie composta de

de pontos, a ſuperficie compoſta de huma infinidade de linhas, e o ſolido compoſto de huma infinidade de planos. Para iſto ſe entender melhor, conſiderem-ſe dous pontos A, e B diſtantes qualquer eſpaço entre ſi: ſe ſuppuzermos que o ponto A ſe move para B, ſem ſe apartar á direita, nem á eſquerda, e que deixa pelo caminho hum raſtro de pontos, a ſomma de todos eſtes pontos formará a recta AB, pois não ha eſpaço no comprimento AB, por mais pequeno que ſe conſidere, que não correſſe o ponto A; e aſſim a linha AB póde ſer conſiderada como formada de huma multidão de pontos, cuja quantidade he expreſſada pelo comprimento da meſma linha.

22. Do meſmo modo ſe póde imaginar o plano compoſto de infinitas linhas; porque ſuppondo que a linha AC ſe move pelo comprimento da linha CD, ſendo ſempre igualmente inclinada, fica claro que ſe deixar atrás de ſi tantas linhas, quantos pontos tem CD, quando chegar ao ponto D, eſtas linhas juntas formarão a ſuperficie BC. Figura

23 Em fim se hum plano AB se move pelo comprimento da linha BC, e que deixe tantos planos, quantos pontos tem a linha, quando chegar ao extremo C, formará hum corpo DB, que será composto de huma infinidade de planos, cuja somma será determinada pela linha BC, com tanto que esta linha seja perpendicular ao plano gerador.

24 Como pelos geradores de huma cousa se entendem as partes, que a formárão, segue-se do que acabamos de dizer, que o ponto he o gerador da linha, a linha da superficie, e a superficie do corpo, e consequentemente o ponto em si mesmo póde ser considerado como gerador de toda a casta de grandeza.

25 Se suppuzermos que a linha AC seja 8 palmos, e CD 6, e estes numéros se considerarem expressarem os pontos, que tem estas linhas, multiplicando 8 por 6, o producto 48 será a superficie AD; porque compondo-se esta superficie de infinidade de linhas, e cada huma destas linhas de infinidade de pontos, segue-se compõe-se a super-

ficie de infinidade de pontos, cuja quantidade he representada pelo producto de todos os pontos da linha CD, por todos os pontos da linha AC, isto he, do seu comprimento AC pela largura CD, o que dá 48 palmos. Deve-se reflectir em não confundir estes palmos com o palmo andante, ou linear, porque o palmo andante não he mais que hum comprimento sem largura, e os que resultão do producto de duas dimensões são superficies quadradas, que servem de medir todas as superficies.

26 Como o solido DB se compõe de tantos planos, quantos pontos tem a linha CB, para ter este solido precisa multiplicar o plano AB pela linha CB; e assim suppondo que o plano AB he de 48 palmos quadrados, e que o numero dos pontos da linha BC valha 4 palmos lineares, multiplicando 48 por 4, serão 192 palmos, valor do solido AC. Tambem he preciso advertir que estes palmos são differentes dos palmos lineares, e dos palmos quadrados, porque são tantos solidos, que tem hum palmo de comprimento, ou- Figura 5

tro de largura, e outro de altura, e são conſequentemente cubos, pois tem as trez medidas iguaes, e aſſim fica claro que as linhas medem linhas, ſuperficies medem ſuperficies, e os ſolidos medem ſolidos, pois a razão moſtra que as medidas devem ſer da meſma natureza que a couſa, ou grandeza, que ſe mede.

27 Como porém procuramos mais ſaber a relação das grandezas entre ſi, do que conhecer o ſeu abſoluto valor, nos ſervimos das letras do alfabeto em lugar de numeros para expreſſar as grandezas, a fim de fazer mais geraes as demonſtrações das propoſições, que eſtabelecermos. Para entender a razão deſta maior generalidade, ſe deve reflectir, que a generalidade de hum ſinal depende da ſua indeterminação; porque quando huma grandeza não he determinada, póde-ſe applicar a toda a eſpecie de couſa que quizermos. Por exemplo: ſendo o numero 7 indeterminado quanto á eſpecie das ſuas unidades, pois não ſignifica mais 7 homens do que 7 cavallos, ſe póde applicar a

de-

denotar a eſpecie que quizermos, homens, ou cavallos, e aſſim a ſua indeterminação o faz tanto mais geral, e proprio a ſignificar a eſpecie que quizermos. Logo ſe a indeterminação de hum ſinal for a maior que póde ſer, tambem o ſerá a ſua generalidade. Para chegar ao ultimo gráo de generalidade ſe note, que huma grandeza ſó póde ſer indeterminada de dous modos, o primeiro a reſpeito da eſpecie ſómente, e não a reſpeito do numero das unidades, e o ſegundo a reſpeito de ambas as couſas juntas, numero, e eſpecie. Da primeira claſſe são os ſinaes da Arithmetica, que ſempre são indeterminados a reſpeito das differentes eſpecies de unidades, e não a reſpeito do numero das meſmas unidades. Da ſegunda claſſe são os ſinaes, ou letras do alfabeto, que como não ſignificão alguma eſpecie em particular, podem ſervir para denotar todas, pois não são determinadas por algum numero; e podem ſervir tambem para repreſentar todas em geral, pois a indeterminação das letras he a maior poſſivel,

vel, e tambem o ſerá a ſua generalidade, e conſequentemente tudo o que ellas moſtrarem ſerá moſtrado geralmente. Tambem ſe deve notar que qualquer outro caracter, que não foſſem as letras do alfabeto, poderia ſervir; mas como eſtes são já conhecidos, he natural ſervir-nos delles, e he o que os fez preferir aos outros.

28 Para expreſſar huma linha nos ſervimos de huma das letras do alfabeto *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, &c.; e para expreſſar hum plano, poremos duas, huma ao pé da outra, para denotar as duas dimensões do plano: para expreſſar hum ſolido, poremos trez letras ſeguidas, porque todo o ſolido tem trez dimensões, e principalmente porque todos aſſentárão repreſentar a multiplicação de duas grandezas, pondo eſtas duas grandezas huma ao pé da outra. Por exemplo: *ab* repreſenta hum plano, cujas dimensões são *a*, e *b*, que ſe multiplicão huma por outra; do meſmo modo *bcd* repreſenta hum ſolido, cujas trez dimensões são *b*, *c*, *d*, do qual producto reſulta o ſolido.

Co-

29 Como na mesma proposição nomeamos sempre as linhas iguaes pelas mesmas letras, e as linhas desiguaes com differentes letras, quando encontrarmos *ab*, *cd*, se deve julgar que são rectangulos, porque as suas dimensões são desiguaes, em lugar que *aa* significa hum quadrado, porque as suas dimensões são iguaes.

30 Pela mesma razão, quando acharmos *aaa* julgaremos que he hum cubo, porque as trez dimensões são iguaes; e quando virmos *abc*, conheceremos que he hum parallelipipedo, pois tem as trez dimensões desiguaes.

31 Os caracteres do alfabeto são mais proprios para expressar as quantidades, do que os numeros; porque quando vejo o numero 8 não sei se representa huma linha de 8 pés andantes, se hum plano de 8 pés quadrados, ou hum solido de 8 pés cubicos; porque hum plano, que tivesse 4 pés de comprido, e dous pés de largo, teria de superficie 8 pés; e hum solido, que tivesse as suas dimensões terminadas por huma linha de 2 pés, teria 8 pés

cu-

cubicos de ſolido. Aſſim nas operações, que ſe fazem com os numeros, preciſa que a memoria ſe ſujeite a conſervar o que ſignificão; e as que ſe fazem com as letras, não fatigão, pois as meſmas letras repreſentão a qualidade das quantidades: e aſſim quando vejo *aa*, *bcd*, logo conheço que *aa* repreſenta hum quadrado, e *bcd* hum ſolido; e ſe eſtas grandezas foſſem repreſentadas por numeros, não ſe ſaberia o que ellas ſignificavão.

32 Como com as letras do alfabeto ſe fazem as meſmas operações, que com os numeros, iſto he, a ſomma, diminuição, multiplicação, divisão, e extracção de raizes, e ſe trabalha com as quantidades incognitas, como com as conhecidas, (que he huma grande ventagem, que tem o calculo Algebraico ao Numerico) aſſentárão em que as primeiras letras do alfabeto *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, &c. repreſentaſſem as quantidades, que são conhecidas, e que as ultimas *u*, *x*, *y*, *z* ſerviſſem para repreſentar as incognitas, a fim de as diſtinguir das primeiras.

33 Na Algebra nos ſervimos de al-

gurs

guns ſinaes para explicar as operações, que ſe fazem com as letras. Por exemplo: eſte ſinal + ſignifica mais, e denota a união da quantidade, que precede o ſinal, com a que ſe lhe ſegue, e aſſim $a+b$ ſignifica que á quantidade b ſe accreſcentou a quantidade a. Tambem nos calculos Numericos nos ſervimos deſte ſinal, e muitas occaſiões he melhor dizer $5+3$, do que 8, ainda que tudo ſeja o meſmo.

34 Eſte ſinal — ſignifica menos, e denota diminuição da grandeza, que o ſegue, da que lhe precede: $a-b$ repreſenta a differença da quantidade a á quantidade b.

35 Quando quizermos expreſſar o producto de huma quantidade por outra, o podemos fazer de dous modos: primeiro, pondo o multiplicador junto ao multiplicando, como diſſemos aſſima *, e por iſſo ab repreſenta o producto de a por b, bcd repreſenta o producto das trez quantidades b, c, d, humas por outras: ſegundo, ſe denota a multiplicação de duas, ou mais quantidades, pondo entre ellas eſte ſinal ×; * Num. 28.

aſ-

assim $a \times b$ denota o producto de a por b. Tambem $a \times b \times c$ denota o producto das trez quantidades a, b, c; $2 \times 3 \times 4$ denota o producto dos trez numeros 2, 3, 4. Algumas vezes nos calculos Arithmeticos se contentão de indicar a multiplicação deste modo, para se conhecerem mais facilmente os factores do producto. Chamão-se factores os numeros, ou quantidades algebraicas da multiplicação, das quaes resulta o producto, que se trata.

36 Quando quizermos representar que huma quantidade está dividida por outra, poremos a que tomarmos por dividendo sobre huma pequena risca horizontal, e a que tomarmos por divisor, de baixo da mesma risca. Exemplo: $\frac{ab}{c}$ representa que a quantidade ab está dividida pela quantidade c; do mesmo modo $\frac{bcd}{gf}$ denota o quociente de bcd, dividido por gf.

37 Quando virmos este final = entre duas quantidades, quer dizer que ellas são iguaes, e por isso se chama final de igual-

igualdade; assim $ab=cd$ significa que o producto ab he igual ao producto cd.

38 Chama-se equação, quando entre duas quantidades differentes se acha o sinal de igualdade; assim $a=b$, $ay=bx$, $cd+xx=bb$, $y=\frac{ab}{c}$ são equações.

Os membros da equação são aquellas quantidades, entre as quaes se acha o sinal de igualdade; assim as quantidades abc, def são os membros da equação $abc=dfe$, de que abc he o primeiro termo, e dfe o segundo.

39 Se tivermos hum producto, que resulte da multiplicação de huma letra por si mesma muitas vezes, como aaa, $aabb$, se póde resumir esta expressão, escrevendo a letra huma só vez, e pondo á direita, hum pouco mais assima, o numero das vezes, que ella se multiplica por si mesma, ou, o que he o mesmo, quantas vezes se devia escrever; assim em lugar de aaa escreveremos a^3, em lugar de $aabb$ escreveremos $a^2 b^2$, em lugar de $\frac{aaabb}{ccdd}$ poremos $\frac{a^3 b^2}{c^2 d^2}$: este numero se chama expoente.

Quan-

40 Quando o mesmo producto se deve tomar hum certo numero de vezes, se lhe escreve antes o numero das vezes, que se deve tomar; assim $3ab$ denota que se tome trez vezes o producto ab, $5ab^2$ significa que se tome sinco vezes a quantidade ab^2: este numero se chama coefficiente, e he preciso advertencia em não confundir o coefficiente com o a que nós chamamos expoente: b^3 he totalmente differente de $3b$, e não lhe póde ser igual; bastará hum exemplo em numeros a mostrar esta differença: supponhamos $b=5$, teremos $3b=3\times5=15$, e $b^3=5\times5\times5=125$.

41 Servimo-nos alguma vezes dos expoentes para notar o quadrado, ou o cubo de huma linha de alguma figura. AB^2 denota o quadrado de AB. AB^3 nota o cubo da mesma linha.

42 Quando huma quantidade algebraica se multiplicou huma, duas, trez, ou quatro vezes por si mesma, o producto, que resulta, se chama potencia, ou gráo; assim a, ou a^1 he a primeira potencia, ou primeiro gráo da quantidade a; aa, ou a^2 segunda potencia,

ou

ou ſegundo gráo, e muitas vezes quadrado de a: do meſmo modo aaa, ou a^3 ſe chama terceiro gráo, ou terceira potencia de a, e ás vezes o cubo de a; finalmente $aaaa$, ou a^4 o quarto gráo, ou quarta potencia de a, ou tambem quadrado do quadrado da meſma grandeza, pois reſulta da multiplicação do quadrado a^2 por ſi meſmo. O meſmo he das mais potencias.

43 Qualquer potencia ſe póde tomar como producto de huma certa potencia por outra, aſſim a^5 he o producto de a^3 por a^2, ou da terceira potencia de a pela ſegunda.

44 Tambem podem haver potencias feitas do producto de duas, ou mais letras, multiplicadas por ſi meſmas; porque ſe multiplicarmos ab por ſi meſmo, huma vez o producto $aabb$ ſerá a ſegunda potencia da quantidade ab, como tambem $a^3\ b^3$ he o cubo da meſma grandeza.

45 O numero, ou quantidade algebraica, de cuja multiplicação reſulta huma potencia, ſe chama raiz, e tem tantas raizes, como potencias; aſſim a

he

he raiz quadrada de a^2, raiz cubica de a^3, quinta raiz de a^5, &c.: do mesmo modo ab he raiz cubica de a^3b^3, abc he quarta raiz de $a^4b^4c^4$.

46 As quantidades algebraicas se chamão incomplexas, ou monomios, quando não são entre si ligadas pelos sinaes $+$, ou $-$, e assim ab, cd, &c. são quantidades incomplexas, ou monomios. Monomio quer dizer, que he composto de hum só termo; pelo contrario, quando são entre si ligados pelos sinaes $+$, e $-$, se chamão complexas, ou polynomios, e quer dizer que tem muitos termos; assim $bc+ad$, $ef+gh$, $aab-bcd$, $\frac{aa+cc}{a}$, $ab+cd-ac$ são quantidades complexas, ou polynomios: se as quantidades algebraicas constão só de dous termos, se chamão binomios, e trinomios, quando tem trez termos; mas se tem mais, conservão o nome geral de polynomios: no ultimo exemplo ab, cd, ac são os termos da quantidade complexa $ab+cd-ac$.

47 Quando huma quantidade algebraica não he precedida de algum sinál, se

ſe lhe ſuppõe ſempre o ſinal $+$, e ſe chama quantidade poſitiva, para a diſtinguir das que são precedidas do ſinal $-$, que ſe chamão negativas: $+ab$ he o meſmo que ab, que ſe diz poſitiva, $-ac-bc$ são quantidades negativas.

48 Quando huma quantidade não tem expoente, nem coefficiente particular, ſe lhe ſuppõe ſempre a unidade por expoente, e por coefficiente; aſſim ab he o meſmo que $1a^1b^1$, abc he o meſmo que $1a^1b^1c^1$, e aſſim das mais.

49 Quando as quantidades incomplexas, ou os termos de huma quantidade complexa contém preciſamente as meſmas letras, ſe chamão quantidades ſemelhantes: $3ab$, e $2ab$, $5ac$, e $2ac$ são quantidades ſemelhantes. Deve-ſe notar bem que a ſemelhança das quantidades algebraicas não depende nem dos ſinaes, nem dos coefficientes, como ſe vê neſtes exemplos, mas ſómente das letras, e numero das vezes, que ſe eſcrevem; e para ſe conhecer mais facilmente a ſemelhança dos termos, he bom pôr nos productos as letras na ſua ordem natural alfabetica, e he

me-

melhor eſcrever *abc*, e não *cab*, nem *bca*.

PRIMEIRA REGRA.

Reduzir as quantidades algebraicas a menores termos.

50 Quando ha quantidades algebraicas complexas, que contém termos ſemelhantes, ſe ſommão os coefficientes dos que tem o meſmo ſinal, e eſta ſomma poremos depois do ſinal para reduzir a quantidade propoſta; aſſim $4ab-2ac+2ab-3ac$ ſe reduz a $6ab-5ac$, $28abd+15acf+8abd+7acf=36abd+22acf$.

51 Quando as quantidades ſemelhantes tem ſinaes differentes, diminuiremos o menor coefficiente do maior, e a differença do maior ſe põe depois do ſinal. Por exemplo: para reduzir $cd+6ab+4aa-4ab$, eſcreveremos $cd+4aa+2ab$, que he tirando $4ab$ de $6ab$; do meſmo modo $2ab+5cd+3ab-7cd$ ſe reduz a $5ab-2cd$.

52 Finalmente quando dous termos são iguaes, e tem ſinaes oppoſtos, ſe reduzem a nada, e aſſim $a^2b+2ca-a^2b$

$=2cd$, porque a differença de $-a^2b$ tirado de $+a^2b$ he 0.

SEGUNDA REGRA.

Da ſomma das quantidades algebraicas complexas, e incomplexas.

53 Para ſommar as quantidades algebraicas, que não tem antes de ſi algum ſinal, baſta pôr humas depois das outras, e ligallas com o ſinal $+$; aſſim para ſommar as quantidades ab, ac, ad, ſe eſcreverá $ab+ac+ad$: o meſmo he na ſomma das quantidades ef, gh, mn, que he $ef+gh+mn$.

54 Se as quantidades, que ſe querem ſommar, são complexas, ſe eſcreverão ſeguidas com os ſeus ſinaes; e depois de reduzidos os termos ſemelhantes, ficará feita a ſomma deſtas quantidades. Por exemplo: para ſommar $2aab-3cca$ com $acc+5acd-6aab$, ſe eſcreverá $2aab-3cca+acc+5acd-6aab$, que ſe reduz a eſta $acc+2acd-4aab$; e para ſommar $6add+5aac-4abb$ com $2aac-2abb$, ſe eſcreverá $6add+5aac-4abb+2aac-2abb$, que ſe reduz a $6add-6abb+7aac$;

$7aac$; finalmente para ſommar $abc-ddc-dcc$ com $dcc-abc+3ddc$, ſe eſcreverá $abc-ddc-dcc+dcc-abc+3ddc$, que ſe reduz a $2ddc$: e geralmente fallando na ſomma das quantidades algebraicas, ou ſejão monomios, ou polynomios, ſe eſcrevem as quantidades humas depois das outras com os ſeus ſinaes, e depois ſe ha quantidades ſemelhantes ſe reduzem.

Subtracção, ou diminuição das quantidades complexas, e incomplexas.

55 Para diminuir huma quantidade algebraica de outra, ſe deve eſcrever depois daquella, de que ſe quer diminuir, mudando os ſinaes á quantidade, que ſe diminue, iſto he, pondo o ſinal $+$, onde eſtá o ſinal $-$, e $-$, onde houver $+$; e havendo quantidades ſemelhantes, ſe reduzem, e fica feita a operação.

Por exemplo: para diminuir bb de aa eſcreveremos bb depois de aa com o ſinal $-$, porque, como diſſemos, ſe ſuppõe ter o ſinal $+$, e a differença he $aa-bb$. Tambem para diminuir $c+d$ de $a+b$ ſe

hão de mudar os ſinaes de $c+d$, e eſcrever $a+b-c-d$, que ſerá a differença, que ſe buſca: para diminuir $b-d$ de $a+c$ ſe eſcreverá $a+c-b+d$: para diminuir $2bb-3cc$ de $aa+bb$ ſe eſcreverá $aa+bb-2bb+3cc$, e reduzindo teremos $aa-bb+3cc$; finalmente para diminuir $ab-dc+bb-3aa$ de $aa-dc+3bc-bb$ ſe eſcreverá $aa-dc+3bc-bb-ab+dc-bb+3aa$, que dá na reducção $4aa+3bc-2bb-ab$, e o meſmo ſe entende das mais quantidades.

Explicação ácerca da diminuição litteral.

He facil de perceber a razão, por que o ſinal + expreſſo, ou entendido ſe muda em −, porque niſto he que unicamente conſiſte a diminuição *: com tudo quaſi a todos os principiantes cauſa admiração ver a mudança do ſinal − em +, o que facilmente ſe comprehende ſe attenderem que quando diminuimos $b-d$ de qualquer quantidade, v. g. $a+c$, não tiramos toda a quantidade b, porque então diminuiriamos de mais o valor da quantidade d, porque b he maior que $b-d$ o va- * Num. 34

lor da quantidade expressada por d; e como quando escrevemos $-b$ tiramos de mais a quantidade d, por isso a tornamos a pôr, escrevendo $+d$.

Isto se entende mais facilmente em numeros. Supponhamos que queremos diminuir do numero 12 o numero $6-2$, conforme a regra deve-se escrever $12-6+2$, cuja differença he 8, porque como $6-2$ he igual a 4, se vê que se não deve tirar de 12 mais que 4; e consequentemente se em lugar de 4 se diminue 6, se deve tornar a repôr a 12 a quantidade 2, que se lhe tirou de mais; e para me explicar de outro modo, supponhamos dous homens, e que hum tenha cem moedas, sem dever cousa alguma, e o outro pelo contrario não só não tenha cousa alguma, mas deve cem moedas, he certo que o primeiro he mais rico que o segundo duzentas moedas, e consequentemente se vê que diminuindo $-$ de $+$ a differença he $+$.

Multiplicação das quantidades incomplexas.

56 Para multiplicar quaesquer duas quantidades incomplexas huma por outra, se deve attender aos sinaes, aos coefficientes, e ás letras, do que se vê que a multiplicação contém trez partes.

Primeiro. Se o multiplicando, e o multiplicador tem o sinal +, o producto terá o sinal +, e quer dizer que + por + dá +.

Se o multiplicando tiver o sinal +, e o multiplicador o sinal —, o producto terá o sinal —, e quer dizer + por — dá —.

Se o multiplicando tiver o sinal —, e o multiplicador o sinal +, o producto terá o sinal —, ou tambem — por + —.

Em fim se o multiplicando, e multiplicador tem o sinal —, o producto terá o sinal +, e quer dizer que — por — dá +. He regra geral, que todas as vezes que o multiplicando, e o multiplicador tem o mesmo sinal, o producto

cto he positivo, ou precedido do final $+$; e será o producto negativo, ou precedido do final $-$ todas as vezes que o multiplicando, e multiplicador tiverem finaes differentes.

Segundo. Se o multiplicando, e multiplicador juntos, ou separadamente tem coefficientes differentes da unidade, se multiplicão os coefficientes, e o producto dos coefficientes he o coefficiente do producto buscado.

Terceiro. Finalmente para multiplicar as letras humas por outras, se porão seguidas ao pé humas das outras, que denota a multiplicação das grandezas, que ellas expressão, pois já
Num. 35. fica dito * que este modo de as dispôr escolhêrão para significar a multiplicação. Tudo isto se faz sensivel nos exemplos.

Dão-nos para multiplicar a quantidade $3ab$, ou $+3ab$ por $2ac$, ou $+2ac$, pelo Art. 1. desta regra digo, $+$ por $+$ dá $+$: depois passando aos coefficientes digo, 3 vezes 2 são 6, e depois ás letras ab por ac dá a^2bc, e será o producto $6a^2bc$, ou $+6a^2bc$. Do mesmo modo

do $4ac$ multiplicado por $-5ab^2$, dá $-20a^2b^2c$, dizendo, $+$ por $-$ dá $-$, 5 vezes 4 são 20, ac por ab^2 dá a^2b^2c. Tambem $-6a^3b^2$ multiplicado por $4a^2bc^2$ dá $-24a^5b^3c^2$; em fim $-8abc$ por $-5bcd$ dá $+40ab^2c^2d$.

57 Para multiplicar duas, ou mais quantidades, que tem expoentes compostos das mesmas letras, se devem sommar os expoentes das letras semelhantes, e esta somma será o expoente das letras do producto, como por exemplo: $3a^2b^3 \times 5a^3b^2 = 15a^5b^5$, do mesmo modo $a^2b^2c^3$, multiplicado por ab^3c^2, dá $a^3b^5c^5$, pois he evidente que $a^2b^2c^3 = aa$, bb, ccc, e $ab^3c^2 = abbbcc$: logo o producto destas quantidades será pondo todas seguidas humas a outras, e vem a ser aaa, $bbbbb$, $ccccc$, ou $a^3b^5c^5$, substituindo em lugar das letras os expoentes, que denotem as vezes que cada letra se deve escrever, e isto baste para a multiplicação das quantidades incomplexas.

Mul-

Multiplicação das quantidades complexas.

58 A multiplicação das quantidades complexas ſe reduz á das incomplexas, fazendo tantas multiplicações parciaes, quantos termos ha no multiplicando, e multiplicador, ſeguindo inteiramente as meſmas regras quanto aos ſinaes, coefficientes, e letras. Se o multiplicador não tem mais que hum termo, haverá tantas multiplicações parciaes por eſte termo, quantos termos tiver o multiplicando; e quando tivermos achado todos os termos do producto, ſe fará a reducção dos termos ſemelhantes, ſe os ha. Por exemplo: para multiplicar $2a+b$ por $3c$, diremos, $+$ por $+$ dá $+$, 2 vezes 3 são 6, a multiplicado por c dá ac, o primeiro termo do producto ſerá $6ac$; do meſmo modo diremos, $+$ por $+$ dá $+$, 3 vezes 1 são 3, b por c dá bc, e ſerá o ſegundo termo do producto $+3bc$, e ſommados os productos, ficará o producto total $6ac+3bc$. Para multiplicar $a-b$ por d, diremos, $+$ por $+$ dá $+$, 1 por 1 dá 1, a por d he $+ad$. Paſſando

ao ſegundo termo, diremos, $-$ por $+$ dá $-$, 1 por 1 dá 1, b por d he bd, e ſerá o ſegundo termo do producto $-bd$; e ſomando ambos, teremos $ab-bd$ producto total.

Quando o multiplicador tambem he complexo, ou compoſto de muitos termos, para ſe fazer a multiplicação com ordem ſe põe o multiplicador de baixo do multiplicando, e ſe multiplicão todos os termos do multiplicando por cada hum dos termos do multiplicador, o que dá tantos productos parciaes, quantos termos tem o multiplicador, e cada hum dos productos contém tantos termos, quantos são os do multiplicando: aſſim para multiplicar $a+c$ por $a+c$, ponho huma deſtas quantidades de baixo da outra; e começando a multiplicação pela eſquerda, digo, a por a dá $+aa$, a por c dá $+ac$: depois multiplicando pelo ſegundo termo c do multiplicador, direi, $+c$ por a dá $+ac$, $+c$ por c dá $+cc$, que he o ſegundo producto; e ſomando eſte com o primeiro, tenho o producto total $aa+ac+ac+cc$, que para ſe reduzir em vez de eſcrever

duas

duas vezes a mesma quantidade ac, se põe $2ac$, e fica $aa+2ac+cc$.

59 Para multiplicar $a-b$ por $a-b$, suppondo tambem huma destas quantidades de baixo da outra, direi, a por a dá $+aa$, depois a por $-b$ dá $-ab$: (porque se entende sempre a com o sinal $+$) depois multiplicando pela segunda letra do multiplicador, direi, $-b$ por a dá $-ab$, e $-b$ por $-b$ dá $+bb$, e feita a somma acho o producto $aa-2ab+bb$. Tudo isto se faz evidente pelo primeiro arti-
Num. 56. culo *, e o mesmo será nas outras operações, ainda que sejão mais embaraçadas, como mostrão os seguintes exemplos.

Multiplicando	$2a+b$
Multiplicador	$3c$
Producto	$6ac+3bc$

Multiplicando	$a-b$
Multiplicador	d
Producto	$ad-db$

Mul-

Multiplicando	$a+c$
Multiplicador	$a+c$
1.º producto	$aa+ac$
2.º producto	$+ac+cc$
Total producto	$aa+2ac+cc$

Multiplicando	$a-b$
Multiplicador	$a-b$
1.º producto	$aa-ab$
2.º producto	$-ab+bb$
Total	$aa-2ab+bb$

Multiplicando	$aa+bb-ad-xx$
Multiplicador	$aa+bc$
1.º producto	$a^4+a^2b^2-a^3d-a^2x^2$
2.º producto	$+a^2bc+b^3c-bcad-bcx^2$
Total	$a^4+a^2b^2+a^2bc-a^3d+b^3c-a^2x^2-bcad-bcx^2$.

Multiplicando	$a^3+a^2b+ab^2+b^3$
Multiplicador	$a-b$
1.º producto	$a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3$
2.º producto	$-a^3b-a^2b^2-ab^3-b^4$
Total	$a^4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -b^4$

Pois

Pois claramente ſe vê que os termos intermedios ſe deſtroem na reducção, porque tem ſinaes oppoſtos, e são ſemelhantes com os meſmos coefficientes.

Demonſtração da regra da multiplicação das quantidades complexas, e incomplexas.

Facilmente ſe comprehende a razão, por que + multiplicado por + dá +; mas não he tão facil entender, porque + multiplicado por —, ou — por + dá —, e muito menos a razão, por que — multiplicado por — dá +: por eſta cauſa nos demoraremos em explicar eſtes dous caſos.

A razão, por que + por — dá — he, porque quando multiplicamos por exemplo $a-b$ por d, quando multiplicamos a por d, o producto he maior do que deveria ſer, porque a he maior que $a-b$; e conſequentemente para tirar o que neſta multiplicação ſe poz de mais, ſe deve tornar a multiplicar b por d, e tirar eſte producto bd do producto ad, eſcrevendo $ad-bd$.

Vê-ſe melhor em numeros: multiplique-

que-se 15—5 por 6; e como 15—5 he igual a 10, o numero 10 he que se multiplica por 6, e não 15, e fica maior o producto, se conforme a regra depois de multiplicar 15 por 6 se não multiplique tambem 5 por 6, para se tirar o seu producto 30 de 90 producto de 15 por 6, e restão 60, que he o mesmo que 10 multiplicado por 6.

Quanto ao ultimo caso parece bem estranho que — por — dê +; mas o que faz pôr o sinal + he, que dando os dous termos precedidos do sinal — duas multiplicações negativas, se tira mais do que se deve tirar, e por isso se põe + no producto dos dous termos, que tem o sinal —, para recuperar o que se tirou de mais. Por exemplo: na multiplicação $a-b$ por $a-b$ vejo que depois de feita a operação conforme a regra, do producto aa se deve tirar $-2ab$, em que se tira de mais a quantidade bb, pelo que se deve tornar a pôr esta mesma quantidade bb com o sinal +, e fica tudo como devia ser.

Como esta regra he absolutamente indispensavel na pratica das operações al-

algebraicas, não parecerá escusada a diligencia para se capacitarem da sua verdade, e certeza de principios, em que se funda, para o que basta fazer reflexão na natureza da multiplicação: multiplicar hum numero por outro geralmente fallando não he outra cousa mais que tomar hum numero tantas vezes, quantas unidades denota o outro; todos sabem que se chama multiplicando o numero, que se repete essas tantas vezes, e multiplicador aquelle, que denota as vezes, que se deve repetir o primeiro.

As unidades do multiplicador determinão quantas vezes se deve repetir o multiplicando, e o final do mesmo multiplicador denota de que modo se deve tomar o multiplicando: logo se o multiplicador tem o final +, a multiplicação se faz pela addição; e pelo contrario, se tiver o final —, se faz com a subtracção, e o producto resulta da diminuição repetida. Para se comprehender o como a multiplicação se faz pela diminuição, se deve fazer reflexão, que as quantidades negativas são tão reaes,

co-

como as positivas, e não tem mais que serem-lhes oppostas: logo podem-se multiplicar como as outras; assim como os bens, que hum homem possue, se tem por quantidades positivas, e as dividas, que se contrahem por quantidades negativas, e estas se podem multiplicar do mesmo modo que os bens: hum homem, que augmenta as suas dividas, multiplica os seus bens por menos, e deste modo ficão facil de entender todas estas expressões. Estabelecido isto, $+a \times -b$ deve dar $-ab$, porque tendo o multiplicando o sinal $+$, e o multiplicador o sinal $-$, mostra que se deve tirar a de b tantas vezes, quanto he o valor de b. Do mesmo modo $-a \times +b$ deve dar $-ab$, porque o multiplicador b, sendo positivo, indica que a se deve repetir muitas vezes, e o que resulta de quantidades negativas repetidas sempre deve ser negativo, assim $-a \times +b$ dá $-ab$; finalmente $-a \times -b$ deve dar $+ab$, porque tendo o multiplicador o mesmo sinal, mostra que a multiplicação se faz diminuindo, isto he, que a quantidade negativa $-a$ se deve dimi-

nuir

nuir tantas vezes, quantas são as unidades de *b*, e consequentemente he fazer *a* outras tantas positivo; pela mesma razão, que para diminuir huma quantidade negativa huma vez, se faz huma vez positiva, e esta ultima parte da regra a respeito dos sinaes corresponde a hum homem, que paga as suas dividas.

As ultimas duas partes da regra não precisão demonstração, pois he evidente que sendo os coefficientes numeros, se devem multiplicar como numeros, e o modo, com que se expressa a multiplicação das letras, he meramente convencional, e assim não póde entrar em questão.

ADVERTENCIA.

Para dar huma idéa da facilidade, com que se demonstrão as propósições de Geometria por meio do calculo Algebraico, julgo a proposito antes de passar adiante fazer huma applicação da multiplicação á demonstração das seguintes proposições.

PRO-

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

60 O quadrado de qualquer quantidade, expressada por duas letras positivas, he igual aos quadrados de cada huma das letras, e mais dous rectangulos feitos das mesmas letras.

Porque multiplicando A+B por A+B, o producto será AA+2AB+BB, que he composto dos quadrados AA+BB, e dos dous rectangulos feitos das mesmas letras A, e B, que são 2AB.

PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

61 O cubo de qualquer grandeza, expressada por duas letras, he igual ao cubo da primeira, e mais ao cubo da segunda, com trez parallelipipedos feitos do quadrado da primeira pela segunda, e mais outros trez parallelipipedos do quadrado da segunda pela primeira.

Porque sendo o quadrado de $a+b$ $aa+2ab+bb$, se o multiplicarmos pe

 $a+$

nuir $+b$, teremos o cubo $a^3+3a^2b+3ab^2+$
dades , que contém a^3, e b^3 cubos das duas
zer etras a, e b, e mais trez parallelipi-
ma pedos $3a^2b$ do quadrado aa por b, e
qua em fim outros trez parallelipipedos do
hur quadrado bb por a, que são $3abb$.

Estas proposições nos servirão depois
para a demonstração das raizes quadra-
da, e cubica.

Raiz	$a+b$
Por	$a+b$
	$aa+ab$
	$+ab+bb$
Quadrado	$aa+2ab+bb$
Por	$a+b$
	a^3+2a^2b+abb
	$a^2b+2abb+b^3$
Cubo	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

PROPOSIÇÃO III.

THEOREMA.

62 Se tivermos huma linha AB divi-
da em duas igualmente no ponto C,
desigualmente no ponto D, digo que

rectangulo AD×DB, feito das partes desiguaes AD, e DB com o quadrado da parte intermedia CD, he igual ao quadrado da metade da linha AC^2, ou CB^2.

Chamemos AC, ou CB a, e CD x, será DB $a-x$, e AD $a+x$.

DEMONSTRAÇÃO.

Se juntarmos ao rectangulo AD×DB $(aa-xx)$ o quadrado CD (xx), teremos esta equação AD×DB+CD^2 $(aa-xx+xx)=AC^2$ (aa), porque tirando do primeiro membro as quantidades, que se destroem, fica $aa=aa$. *O que se queria demonstrar.*

COROLLARIO.

63 Segue-se desta proposição que se huma linha está dividida em duas igualmente no ponto C, e desigualmente em D, o quadrado AC^2 de metade da linha, menos o quadrado CD^2 da parte intermedia CD, he igual ao rectangulo das partes desiguaes AD×DB feito de AD, e DB, pois he evidente que AC^2-CD^2 $(aa-xx)=$ AD×DB $(aa-xx)$.

PROPOSIÇÃO IV.

THEOREMA.

Figura 7. 64 Se tivermos huma recta AB dividida em duas no ponto C, e lhe accrescentar outra BE, digo que o rectangulo da recta AE, que he composta das duas, pela parte BE accrescentada, com o quadrado da metade CB, será igual ao quadrado da linha CE, composta da metade, e do accrescentamento BE.

Chamemos AC, ou CB a, e CE x, será BE $x-a$, e AE$=x+a$.

DEMONSTRAÇÃO.

He evidente que se ao rectangulo AE×BE ($xx-aa$) se accrescentar o quadrado CB (aa), temos esta equação AE×BE+CB^2 ($xx-aa+aa$)$=$CE^2 (xx), porque tirando as quantidades, que se destroem, temos $xx=xx$. *O Q. S. Q. D.*

COROLLARIO.

65 Desta proposição se segue que se a huma linha dividida pelo meio se lhe accrescenta outra, o quadrado da linha

CE, composta da metade, e do accrescentamento, menos o quadrado da intermedia CB, será igual ao rectangulo feito de toda a linha AE pela parte accrescentada BE, o que he evidente, porque $CE^2 - CB^2 = (xx - aa) = AE \times BE$ $(xx - aa.)$

PROPOSIÇÃO V.

THEOREMA.

66 Se tivermos duas linhas, das quaes a primeira seja dupla da segunda, digo, que o quadrado da primeira será quadruplo do quadrado da segunda.

DEMONSTRAÇÃO.

Se chamarmos á segunda linha a, será a primeira $2a$: ora multiplicando $2a$ por $2a$, teremos $4aa$, que he o quadrado da primeira; e multiplicando a por si mesmo, teremos aa, que he o quadrado da segunda, e consequentemente o quadrado da primeira he quadruplo do quadrado da segunda.

Da

Da divisão, ou repartição das quantidades algebraicas complexas, e incomplexas.

67 Para dividir qualquer quantidade algebraica por outra, se põe a que se quer dividir sobre huma risca horizontal, e a porque se divide de baixo da mesma risca; * e tirando do dividendo, e divisor as letras semelhantes, no caso de as haver, o resto he o quociente. Assim para dividir a por b, escreverei $\frac{a}{b}$, o que significa que a está dividido por b: para dividir abc por fg, escreverei $\frac{abc}{fg}$: para dividir $a^2b^2c^3$ por abc^2, ou $aabbccc$ por $abcc$, escrevo $\frac{aabbccc}{abcc}$, o que se reduz a este abc, tirando as letras, que são commuas ao dividendo, e divisor: se multiplicarmos o quociente abc pelo divisor $abcc$, teremos $a^2b^2c^3$, o que prova que a divisão está bem feita, pois o producto do divisor pelo quociente he igual ao dividendo.

* Num. 36.

Se

68 Se o dividendo, e divisor são precedidos de coefficientes, será preciso dividir hum coefficiente por outro, conforme a regra da divisão dos numeros, e o quociente desta divisão será o coefficiente do quociente. Por exemplo: $21aab^2$ dividido por $7ab = 3ab$, $\frac{28abc^3}{4a^2bc} = \frac{7c^2}{a}$, $\frac{36a^2b^4}{9a^3bc^2} = \frac{4b^3}{ac^2}$. Aqui se póde notar, que quando o dividendo, e o divisor ambos tem letras semelhantes com diversos expoentes, a divisão destas letras se faz com a diminuição dos expoentes assim $\frac{a^3}{a^2} = a = a^3 - a^2$; $\frac{a^5b^4}{a^2b^3} = a^3b = a^5 - a^2, b^4 - b^3$, $\frac{36ac^2f^3}{4a^3cf^2} = \frac{9c^2 - 1, f^3 - 2}{a^3 - 1} = \frac{9cf}{a^2}$, e assim os mais.

69 A respeito dos sinaes se o dividendo, e divisor tem cada hum o mesmo sinal +, ou −, deve o quociente ter o sinal +; e a razão he, porque huma quantidade negativa he conteúda em outra negativa, do mesmo modo que a positiva he conteúda na positiva; porém quando tem sinaes differentes, o quo-

o quociente terá o final —, porque como as quantidades positivas, e negativas são oppostas, huma contém a outra negativamente, e consequentemente terá o quociente o final —. Por exemplo: $+a^2b$ dividido por $+a = +ab$, do mesmo modo $-ab$ dividido por $-b$ dá $+a$, o que tambem se póde demonstrar pela prova da divisão, pela qual o producto do divisor pelo quociente deve ser igual ao dividendo. Multiplicando pois o quociente $+a$ pelo divisor $-b$, teremos $-ab$, pois — por + dá
Num.56. —. Se se dividir $+ab$ por $-a$, o quociente será $-b$; porque multiplicando o quociente $-b$ pelo divisor $-a$, tere-
Num.56. mos $+ab$, pois — por — dá +. Em fim se se dividir $-ab$ por $+a$, o quociente será $-b$; porque multiplicando o quociente $-b$ pelo divisor $+a$, teremos —
Num.56. ab, porque — por + dá —. *

70 Se o dividendo for complexo, se fará com cada termo a mesma operação, que acabamos de explicar, e a somma dos quocientes parciaes será o quociente total. Assim para dividir $ab + ad$ por a, direi, ab dividido por a dá

b,

b, eſcrevo b no quociente: depois ad dividido por a dá d, que porei no quociente; e ſommados ambos os quocientes, dão o total $b+d$, o que he evidente, porque multiplicando o quociente $b+d$ pelo diviſor a, temos $ab+ad$ igual ao dividendo.

71 Quando o dividendo, e diviſor são quantidades algebraicas complexas, ſe procede do meſmo modo que na divisão dos numeros. Por exemplo: para dividir $aa+2ab+bb$ por $a+b$, porei os primeiros termos do diviſor de baixo dos primeiros termos do dividendo, e buſcarei as vezes que o primeiro termo a do diviſor ſe contém no primeiro termo a^2 do dividendo, dizendo em a^2 quantas vezes cabe a, ou a^2 dividido por a dá no quociente a: depois multiplico o diviſor $a+b$ por a, e o ſeu producto $aa+ab$ diminuo do dividendo *, que ſe faz eſcrevendo eſte producto depois do dividendo com ſinaes oppoſtos, e dará $aa+2ab+bb-aa-ab$, que ſe reduz a eſta $ab+bb$: depois farei a meſma operação com o reſto, dizendo, ab dividido por a dá no quociente b, que ſom-

* Num. 55

ſommarei com o primeiro quociente achado, e eſte ſegundo quociente multiplico tambem pelo diviſor $a+b$, que me dá o producto $ab+bb$: eſte producto ſe diminue do reſto, pondo eſta quantidade depois delle, e trocando-lhe os ſinaes, e ſerá $ab+bb-ab-bb$, que ſe reduz a nada pela regra da reducção das quantidades ſemelhantes, de que ſe conclue que o quociente que ſe buſcava he $a+b$, pois não fica reſto.

72 Para dividir $a^2-2ab+bb$ por $a-b$, direi como no exemplo aſſima: a^2 dividido por a dá no quociente a, multiplicarei o diviſor todo $a-b$ por eſte quociente a, e o ſeu producto $aa-ab$ ſe diminue do dividendo, eſcrevendo-o depois delle com os ſinaes trocados deſta fórma $aa-2ab+bb-aa+ab$, que ſe reduz a eſta $-ab+bb$: com eſte reſto, como novo dividendo, farei a meſma operação, e direi, $-ab$ dividido por a dá $-b$, que ſommo com o primeiro quociente: multiplico o diviſor $a-b$ por $-b$, e tiro o ſeu producto $-ab+bb$ do reſto do dividendo deſte modo $-ab+bb+ab-bb$, o que ſe reduz a nada pela regra

da

da reducção, e ſe conclue que o quociente $a-b$ he o da divisão, que ſe buſcava.

73 Para dividir $aa-bb$ por $a+b$ direi, a^2 dividido por a dá a, que multiplicado pelo diviſor $a+b$, dá o producto a^2+ab; e diminuidos do dividendo deſte modo $aa-bb-aa-ab$ depois da reducção, fica o reſto $-bb-ab$, ou $-ab-bb$: eſte reſto torno a dividir por $a+b$, dizendo, $-ab$ dividido por $+a$ dá $-b$; e multiplicando o diviſor por $-b$, temos $-ab-bb$: diminuamos eſte producto do reſto do diviſor deſte modo $-ab-bb+ab+bb=0$, tirando as quantidades, que ſe deſtroem, de que ſe ſegue que o quociente da divisão he $a-b$, pois multiplicado eſte quociente pelo diviſor, he igual o ſeu producto ao dividendo.

Exemplos da divisão.

1.º divid.º	$aa+2ab+bb$	Quoc. total $a+b$
Diviſor	$a+b$	1.º quociente a
Producto	$aa+ab$	
Diminuiç.	$aa+2ab+bb-aa-ab$	

Re-

Reducção, ou N. Div. $\frac{ab+bb}{}$

Divisor $a+b$ } 2.º quociente b

Producto $ab+bb$

Diminuiç. $ab+bb-ab-bb=0$

2. divid.º $\frac{aa-2ab+bb}{}$ } Quoc. total $a-b$

Divisor $a-b$ } 1.º quociente a

Producto $aa-ab$

Diminuiç. $aa-2ab+bb-aa+ab$

Reducção, ou N. Div. $\frac{-ab+bb}{}$

Divisor $a-b$ } 2.º quociente $-b$

Producto $-ab+bb$

Diminuiç. $-ab+bb+ab-bb=0$

3.º divid. $\frac{aa-bb}{}$ } Quoc. total $a-b$

Divisor $a+b$ } 1.º quociente a

Producto $aa+ab$

Diminuiç. $aa-bb-aa-ab$

Reducção, ou N. Div. $\frac{-ab-bb}{}$

Divisor $a+b$ } 2.º quociente $-b$

Producto $-ab-bb$

Diminuiç. $-ab-bb+ab+bb=0$

4.º di-

4.º div. $a^4 - b^4$ } Q. total $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$
Divis. $a - b$ } 1.º quociente a^3
Prod. $a^4 - a^3b$
Dim. $a^4 - b^4 - a^4 + a^3b$

Reducção, ou N. Div. } $a^3b - b^4$
Divisor $a - b$ } 2.º quociente a^2b
Producto $a^3b - a^2b^2$
Diminuiç. $a^3b - b^4 - a^3b + a^2b^2$

Reducção, ou N. Div. } $a^2b^2 - b^4$
Divisor $a - b$ } 3.º quociente ab^2
Producto $a^2b^2 - ab^3$
Diminuiç. $a^2b^2 - b^4 - a^2b^2 + ab^3$

Reducção, ou N. Div. } $ab^3 - b^4$
Divisor $a - b$ } 4.º quociente $+ b^3$
Producto $ab^3 - b^4$
Diminuiç. $ab^3 - b^4 - ab^3 + b^4 = 0$

NOTA.

Ainda que o quociente tenha mais termos que o dividendo, não se segue que por isso seja o dividendo menor que o quo-

o quociente: se $a-b$ for quantidade positiva, o producto do quociente positivo $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ pela quantidade positiva $a-b$ certamente será alguma cousa maior que o mesmo quociente: logo a^4-b^4, que he este producto, he maior que $a^3+a^2b+ab^2+b^3$. Por outra parte na Algebra huma quantidade, que tem maior dimensão que outra, sempre se julga ser maior que ella.

Se encontrassemos quantidades mais compostas que as precedentes, procederiamos nas operações do mesmo modo; assim se nos dessem para dividir a quantidade $6a^2+10ab+17ac+15bc+12c^2$ por $2a+3c$, se escreveria o dividendo de baixo do divisor, e tudo o mais se fará como temos dito.

Divid. $6a^2+10ab+17ac+15bc+12c^2$ } Total quoc. $3a+5b+4c$

Divis. $2a+3c$ } 1.º quociente $3a$

Prod. $6a^2+9ac$

Dimin. $6a^2+10ab+17ac+15bc+12c^2$

$-6a^2-9ac$

Re-

Reducção, ou N. Div. } $10ab+8ac+15bc+12c^2$

Divisor $2a+3c$ } 2.º quociente $5b$

Producto $10ab+15bc$

Diminuiç. $10ab+8ac+15bc+12c^2-10ab-15bc$

Reducção, ou N. Div. } $8ac+12cc$

Divisor $2a+3c$ } 3.º quociente $4c$

Producto $8ac+12cc$

Diminuiç. $8ac+12cc-8ac-12cc=0$

Quando o dividendo, e o divisor contém as mesmas letras com diversas potencias, se devem dispôr os termos do dividendo respectivamente ás differentes potencias da mesma letra, isto he, pondo como primeiro termo a maior potencia da mesma letra, ou aquelle, em que a potencia se acha elevada a maior gráo, e como segundo termo, aquelle, em que tem menos hum gráo, e assim das mais; e fazendo o mesmo no divisor, as operações se fazem pelas regras precedentes, e a isto he que se chama ordenar huma quantidade respectivamente a huma letra. Por exemplo:

plo: ſe nos derem para dividir $22a^4b+9ab^4+12a^2b^3$, $+19a^3b^2+8a^5$ por $4a^3+2ab^2+3b^3+5a^2b$, diſporemos primeiro o dividendo reſpectivamente a maior potencia da letra a, tomando por primeiro termo $8a^5$, que contém a maior potencia de a; e ſeguindo nos outros a meſma regra, ficará o dividendo com eſta ordem: $8a^5+22a^4b+19a^3b^2+12a^2b^3+9ab^4$; e obſervando fazer o meſmo com o diviſor, ficará diſpoſto aſſim: $4a^3+5a^2b+2ab^2+3b^3$, o reſto da diviſão ſe faz juſtamente como nas precedentes.

Divid. $8a^5+22a^4b+19a^3b^2+12a^2b^3+9ab^4$ } Q. total $2a^2+3ab$

Diviſor $4a^3+5a^2b+2ab^2+3b^3$ } 1.º Q. $2a^2$

Prod. $8a^5+10a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3$

Dimin. $8a^5+22a^4b+19a^3b^2+12a^2b^3+9ab^4-8a^5-10a^4b-4a^3b^2-6a^2b^3$

Reducç. ou N. D. } $12a^4b+15a^3b^2+6a^2b^3+9ab^4$

Diviſor $4a^3+5a^2b+2ab^2+3b^3$ } 2.º Q. $3ab$

Prod. $12a^4b+15a^3b^2+6a^2b^3+9ab^4$

Dimin. $12a^4b+15a^3b^2+6a^2b^3+9ab^4-12a^4b-15a^3b^2-6a^2b^3-9ab^4=0$

AD-

ADVERTENCIA.

Não tratámos das quatro regras da Arithmetica ordinaria, porque ſuppuzemos que os que eſtudão eſte tratado ſaberião ao menos ſommar, diminuir, multiplicar, e repartir; mas como muitos delles poderão não ter noticia das outras operações mais elevadas, e ainda ignorar a multiplicação em certas circumſtancias, quando o multiplicador, e multiplicando são numeros complexos, começaremos a explicar o modo de fazer eſtas operações por meio das partes aliquotas, applicando logo os exemplos para facilitar a intelligencia do que havemos de tratar depois na medição dos corpos.

DEFINIÇÕES.

74 Huma quantidade ſe chama parte aliquota de outra quantidade, quando he conteúda nella hum certo numero de vezes ao juſto; aſſim o palmo he parte aliquota da braça, pois he conteúdo dez vezes ao juſto na braça: a onça he parte aliquota do arratel, por-

que o arratel contém 16 onças, e o mesmo dos outros numeros 1, 2, 4, &c. onças, que são partes aliquotas do arratel, porque cada hum delles he exactamente conteúdo no arratel hum certo numero de vezes sem resto.

Quando huma quantidade não he conteúda em outra exactamente, mas fica resto, se chama parte aliquanta, como 9 onças, que he parte aliquanta do arratel, porque contém 9 onças huma vez com hum resto de 7 onças: do mesmo modo 7 onças, 15 onças são pela mesma razão partes aliquantas do arratel: 5 pollegadas, 7 pollegadas são partes aliquantas do palmo, porque cada huma dellas he conteúda no palmo, ficando algum resto.

NOTA.

75 Ainda que, conforme as definições precedentes, huma parte aliquanta não possa ser parte aliquota do mesmo todo, póde com tudo dividir-se em outras, que sejão partes aliquotas dos todos, as quaes partes em somma sejão iguaes á aliquanta proposta; assim este nu-

numero 7 onças he igual a 4+2+1, que são partes aliquotas da libra, de que 7 não he mais que parte aliquanta. Toda a arte das operações, que vamos fazer, consiste em dividir as partes aliquantas em aliquotas, fazendo, quando póde ser, que ellas não só sejão partes aliquotas deste todo, ou unidade principal, mas tambem humas das outras.

76 Chama-se multiplicação complexa aquella, em que o multiplicador, ou multiplicando, ou ambos juntos, contém unidades de differentes especies, ainda que todas se reduzão á mesma, como no Exemplo seguinte.

EXEMPLO I.

Pedem-me o pezo de huma barra de certo metal, que tem de comprido 45 palmos, e quatro pollegadas, da qual cada palmo péza 9 arrates.

Para achar o que se busca, se devem multiplicar 45 palmos, e quatro pollegadas por 9, isto he, devem-se tomar 45 vezes 9 arrates, e metade de 9 arrates, pois 4 pollegadas he metade de hum palmo, e o seu pezo deve ser tam-

bem metade do pezo de hum palmo; e hum dos numeros ſe deve tomar por numero abſtracto, iſto he, cujas unidades denotem o numero das vezes, e as ſuas partes denotem as partes correſpondentes a cada huma das vezes: aſſim no noſſo exemplo, em que ſe buſca o pezo de 45 palmos, e quatro pollegadas a 9 arrates o palmo: por cada palmo ſe deve tomar 9 arrates huma vez, e por 45 palmos ſe devem tomar 45 vezes 9 arrates: por 4 pollegadas, metade de hum palmo, devemos tambem tomar metade de 9 arrates: o producto de 9 arrates por 45 he 405 arrates: metade de 9 arrates são 4 arrates, e 8 onças: ſerá a ſomma total 409 arrates, e 8 onças, que he o que ſe pertendia ſaber.

45 palm. e 4 polleg.
9 arrates.

	405	
Por 4. polleg.	4	8 onças.
Total	409 arr. e 8 onças.	

Ex.

EXEMPLO II.

Pedem-me o pezo de huma barra de 3 braças, 2 palmos, e 4 pollegadas de certo metal, de que huma braça péza 5 arrates, 5 onças, e 5 oitavas.

Para achar o pezo pedido deve multiplicar-ſe 5 arrates, 5 onças, e 5 oitavas por 3 braças, 2 palmos, e 4 pollegadas, ou para melhor dizer deve primeiro buſcar-ſe o pezo de 3 braças a 5 arrates, 5 onças, e 5 oitavas, depois o pezo de 2 palmos, e o de 4 pollegadas, tomando pelo ſeu pezo partes ſemelhantes do pezo de huma braça; e diſpondo eſtes numeros hum de baixo do outro, começaremos a multiplicação pela eſpecie mais pequena; e como no lugar das oitavas não temos mais que hum caracter, começaremos por elle a multiplicação, dizendo, 3 vezes 5 são 15, e porei 7 no lugar das oitavas, levando 1 para o das onças, porque huma onça tem 8 oitavas: depois paſſarei ás onças, dizendo, 3 vezes 5 são 15, e 1, que trouxe, fazem 16, e porei de baixo do lugar das onças huma 0, por

quan-

quanto 10, e 6 onças fazem hum arratel, e levarei 1 para o lugar dos arrates: depois faço o mesmo com os arrates, dizendo, 3 vezes 5 são 15, e 1 que levo são 16, que ponho de baixo dos arrates.

Para achar o pezo de dous palmos se deve advertir, que sendo 2 palmos o quinto de huma braça, se deve dividir o pezo de huma braça por 5, dizendo: o quinto de 5 arrates he 1 arratel, que porei de baixo dos arrates: o quinto de 5 onças he huma onça, que escreverei de baixo das onças: o quinto de 5 oitavas he huma oitava, que escreverei no lugar das oitavas: finalmente para achar o pezo de 4 pollegadas he de notar, que sendo quatro pollegadas a quarta parte de 2 palmos, o seu pezo será tambem a quarta parte do pezo de dous palmos, e por isso se tomará a quarta parte de hum arratel, que não póde ser arratel, e poremos o no lugar correspondente aos arrates, reduzindo o arratel a onças, que me dá 16, que juntas a huma são 17, cuja quarta parte são 4, e fica huma onça, ou 8 oi-

ta-

tavas, que com mais huma fazem 9 oitavas, cuja quarta parte são 2 oitavas, e $\frac{1}{4}$, que porei no lugar das oitavas; e sommando estes productos parciaes, teremos o pezo total de 3 braças, 2 palmos, e 4 pollegadas a 5 arrates, 5 onças, e 5 oitavas, que he 17 arrates, 7 onças, e $2\frac{1}{4}$ oitavas, como mostra o exemplo.

	5 arr.	5 onç.	5 oit.
	3 braç.	2 palm.	4 poll.
Prod. de 3 braç.	16 arr.	0 onç.	7 oit.
de 2 palm.	1 arr.	1 onç.	1 oit.
de 4 pol.	0	4 onç.	$2\frac{1}{4}$ oit.
Total	17 arr.	6 onç.	$2\frac{1}{4}$ oit.

EXEMPLO III.

Pedem-me o pezo de huma barra de certo metal, a qual tem 43 palmos, e 2 terços de comprido, e péza a 12 arrates 8 onças, e 2 oitavas cada palmo.

Nes-

Neſte exemplo, diſpoſtos os numeros do modo ordinario, como o primeiro numero do multiplicador ſe compõe de dous caracteres, ſe começa a multiplicação pela maior eſpecie, e ſe buſca primeiramente o producto de 43 palmos por 12 arrates, depois o producto de 43 palmos por 8 onças, e depois o producto de 43 palmos por 2 oitavas.

O producto de 43 palmos por 12 arrates ſe achará, multiplicando os 43 por 12. Para achar o producto de 43 palmos por 8 onças, ſe notará que o pezo de 43 palmos a arratel por palmo são 43 arrates; e ſendo 8 onças metade de hum arratel, o pezo de 43 palmos a 8 onças ſerá metade de 43 arrates, e aſſim tomaremos metade de 43, dizendo: metade de 4 são 2, que porei de baixo das dezenas dos arrates, depois metade de 3 he 1, que ponho de baixo das unidades, e fica-me hum arratel, cuja metade são 8 onças, que eſcrevo de baixo das onças.

Para achar o pezo de 43 palmos a 2 oitavas devo advertir, que 2 oitavas são o quarto de huma onça, e aſſim de-

vo

vo primeiro ſaber qual ſerá o pezo de 43 palmos por huma onça, o qual producto depois ſe deve riſcar para não entrar na ſomma; e para ter eſte falſo producto, ſe tomará a oitava parte do producto de 8 onças, dizendo: a oitava parte de 21 são 2, e ficão 5 arrates, ou 80 onças, que juntas com as 8 ſeguintes fazem 88 onças, cuja oitava parte são 11 onças: tomarei depois a quarta parte deſte falſo producto, dizendo: a quarta parte de 2 arrates não podem ſer arrates, e aſſim os reduzo a onças, que fazem 32 onças, com as 11 ſeguintes são 43 onças, cuja quarta parte são 10 onças, e ficão 3 onças, ou 24 oitavas, cujo quarto são 6 oitavas, que eſcrevo no lugar correſpondente, e tenho aſſim achado o producto de 43 palmos por 2 onças.

Para achar finalmente o pezo dos dous terços do palmo tomarei duas vezes o terço do pezo de hum palmo, dizendo: o terço de 12 arrates são 4 arrates, que eſcreverei no lugar correſpondente aos arrates: o terço de 8 onças são 2 onças, que eſcrevo no ſeu lugar,

e reſ-

e reſtão 2 onças, ou 16 oitavas, que juntas com as 2 ſeguintes fazem 18 oitavas, cujo terço são 6 oitavas, que porei no ſeu lugar correſpondente, e eſte producto repetirei outra vez; e ſommando todos eſtes productos parciaes, terei o producto total 546 arrates, 8 onças, e 2 oitavas.

	12 arr.	8 onças, e 2 oitav.
	43 $\frac{2}{3}$	
Prod. de 43 palmos por 12 arrates	36 48	
Por 8 onç.	21 arr.	8 onç.
Falſo prod. de 43 palm. por 1 onça	2 arr.	11 onç.
Product. de 2 onças		10 onç. e 6 oit.
Pezo de 1 terço	4 arr.	2 onç. e 6 oit.
	4 arr.	2 onç. e 6 oit.
Total	546 arr.	8 onç. e 2 oit.

TRA-

TRATADO DOS QUEBRADOS, ou fracções, tanto numericas, como algebraicas.

DEFINIÇÃO I.

76 Se qualquer quantidade, a que chamaremos unidade principal, como huma braça, hum arratel, ſe dividir em certo numero de partes iguaes, cada huma deſtas partes ſe chamará unidade fraccionaria, para a diſtinguir da unidade principal, que ſe divide; e o numero, que denota quantas deſtas partes ſe tomão, ſe chama fracção, ou quebrado, o que ſe expreſſa deſte modo $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, e ſe diz 5 ſextos, 2 terços. Já diſſemos que huma riſca poſta entre duas quantidades denotava a divisão da quantidade ſuperior pela inferior, e he o que ſuccede no caſo preſente.

II.

77 O numero, que ſe põe de baixo da riſca, ſe chama denominador, porque denota em quantas partes iguaes ſe divide a unidade principal. Nos que-

bra-

brados precedentes os numeros 6, e 3 são os denominadores dos quebrados, que mostrão que as unidades principaes estão divididas em 3, e 6 partes iguaes.

III.

78 O numero, que se põe sobre a risca, se chama numerador, que effectivamente conta quantas partes iguaes se devem tomar, como 2, e 5, que são os numeradores dos quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$. Os quebrados algebraicos se expressão inteiramente do mesmo modo, assim $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ são quebrados algebraicos, cujos numeradores são a, c, e os denominadores b, d.

COROLLARIO I.

79 Se o numerador he igual, maior, ou menor que o denominador, a fracção será tambem igual, maior, ou menor que a unidade, porque hum todo he igual a todas as suas partes juntas maior que huma dellas, e menor que todas as suas partes juntas accrescentadas com alguma das mesmas partes.

Co-

COROLLARIO II.

80 A grandeza do quebrado depende da grandeza do ſeu numerador, de ſorte, que ſe dous quebrados tiverem o meſmo denominador, o maior he aquelle, que tem maior numerador, e mais pequeno o que tiver menor numerador, pois he evidente que o quebrado $\frac{5}{6}$ he maior que o quebrado $\frac{3}{6}$, pela meſma razão que 5 he maior que 3, qualquer que ſeja a natureza das unidades 5, e 3, com tanto que ſeja a meſma em ambos os quebrados.

COROLLARIO III.

81 Quanto maior he o numero, por que ſe divide o meſmo todo, tanto mais pequenas são as partes; e por conſequente havendo o meſmo numerador, o quebrado he tanto mais pequeno, quanto maior he o ſeu denominador; e he o que os Geometras expreſsão, quando dizem que dous quebrados com o meſmo numerador são entre ſi reciprocamente como os ſeus denomina-

do-

dores, pois he evidente que o quebrado $\frac{2}{3}$ he maior que o quebrado $\frac{2}{5}$, ſe forem ambos fracções da meſma unidade principal, por exemplo de huma braça, ou de hum palmo.

COROLLARIO IV.

82 Como os quebrados são partes de certas grandezas, ou unidades principaes são da ſua meſma natureza, e conſequentemente podem com ellas ter augmento, ou diminuição: logo com os quebrados ſe podem fazer as meſmas operações, que ſe fazem com os numeros inteiros, iſto he, podem-ſe ſommar, diminuir, multiplicar, e repartir huns por outros.

Além das quatro operações, que são commuas aos numeros inteiros, ha outras trez, que lhes são particulares, de que dependem as primeiras: a primeira he achar o ſeu determinado valor em quantidades conhecidas: a ſegunda reduzir os quebrados a minimos termos: a terceira reduzillos ao meſmo denominador. Explicaremos eſtas ope-

ra-

rações, que nos hão de ſervir para fazer as outras mais facilmente.

PROBLEMA I.

83 Achar o valor de hum quebrado, ou, o que vem a ſer o meſmo, dar conhecida huma quantidade igual ao quebrado propoſto, menor que a unidade principal.

A unidade principal ſe dividirá em tantas partes iguaes, quantas são as unidades do denominador: depois ſe multiplica o quociente pelo numerador, e o producto ſerá o valor do quebrado propoſto. Por exemplo: pedemme o valor deſte quebrado $\frac{2}{8}$ de hum arratel, divido o arratel, que he a unidade principal, que vale 16 onças, em oito partes iguaes, cada huma das quaes he 2 onças, que multiplicadas pelo numerador 2, moſtra que o quebrado $\frac{2}{8}$ de hum arratel são 4 onças. Do meſmo modo ſe quizer achar o valor deſte quebrado $\frac{3}{4}$ do palmo, divi-

di-

direi o palmo, ou 8 pollegadas em quatro partes iguaes, as quaes ſerão cada huma 2 pollegadas, e multiplico eſte quociente 2 por 3, e o producto 6 denota que eſte quebrado $\frac{3}{4}$ do palmo vale 6 pollegadas. Eſta primeira operação não tem lugar nas fracções algebraicas: $\frac{a}{b}$ ſempre he $\frac{a}{b}$, e não ſe lhe póde achar o valor, ſenão depois de ter poſto no lugar de a, e de b as quantidades, que ellas expreſsão.

DEFINIÇÃO.

84 Hum quebrado ſe diz reduzido a minimos termos, ou a mais ſimples expreſsão, quando o numerador, e denominador deſte quebrado não tem outro commum diviſor que a unidade, aſſim eſtes quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{9}$ são quebrados reduzidos aos ſeus menores termos. Não ſuccede o meſmo nos quebrados $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{16}$, que são taes, que ſe podem achar outros, que lhes ſejão iguaes

em

em menores termos, como $\frac{1}{3}$ em lugar do primeiro, $\frac{2}{8}$ em lugar do ſegundo, ou $\frac{1}{4}$: o que ſe vê, diminuindo os dous termos do primeiro por 3, e os dous termos do ſegundo por 2, ou por 4.

85 Se o numero, por que ſe dividem os dous termos de hum quebrado, he o maior diviſor, que póde ſer commum ao numerador, e denominador, o quebrado, que reſulta dos dous quocientes divididos hum por outro, tambem ſerá o mais ſimples, e igual ao primeiro.

86 Na Algebra huma fracção fica reduzida aos ſeus menores termos, quando não tem letra, que ſeja commua ao numerador, e ao denominador, aſſim $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{gf}{mn}$ são fracções algebraicas irreduziveis.

PROBLEMA II.

87 Achar o maior diviſor, que póde ſer commum a dous numeros, v. g. 360, e 792, ou reduzir o quebrado $\frac{360}{792}$ aos ſeus minimos termos.

SOLUÇÃO.

Divida-se o numero maior 792 pelo menor 360, e sem fazer caso do quociente, se torne a dividir o menor 360 pelo resto que ficar depois da divisão, que são 72; e como desta segunda divisão não fica resto, concluirei que 72 he o commum divisor maior, que póde ser aos dous numeros 792, e 360. Do mesmo modo se nos derem para reduzir o quebrado $\frac{91}{294}$ a minimos termos, dividirei o numero maior 294 pelo mais pequeno 91, que me dará 3 no quociente com hum resto 21: não farei caso do quociente, e tornarei a dividir o numero 91 pelo resto 21, e sem fazer ainda caso do quociente, tornarei a dividir o numero 21 pelo resto 7, que me ficou da divisão antecedente; e como desta ultima divisão não me fica resto, concluirão que 7 he o maior divisor commum aos dous numeros 294, e 91; e geralmente fallando, o resto da divisão, que mede exactamente o resto precedente, he o divisor commum ma-

maior que ſe procura; e aſſim dividindo o numerador, e o denominador do primeiro quebrado $\frac{360}{792}$ pelo maior commum diviſor 72, teremos o quebrado $\frac{5}{11}$ igual ao primeiro, que he irreductivel: dividindo tambem o numerador, e denominador da ſegunda fracção $\frac{91}{294}$ pelo diviſor commum maior 7, teremos a nova fracção $\frac{13}{42}$ igual á precedente, e reduzida á mais ſimples expreſsão.

Demonſtração deſta pratica.

Para comprehender a razão deſtas operações ſe deve attender primeiro, que hum numero, que divide outro exactamente, divide tambem exactamente os ſeus multiplices, ou numeros, que reſultão da multiplicação dos primeiros numeros por outros. Por exemplo: ſe 3 he diviſor de 6, tambem ſerá diviſor de 6×4, e de 6×5, ou dos numeros 24, e 30, &c. Segundo, que

hum numero, que divide as duas partes, em que eſtá dividido hum todo, ſerá tambem diviſor do todo, porque qualquer numero he igual a todas as ſuas partes juntas; e aſſim o numero 3, ſendo diviſor dos numeros 9, e 6, tambem he diviſor da ſua ſomma 15. Terceiro, que ſe hum numero for diviſor de hum todo, e de huma das ſuas partes, tambem ſerá da outra parte; porque ſe a não dividiſſe, tambem não dividiria o todo, o que he contra o que ſe ſuppoz: e aſſim ſendo o numero 3 diviſor do todo 15, e de huma das ſuas partes 9, tambem o he da outra 6.

Iſto ſuppoſto, repreſente a, e b dous numeros, aos quaes queremos achar o maior commum diviſor, ſeja f o quociente de a dividido por b, com hum reſto d teremos $a=bf+d$, pois o dividendo he igual ao producto do quociente pelo diviſor, e mais o reſto da divisão: ſeja g o quociente de b dividido por d com o reſto c, pela razão dada ſerá $b=dg+c$; em fim divida c exactamente o primeiro reſto d, e ſeja h o quociente, teremos $d=ch$, ſerá $a=bf+d$,

$b=$

$b=dg+c$, $d=ch$: logo he evidente que c he divisor das quantidades a, e b; porque se c he divisor de d, tambem he divisor do seu multiplice dg, além disso tambem he divisor de si mesmo: logo divide $dg+c$, e porque $b=dg+c$ tambem he divisor de b; pois c he divisor de d, e de b, tambem he divisor dos multiplices de b: logo divide $bf+d$, logo divide a, pois $a=bf+d$.

Se na equação $b=dg+c$ puzermos em lugar da quantidade d esta outra ch, que lhe he igual, teremos $b=cgh+c$; e semelhantemente se na equação $a=bf+d$ substituirmos em lugar de b, e d as quantidades, que lhes são iguaes, teremos $a=cfgh+cf+ch$: logo em lugar do quebrado $\frac{a}{b}$ teremos, conforme as supposições feitas, $\frac{cfgh+cf+ch}{cgh+c}$, na qual fracção facilmente se conhece que só a quantidade c he commum divisor ao numerador, e denominador, e ao mesmo tempo que he o maior commum divisor; e como as operações com numeros são as mesmas, devem dar o maior divisor commum buscado, e assim se póde re-

reduzir hum quebrado aos ſeus minimos termos.

PROBLEMA III.

88 Reduzir dous, ou mais quebrados ao meſmo denominador, de ſorte que fiquem ſempre iguaes aos quebrados propoſtos.

SOLUÇÃO.

Se os quebrados são ſó dous, ſe multiplicará o numerador, e o denominador de cada hum pelo denominador do outro; e ſe forem mais, ſe multiplicará o numerador, e denominador de cada quebrado pelo producto dos denominadores dos outros quebrados que ficão.

Em hum, e outro caſo os quebrados terão o meſmo denominador, porque o producto de quantos numeros quizermos multiplicados huns por outros ſerá ſempre o meſmo: além diſſo cada hum dos quebrados, que fica depois da operação, ſerá igual ao primeiro quebrado propoſto, porque o numerador augmenta pela multiplicação na meſma

pro-

proporção, que ſe diminuem as partes do denominador. A regra he inteiramente a meſma para as fracções algebraicas, e ſe demonſtra do meſmo modo, como vamos moſtrar nos exemplos ſeguintes.

Sejão dados os quebrados $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$ para ſe reduzirem ao meſmo denominador, multipliquem-ſe os dous termos 2, e 3 do primeiro pelo denominador 5 do ſegundo, e reciprocamente os dous termos 4, e 5 do ſegundo pelo denominador 3 do primeiro, e teremos as novas fracções $\frac{10}{15}$, e $\frac{12}{15}$, que são iguaes ás precedentes com a meſma denominação. Do meſmo modo para reduzir as fracções algebraicas $\frac{a}{b}$, e $\frac{c}{d}$ á meſma denominação, multiplico a, e b por d, e os termos c, e d da ſegunda por b para ter as fracções $\frac{ad}{db}$, e $\frac{cb}{db}$, que são iguaes ás precedentes, e tem o meſmo denominador bd.

Se tivermos muitos quebrados, como $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, para reduzir, ſe multipli-

plicão os dous termos 2, e 3 do quebrado $\frac{2}{3}$ por 24, producto dos dous denominadores 6, e 4, e do mesmo modo os dous termos 3, e 4 do quebrado $\frac{3}{4}$ pelo producto dos denominadores 3, e 6 dos outros dous, em fim os termos 5, e 6 do quebrado $\frac{5}{6}$ por 12, producto dos denominadores 3, e 4 dos dous primeiros, e teremos os trez novos quebrados $\frac{48}{72}$, $\frac{54}{72}$, $\frac{60}{72}$ iguaes aos precedentes com o mesmo denominador.

E fazendo a mesma operação nas fracções algebraicas, vemos que destas $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$ resultão estas $\frac{adg}{bdg}$, $\frac{cbg}{bdg}$, $\frac{dbf}{bdg}$, que tem o mesmo denominador.

NOTA.

89 Depois de reduzidos os quebrados á mesma denominação, he conveniente ver se o denominador tem algum divisor, por que se possão dividir

to-

todos os numeradores, para ficarem as operações mais ſimplices, como no exemplo precedente, em que todos os numeradores, e o denominador commum ſe podem dividir por 6, que reduz as fracções a eſtas $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$ iguaes á primeira com a meſma denominação, e as mais ſimplices, que podem ſer com eſta circumſtancia.

90 Se os quebrados, que ſe querem reduzir, tem muitos denominadores, que tenhão hum conſequente commum, dous por exemplo, ſe poderá dividir cada termo dos novos quebrados huma vez por eſſe diviſor; e ſe houver trez, que tenhão hum commum diviſor, ſe poderão dividir os novos quebrados primeira, e ſegunda vez pelo meſmo diviſor, ou huma vez pelo quadrado do commum diviſor. No exemplo aſſima ſe dividírão todos os novos quadrados por 6, porque dous delles tinhão hum meſmo diviſor 3, a ſaber, o quebrado $\frac{2}{3}$, e o quebrado $\frac{5}{6}$; e outros dous dos meſmos quebrados tinhão

os

os ſeus denominadores hum commum diviſor 2, a ſaber, $\frac{3}{4}$, e $\frac{5}{6}$, e por iſſo ſe dividio por 2×3, ou 6. Facilmente ſe póde entender a razão deſtas operações, desfazendo os denominadores deſtes quebrados, e examinando as ſuas formações.

Da ſomma dos quebrados.

91 Se os quebrados, que ſe querem ſommar, não tem o meſmo denominador, ſe começará a operação, pelos reduzir ao meſmo denominador, aſſim: ſe nos dão para ſommar os quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, ſe reduzirão ao meſmo de-
Num.88. nominador pelo *, e teremos em ſeu lugar os quebrados $\frac{60}{90}$, $\frac{72}{90}$, $\frac{75}{90}$, ou em
Num.89. menores termos * $\frac{20}{39}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{25}{30}$, que são iguaes aos precedentes. Sommaremos depois os numeradores, e a ſua ſomma ſerá o numerador de hum novo quebrado, que terá o commum denominador, e ficará igual á ſomma dos quebrados pro-

propoſtos, no exemplo ſerá a ſomma $\frac{69}{30}$, ou $\frac{23}{10}$, que he irreductivel: o meſmo ſe faz nos quebrados literaes, e aſſim $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{f}{g}=\frac{adg+bcg+bdf}{bdg}$.

Se os quebrados tem a meſma denominação, ſe eſcuſa o trabalho de os reduzir, e o mais da operação ſe fará como na antecedente. A razão deſta operação he evidente, porque eſtando os quebrados reduzidos ao meſmo denominador, tem unidades da meſma eſpecie, e a ſua ſomma he a meſma dos numeradores; pela meſma razão que a ſomma deſtes differentes numeros 10 moedas, 20 moedas, 15 moedas he igual á ſomma dos numeros $10+20+15=45$ moedas.

Da diminuição dos quebrados.

92 Se os quebrados tem hum meſmo denominador, ſe fará hum novo quebrado, cujo numerador ſeja igual á differença dos numeradores dos quebrados propoſtos, e que tenha o meſmo denominador por exemplo. Se ſe qui-

quizer diminuir $\frac{4}{6}$ de $\frac{5}{6}$, diminuirei o numerador 4 do numerador 5, e a differença 1 eſcreverei ſobre a riſca da divisão, pondo de baixo o denominador antigo, e terei o novo quebrado $\frac{1}{6}$ igual á differença dos dous quebrados propoſtos: do meſmo modo $\frac{5}{9} - \frac{3}{9} = \frac{2}{9}$, &c. Na Algebra $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$, $\frac{d}{f} - \frac{g}{f} = \frac{d-g}{f}$.

Se os quebrados não tem o meſmo denominador, ſe reduzirão á meſma denominação *, e o reſto da operação ſe fará como no primeiro caſo, ou ſejão fracções numericas, ou algebraicas. Por exemplo: ſe nos derem para diminuir o quebrado $\frac{3}{7}$ do quebrado $\frac{2}{3}$, ſe reduzirão logo a eſtes, que lhe são iguaes, $\frac{14}{21}$, e $\frac{9}{21}$, cuja differença $\frac{5}{21}$ he a differença dos primeiros quebrados $\frac{3}{7}$, e $\frac{2}{3}$: do meſmo modo $\frac{5}{8} - \frac{4}{9} = \frac{45}{72}$

* Num. 88.

$-\frac{32}{72} = \frac{13}{72}$. Tambem para diminuir o quebrado $\frac{a}{b}$ deste $\frac{c}{d}$, se reduzem ao mesmo denominador, e a differença dos numeradores dos novos quebrados $\frac{ad-bc}{bd}$ será a differença dos quebrados propostos: do mesmo modo $\frac{f}{g} - \frac{d}{b} = \frac{fb-dg}{gb}$, $\frac{r}{s} - \frac{x}{z} = \frac{rz-sx}{sz}$, &c.

93 Se tivermos para diminuir muitos quebrados de outros muitos, começaremos a operação, reduzindo os que se devem diminuir á mesma denominação *, para termos hum só quebrado igual á sua somma; e depois de ter feito o mesmo aos quebrados, de que se hão de diminuir, reduziremos ainda estes novos quebrados á mesma denominação, e a differença destes ultimos será a differença dos quebrados primitivos, que buscavamos. Por exemplo: se quizermos diminuir os quebrados $\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{4}{5}$ dos quebrados $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$, reduziremos os primeiros á mesma denominação $\frac{45}{90}, \frac{20}{90}, \frac{72}{90}$ para termos a sua

* Num. 88.

som-

ſomma $\frac{137}{90}$: do meſmo modo reduziremos os quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ a eſtes $\frac{48}{72}$, $\frac{54}{72}$, $\frac{60}{72}$, ou em menores termos $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$, cuja ſomma he $\frac{27}{12}$; e reduzindo eſtes ultimos $\frac{27}{12}$, e $\frac{137}{90}$ á meſma denominação $\frac{1644}{1080}$, e $\frac{2430}{1080}$, tomaremos a differença $\frac{786}{1080}$ deſtes quebrados, que ſerá a meſma dos quebrados propoſtos. Neſte exemplo ſe vê o modo, com que ſe póde determinar qual dos dous quebrados he maior, e quanto he o exceſſo de hum a outro, o que em certos caſos ſe não conhece logo á primeira viſta, como neſtes dous $\frac{48}{55}$, $\frac{27}{32}$, quando não ha hum grande uſo do calculo.

94 Se quizermos diminuir hum inteiro, e hum quebrado de hum numero inteiro com hum quebrado, reduziremos o inteiro a quebrados, o que ſe faz, multiplicando o inteiro pelo denominador do ſeu quebrado, que em

jun-

junto a ſi: aſſim para que $a - \frac{cx}{d}$ ſeja tudo hum quebrado, he preciſo multiplicar a por d, e eſcrever $\frac{ad - cx}{d}$: do meſmo modo para reduzir a quebrado o inteiro $2y + \frac{bb}{f}$, ſe multiplicará $2y$ por f, e teremos o quebrado $\frac{2fy + bb}{f}$. Depois para diminuir hum quebrado do outro, por exemplo $\frac{ad - cx}{d}$ de $\frac{2fy + bb}{f}$, os reduzo ao meſmo denominador, e terei em lugar do ſegundo $\frac{2fyd + bbd}{df}$, e em lugar do primeiro $\frac{adf - cfx}{df}$, cuja differença $\frac{2fyd + bbd - adf + cfx}{df}$ he a differença dos primeiros quebrados.

Para comprehender a razão de todas eſtas operações baſta fazer reflexão que nos quebrados, que tem o meſmo denominador a differença, he preciſamente a dos numeradores, pois he evidente que a differença de $\frac{3}{5}$, e $\frac{2}{5}$ he $\frac{1}{5}$, pela meſma razão que a differença de 3 a 2 he 1.

No

NOTA.

95 Hum quebrado não fica mais que metade, terço, ou quarto do que era, se o seu denominador se multiplica por 2, 3, ou 4; porque dobrando-se, triplicando-se, ou quadruplicando-se o numero das partes, em que se acha dividida a unidade principal, cada parte diminue na mesma proporção, e o numero dessas partes assim diminuidas, que se toma, sempre he o mesmo, pois não muda o numerador.

Da multiplicação dos quebrados.

96 Hum quebrado póde multiplicar-se por hum inteiro, ou por outro quebrado: se o multiplicador he numero inteiro, se multiplicará o numerador do quebrado pelo inteiro, e o producto será o numerador de hum novo quebrado, que conserva o mesmo denominador do multiplicando, e este novo quebrado he o producto buscado. Por exemplo: se quizermos multiplicar o quebrado $\frac{2}{3}$ pelo inteiro 4, multiplico o numerador 2 por 4, e o producto 8

se

ſerá o numerador do novo quebrado $\frac{8}{3}$ igual ao producto, que ſe buſcava: do meſmo modo o quebrado $\frac{4}{5} \times 6 = \frac{24}{5}$, o quebrado $\frac{27}{32} \times 3 = \frac{81}{32}$, o producto de $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$, $\frac{a}{g} \times c + d = \frac{ac + ad}{g}$, $\frac{fg}{a} \times a - b = \frac{afg - bfg}{a}$.

97 Se o multiplicador tambem he numero quebrado, ſe multiplicarão os dous numeradores hum por outro, e tambem os dous denominadores, e o producto dos numeradores ſerá o numerador de hum novo quebrado, cujo denominador ſerá o producto dos denominadores, e o quebrado, que reſulta dos dous denominadores, e numeradores multiplicados, ſerá o producto que ſe procura: aſſim $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, $\frac{3}{5} \times \frac{8}{9} = \frac{24}{45}$, ou $\frac{8}{15}$, reduzindo-o a mais ſimples expreſsão. O meſmo he nos quebrados algebraicos, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{fg}{a} \times \frac{bd}{gh} = \frac{bdfg}{agh} = \frac{bdf}{ah}$: do meſmo modo $\frac{a+b}{c} \times \frac{a-b}{g} = \frac{ha - bb}{gc}$, $\frac{a-b}{f} \times \frac{c-d}{g} = \frac{ac - bc - ad + bd}{fg}$.

DEMONSTRAÇÃO.

Para entender a razão destas operações he preciso reflectir que hum quebrado he tanto maior, quanto se augmenta o seu numerador, conservando o mesmo denominador: logo para termos hum quebrado duas, ou trez vezes maior, basta multiplicar o numerador por 2, ou 3: logo no primeiro caso para se multiplicar hum quebrado por hum inteiro basta multiplicar o numerador do quebrado pelo inteiro.

No segundo caso, quando o multiplicador tambem he quebrado, se deve advertir, que quando multiplico hum quebrado, por exemplo $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, multiplicando o numerador 2 pelo numerador 4 do segundo, multiplico por hum numero sinco vezes maior, pois não quero multiplicar por 4 inteiros, mas sómente pela quinta parte de 4, e he o que vem a ficar, quando depois multiplico o denominador 3 pelo denominador 5 *, pois depois da multiplicação as partes ficão sendo hum quinto do que erão.

* Num. 95.

98 Se tivermos hum inteiro, e hum quebrado para multiplicar por outro inteiro, e outro quebrado, ſe dará a cada inteiro o meſmo denominador do ſeu quebrado, multiplicando-o pelo denominador do ſeu quebrado, e o producto, que reſultar deſta multiplicação ſommado com o numerador do quebrado, fará hum novo numerador, conſervando o denominador antigo: o producto, que reſultar da multiplicação deſtes dous novos quebrados, ſerá o que ſe buſca, por exemplo $3+\frac{5}{6}\times 4+\frac{8}{9}=\frac{18+5}{6}\times\frac{36+8}{9}=\frac{23}{6}\times\frac{44}{9}=\frac{1012}{54}$. Do meſmo modo para multiplicar $\frac{bx}{a}-y$ por $\frac{bx}{a}+y$, reduzo os inteiros a quebrados, multiplicando-os pelos denominadores dos quebrados, que tem comſigo com os ſinaes $-$, e $+$, e ſerá $\frac{bx-ay}{a}$, e $\frac{bx+ay}{a}$; e multiplicando os dous numeradores, iſto he, $bx-ay$ por $bx+ay$, dá $bbxx-abxy+abxy-aayy$, ou $bbxx-aayy$, que devem ter por denomina-

dor o producto dos dous denominadores, que será aa, e se escreverá $\frac{bbxx}{aa} - \frac{aayy}{aa}$, ou $\frac{bbxx}{aa} - yy$, producto da multiplicação.

ADVERTENCIA.

99 Se no primeiro caso o multiplicador fosse igual ao denominador do quebrado proposto, o producto seria igual ao numerador, e então se faz a multiplicação, tirando o denominador assim $\frac{2}{3} \times 3 = 2$, $\frac{a}{b} \times b = a$.

Se no mesmo caso o denominador fosse divisivel pelo inteiro proposto, deve-se fazer a divisão, e o quociente será o denominador de hum novo quebrado, que com o mesmo numerador he o producto, que se busca: assim para multiplicar $\frac{5}{12}$ por 3, se divide o denominador 12 por 3, e o quociente 4 será o denominador de hum novo quebrado $\frac{5}{4}$, que conserva o mesmo numerador, e he o producto, que se buscava; e fazendo isto, fica logo o quebrado reduzido á mais simples expressão,

e não são precisas duas operações. Tambem he evidente que o quebrado $\frac{5}{4}$ he o producto do quebrado $\frac{5}{12}$ por 3, porque as partes, em que se divide a unidade principal, são trez vezes maiores do que erão, e se toma sempre o mesmo numero de partes.

100 No segundo caso, isto he, quando o multiplicando, e multiplicador são quebrados, se o numerador do multiplicando he divisivel pelo denominador do multiplicador, e reciprocamente o denominador do primeiro divisivel pelo numerador do segundo, se farão as divisões, e o primeiro quociente será o numerador de hum quebrado, que tem por denominador o quociente da segunda divisão, e este quebrado he o producto que se busca. Por exemplo: dão-nos para multiplicar o quebrado $\frac{8}{9}$ pelo quebrado $\frac{3}{4}$, nos quaes o numerador 8 do primeiro he divisivel pelo denominador 4 do segundo, e reciprocamente o denominador 9 do primeiro divisivel pelo numerador 3 do segundo, di-

divido 8 por 4, e 9 por 3, e o quebrado feito dos quocientes 2, e 3, que será $\frac{2}{3}$, he o producto, que se buscava: fica logo reduzido a menores termos, sem ser preciso mais operação de os reduzir, como seria preciso no producto $\frac{24}{36}$, que se acharia pela regra geral. Deve-se attender a esta advertencia, quando os numeros, que se querem multiplicar, são numeros grandes.

101 Succede muitas vezes neste segundo caso ser o producto menor que o multiplicando, o que parece admiravel; mas esta apparente difficuldade se desvanece logo que se reflecte na natureza da multiplicação, que he huma operação, na qual se busca hum numero, que seja ao multiplicando, como o multiplicador he á unidade: logo se o multiplicador he menor que a unidade, tambem o producto deve ser menor que o multiplicando, o que necessariamente ha de succeder todas as vezes que o quebrado proposto por multiplicador for menor que a unidade. Além disso,

quan-

quando multiplico hum quebrado, v. g. $\frac{8}{9}$ por outro $\frac{3}{4}$, tómo os trez quartos do quebrado $\frac{8}{9}$, que ſerão certamente menores que o meſmo quebrado.

102 A multiplicação dos quebrados ſerve para moſtrar o que he hum quebrado de quebrado, o que á primeira viſta parece hum pouco embaraçado. Se nos perguntão, por exemplo, quanto he o valor de metade de trez quartos de quatro quintos de huma moeda, multiplicarei huns quebrados por outros $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, o que me dará o producto $\frac{12}{40}$, ou $\frac{3}{10}$: divido a moeda em 10 partes para ter o dizimo, que he hum cruzado novo, de que $\frac{3}{10}$ valem 3 cruzados novos, que são metade de 3 quartos de 4 quintos de huma moeda. Finalmente ſe deve notar que hum quebrado ſe póde expreſſar de muitos modos: podemos dizer que o quebrado $\frac{3}{10}$ de huma moeda valem os trez decimos de moeda, ou o decimo de 3 moedas,

das, e todos eſtes modos de expreſſar valem o meſmo; porque ſe 3 moedas são o triplo de huma moeda, tomando a decima parte de trez moedas, ſe toma ſó hum decimo; e tomando os trez decimos de huma moeda, ſe toma trez vezes mais, o que faz huma perfeita compenſação.

Da divisão dos quebrados.

103 Póde-ſe dividir hum quebrado por hum inteiro, ou por outro quebrado: quando o diviſor he numero inteiro, baſta multiplicar o denominador do quebrado dividendo por eſte inteiro, e o producto ſerá o denominador de hum novo quebrado com o numerador antigo igual ao quociente, que ſe buſcava. Para dividir o quebrado $\frac{3}{4}$ por 5 ſe multiplique o denominador 4 por 5, e o quebrado $\frac{3}{20}$ he o quociente pedido: do meſmo modo $\frac{5}{6}$ dividido por $3 = \frac{5}{18}$, $\frac{7}{5}$ divididos por $6 = \frac{7}{30}$. A meſma regra he para as quantidades algebraicas $\frac{a}{b}$ di-

dividido por $c = \frac{a}{bc}$, o quebrado $\frac{fg+gh}{c}$ dividido por $d = \frac{fg+gh}{cd}$, $\frac{aa-bb}{c}$ dividido por $a+b = \frac{aa-bb}{ca+cb} = \frac{a-b}{c}$, porque $aa-bb$ he o producto de $a+b$ por $a-b$: logo $a+b$ he commum divisor ao numerador, e denominador, e por consequencia o quebrado se póde reduzir.

104 Se o numerador do quebrado dividendo se puder dividir pelo inteiro divisor, se fará a divisão para escusar a reducção do quebrado, que sahir por quociente, que necessariamente seria reduzivel, se se multiplicasse o denominador pelo inteiro; assim o quebrado $\frac{8}{9}$ dividido por $4 = \frac{2}{9}$, $\frac{35}{48}$ dividido por $7 = \frac{5}{48}$; e em termos mais geraes $\frac{ab}{c}$ dividido por $b = \frac{a}{c}$, $\frac{fgh}{cd}$ dividido por $gh = \frac{f}{cd}$: a razão de todas estas operações tem o mesmo principio; porque dividir hum quebrado por hum inteiro, como 2, 3, 4, he buscar hum numero, que seja metade, terço, ou quarto do quebrado proposto, e he o

que

que ſe faz, ſeguindo hum, ou outro methodo. No primeiro, quando ſe multiplica o denominador, as partes, em que ſe divide a unidade principal, não são mais que metade, terço, ou quarto do que era, pois ſe não muda o numerador *. No ſegundo caſo ficão as meſmas partes, pois fica o meſmo denominador; mas o quebrado ſe diminue pela divisão do numerador, e não fica mais que metade, terço, ou quarto do que era, conforme eſtiver dividido por 2, 3, ou 4. Sómente ſe deve notar que ſempre deve ter lugar hum deſtes methodos, porque no primeiro methodo ſempre ſe póde multiplicar hum numero por outro; e o ſegundo ſó póde ter uſo, quando o numerador ſe póde dividir pelo inteiro dado, no qual caſo ſe deve preferir eſte ſegundo ao mais geral, porque fica logo o quebrado reduzido a minimos termos.

* Num. 95.

105 Se o diviſor tambem for numero quebrado, ſe multiplicará o numerador do quebrado dividendo pelo denominador do diviſor, e do meſmo modo o denominador do dividendo pelo nu-

numerador do divisor, e he o que vulgarmente se chama multiplicar em cruz. Esta regra he geral aos quebrados, tanto numericos, como algebraicos, e assim para dividir o quebrado $\frac{2}{3}$ pelo quebrado $\frac{4}{5}$, multiplico o numerador 2 do primeiro quebrado dividendo pelo denominador 5 do divisor; e tambem multiplico o denominador 3 do primeiro quebrado dividendo pelo numerador 4 do segundo, e dos productos 10, e 12 faço hum novo quebrado $\frac{10}{12}$, ou $\frac{5}{6}$, que será o quociente dos quebrados, que nos derão para dividir. Do mesmo modo o quebrado $\frac{15}{17}$ dividido por $\frac{3}{4} = \frac{15 \times 4}{17 \times 3} = \frac{60}{51} = \frac{20}{17}$ reduzido a minimos termos: em termos mais geraes huma fracção $\frac{a}{b}$ dividida por $\frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{ad}{bc}$, hum quebrado $\frac{df + gh}{b}$ dividido por $\frac{a}{c} = \frac{cdf + cgh}{ab}$, $\frac{a+b}{c}$ dividido por $\frac{df}{a-b} = \frac{a+b \times a-b}{cdf} = \frac{aa-bb}{cdf}$, e assim as outras.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

A razão desta operação se deduz sempre dos mesmos principios que as precedentes: quando multiplico o denominador 3 do quebrado $\frac{2}{3}$ pelo numerador 4 do quebrado $\frac{4}{5}$, faço o quebrado proposto 5 vezes menor * do que queria fazer, pois não quero dividir por 4 inteiros, mas sómente pela quinta parte de 4, que he o valor de $\frac{4}{5}$: logo he preciso fazello sinco vezes maior para ficar no estado que deve ficar, e he o que eu faço, quando multiplico depois o numerador do quebrado dividendo por 5, denominador do divisor. A demonstração tem todo o seu vigor nas operações algebraicas, com tudo se podem demonstrar directamente do modo seguinte.

* Num. 96.

Para provar que o quociente de $\frac{a}{b}$, dividido pelo quebrado $\frac{c}{d}$, he $\frac{ad}{bc}$, supponhamos $\frac{a}{b}=f$, e $\frac{c}{d}=g$, mostraremos que $\frac{ad}{bc}=\frac{f}{g}$: para isto he preciso re-

reflectir, que pois ſuppuzemos $\frac{a}{b}=f$, e $\frac{c}{d}=g$, ſerá $a=bf$, e $c=dg$; e pondo eſtes ſegundos valores de a, e de c no quebrado $\frac{ad}{bc}$, teremos o novo quebrado $\frac{bfd}{bdg}$, que reduzido a minimos termos, ſerá $\frac{f}{g}$: logo $\frac{ad}{bc}=\frac{f}{g}$. *O Q. S. Q. D.*

106 Quando o numerador do quebrado dividendo he diviſivel pelo numerador do diviſor, e os denominadores tambem são diviſiveis o do dividendo pelo do diviſor, ſe fazem as divisões, e o quebrado feito dos quocientes ſerá o quociente da divisão, que logo fica reduzido á mais ſimples expreſsão. Por exemplo: para dividir o quebrado $\frac{8}{9}$ pelo quebrado $\frac{2}{3}$, divido o numerador 8 pelo numerador 2, e o denominador 9 pelo denominador 3, e dos quocientes 4, e 3 faço hum novo quebrado $\frac{4}{3}$, que he o quociente pedido; e ſeguindo a regra geral, ſe multiplicaria 8 por 3, e 9 por 2, o que da-

daria o quebrado $\frac{24}{18}$, que he o mesmo que $\frac{4}{3}$, se se dividirem os dous termos por 6. Este modo de dividir pela regra geral he universal; mas quando os numeradores, e denominadores se podem dividir, se deve preferir este ultimo modo ao primeiro.

107 Quando tivermos para dividir hum inteiro, e hum quebrado por hum inteiro, e hum quebrado, se reduzirão os inteiros a quebrados da mesma denominação que o seu quebrado, com quem estão juntos, com os sinaes +, ou —, e depois se fará a divisão destes novos quebrados conforme as regras precedentes: assim para dividir $6+\frac{3}{4}$ por $2+\frac{5}{6}$, mudo o primeiro em $\frac{27}{4}$, e o segundo em $\frac{17}{6}$; e multiplicando estes dous quebrados em cruz, tenho o quociente $\frac{162}{68}$, ou $\frac{81}{34}$, que se não póde reduzir.

108 Tambem ha outro modo de dividir hum quebrado por outro, trabalhan-

lhando ſó com o numerador, ou com o denominador: trabalha-ſe ſó com o numerador, quando o numerador do dividendo ſe póde dividir pelo do diviſor, e neſte caſo ſe faz o ſeguinte: divide-ſe o numerador do dividendo pelo do diviſor, e o quociente ſe multiplica pelo denominador do meſmo diviſor, e o producto dividido pelo denominador do dividendo he o quociente da divisão dos dous quebrados. Por exemplo: ſe nos dão para dividir o quebrado $\frac{18}{49}$ pelo quebrado $\frac{3}{5}$, divido o numerador 18 do dividendo por 3, numerador do diviſor, e o quociente 6 multiplico por 5, denominador do diviſor, o ſeu producto 30 dividido pelo denominador do dividendo, dá o quebrado $\frac{30}{49}$ igual ao quociente, que buſco: eſta pratica ſe deduz ſempre dos meſmos principios: quando divido 18 por 3 faço hum quebrado ſinco vezes mais pequeno que o que eu buſcava, porque não quero dividir por 3, mas por $\frac{1}{5}$, ou quinta parte de 3, e para

re-

resarcir esta diminuição multiplico por 5 o quociente achado.

Tambem se trabalha só com o denominador, quando o do dividendo se póde dividir pelo do divisor, e então se divide o denominador do dividendo pelo do divisor, e o quociente se multiplica pelo numerador do divisor, e este novo producto he denominador de hum quebrado, que tem o mesmo numerador do dividendo, o qual novo quebrado he o quociente da divisão. Por exemplo: para dividir o quebrado $\frac{18}{49}$ pelo quebrado $\frac{5}{7}$, divido o denominador 49 por 7, e o quociente 7 multiplico pelo numerador 5 do divisor, o producto 35 he o denominador do quebrado $\frac{18}{35}$, que tem o mesmo numerador do dividendo, o qual quebrado $\frac{18}{35}$ he o quociente que se pede. Facilmente se deduz a razão deste methodo dos principios estabelecidos: quando divido o denominador do dividendo pelo do divisor, faço hum quebrado

7 ve-

7 vezes maior do que o precedente: logo devo de novo multiplicar o quociente, para que a multiplicação compenſe o que eu tenho demais, pois eu quero que eſte quebrado ſeja ſó $\frac{5}{7}$ maior. Quando eſtes methodos podem ter lugar, ſe devem preferir ao methodo geral; porque ſe antes da divisão eſtão os quebrados reduzidos a minimos termos, tambem o quociente ſahe na mais ſimples expreſsão: ſe nos exemplos precedentes ſe tiveſſe ſeguido a regra geral, ter-ſe-hia achado no primeiro $\frac{90}{147}$, e no ſegundo $\frac{126}{245}$ em lugar dos quebrados $\frac{30}{49}$, e $\frac{18}{35}$.

TRATADO DOS QUEBRADOS pela dizima.

109 Além dos quebrados, de que acabamos de tratar, ha outros, que são de grande uſo na Mathematica, cujo conhecimento he abſolutamente preciſo para em certos caſos ſe acharem com toda a exacção as grandezas, que neceſſitamos conhecer.

DEFINIÇÃO.

110 Se hum todo, ou unidade principal se divide pela unidade seguida de huma, ou muitas cifras, v. g. pelos numeros 10, 100, 1000, &c., que são successivas potencias de 10, e se tomarem muitas destas partes iguaes, o quebrado, que denota quantas destas partes se tomão, se chama quebrado decimal, e se denota assim $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{48}{1000}$, e assim as mais.

Descubrio-se o segredo de trabalhar com esta casta de quebrados do mesmo modo inteiramente que com os numeros absolutos, e tambem o de reduzir qualquer quebrado a decimal, que lhe seja igual, ou cuja differença seja huma quantidade infinitamente pequena, e he o que fez o seu uso tão frequente nas Mathematicas.

PRIMEIRO PRINCIPIO.

111 Pois os quebrados decimaes são quebrados, se podem expressar como os outros quebrados: assim para expressar 3 decimos, 58 centesimos, se póde es-

crever $\frac{3}{10}$, $\frac{78}{100}$; ha porém outro modo de os expressar, que he escrever o numerador sómente, subentendendo-lhe o denominador. Por exemplo: em lugar de escrever $\frac{3}{10}$, ou $\frac{58}{100}$, se escreve .3, .58, pondo hum ponto á esquerda do numerador; de modo porém que depois deste ponto haja tantos caracteres, quantas cifras ha no denominador depois da unidade: do mesmo modo se houver inteiros juntos com os quebrados, como 15 $\frac{25}{100}$, 38 $\frac{245}{1000}$, escreverei 15 .25, e 38 .245. Deste modo se póde conhecer o denominador, ainda que se não expresse, pois se depois do ponto ha dous caracteres, será 100 o denominador; se ha 3, será o denominador 1000, e assim os outros.

112 Daqui se segue, que quando acharmos escrito 253 . 27, significa 253 $\frac{27}{100}$: do mesmo modo 483 . 547 significa 483 inteiros $\frac{547}{1000}$. Tambem se segue, que se quizermos denotar por este modo a quantidade 83 $\frac{3}{100}$, devemos escre-

ver 83.03, pondo huma cifra antes de 3, para que haja dous caracteres depois do ponto, e ſe conheça que o denominador he a unidade com duas cifras, ou 100: do meſmo modo para expreſſar $53\frac{48}{10000}$, devo eſcrever deſte modo 53.0048, pondo duas cifras antes dos caracteres 48, para denotar que o denominador tem quatro cifras depois da unidade, ou he dez mil.

113 Quando não ha inteiros com quebrados, mas ſómente eſtes, como $\frac{325}{1000}$, ſe eſcreve aſſim 0.325, e a cifra antes do ponto denota não haverem inteiros. Se fizermos reflexão, conheceremos que eſta expreſsão 0.325 he igual a $\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$, porque $\frac{3}{10}$ he igual a $\frac{30}{100}$, e a $\frac{300}{1000}$, e $\frac{2}{100}=\frac{20}{1000}$, pois hum quebrado não muda de valor, ainda que ſe multiplique o ſeu numerador, e denominador pelo meſmo numero: logo em lugar de expreſſar o quebrado 0.325, dizendo 325 milhares, ſe poderia ex-

pref-

preſſar aſſim, 3 dezenas, 2 centenas, e 5 milhares, o que moſtra que os caracteres deſta quantidade 325 vão augmentando da direita para a eſquerda em proporção decupla, e diminuem na meſma proporção da eſquerda para a direita, pois he evidente que huma centena he dez vezes maior que hum milhar, e huma dezena dez vezes maior que huma centena; e conſiderando aſſim os quebrados decimaes, ſe podem definir, dizendo que são numeros menores, que inteiros, que ſeguem a proporção das differentes ordens da enumeração.

Com effeito depois de ter determinado o numero das unidades, ou numeros inteiros, nada embaraça que ſe imaginem outros numeros, cujas unidades ſigão ſempre a meſma progreſſão, aſſim como neſte numero 6325. 489, em que as unidades do caracter 2, que eſtá á eſquerda do caracter 5, onde ſe terminão os inteiros, são dez vezes maiores que as unidades de 5; as unidades de 4, que he immediato á direita de 5, são dez vezes mais peque-

quenas que as unidades de 5; ou as unidades de 3, que tem o ſegundo lugar á eſquerda do caracter 5 das unidades, são cem vezes maiores que as unidades do meſmo 5; as unidades de 8, que tem depois de 5 o ſegundo lugar da direita, são cem vezes menores que as de 5, e aſſim os mais, que podem ter os meſmos lugares á direita, ou eſquerda do caracter das unidades, de ſorte que ſe póde dizer, contando deſte caracter, unidade, dezena, centena, milhar, &c. Eſte modo de conceber os quebrados decimaes facilita muito todas as operações, que ſe fazem com elles, e deve ſer-nos muito familiar.

SEGUNDO PRINCIPIO.

114 Muitos quebrados decimaes, como 0.3, 0.54, 0.008, ou ſeus iguaes $\frac{3}{10}$, $\frac{54}{100}$, $\frac{8}{1000}$, eſtando na ſua primeira fórma, ſe podem facilmente reduzir á meſma denominação, pois, como já diſſe, $\frac{3}{10}$ he igual a $\frac{30}{100}$ a $\frac{300}{1000}$, e $\frac{54}{100}$ he igual a $\frac{540}{1000}$: logo os quebrados propoſ-

poſtos ſe podem eſcrever deſta fórma 0. 300, 0. 540, 0. 008, e he evidente que eſtas mudanças não mudão o valor do quebrado, pois eſta operação não faz mais que multiplicar os numeradores, e os denominadores pelos meſmos numeros. Bem entendidos huma vez eſtes principios, facilmente ſe conhece que com os quebrados decimaes ſe podem fazer as meſmas operações, e do meſmo modo que com numeros inteiros; e como todos os quebrados ſe podem reduzir a quebrados decimaes, que lhes ſejão iguaes ſem differença ſenſivel, tambem ſe ſegue que todas as operações dos quebrados ſe podem reduzir ás dos numeros inteiros, e por eſta razão nos não cançaremos em accumular muitos exemplos: começaremos, explicando o modo de fazer com eſtas quantidades as quatro principaes operações da Arithmetica, depois diremos o modo de reduzir qualquer quebrado a dizima, e as differentes applicações, que deſtas operações ſe podem fazer aos calculos, de que uſamos mais ordinariamente.

Da

Da somma dos quebrados decimaes.

115 Se os quebrados não estão reduzidos á mesma denominação, se começará a operação pelos reduzir *; e depois de escrever huns por baixo dos outros, de sorte que as dezenas fiquem de baixo de dezenas, centenas de baixo de centenas, e milhares de baixo de milhares, formando cada huma huma columna vertical, se fará a somma conforme a regra da somma dos numeros inteiros. Por exemplo: se houvermos de sommar 0. 3, 0. 25, 0. 489, 0. 056, reduziremos todos os quebrados á denominação do quebrado 0. 489, ou 0. 056, que tem milhares; e dispondo-os com ordem, se achará ser a somma 1. 095, isto he, hum inteiro, e $\frac{95}{1000}$.

0.300
0.250
0.489
0.056
1.095

* Numer. 114.

116 Se houvermos de sommar inteiros juntos com quebrados, como os numeros seguintes 25. 430, 3. 054, 69. 067, 36.048, se fará inteiramente a mesma operação de os sommar,

25.430
3.054
69.067
36.048
133.599

mar, depois de os haver reduzido á denominação de 3. 054, e teremos 133. 599, isto he, 133 inteiros, e o quebrado $\frac{599}{1000}$.

Tambem póde deixar de reduzir-se os quebrados á mesma denominação, fazendo tudo o mais como fica explicado: assim se se quizerem sommar os quebrados 0. 35, 0. 48, 0. 54, 0. 345, 0. 0048, se disporão do modo, que mostra o exemplo, e será a somma 1. 7198.

0.35
0.48
0.54
0.345
0.0048
1.7198

Da diminuição dos quebrados decimaes.

117 Se os quebrados não tem a mesma denominação para se fazer a operação mais facil se reduzirão á do maior denominador, conforme o que fica dito *: depois se disporão de modo, que fiquem as dezenas de baixo de dezenas, centenas de baixo de centenas, e assim dos mais numeros. Isto feito, se fará a diminuição, como nos números inteiros; assim para diminuir o quebrado 0. 025 de 0. 5894, se escre-

* Numer. 114.

0.5894
0.0250
0.5644

creverá como moſtra o exemplo; e fazendo a diminuição, o reſto ſerá 0. 5644.

Se houverem inteiros, e quebrados que diminuir de inteiros, e quebrados, ſempre ſe ſeguirá o meſmo methodo; aſſim para diminuir 47. 9453 de 68.05489, ſe eſcreverá, ſem ſer preciſo reduzillos, como moſtra o exemplo, e o reſto ſerá 20. 10959.

68. 05489
47. 9453
20. 10959

A demonſtração deſtas duas operações he a meſma que a dos numeros inteiros, pois como temos a ſomma, ou a differença das dezenas, centenas, e milhares, temos tambem a ſomma, ou a differença dos quebrados, que não são outra couſa mais que dezenas, centenas, milhares, &c. A prova deſtas operações ſe faz como nos numeros inteiros pela operação contraria, o que não preciſa mais explicação.

Da multiplicação dos quebrados decimaes.

118 Para multiplicar dous numeros hum por outro, dos quaes ou hum, ou am-

ambos tenhão partes decimaes, ſe fará a multiplicação como ſe todos foſſem numeros inteiros; e depois de acabada a operação, ſe ſepararão tantos caracteres á direita do producto, quantos decimaes ha no multiplicando, e multiplicador: os caracteres, que ficarem á eſquerda do ponto, denotarão numeros inteiros; e os que ficarem á direita depois do ponto, denotarão as partes decimaes. Por exemplo: ſe eu quizer multiplicar 24. 35 por 2. 3, eſcreverei os dous numeros hum de baixo do outro; e depois de feita a multiplicação do modo ordinario, como ſenão tiveſſe partes decimaes, e ter achado o producto 56005, eſcreverei 56. 005, de ſorte que fiquem trez caracteres á direita do ponto, porque no multiplicando, e multiplicador juntos ha trez ordens de decimaes, 2 em hum, e 1 no outro.

24.35
2.3
7305
4870
56.005

Do meſmo modo para multiplicar 4. 35 por 6. 7, diſpoſtos os numeros, farei a multiplicação do modo ordinario, como ſenão tiveſſe decimaes,

acho

acho o producto 29145, que escrevo 29. 145, de sorte que haja trez caracteres de decimaes, pois ha dous no multiplicando, e huma no multiplicador.

4.35
67
3.045
2610
29.145

119 Poderia succeder que o numero dos decimaes do multiplicando, e multiplicador seja maior que o numero dos caracteres do producto, o que succede, quando não ha inteiros juntos com os quebrados decimaes, e são de huma certa ordem; neste caso se põem á esquerda do producto tantas cifras, quantas forem precisas, para que depois do ponto haja tantos caracteres, quantos são os decimaes do multiplicando, e multiplicador. Por exemplo: se quizermos multiplicar estes numeros 0. 0054 por 0. 012, que só contém decimaes, depois de dispostos os numeros, como mostra o exemplo, se faz a multiplicação do modo ordinario, e se acha o producto significativo 648, e se escreve 0. 0000648, de sorte que tenha quatro ci-

0.0054
0. 012
108
54
0.0000648

cifras mais depois do ponto, para que haja tantos caracteres depois do ponto, quantos são os decimaes do multiplicando, e multiplicador.

DEMONSTRAÇÃO.

Para ſe entender mais facilmente a razão da demonſtração da precedente operação, a applicaremos ao primeiro exemplo, em que ſe multiplicou 24. 35 por 2. 3. Quando multiplico eſtes numeros hum por outro, como ſenão tiveſſem decimaes, faço o multiplicando cem vezes maior do que elle he, pois as unidades de quatro, que valião ſimples unidades, ſe achão ſupprimindo o ponto, que as ſeparava no lugar das centenas. Do meſmo modo faço tambem o multiplicador effectivamente dez vezes maior, conſiderando-o como 23: logo o producto, que reſultar deſtes dous numeros, conſiderados como inteiros, ſerá dez vezes cem, ou mil vezes maior, do que devia ſer: logo para ficar no ſeu juſto valor, ſerá preciſo fazello mil vezes mais pequenos, e he o que ſe faz, tirando-lhe da direita tantos

tos caracteres, quantos decimaes tem o multiplicando, e o multiplicador: no nosso exemplo cortamos 3, o que faz que o caracter 6 do producto 56.005, que estava no lugar dos milhares, venha para o lugar das unidades, escrevendo 56. 005. O mesmo discurso se póde applicar aos outros exemplos.

Da divisão dos quebrados decimaes.

120 Para dividir hum numero decimal por outro, ou ambos sejão quebrados decimaes, ou tenhão o divisor, e dividendo, ou hum delles só, além das partes decimaes, numeros inteiros, se dividirão como numeros inteiros; e depois de achado o quociente, se fará de sorte, que depois do ponto haja hum numero de decimaes igual aos do dividendo, menos os do divisor. Seja por exemplo proposto para dividir 88. 392 por 2. 54: divido estes dous numeros como numeros inteiros; e tendo achado o quociente 348, escrevo 34. 8, de sorte que haja depois do pon-

2. 54	88.392
3. 48	762
	1219
	1016
	2032
	2032
	0000

ponto hum caracter de decimaes, porque o dividendo tem 3, e 2 o divisor, e será a differença 1.

EXEMPLO II.

Seja dado para dividir 158.0802 por 32.46: divido estes numeros como senão tivessem decimaes, e o quociente 487 escrevo assim 4.87, isto he, 4 inteiros, e $\frac{87}{100}$, de sorte que haja

32.46	158.0802
4.87	129 84
	28 240
	25 968
	2 2722
	2 2722
	0 0000

dous caracteres decimaes depois do ponto, porque a differença de 4 a 2 são 2.

121 Segue-se desta regra geral, que se o divisor tiver tantos decimaes, como o dividendo, o quociente será numero inteiro; porque pois o divisor tem tantos decimaes, como o dividendo, a differença será 0, e consequentemente não haverá decimaes no quociente. Se o dividendo não tiver partes decimas, ou tiver menos que o divisor, se lhe accrescentarão tantas cifras, quantas forem precisas, para que o nu-

o numero das decimaes do dividendo ſeja igual ao numero das decimaes do diviſor, e neſte caſo ſempre o quociente ſerá numero inteiro, menos ſe o numero dos inteiros do diviſor for maior que o numero dos inteiros do dividendo. Por exemplo: ſe nos derem para dividir 883.92 por 2.54, o quociente ſerá 348, porque a differença das decimaes do dividendo, e diviſor he 0.

Do meſmo modo, ſe quizermos dividir 5952 por 1.24, ſe accreſcentarão duas cifras ao dividendo, porque ha dous decimaes no diviſor; e fazendo depois a operação dos numeros 5952.00, 1.24, como ſe foſſem inteiros, acharemos o quociente 4800 inteiros.

1.24	5952.00
4800	496
	992
	992
	000

Para ſe comprehender mais facilmente a demonſtração deſta regra geral, eſtabeleçamos os principios ſeguintes.

PRIMEIRO.

122 Hum quebrado decimal, que contém inteiros, e decimaes, póde-ſe

ex-

expressar, como senão contivesse mais que decimaes; assim a fracção 24. 32, que vale 24 inteiros, e 32 centenas, se póde expressar duas mil quatrocentas centenas, e trinta e duas centenas, porque $\frac{2400}{100}$, ou duas mil e quatrocentas centenas, são 24 inteiros, pois o numerador he 24 vezes maior que o denominador.

SEGUNDO.

123 As unidades do quociente sempre devem ser da mesma natureza do dividendo, quando o divisor he hum numero inteiro, que denota o numero de vezes; assim se o dividendo tem por unidades milhares, e o divisor he numero inteiro abstracto, como 3, ou 4, o quociente será o terço, ou quarto dos milhares do divisor, e terá por conseguinte unidades da mesma natureza.

TERCEIRO.

124 Sendo o dividendo o mesmo, quanto maior he o divisor, menor he o quociente, e reciprocamente será o

quociente maior, quanto mais pequeno for o divisor, se suppuzermos sempre o mesmo dividendo; pois he claro que quanto hum numero he menor, mais vezes he conteúdo em outro.

Demonstração da regra geral.

Para que esta demonstração seja mais intelligivel, appliquemos o discurso ao primeiro exemplo *. Quando divido 88. 392 por 2.54, como se fossem numeros inteiros, o quociente achado 348 deve ser numero inteiro pelo segundo principio; mas porque o dividendo he 88. 392, e não 88392, isto he, porque he 88 mil trezentos e noventa e dous milhares, as unidades do quociente devem ser milhares pelo segundo principio: logo o quociente he mil vezes maior do que deve ser, suppondo o divisor numero inteiro, e as unidades do dividendo milhares. Agora suppondo o divisor tal qual verdadeiramente he, isto he, 2.54, ou duzentas e sincoenta e quatro centenas, pois as centenas são cem vezes menores que as unidades, o numero [illegible] cem veze[illegible]

* Numer. 120.

mais pequeno que 254: logo o quociente deve ſer cem vezes maior, e he o que ſe faz, tirando hum caracter da direita, e pondo-o na ordem dos decimaes, deſte modo 34.8; porque aſſim as unidades de 3, que erão centenas, ficão dezenas, e as unidades de 4, que erão dezenas, ficão unidades ſimples, e conſequentemente eſcrevendo o quociente 0.348, aſſim 34.8 fica cem vezes maior, de que ſe ſegue que pelo methodo dado fica tudo no eſtado, em que deve ficar.

Para entender a razão das operações do Artigo 120 ſe faça reflexão, que o quociente de huma divisão ſempre fica o meſmo, quando ſe multiplica o dividendo, e o diviſor por hum meſmo numero, aſſim 12 dividido por 4 dá 3 no quociente: ſe eu multiplicar 12, e 4 por 5, o quociente dos productos 60, e 20, divididos hum por outro, ſerá ſempre 3. Iſto ſuppoſto, quando divido dous numeros, que tem os meſmos decimaes, como ſe os não tiveſſem, não faço mais que multiplicar o dividendo, e o diviſor por hum meſmo nu-

mero, o que não deve mudar o quociente; e assim quando divido 883. 92 por 2. 54, como se fossem 88392, e 254, multiplico o dividendo, e divisor por 100, o que não muda o quociente, mas o quociente de 88392 por 254 he 348: logo este mesmo numero será o quociente de 883. 92 dividido por 2. 54. Esta razão póde servir para demonstrar todos os casos imaginaveis, e por isso será util estudalla com attenção.

Uso dos quebrados decimaes.

125 *Primeira applicação.* Aproximar o mais que he possivel o quociente de huma divisão, que se não póde fazer sem resto.

Buscaremos o quociente do dividendo dividido pelo divisor, e ao resto se lhe accrescentarão tantas cifras, quantos decimaes quizermos dar ao quociente: se quizermos que o quociente seja quasi hum milhar, ou dez milhares, lhe accrescentarão 3, ou 4 cifras ao resto, e se continuará a divisão como no modo ordinario, pondo depois do quociente os caracteres, que sahirem

rem na divisão, depois de as haver separado dos inteiros do quociente por hum ponto, como mostra o exemplo seguinte.

Dão-nos para dividir 353 por 15, e querem o quociente que defira do verdadeiro quociente a decimamillesima parte da unidade: depois de ter dividido 353 por 15, e achado o quociente 23 com o resto 8, accrescento a este resto quatro cifras, porque quero ter até partes decimasmillesimas; e continuando a divisão do modo ordinario, digo: em 80 quantas vezes ha 15? 5 vezes: ponho 5 no quociente, (depois de ter posto hum ponto depois dos 3. para separar os inteiros dos decimaes) 5 vezes 15 são 75, que ponho de baixo de 80; 80 − 75 = 5: abaixo huma cifra adiante de 5, e digo: em 50 que vezes ha

```
15      }353
23.5333 }30
         53
         45
          8.0000
          75
           50
            450
             50
              45
               50
```

ha 15 ha 3, e ponho 3 no quociente, trez vezes 15 quarenta e ſinco, tirados de 50 reſtão 5: abaixo outra cifra, e dividindo 50 por 15, acho 3 para o quociente; e como o reſto são 5, que ſempre ſerá o meſmo, ſerão os quocientes, que ſe ſeguem, ſempre os meſmos, e á primeira viſta ſe conhece hum quociente, que não differe do verdadeiro quociente a centeſimamilleſima parte da unidade.

126 *Segundo uſo.* Achar hum quebrado decimal igual a qualquer quebrado dado menor que a unidade, ou, o que vem a ſer o meſmo, fazer a diviſão de hum numero por hum numero maior.

Seja propoſto para reduzir o quebrado $\frac{5}{7}$ em decimal, ou, o que vem a ſer o meſmo, achar o quociente proximo de 5 dividido por 7, que não defira da unidade huma parte de hum milhão: accreſcentarei ao numerador 6 cifras; e fazendo a diviſão do modo ordinario, acharemos no quociente 0. 714285, ou 714 mil 285 milhões, ou

con-

contos, por quociente de 5 dividido por 7, ou pelo valor proximo do quebrado $\frac{5}{7}$ com hum resto 5, ou sinco contos, de que se podia tomar a setima parte: se se quizesse continuar mais a divisão, se acharia huma serie infinita de periodos iguaes a 714285; porque he evidente que pondo huma cifra diante de 5, teriamos ainda que dividir 50 por 7, e os quocientes tornarião a ser os mesmos com os mesmos restos, o que em hum instante daria huma aproximação prodigiosa; mas sempre tal que houvesse alguma falta: na pratica mais exacta se contentão com seis caracteres decimaes, e quando muito com oito.

7	5.000000
0.714285	49
	10
	7
	30
	28
	20
	14
	60
	56
	40
	35
	5

127 Ha quebrados, que se podem reduzir a fracções decimaes, e outros, que

que nunca ſe podem reduzir, como o quebrado $\frac{5}{7}$, e o quebrado $\frac{6}{7}$, pelo qual ſe acharia 0.857142. Não ſuccede o meſmo nos quebrados $\frac{4}{5}$, e $\frac{5}{16}$ em lugar dos quaes ſe achão os quebrados decimaes 0.8, 0.3125 juſtos, e ſem ficar reſto, ſeguindo ſempre o meſmo modo de os buſcar.

128 *Terceiro uſo.* Reduzir as partes conhecidas de certa medida, como de braça, palmo, ou arratel, &c. a hum quebrado decimal.

Far-ſe-ha hum quebrado, que tenha por numerador o numero das partes, que ſe querem reduzir a decimaes, e por denominador o numero, que denote quantas vezes he conteúda huma deſtas partes na medida, de que ſe trata, reduzir-ſe-ha eſta fracção em decimaes pelo Articulo precedente. Por exemplo: quero ter huma fracção decimal da braça, que valha 4 palmos, ou reduzir 4 palmos em partes decimaes da braça, tómo eſte quebrado $\frac{4}{10}$, cujo numerador expreſſa o numero dos palmos,

mos, cujo valor quero ter em decimaes, e o denominador 10 denota quantas vezes o palmo he conteúdo na braça, reduzo este quebrado a decimal *, e tenho o valor de 4 palmos em decimaes 0.4000. Do mesmo modo se eu quero reduzir 9 pollegadas em decimaes da braça, ou, o que he o mesmo, ter huma parte decimal da braça igual a 9 pollegadas: tómo o quebrado $\frac{9}{80}$, cujo numerador 9 denota quantas partes se devem tomar, e o denominador 80 quantas vezes a pollegada he conteúda na braça, e dividindo 9 por 80 *, acho por valor de 9 pollegadas em partes decimaes de braça 0.1125. Se quizermos huma parte decimal da braça igual a 4 palmos, e 9 pollegadas, não temos mais que sommar os dous numeros 0.4000, e 0.1125, e teremos 0.5125.

* Numer. 126.

* Numer. 126.

129 Se quizessemos reduzir a decimaes as partes do marco, onças, ou oitavas, procederiamos do mesmo modo. Pedem-me por exemplo huma parte decimal do marco igual a 3 onças, e 5 oitavas, procuro primeiro huma par-

parte decimal do marco igual a 3 onças, o que ſe faz dividindo 3 por 8 *, e achar-ſe-ha $0.375 = \frac{375}{1000}$: depois buſco huma fracção decimal do meſmo valor que o quebrado $\frac{5}{64}$, que são 5 oitavas, pois a oitava he a ſexageſima quarta parte do marco, que acho ſer 0.078125, ou $\frac{78125}{1000000}$; e ſommando eſtes dous quebrados, tenho 0.453125 por valor de 3 onças, e 5 oitavas em partes decimaes do marco.

* Numer. 126.

130 *Quarto uſo dos quebrados decimaes.* Multiplicar numeros complexos por meio das decimaes.

Queremos ſaber o cuſto de 12 braças, 4 palmos, e 3 pollegadas de alvenaria a 4500 cada braça: reduzo os 4 palmos, e 3 pollegadas a partes decimaes da braça *, e terei 0.4375, e por 12 braças 4 palmos, e 3 pollegadas 12.4375, e eſte numero multiplico por 4500 em lugar de multiplicar 12 bra-

* Numer. 126.

12.4375
4500
62 18 7500
497 500
559 68.7500

braças, 4 palmos, e 3 pollegadas, e ao producto achado darei 4 decimaes, pois tem o multiplicando 4 decimaes, e terei 55968 inteiros, e $\frac{7500}{10000}$, ou $\frac{75}{100}$.

131 Reduzir hum quebrado decimal em partes conhecidas, ou achar o verdadeiro valor de hum quebrado decimal.

O quebrado decimal ſe multiplicará por hum numero, que denote as vezes que a quantidade, a qual ſe quer reduzir, he conteúda no todo, de que he quebrado decimal; e o numero, que ſahir no producto fóra do lugar dos decimaes, ſerá o que ſe buſca. Por exemplo: quero ſaber quantas pollegadas vale eſte quebrado 0.63 de palmo, multiplicarei 0.63 por 8, e o producto são 5.04, de que concluo que o quebrado vale 5 pollegadas, que he o numero, que ſe acha fóra das decimaes. Do meſmo modo para ſaber em onças; e oitavas o valor deſte quebrado 0.3425 de marco, multiplicarei eſte numero por 8, que são as vezes que a onça he incluida no marco, e acho no producto

2.

2.7400, de que concluo que o valor do quebrado são 2 onças, e consequentemente o resto 7400 são partes decimaes das onças; e para saber o seu valor em oitavas, multiplicarei este numero por 8, que são as vezes que a oitava he conteúda na onça, e o seu producto será 5.9200, do que concluo que 7400 vale 5 oitavas, pois acho 5 no lugar dos inteiros, e tomarei 6, pois o quebrado que resta $\frac{9200}{10000}$ he quasi igual á unidade: logo o quebrado decimal do marco 0.3425 vale 2 onças, e 6 oitavas.

A razão desta pratica se deduz facilmente da natureza dos mesmos decimaes; porque quando multiplico, por exemplo, o quebrado 0.63 de palmo por 8, o producto 5.04 he oito vezes maior, mas não exprime mais que partes decimaes da pollegada, e antes de multiplicado expressava partes decimaes do palmo, que he oito vezes maior.

ADVERTENCIA.

132 Quando os quebrados decimaes contém muitos caracteres, se cortão ordinariamente os dous ultimos, por ser insensivel a differença. Por exemplo: para achar o valor deste quebrado 4.54961639, teremos quasi a mesma exacção, se lhe tirarmos os quatro ultimos caracteres, accrescentando mais huma unidade ao caracter 6 para compensar o que se lhe tira, escrevendo assim .5497, no que não póde haver erro sensivel: depois mostraremos mais usos dos quebrados decimaes na extracção das raizes quadradas, e cubicas, cujo uso ainda he mais importante que os precedentes.

DO CALCULO DOS EXPOENTES, e formação das potencias, e extracção das raizes.

Do calculo dos expoentes.

133 Já mostrámos * que hum expoente era hum numero, que se punha á parte direita de huma letra hum pouco mais elevado que ella, que denota quantas

* Num. 39.

tas vezes ſe devia eſcrever eſta letra, ou quantas vezes he multiplicada por ſi meſma a^3, a^5, a^2b^3, a^4b^8 são quantidades exponenciaes, mas na Algebra ſe achão muitas vezes quantidades, que tem expoentes poſitivos, e negativos, como a^3, a^{-3}, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{-\frac{5}{2}}$: achão-ſe tambem algumas vezes letras, que tem cifra por expoente, como a^0, b^0, &c.: procura-ſe ſaber o que podem ſignificar eſtas expreſsões, e he o que vamos demonſtrar, e a que ſe reduz o chamado calculo dos expoentes.

Eſte calculo ſe funda todo em duas ſuppoſições: primeiro, que duas, ou mais letras juntas, ſignificão ſempre o producto das quantidades, que ellas expreſsão: ſegundo, que para dividir duas quantidades algebraicas huma por outra, he preciſo pollas em fracção e tirar as letras commuãs ao diviſor, ao dividendo, ou commuãs ao numerador, e denominador; e fazendo reflexão no que em ſi enſerrão eſtas duas hypotheſes, facilmente ſe deduzirá tudo o que vamos moſtrar.

134 Para multiplicar duas quantidades expressadas pelas mesmas letras com differentes expoentes huma por outra, se devem escrever as duas letras huma ao pé da outra, e dar-lhes por expoente a somma dos expoentes dos dous factores, assim $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$, $a^2 b^3 \times a^4 b^2 = a^{2+4} b^{3+2} = a^6 b^5$, porque $a^3 = aaa$, e $a^2 = aa$: logo $a^3 \times a^2 = aaa \times aa = a^5$. Do mesmo modo $a^2 b^3 = aa\,bbb$, e $a^4 b^2 = aaaa\,bb$: logo $a^2 b^3 \times a^4 b^2 = aa\,bbb \times aaaa\,bb = aaaaaa\,bbbbb$.

135 Como a divisão desfaz o que faz a multiplicação, deve-se tambem fazer por hum modo opposto: logo se a multiplicação das quantidades, que tem as mesmas letras com differentes expoentes, se faz sommando estes expoentes, a divisão se deve fazer diminuindo os expoentes das letras commuas ao dividendo, e divisor, assim $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a$, e he o que se faz, quando, depois de os ter expressado em fracção, se tirão as letras commuas ao numerador, e denominador, porque $\frac{a^3}{a^2}$

=

$= \frac{aaa}{aa}$; e tirando aa do numerador, e denominador, temos no quociente a, que he o mesmo que diminuir os expoentes: o mesmo he $\frac{a^4b^2c^5}{a^3\,b\,c^2} = \frac{aaaa\ bb\ ccccc}{aaa\ \ b\ cc}$ $= abccc = abc^3$, o que se acharia diminuindo os expoentes, e fazendo $\frac{a^4b^2c^5}{a^3bc^2}$ $= a^{4-3}, b^{2-1}, c^{5-2} = abc^3$: do mesmo modo $\frac{d^2f^3g^4}{dfg^2} = d^{2-1}, f^{3-1}, g^{4-2}$, $= df^2g^2$: tambem o mesmo he $\frac{a^2b^5}{a^3b^2} = \frac{b^5}{a}$, tirando as letras commuas ao denominador, e numerador, ou fazendo a diminuição dos expoentes a^{2-3}, b^{5-2}, $= a^{-1}b^3$. Agora se conhece o que he hum expoente negativo, porque he evidente que o negativo procede da diminuição de hum numero maior de outro mais pequeno: logo huma quantidade, que tem expoente negativo, he o quociente de certa potencia de huma letra dividida por outra maior potencia da mesma letra; assim a^{-2} póde se de $\frac{a^3}{a^5}$, ou de $\frac{a^5}{a^7}$, ou de $\frac{a}{a^3}$, &c., porque

$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3 \times 1}{a^3 \times a^2}$: logo dividindo o numerador, e o denominador do quebrado pela mesma grandeza a^3, temos no quociente $\frac{1}{a^2}$; mas o quociente de $\frac{a^3}{a^5}$ se acha, tirando o expoente 5 do divisor do expoente 3 do dividendo, e o quociente he $a^{3-5} = a^{-2}$: logo $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$: geralmente huma letra elevada a huma potencia negativa he igual ao quociente da unidade dividida pela mesma potencia positiva da mesma letra $a^{-2}b^3 = b^3 \times \frac{1}{a^2} = \frac{b^3}{a^2}$, $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, e assim as mais.

136 Se o expoente do divisor he igual ao expoente do dividendo, a differença do expoente será cifra: logo $a^0 = \frac{a^2}{a^2} = \frac{a^3}{a^3} = a^{2-2} = a^{3-3}$: logo geralmente $a^0 = 1$, porque huma quantidade dividida por si mesma dá sempre 1 no quociente, pois se contém a si mesma huma vez.

Da formação das potencias, das quantidades exponenciaes, e da extracção das ſuas raizes.

137 Chama-ſe potencia em geral o producto da multiplicação de huma quantidade multiplicada muitas vezes por ſi meſma; a^3, a^2, a^5 são potencias de a, porque eſtes productos reſultão de a multiplicado por ſi meſmo muitas vezes: neſtes exemplos foi multiplicado duas vezes, trez vezes, ſinco vezes, porque os expoentes são 3, 2, e 5.

138 Como a multiplicação de huma meſma letra, que tem diverſos expoentes, ſe faz pela ſomma dos expoentes *, as potencias de huma quantidade algebraica, que já tem hum expoente, ou os productos deſta quantidade multiplicada muitas vezes por ſi meſma, ſe achará pela ſomma deſte expoente repetido tantas vezes, quantas unidades tem a potencia, a que ſe quer elevar eſta quantidade; mas a addição repetida de hum meſmo numero ſe faz com a multiplicação: logo a formação das potencias de huma quantidade ex-

* Numer. 134.

ponencial ſe fará, multiplicando o ſeu expoente pelo numero, que denota a potencia, a que ſe quer elevar; aſſim para elevar a^2 á terceira, quarta, ou quinta potencia, ſe deve ajuntar o expoente 2 a ſi meſmo trez vezes, quatro vezes, ou ſinco vezes, ou, o que vem a ſer o meſmo, multiplicallo por 3, 4, 5, e ſerá a terceira, quarta, ou quinta potencia de a^2, a^6, a^8, a^{10}. Do meſmo modo para elevar a^2, b^3, c^4 á quinta potencia, ſe devem multiplicar os expoentes das letras a, b, c, que são 2, 3, 4 por 5, e os productos poſtos diante deſſas letras darão a potencia, que ſe pede igual a a^{10}, b^{15}, c^{20}, como tambem a quarta potencia de c^2, b^3, f^6 he c^8, b^{12}, f^{24}, e aſſim as outras.

139 Se quizeſſemos elevar hum quebrado a huma potencia, e os ſeus denominador, e numerador foſſem ambos quantidades exponenciaes, ſe elevarião a eſta potencia, multiplicando os expoentes do numerador, e denominador pelo expoente da potencia, porque hum quebrado multiplicado por hum quebrado he igual ao producto dos nume-

radores dividido pelo producto dos denominadores; assim para elevar o quebrado $\frac{a^2 b^3}{c^4}$ á segunda potencia, escreveremos $\frac{a^{2\times 2} b^{3\times 2}}{c^{4\times 2}} = \frac{a^4 b^6}{c^8}$: do mesmo modo a terceira potencia do quebrado $\frac{a^3 f^2 c^4}{b^2 g^2} = \frac{a^9 f^6 c^{12}}{b^6 g^6}$, e assim as mais.

140 Na extracção das raizes se faz inteiramente o contrario da formação das potencias: extrahir a raiz de huma quantidade algebraica he buscar a quantidade, que multiplicada por si mesma deo a quantidade, de que se procura a raiz. Como ha differentes potencias, tambem ha diversas raizes: a raiz quadrada de huma quantidade algebraica he a letra, ou quantidade, que multiplicada por si mesma huma vez, deo o quadrado proposto: a raiz cubica he aquella, que multiplicada duas vezes por si mesma, deo o cubo proposto, ou de que o expoente multiplicado por 3 deo o mesmo cubo. Para indicar as raizes nos servimos do sinal $\sqrt{}$, que se chama sinal radical, que serve para marcar

todas as raizes, pondo-lhe em ſima hum caracter, que denota a raiz, que ſe quer achar, aſſim $\sqrt[2]{}$ $\sqrt[3]{}$ $\sqrt[4]{}$ $\sqrt[5]{}$ são ſinaes, que indicão a ſegunda, terceira, quarta, ou quinta raiz. Quando ſe quer denotar huma raiz quadrada quaſi ſempre ſe lhe entende 2, e ſe marca aſſim $\sqrt{}$. Por exemplo: $\sqrt[2]{a^2}$ indica que ſe quer tomar a raiz quadrada da quantidade a^2: $\sqrt[3]{a^3}$ indica que ſe toma a raiz cubica de a^3: a raiz quadrada de a^2 he a, porque $a \times a$ dá a^2: a raiz cubica de a^3 he a, porque $a \times a \times a$ dá a^3: tambem a quarta raiz de a^4 he a, porque $a \times a \times a \times a$ dá a^4, e aſſim das mais.

141 Como a extracção das raizes he huma operação directamente oppoſta á formação das potencias, pois deſfaz o que a outra tem feito, o modo de o praticar deve tambem directamente ſer oppoſto ao de que nos ſervimos para a elevação das potencias; mas * a formação das potencias ſe faz, multiplicando o expoente da quantidade, que ſe quer elevar, pelo expoente da po-

* Numer. 138.

potencia, a que ſe quer elevar eſta quantidade: logo a extracção das raizes ſe fará dividindo o expoente da quantidade dada pelo expoente da raiz, que ſe pede. Se o expoente da quantidade dada he diviſivel pelo expoente da raiz, ſerá eſta exacta, ſenão ſe terá por expoente da raiz huma quantidade, cujo expoente ſerá hum quebrado, ou tambem baſtará indicar a raiz, pondo-a com o ſinal $\sqrt{}$, de baixo do qual ſe porá hum numero, que expreſſe a raiz, que ſe buſca. Tudo iſto ſe entende facilmente nos exemplos. Para ter a raiz quadrada, ou ſegunda de $a^2 b^6$, divido os expoentes 2, e 6 por 2, expoente da raiz, e os quocientes 1, e 3 os ponho diante das letras a, e b, e tenho a raiz quadrada $a^1 b^3$. (porque quando huma letra não tem expoente, ſe lhe ſuppõe ſempre a unidade por expoente) Se ſe multiplicar ab^3, ou $abbb$ huma vez por ſi meſmo, teremos $a^2 b^6$, ou $aabbbbbb$: logo ab^3 he a raiz quadrada de $a^2 b^6$. Para ter a raiz quinta de a^{10}, b^{15}, c^{20}, eſcreverei $a^{\frac{10}{5}}$, $b^{\frac{15}{5}}$, $c^{\frac{20}{5}}$; e fazendo a di-

vi-

visão dos expoentes pelo expoente 5 da raiz quinta, terei a^2, b^3, $c^4 = \sqrt[5]{a^{10}, b^{15}, c^{20}}$: do mesmo modo $\sqrt[3]{8a^3, b^9, c^{12}} = 2\frac{a^3}{3}, b\frac{9}{3}, c\frac{12}{3} = 2ab^3, c^4$, porque o cubo de 2 he 8, o de a he a^3, o de b^3 he $b^3 \times 3$, ou b^9, o de c^4 he $c^4 \times 3$, ou c^{12}.

Se me pedem a quinta raiz de a^6, b^8, como os expoentes 6, e 8 não são divisiveis por 5 expoente da raiz, posso indicar esta raiz de duas maneiras, ou pondo o sinal $\sqrt{}$ com hum 5 em sima antes da quantidade $a^6\ b^8$ desta maneira $\sqrt[5]{a^6 b^8}$, ou tambem pondo as letras a, e b com os expoentes em quebrados $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{5}$, desta maneira $a\frac{6}{5}$, $b\frac{8}{5}$, e estas duas expressões são o mesmo, porque cada huma dellas denota a quinta raiz da mesma quantidade.

142 Segue-se daqui que quando se encontrar huma quantidade com hum quebrado por expoente, se concluirá que se tome pela raiz denotada pelo denominador desta mesma quantidade, ele-

elevada á potencia denotada pelo numerador do quebrado, assim $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{a^3}$, $a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$, $a^{\frac{4}{3}} \times b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^4} \times \sqrt[3]{b^2}$, $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{4}{5}} = \sqrt[2]{a} \times \sqrt[5]{b^4}$.

143 Segue-se tambem dos mesmos principios que $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^3}}$, porque pelo * $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, e pela mesma razão $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$; mas pelo Articulo precedente $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$: logo $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^3}}$: tambem $a^{-\frac{3}{2}} \times b^{\frac{5}{6}} = \frac{b^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt[6]{b^5}}{\sqrt{a^3}}$: tambem $a^{-3} \times b^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{a^3} \sqrt[5]{b^4}$.

* Numer. 135.

De tudo o que temos dito se colligé o que significa hum expoente positivo, ou negativo inteiro, o que significa hum

expoente inteiro, quebrado negativo, ou quebrado positivo, e em fim o que he hum expoente 0.

144 Quando tivermos algumas das expressões precedentes, como a^{-3}, $a^{-\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{4}{5}}$, a^{0}, e outros semelhantes, se podem tomar em seu lugar os seus iguaes $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$, ou $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$, $\sqrt[5]{a^4}$, e 1 em lugar de a^0, se for conveniente, e reciprocamente substituir as primeiras expressões em lugar das segundas, se o calculo assim o pedir. Eis-aqui as formulas geraes de todas estas expressões, $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, a^0, b^0, q^0, $=1$.

Se tivermos fracções algebraicas para lhes extrahir as raizes, se extrahiria a do denominador, e do numerador, conforme as regras precedentes, suppondo os dous termos quantidades incomplexas, porque estas fracções se elevão ás potencias propostas, elevando o numerador, e denominador: como

mo as raizes ſe devem extrahir, tomando as do denominador, e numerador; aſſim a ſegunda raiz de $\frac{a^6b^8}{c^4} = \frac{a^{\frac{6}{2}}b^{\frac{8}{2}}}{c^{\frac{4}{2}}}$ $= \frac{a^3b^4}{c^2}$ a raiz terceira, ou cubica de $\frac{a^9f^6c^{12}}{b^6g^6} = \frac{a^{\frac{9}{3}}f^{\frac{6}{3}}c^{\frac{12}{3}}}{b^{\frac{6}{3}}g^{\frac{6}{3}}} = \frac{a^3f^2c^4}{b^2g^2}$, e aſſim as mais.

Da formação das potencias dos polynomios, e extracção das ſuas raizes.

145 Tambem ha potencias de quantidades algebraicas complexas, como incomplexas, que reſultão da multiplicação deſtas quantidades por ſi meſmas tantas vezes menos huma, quantas são as unidades da potencia, a que ſe quer elevar eſta quantidade. Para ter o quadrado de $a+b$, multiplico $a+b$ por $a+b$, e tenho * $a^2+2ab+b^2$: do meſmo modo o quadrado, ou ſegunda potencia de $a-b$ he $a^2-2ab+bb$, de que ſe ſegue que, geralmente fallando, o quadrado de hum binomio ſempre contém os qua-

* Num.60.

dra-

drados dos dous termos, e mais, ou menos dous rectangulos do primeiro pelo segundo, mais quando os dous termos são positivos, e menos quando hum, ou outro he negativo, porque he claro que $-a-b\times-a-b$ dá $a^2+2ab+b^2$, o mesmo que $a+b\times a+b$, e que $-a+b\times-a+b$ dá $a^2-2ab+b^2$, o mesmo que $a-b\times a-b$.

Se a quantidade, que se quer elevar a quadrado, tiver mais de dous termos 4, ou 5 por exemplo, como $a+b+c+d$, achar-se-hia sempre o quadrado desta quantidade, multiplicando-a por si mesma; mas tambem se póde achar de outro modo mais breve. Tomarei os quadrados de todos os termos, que compõem esta quantidade, ou os termos sejão todos positivos, ou todos negativos, ou haja positivos, e negativos, depois tomo o duplo do primeiro termo, que multiplico por todos os seguintes, dando ao producto este sinal $+$, se os termos seguintes tem o mesmo sinal que o primeiro; e o sinal $-$, se os termos, por que se multiplica o dobro do primeiro termo tem sinal differente do do primeiro termo.

To-

Tomo ſemelhantemente o dobro do ſegundo, que multiplico pelos ſeguintes, ſeguindo a meſma regra, e tomo tambem o dobro do terceiro, que combino com os outros com a meſma regra, até chegar ao penultimo, que combino do meſmo modo com o ultimo, e fica feita a operação.

Aſſim para elevar $a+b-c+d-f+g$ á ſegunda potencia, tomo primeiro todos os quadrados poſitivos dos termos, que compõem eſta quantidade, e ſerá a primeira parte do quadrado buſcado $a^2+b^2+c^2+d^2+f^2+g^2$: depois multiplico o dobro do primeiro termo a, que he $2a$, com todos os ſeguintes, e terei outra parte do quadrado $2ab-2ac+2ad-2af+2ag$, pondo o ſinal $+$ aos termos, que ſe combinão com outro, que tem o meſmo ſinal $+$, que tem $2a$, e o ſinal $-$ áquelles, que reſultão da combinação de $2a$ com outro, que tem ſinal $-$: tomarei tambem o dobro de b, que combinarei por meio da multiplicação, do meſmo modo que fiz com a com todos os termos, que ſe lhe ſeguem, e terei $-2bc+2bd-2bf+2bg$, que ſerá a terceira

ra parte do quadrado. Tambem tomarei o dobro de $-c$, que he $-2c$, e terei $-2cd+2cf-2cg$, pondo $+$ ás combinações, que se fizerem com termos, que antes de si tiverem final $-$; e $-$ ás que se fizerem com termos, que tiverem antes de si o final $+$. Tambem tomando, e combinando o dobro do quarto termo d, que he $2d$, acho $-2df+2dg$; e finalmente tomando o dobro de $-f$, que he $-2f$, acho a ultima parte do quadrado, que he $-2fg$; e sommando todas estas partes, será o quadrado pedido $a^2+b^2+c^2+d^2+f^2+g^2+2ab-2ac+2ad-2af+2ag-2bc+2bd-2bf+2bg-2cd+2cf-2cg-2df+2dg-2fg$. Esta pratica se prova multiplicando esta quantidade por si mesma, e se acharão as mesmas quantidades, ainda que com outra ordem; mas como o valor do quadrado não depende da ordem, em que os termos se achão dispostos, sempre será o mesmo, com tanto que tenha o mesmo numero de termos, e que cada hum delles tenha o final, que deve ter. Tambem se poderião reduzir os termos, se elles tivessem coefficientes differentes

da

da unidade. Por exemplo: o quadrado de $3a-2b+4c$ se achará por este methodo $9a^2+4b^2+16c^2-12ab+24ac-16bc$.

Da extracção da raiz quadrada das quantidades algebraicas complexas.

146 Para extrahir a raiz quadrada de huma quantidade algebraica complexa, por exemplo a da quantidade $a^2+2ab+bb$, he preciso dizer: a raiz de aa he a, que se deve pôr na raiz; e multiplicando esta raiz por si mesma, se tire o producto aa da quantidade proposta para ter o resto $2ab+bb$: depois se dobre a, e se divida o resto $2ab+bb$ por este divisor $2a$; e feita a divisão de $2ab$ por $2a$, o quociente he b, que se junta á raiz, como tambem depois do divisor $2a$; e finalmente o quociente b se multiplica por este novo divisor $2a+b$, e o producto $2ab+bb$ se diminue do resto $2ab+bb$; e como não fica resto depois da diminuição, se conclue que a raiz de $a^2+2ab+bb$ he $a+b$.

Para ver se a operação está bem feita, se multiplicará a raiz $a+b$ por si mesma; e como o producto $a^2+2ab+bb$

he

he igual á quantidade proposta, he certo que a operação foi bem feita.

147 Para extrahir a raiz quadrada de $a^2-2ab+bb$, devemos dizer: a raiz quadrada de a^2 he a, que poremos na raiz: depois tiraremos o quadrado aa desta raiz da quantidade proposta para termos o resto $-2ab+bb$, que semelhantemente divido por $2a$, e o quociente $-b$ ajuntarei ao pé da primeira raiz, e tambem ao divisor, que fica $2a-b$: multiplicarei $2a-b$ por $-b$, e o producto será $-2ab+bb$; e tirando este producto de $2ab+bb$, como não ha resto, concluirei que a raiz he $a-b$.

Art. 146.

	$a^2+2ab+b^2$	Raiz	$a+b$
Resto	$2ab+b^2$	$2a$ Divisor	
Diminuição	$-2ab-bb$	$2a+b$	
	0 0	b	
		$2ab+bb$	

Art. 147.

	$a^2-2ab+b^2$	Raiz	$a-b$
Resto	$-2ab+bb$	Divisor	$2a$
Diminuição	$+2ab-bb$		$2a-b$
	0 0		$-b$
			$-2ab+bb$

148 Do mesmo modo para acharmos a raiz quadrada desta quantidade $9a^2-12ab+4b^2+24ac-16bc+16c^2$, digo: a raiz quadrada de $9a^2$ he $3a$, que ponho na raiz, e tiro o quadrado desta raiz da quantidade proposta Para ter o resto $-12ab+4b^2+24ac-16bc+16c^2$, dobro esta raiz $3a$, e terei o divisor $6a$: divido $-12ab$ por $6a$, e o quociente he $-2b$, que escrevo na raiz junto a $3a$; e tambem ao lado do divisor $6a$, que me dá $6a-2b$, multiplico $6a-2b$ por $-2b$ para ter o producto $-12ab+4bb$, que escrevo de baixo do primeiro resto com sinaes oppostos para ter o segundo resto, tirando as quantidades, que se destroem, e acho este segundo resto ser $24ac-16bc+16c^2$: dobro a raiz achada para ter o novo divisor $6a-4b$, pelo qual divido o primeiro termo $24ac$ do segundo resto, que me dá o quociente $4c$, que escrevo depois da raiz achada, e ao pé do divisor $6a-4b$: multiplico esta somma pelo mesmo quociente $4c$, e tiro o producto $24ac-16bc+16c^2$ do ultimo resto; e como da diminuição não fica resto, será $3a-2b+4c$

raiz

raiz do quadrado proposto. Se eu elevar esta quantidade a quadrado, acho que effectivamente dá huma quantidade igual áquella, que se deo para se extrahir a raiz.

Art. 148. Raiz.

$9a^2-12ab+4b^2+24ac-16bc+16c^2$ $\left\{\begin{array}{l} 3a-2b+4c \\ \text{1.º Divis.} \\ 6a \end{array}\right.$

1.º resto $-12ab+4b^2+24ac-16b^c+16c^2$. $\quad 6a-2b$

$-2b$

$+12ab-4bb$. $\quad -12ab+4bb$

2.º Divisor.

2.º resto $24ac-16bc+16c^2$ $\quad 6a-4b$

$-24ac+16bc-16c^2$. $\quad 6a-4b+4c$

$+4c$

o o o $\quad 24ac-16bc+16cc$.

He evidente que pelo methodo, que nos servimos para extrahir a raiz, se deve necessariamente achar, se a quantidade proposta for quadrado; porque já vimos muitas vezes que o quadrado de qualquer quantidade complexa contém o quadrado do primeiro termo, o dobro do primeiro pelo segundo, e o

quadrado do ſegundo: logo achada a raiz do primeiro termo, temos o primeiro termo da raiz; e para achar o ſegundo da meſma raiz, não ha mais que dobrar eſte primeiro, e dividir por eſte dobro hum termo, que enſerre as duas letras, e o quociente que houver ſerá o ſegundo termo da raiz; com tanto que o quadrado deſte ſegundo termo ſeja tambem conteúdo na quantidade propoſta. Ora pelo noſſo methodo ſe toma o quadrado deſte termo, depois ſe ajunta eſte numero ao diviſor para multiplicar tudo por eſte ſegundo termo, e ſenão fica reſto, he certo que a quantidade he hum quadrado perfeito, e feito pelos dous termos, que ſe acharão, pois ſe póde diminuir delle o quadrado do primeiro termo, os dous rectangulos do meſmo primeiro pelo ſegundo, e o quadrado do ſegundo. O meſmo diſcurſo ſe faz qualquer que ſeja o numero dos termos da raiz, porque ſe póde ſempre tomar como primeiro termo o que ſe achou, e como ſegundo o que ſe buſca, pois qualquer polynomio, como $a+b+c+d$, ſe pó-

póde reduzir a hum binomio, ſuppondo $a+b+c=f$, o que faz $a+b+c+d=f+d$.

149 Se a quantidade propoſta para ſe extrahir a raiz não he quadrado perfeito, contentar-nos-hemos de indicar que ſe lhe toma a ſua raiz, pondo-o de baixo do ſinal $\sqrt{}$, que ſe chama radical, como já moſtrámos; aſſim para indicar a raiz de $aa-bb$, eſcreveremos $\sqrt{aa-bb}$: a raiz de $a^2-2bc+ac$ he $\sqrt{a^2-2bc+ac}$, e eſtas quantidades ſe chamão quantidades radicaes, ou irracionaes, e algumas vezes incommenſuraveis.

Da formação do quadrado de hum numero, e extracção das raizes das quantidades numericas.

150 O quadrado de qualquer numero ſe acha multiplicando eſte numero por ſi meſmo, aſſim o quadrado de 3247 ſe acharia multiplicando eſte numero huma vez por ſi meſmo, conforme as regras da multiplicação. Mas para determinar mais exactamente as differentes partes, que compõem o quadra-

do, e fazer mais intelligivel o que havemos de dizer da extracção das raizes, compararemos a formação do quadrado em numeros á do quadrado de huma quantidade algebraica complexa, tomando-o como quantidade da mesma natureza, e dividindo-o nas suas partes $3000+200+40+7$, e fazendo $3000=a$, $200=b$, $40=c$, $7=d$: logo o quadrado de 3247, ou de $3000+200+40+7$ será representado pelo da quantidade algebraica $a+b+c+d$, que he $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2+2ad+2bd+2cd+dd$, ou $a^2+2ab+b^2+2a+2b\times c+c^2+2a+2b+2c\times d+d^2$; e fazendo as precisas multiplicações, acharemos

9	00	00	00	$=a^2$
1	20	00	00	$=2ab$
	4	00	00	$=bb$
	25	60	00	$=2a+2b\times c$
		16	00	$=c^2$
	4	53	60	$=2a+2b+2c\times d$
			49	$=d^2$
10,	54,	30,	09	$=a^2+2ab+2a+2b\times c+c^2+2a+2b+2c\times d+dd.$

Sobre o que he de notar, que dividindo cada hum dos productos parciaes de dous em dous caracteres, excepto o ultimo á esquerda, que póde ficar com huma só.

Primeiro. O quadrado do caracter significativo 3 do primeiro termo 3000 terá depois de si tantos binarios de caracteres, quantos são os caracteres, que ha depois de 3, e assim este quadrado no producto total deve achar-se na primeira divisão da esquerda 10.

Segundo. Que o producto 1200000 feito do duplo do primeiro termo 3000 multiplicado pelo segundo 200, ficará incluido no primeiro caracter da segunda divisão junto com o resto, que houver da primeira divisão, tirado o quadrado do primeiro termo 9000000.

Terceiro. Que o quadrado do mesmo segundo termo 40000 se conterá no ultimo caracter da segunda divisão, tendo depois tantos binarios, quantos caracteres ha no numero 3247 depois de 2: de que se segue, resumindo estes trez Articulos, que as duas primeiras divisões contém o quadrado

de

de 9000000 do primeiro termo 3000, o dobro do producto do primeiro termo 3000 pelo ſegundo 200, e em fim o quadrado do ſegundo.

Quarto. Que o dobro dos dous primeiros termos pelo terceiro 40, repreſentado em $2a+2b\times c$, o qual he 25600, ſerá conteúdo no primeiro caracter 3 da terceira divisão, pois 6 eſtá directamente ſobre 3, e que o quadrado 1600 do meſmo terceiro ſerá tambem conteúdo na terceira divisão junto com o reſto, que precede; aſſim as trez primeiras divisões contém os quadrados dos trez primeiros termos, o dobro do primeiro multiplicado pelo ſegundo, e o dobro dos dous primeiros pelo terceiro, os quaes productos são repreſentados por $a^2+b^2+c^2+2ab+2a+2b\times c$.

Quinto. Em fim ſe vê que o producto do dobro dos trez primeiros termos $3000+200+40$ multiplicados pelo ultimo he incluido no primeiro caracter da ultima divisão, e que o quadrado deſte ultimo termo fica incluido no ultimo caracter da ultima divisão, e que

aſ-

aſſim o quadrado da quantidade complexa 3000+200+40+7, ou do numero 3247 he comprehendido no numero 10543009, pois eſte numero comprehende todos os productos, de que póde compôr-ſe.

151 Extrahir a raiz quadrada de hum numero, he buſcar hum numero, que multiplicado por ſi meſmo, dê no producto hum numero igual ao propoſto: extrahir a raiz de 25 he procurar o numero 5, que multiplicado por ſi meſmo, dê o producto 25. Todas as vezes que o numero propoſto, para ſe extrahir a raiz, contiver ſó dous caracteres, ou for menor que 100, ſe póde ſem operação achar a verdadeira raiz, ou a mais aproximada por meio da taboada ſeguinte.

9	8	7	6	5	4	3	2	1
81	64	49	36	25	16	9	4	1

Mas quando os numeros são maiores, a operação he mais embaraçada, o que vamos explicar depois das ſeguintes reflexões, que são neceſſarias para a exacta

acta demonſtração da regra geral da extracção das raizes quadradas.

152 O numero maior, que póde haver de dous caracteres, que he 99, não póde ter na ſua raiz mais que hum caracter; porque ſupponhamos que póde ter dous, ſeja o mais pequeno poſſivel que he 10, elevando 10 a quadrado, veremos que o quadrado 100 he maior que 99: logo qualquer numero, que conſtar de dous caracteres ſós, não póde ter mais que hum na raiz, o que ſe faz viſivel na precedente taboada; aſſim todas as raizes de hum caracter são comprehendidas de 1 até 99 incluſivamente.

153 O maior numero poſſivel, que conſtar de 4 caracteres, não póde ter mais que 2 na raiz: tomemos o maior numero poſſivel de quatro caracteres 9999, ſe lhe ajuntarmos a unidade, fica 10000, que tem 5 caracteres. Supponhamos que eſte numero poſſa ter na ſua raiz o menor numero compoſto de trez caracteres, que he 100, elevo 100 ao ſeu quadrado, que he 10000, maior que o numero 9999: logo não póde a

ſua

ſua raiz conſtar de trez caracteres; de que ſe ſegue, que todas as raizes de dous caracteres ficão comprehendidas de 100 até 9999 incluſivamente.

154 O maior numero de ſeis caracteres não póde ter mais que trez na raiz: tomemos o maior numero de 6 caracteres 999999, e ſupponhamos que póde ter na raiz o mais pequeno numero de 4 caracteres, que he 1000, cujo quadrado 1000000 tem ſete caracteres, e he maior que o numero 999999, e por conſequencia eſte numero não me póde dar trez caracteres na raiz; de que ſe ſegue que as raizes de trez caracteres são comprehendidas de 10000 até 999999 incluſivamente.

155 E continuando a diſcorrer aſſim, veremos que todas as raizes de 4 letras ſe comprehendem de 1000000 até 99999999; que os numeros, ou raizes de 5 caracteres, são comprehendidos de 100000000 até 9999999999 incluſivamente.

Ad-

Advertencia geral.

156 De tudo o que acabamos de dizer se segue, que geralmente fallando hum numero terá tantos caracteres na sua raiz, quantas divisões houver de duas letras da direita á esquerda, excepto a ultima, que póde ter huma.

Assim 99 não póde ter mais que hum caracter na raiz, porque não tem mais que huma divisão; 100, e 9999 terão dous nas suas raizes, porque podem ter duas divisões assim, 1, 00, .99, 99: do mesmo modo 10000, e 999999 terão trez caracteres na raiz, como todos os numeros, que lhe são intermedios, porque dividindo-os em membros de duas letras, temos 1, 00, 00, e 99, 99, 99, e contém cada hum trez divisões. Mais: o quadrado da primeira letra se achará na primeira divisão, o quadrado da segunda na segunda divisão, o quadrado da terceira na terceira divisão, o que concorda, como antecedentemente vimos na formação algebraica do quadrado *. Isto supposto, daremos a regra geral, que applicaremos a varios exemplos.

* Numer. 150.

Re-

Regra geral para a extracção das raizes quadradas.

157 Se nos derem hum numero para ſe extrahir a raiz quadrada, ſe dividirá eſte numero de dous em dous caracteres, excepto a primeira divisão á eſquerda, que póde ficar com hum: buſcaremos o maior quadrado conteúdo na primeira divisão, e a ſua raiz ſerá o primeiro caracter, que ſe porá adiante do numero propoſto, ſeparado delle por huma pequena riſca vertical: eſta primeira raiz ſe elevará ao ſeu quadrado para eſte ſe diminuir da primeira divisão, e o reſto ſe eſcreverá de baixo, e eſtá feita a operação com a primeira divisão. Junto a eſte reſto ſe abaixará a ſegunda divisão, pondo hum ponto de baixo do primeiro caracter da ſegunda divisão: dobrar-ſe ha a raiz achada, e por eſte numero ſe dividirão os caracteres que houver até o primeiro caracter da ſegunda divisão, e o quociente ſe porá á direita do diviſor, e o diviſor augmentado deſte quociente ſe multiplicará pelo meſmo quociente:

ſe

ſe o producto puder diminuir-ſe do reſto, e da ſegunda divisão, o quociente ſerá o ſegundo caracter da raiz, e ſe porá ao pé do primeiro caracter: ſe o producto for maior que os caracteres do reſto, e ſegunda divisão, ſe diminuirá o quociente até que ſe tenha hum producto, que ſe poſſa diminuir dos caracteres, com que ſe faz a operação; e tendo-o achado, teremos o reſto, que deve ficar da diminuição deſte producto.

Abaixaremos a terceira divisão para a direita deſte reſto, pondo hum ponto de baixo do primeiro caracter da terceira divisão; e os caracteres que houver até o primeiro da terceira divisão ſe dividirão pelo dobro do que ſe tem na raiz. Eſte quociente ſe porá tambem ao pé do diviſor; e ſe o producto do diviſor accreſcentado deſte quociente, multiplicado pelo meſmo quociente, for menor que o reſto junto com a terceira divisão, ſerá o quociente o terceiro caracter da raiz, que ſe buſca; e ſe for maior, ſe diminuirá o quociente, até que o quociente com

o di-

o divisor, multiplicado pelo mesmo quociente, dê tudo hum producto menor, ou igual aos caracteres, com que se faz a operação.

Se houver só trez divisões, e tendo diminuido este producto não ficar resto, teremos a raiz, que se pedia: se ha mais, abaixarei a divisão seguinte ao pé do resto, e se fará sempre a mesma operação, tomando por divisor o dobro dos caracteres da raiz achada, e por termos da raiz os que tiverem as condições explicadas assima, a saber que o producto deste numero por si mesmo, e mais o producto do mesmo numero pelo divisor seja menor, ou ao menos igual aos caracteres superiores.

EXEMPLO I.

158 Seja proposto para se lhe extrahir a raiz quadrada o numero 1936: divido este numero em duas divisões de dous caracteres cada huma, escrevendo assim, 19, 36, e digo: o maior quadrado, que he conteúdo em 19, he 16, cuja raiz he 4: ponho 4 na raiz, depois de haver separado o numero 1936

da

da ſua raiz por huma pequena riſca vertical; digo depois: 4 vezes 4 são 16, de 19 reſtão 3; abaixo a ſegunda divisão 36 ao pé do reſto, pondo hum ponto debaixo do primeiro caracter 3 deſta divisão, dobro a raiz achada para ter o diviſor 8, pelo qual divido os dous primeiros caracteres 33 do reſto, e da ſegunda divisão, e digo: 33 contém 8 quatro vezes, ponho 4 junto ao diviſor, que me dá 84, que multiplico pelo meſmo quociente 4, dizendo: 4 vezes 4 são 16, ponho 6, e vai hum, 4 vezes 8 são 32, e 1 33, e o producto he 336, que diminuido de 336, reſta 0, de que concluo que 44 he raiz do quadrado propoſto. Para ver ſe ha engano, elevo 44 a ſeu quadrado, e ſerá o producto 1936, que he o numero propoſto.

Art.

Art. 158.

19,36	44	Raiz.
16	8	Divisor.
3.36	84	Divis. augment.º
336	4	Quociente.
Differença 000	336	Producto.

Prova.

44
44
176
176
1936

EXEMPLO II.

159 Seja proposto para extrahir a raiz o numero 10543009; e depois de o haver dividido de duas em duas letras, e postas, como mostra o exemplo, á esquerda de huma risca vertical, á direita da qual devo pôr a raiz, digo: o maior quadrado, que se contém em 10, he 9, cuja raiz he 3, que ponho na raiz, e levo 3 ao seu quadrado, que dá 9, que diminuo de 10, e resta 1: abaixo a segunda divisão 54 para o pé de

de 1; e obſervando pôr hum pontinho no primeiro caracter 5, e dobrando a raiz achada, tenho o diviſor 6, e digo, em 15 cabem 6 duas vezes: eſcrevo 6 de baixo do diviſor, e lhe ponho diante o quociente 2, e multiplico 62 por 2, e o producto he 124, o qual diminuidos 154, reſtão 30: abaixo a terceira divisão, que he 30, ao pé deſte reſto, pondo hum ponto de baixo do primeiro caracter 3 deſta terceira divisão, e dobro o que tenho na raiz para achar o ſegundo diviſor 64, pelo qual divido os caracteres 303, e digo: em 30 ha 5 vezes 6, ponho 5 ao pé de 64, eſcrevendo 645: multiplico eſte numero por 5; e como o producto 3225 não póde diminuir-ſe de 3030, não póde ſer 5 o diviſor, e deve ſer 4, e eſcrevo 644; e multiplicando eſte numero por 4, o producto he 2576, que como póde ſer diminuido de 3030, moſtra que cabem 4, que ponho na raiz: diminuirei o numero 2576 de 3030, e reſtão 454, ao pé do qual abaixo a quarta divisão, pondo hum ponto de baixo do primeiro caracter o deſta divisão 09 para di-

vi-

vidir 4540 pelo dobro da raiz, que he 648; direi pois: em 45 ha 7 vezes 6, e ponho 7 ao pé do divisor 648, escrevendo 6487, e multiplico este numero por 7, e o producto he 45409, o qual sendo inteiramente igual ao numero 45409, mostra que 7 cabe, e o ponho na raiz, que fica 3247, como já fica mostrado *.

* Numer. 150.

Art. 159.

10,54,30,09	3247	Raiz.
1,54	6	1.º Divisor.
1 24	62	
30,30	2	
2576	124	Producto.
454,09	64	2.º Divisor.
45409	645	
00000	5	
	3225	
	644	
	4	
	2576	Producto.
	648	3.º Divisor.
	6487	
	7	
	45409	Producto.

EXEMPLO III.

160 Seja proposto para extrahir a raiz o numero 867972, divido este numero de dous em dous caracteres, escrevendo-o assim, 86, 79, 72, e digo: o maior quadrado comprehendido em 86 he 81, cuja raiz he 9, que ponho na raiz: elevo 9 a quadrado, e tiro o quadrado 81 de 86, e resta-me 5: abaixo para o pé de 5 a segunda divisão 79, pondo hum ponto de baixo do primeiro caracter 7, e tenho 57 para dividir por 18 dobro de 9 primeira raiz: faço a divisão, e digo: em 5 cabe 1 sinco vezes; mas como facilmente se vê que não póde ser, porque me dará hum producto muito grande, experimento 4, pondo-o depois do divisor, e fica 184, que multiplicado por 4, dá o producto 736, que sendo maior que 579, mostra que não póde ser 4, e assim não o porei na raiz: vejo se cabe 3, pondo 183; e multiplicando este numero por 3, o producto he 549: como este producto he menor que 579, porei 3 na raiz. Tiro depois 549 de 579, e restão

30,

30, e para o lado deste resto abaixo a terceira divisão 72, pondo hum ponto de baixo do primeiro caracter 7 para dividir o numero 3072 por 186 dobro da raiz, e digo: em 3 ha 1 trez vezes; mas como logo vejo que 3 he muito grande, experimento 2, pondo-o ao pé do divisor 186, que me dá 1862, que multiplico por 2, e o producto he 3724; mas como este producto he maior que 3072, concluo que não póde ser 2, e ponho 1 na raiz, que certamente deve caber, pois pondo tambem 1 ao pé do divisor, e multiplicando por 1 o producto, será 1861, menor que 3072: tirarei este numero 1861 de 3072, e resta-me 1211.

Se quizerem tirar a prova desta operação, se quadrará a raiz 931, que se achou ser a do quadrado, e accrescentar-se-lhe-ha o resto 1211, e deve dar hum numero igual ao numero proposto 867972.

Art. 160.

```
86,79,72   931
  579      18 1.º Divisor.
  549      184
   30,72     4
    1861   736
Resto 1211 183
                1
                3
               549 Producto.
               186 2.º Producto.
              1862
                 2
              3724
              1861
                 1
              1861
```

Prova da operação.

```
      931
      931
      931
     2793
    8379
   866761
     1211
   867972
```

Mo-

Modo de aproximar o mais que he possivel a raiz quadrada de hum numero, de que se não póde achar a raiz sem resto por meio das decimaes.

161 Como o principal uso da raiz quadrada na Geometria, especialmente na Geometria pratica, he achar em numeros o lado de hum quadrado igual a huma quantidade de braças, ou palmos quadrados, faz-se preciso para trabalhar com exacção aproximar o mais que he possivel a raiz, que se busca, fazendo de sorte que os restos, que se deixão, sejão de tão pequeno valor, que se possão ter por de nenhuma consequencia. Para isto se deve fazer a seguinte

Regra da aproximação.

162 Ao numero proposto para extrahir a raiz se accrescentarão tantas divisões de duas cifras cada huma, quantas decimaes quizermos que tenha a raiz; e depois de ter separado os inteiros da raiz das decimaes, que se devem seguir, se continuará a extrahir as raizes inteiramente do mesmo modo,

que

que ſe pratica nos numeros inteiros, como ſe verá no ſeguinte exemplo.

8,69,00,00,00	29.4~~78~~	
4,69	4	1.º Diviſor.
441	49	
28,00	9	
23 36	441	
4 6400	58	2.º Diviſor.
4 1209	585	
519100	5	
471584	~~292~~5	
Reſto 447516	584	
	4	
	2336	Producto.
	588	3.º Diviſor.
	5888	
	8	
	~~471~~04	
	5887	
	7	
	41209	Producto.
	5894	4.º Diviſ.
	58948	
	8	
	471584	Se-

163 Seja proposto para se extrahir a raiz o numero 869, até que a raiz não defira hum milhar do seu verdadeiro valor: ajuntar-se-hão ao numero proposto seis cifras, porque quero ter milhares, escrevendo em lugar de 869, 8,69,00,00,00, e depois de divididos de dous em dous, se dirá em 8, qual he o maior quadrado, que póde caber, e he 4, cuja raiz he 2, que ponho na raiz: diminuir-se-ha o quadrado 4 do primeiro caracter 8, e restão 4 ao pé deste resto: ponho a segunda divisão 69, pondo hum ponto de baixo de 6 para conhecer que devo dividir 46 pelo divisor 4 dobro da raiz; direi logo: em 46 ha 4 vezes 9, e porei 9 ao pé do divisor 4, e de baixo delle, e multiplico 49 por 9, e o producto he 441, menor que 469, o que mostra que 9 he hum dos caracteres da raiz: tiro 441 de 469, e o resto he 28: abaixo para o lado deste resto a primeira divisão de cifras decimaes, pondo hum ponto de baixo da primeira para denotar que 280 he que devo dividir pelo numero 58 dobro da raiz: faço a divi-

são,

são, e digo: em 28 ha 5 vezes 5, e ponho 5 ao pé do divisor 58, e de baixo, e multiplico 585 por 5, e o producto he 2925, que sendo maior que 2800, denota que não póde caber 5 na raiz: tómo 4, escrevo 584, que multiplico por 4, e o producto he 2336; e como he menor que 2800, denota que 4 he bom, e o ponho na raiz, depois de haver separado com hum ponto os 29 inteiros dos decimaes: o producto 2336 diminuido de 2800 me dá o resto 464, para o pé do qual abaixo a segunda divisão de decimaes, pondo hum ponto de baixo da primeira cifra: divido 4640 por 588 dobro da raiz, e digo: em 46 quantas vezes ha 5? e ha 8, ponho 8 ao lado do divisor 588, e de baixo do mesmo divisor, e multiplico 5888 por 8; e como o producto 47104 he maior que 46400, mostra que 8 não póde entrar na raiz: tómo pois 7, que ponho ao pé do divisor, e por baixo delle, e depois de multiplicar 587 por 7, porque o producto 41209 he menor que 46400, ponho 7 na raiz: diminuo o producto 41209 de 46400,

e ao

e ao resto 5191 accrescento as cifras da ultima divisão, pondo hum ponto na primeira cifra para dividir 51910 por 5894, dobro do que se tem achado na raiz: faço a divisão, dizendo: em 51 ha nove vezes 5; mas como logo vejo que 9 me dará hum producto muito grande, passo a 8: ponho 8 no dividendo, e de baixo delle, e multiplicando 58948 por 8, será o producto 471584, que como he menor que o numero 519100, ponho 8 na raiz, que vem a ficar 29.478, ou, o que vem a ser o mesmo, 29 inteiros $+\frac{478}{1000}$.

164 Se suppuzermos que o numero 869 seja hum numero de braças quadradas, o que se acha nos numeros inteiros da raiz são braças lineares; e o numero, que se acha nas decimaes, são partes de braças lineares, como palmos, pollegadas, linhas, &c. Para saber quantos palmos vale o quebrado decimal $\frac{478}{1000}$, ou 0.478, se multiplicará pela regra * o numero 478 por 10, que denota os palmos, que contém a braça, e o

* Numer. 131.

e o resto por 8, que nota as pollegadas, que contém o palmo, e o resto ainda por 12, que são as linhas, que contém huma pollegada; e conforme isto todos os numeros, que se achão nas decimaes, notarão as partes da braça, que se pedem, que são 4 palmos, 6 pollegadas, 2 linhas, 10 pontos, ou se quizerem attender ao resto, que se deixou nas decimaes, 4 palmos, 6 pollegadas, e 3 linhas: a raiz do numero 869 braças he logo 29 braças, 4 palmos, 6 pollegadas, e 3 linhas.

165 Se nos dessem para extrahir a raiz hum numero composto de braças, palmos, e pollegadas, como por exemplo a do numero 24 braças, 4 palmos, e 6 pollegadas, seria preciso reduzir os quebrados $\frac{4}{10}$, e $\frac{6}{80}$ de braças, que he o mesmo que 4 palmos, 6 pollegadas a quebrados decimaes da braça, conforme o methodo dado *; e da somma destas duas fracções decimaes, e do numero proposto fazer hum só numero, que se achará 24.5750, de que se extrahirá a raiz, conforme os modos en-

* Numer. 128.

si-

ſinados, e eſta raiz ſe achará ſer 4.95, iſto he, 4 braças, e $\frac{95}{100}$ de braça, a que ſe achará o valor, conforme o que fica dito *, e ſe achará 9 palmos, e 4 pollegadas. * Numer. 132.

Demonſtração da raiz quadrada.

166 Para demonſtrar as operações precedentes, extrahiremos agora a raiz quadrada do numero 676, e daremos a razão de cada huma das operações.

Vimos já nos Art. 152, 153, 154, e 155 a razão, por que o numero dado ſe divide de dous em dous caracteres, e que cada divisão deve dar hum caracter na raiz. Iſto ſuppoſto, para extrahir a raiz de 676, depois de haver dividido o numero de dous em dous caracteres, excepto a primeira, que contém 1, digo: a raiz quadrada de 6 he 2, que ponho na raiz, e que vale 20, pois deve haver dous caracteres na raiz, de que 2 he o primeiro: logo quando eu faço o quadrado de 2, e que tiro 4 de 6, faço o meſmo que ſe fizeſſe quadrado de 20, e diminue-ſe 400 de 600,

pois

pois 6 realmente vale 600: conforme a regra, abaixo a ſegunda divisão para o pé do reſto 2, e tenho 276, ponho hum ponto de baixo de 7, porque já moſtrámos que o dobro do primeiro termo multiplicado pelo ſegundo deve eſtar nos dous primeiros caracteres 27 *; mas já tenho o dobro do primeiro, e eſte numero 27 contém o dobro do primeiro multiplicado pelo ſegundo: logo dividindo 27 pelo dobro do primeiro, devo achar o ſegundo: faço a divisão, e digo: em 27 ha 4 vezes 6, ponho 6 ao pé, e de baixo do diviſor, conforme a regra, o que pela multiplicação me ha de dar neceſſariamente o quadrado de 6, o qual tambem deve ſer conteúdo neſtes dous caracteres; digo pois: 6 vezes 6 são 36, ponho 6, e conſervo 3, 6 vezes 4 são 24, e 3 fazem 27, e o producto he 276: logo 6 he o ſegundo caracter da raiz: logo a raiz he 26, pois o numero propoſto contém o quadrado do primeiro 2, ou 20, que he 400, e o dobro do primeiro 40 multiplicado por 6, ou 240, e em fim o quadrado 36 do ſegundo.

*Numer. 150.

Eſte

Este mesmo discurso, que fazemos ácerca de huma raiz de dous caracteres, se póde applicar a qualquer outra, porque qualquer numero de caracteres se póde dividir em duas partes, das quaes a primeira contenha todos os caracteres, menos o ultimo da direita, e a segunda contenha este ultimo caracter. Desta maneira se verá, que quando se tiver achado a raiz dos primeiros caracteres, o resto que ficar junto com a ultima divisão deve conter o dobro dos primeiros caracteres, multiplicado pelo ultimo, e mais o quadrado do ultimo. Além disso este dobro do producto sempre será posto de modo que os caracteres significativos do mesmo producto sempre se terminarão no primeiro caracter da ultima divisão: logo fazendo a divisão, se deve achar o ultimo caracter. Isto tambem se póde demonstrar independentemente desta supposição pela formação do quadrado, que já fica explicado *; e não ha cousa melhor que recorrer a isso para ver de que modo se deduzio desta formação a regra, que acabamos

* Numer. 150.

de

de mostrar, e nisto he que consiste o genio de Geometra, e pelo estudo do modo de compôr as quantidades he que se adquire a grande arte de as desmanchar. Chamo-lhe grande arte, porque he o mais difficil de toda a Geometria, e a resolução das quantidades he o seu objecto em todos os methodos de calculos, que se propõem.

Da formação do cubo de huma quantidade complexa, e da extracção da raiz cubica das quantidades algebraicas, e numericas.

*Num.61. 167 Já vimos no * que o cubo de huma quantidade, composta de dous termos, contém o cubo do primeiro termo, o cubo do segundo, e mais dous parallelipipedos, dos quaes o primeiro tem por base o triplo do quadrado do primeiro, e por altura o segundo termo; e o outro tem por base o triplo do quadrado do segundo, e por altura o primeiro, e he o que geralmente demonstramos, elevando $a+b$ ao seu cubo, que achámos ser $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

O

168 O cubo de huma quantidade, composta de trez termos, ou de quatro termos, se achará do mesmo modo, multiplicando esta quantidade duas vezes por si mesma; mas póde-se achar mais facilmente, reduzindo a quantidade á expressão geral de $a+b$, que póde representar qualquer quantidade complexa, fazendo por exemplo nesta $c+d+f+g$, $c+d=a$, e $f+g=b$, e eisaqui o modo, com que se eleva logo esta quantidade $c+d+f+g$ a cubo, toma-se o cubo de $c+d$, que he $c^3+d^3+3c^2d+3cd^2$: do mesmo modo o cubo $f+g$, que he $f^3+3f^2g+3fg^2+g^3$, depois se toma o triplo do quadrado de $c+d$, que se achará $3c^2+6cd+3d^2$, que se multiplicará por $f+g$, o que dará $3c^2f+6cdf+3d^2f+3c^2g+6cdg+3d^2g$: tomar-se-ha tambem o triplo do quadrado de $f+g$, que será $3ff+6fg+3g^2$, que se multiplicará por $c+d$, e será $3cff+6cfg+3cg^2+3dff+6dfg+3dg^2$; e sommando todos estes productos, teremos o cubo total da quantidade $c+d+f+g$ a quantidade $c^3+3c^2d+3cd^2+d^3+f^3+3f^2g+3fg^2+g^3+3c^2f+6cdf+3d^2f+3c^2g+6cdg$

+

$+3d^2g+3cff+6cfg+3cg^2+3dff+6dfg+3dg^2$.

169 Quando este methodo não tivesse a ventagem de ser mais expedito, e menos sujeito a erro, faz-se aqui necessario para mostrar o como se póde reduzir a formação do cubo de huma quantidade complexa dos termos, que quizerem a formação do cubo do binomio $a+b$, e para mostrar semelhantemente como a extracção da raiz cubica dos mesmos polynomios se assemelha á extracção da raiz cubica de $a+b$.

Pela mesma razão, se quizermos elevar ao cubo a quantidade complexa $3c+2d+5f$, faremos $3c+2d=a$, e $5f=b$. Isto supposto, buscaremos logo a^3, o que se fará elevando a cubo o binomio $3c+2d$, conforme a regra do binomio $a+b$, e he $27c^3+54c^2d+36cd^2+8d^3$: buscar-se-ha depois o triplo do quadrado do primeiro termo, multiplicado pelo segundo, ou $3a^2b$, que he $135c^2f+180cdf+60d^2f$. Do mesmo modo tomaremos o triplo do quadrado do segundo multiplicado pelo primeiro, ou $3ab^2$, que se acharia ser $225cf^2+150$

df^2.

df^2. Em fim teremos o cubo do ſegundo termo $125f^3$; e ſommando todas eſtas quantidades, teremos o cubo do trinomio $3c+2d+5f=27c^3+54c^2d+36cd^2+8d^3+135c^2f+180cdf+60d^2f+225cf^2+150df^2+125f^3$.

Da extracção das raizes cubicas das quantidades algebraicas.

REGRA GERAL.

170 Para extrahir a raiz cubica de huma quantidade algebraica, he preciſo tomar a raiz cubica de hum dos termos deſta quantidade, que for cubo perfeito, e eſcrevello na raiz. Para ter o ſegundo termo da raiz, ſe tomará o triplo do quadrado deſte primeiro termo achado na raiz, e por eſta quantidade ſe dividirá hum termo do polynomio, que poſſa dar hum quociente exacto. Com eſte diviſor ſe deve ſommar o triplo do primeiro termo multiplicado pelo quociente, que ſe achar, e o quadrado do meſmo quociente, e multiplicar tudo pelo quociente; e ſe o polynomio propoſto he cubo perfei-

to, e ſó tem quatro termos, eſte producto deve ſer igual ao reſto, depois de tirado o cubo do primeiro termo.

EXEMPLO I.

171 Seja propoſto para ſe extrahir a raiz cubica o polynomio $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$: depois de eſcrever eſta quantidade á eſquerda de huma riſca vertical, como ſe vê no exemplo, digo: a raiz cubica de a^3 he a, que ponho na raiz, elevo eſta raiz ao ſeu cubo; e tirando a^3 da quantidade propoſta, fica-me o reſto $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Para ter o ſegundo termo da raiz elevo a raiz a ao ſeu quadrado, e o triplo $3a^2$ me ſerve de diviſor, que ponho de baixo da raiz: buſco no reſto hum termo diviſivel por $3a^2$, e vejo que o primeiro reſto $3a^2b$ he diviſivel por $3a^2$, e me dá b no quociente: de baixo do diviſor $3a^2$ eſcrevo a quantidade ſeguinte $3a^2 + 3ab + b^2$, que contém o triplo do quadrado do primeiro termo, o triplo do primeiro pelo ſegundo, e o quadrado do ſegundo, ou do quociente b, e multiplico eſta quantidade pelo meſmo quociente b, e

te-

terei $3a^2b+3ab^2+b^3$, que he igual ao resto, e mostra que b he o segundo termo da raiz, o qual porei depois de a, o que me dá $a+b=$ á raiz cubica pedida.

Art. 171.

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$a+b$ Raiz.
$-a^3$	$3a^2$ Divisor.
Resto $3a^2b+3ab^2+b^3$	$3a^2+3ab+b^2$
Dim. $-3a^2b-3ab^2-b^3$	b
0 0 0	$3a^2b+3ab^2+b^3$
	Producto.

EXEMPLO II.

172 Seja-nos proposta para extrahir a raiz cubica da quantidade $27c^3+54c^2d+36cd^2+8d^3$, tendo escrito esta quantidade á esquerda de huma risca vertical, da outra parte da qual escrevo a raiz, digo: a raiz cubica de $27c^3$ he $3c$, pois elevando $3c$ ao cubo, acho $27c^3$: tiro este cubo da quantidade proposta, e o resto he $54c^2d+36cd^2+8d^3$: triplico o quadrado da primeira raiz, e tenho por divisor $27c^2$, e busco no resto hum termo, que seja divisivel por

$27c^2$, e acho $54c^2d$, que me dá o quociente $2d$: escrevo de baixo do divisor o mesmo divisor $27c^2$ com os termos seguintes $+18cd+4dd$, e multiplico esta quantidade pelo quociente $2d$; e como o producto he $54c^2d+36cd^2+8d^3$ igual ao resto, concluo que $2d$ he o segundo termo, que busco, e ponho na raiz, que he $3c+2d$.

Art. 172.

$27c^3+54c^2d+36cd^2+8d^3-27c^3$.	$3c+2d$ Raiz.
Resto $54c^2d+36cd^2+8d^3-54c^2d-36cd^2-8d^3$.	$27c^2$ Divisor.
	$27c^2+18cd+4dd$
	$2d$
	$54c^2d+36cd^2+8d^3$
o o o	Producto.

173 Se a quantidade houver de ter mais de 2 termos na raiz, se seguirá sempre o mesmo methodo, isto he, tomar-se-ha por divisor o triplo do quadrado do que se achou para dividir por elle o resto desta quantidade, com o quociente que se achar, se trabalhará do mesmo modo, que se trabalhou com o segundo termo da raiz. Por exemplo:

se

ſe nos propuzerem para extrahir a raiz cubica a quantidade $27c^3+54c^2d+36cd^2+8d^3+135c^2f+180dcf+60d^2f+225cf^2+150df^2+125f^3$, depois de ter achado os dous primeiros termos da raiz $3c+2d$ com o reſto $135c^2f$, &c. da raiz, ſe deve tomar por diviſor o triplo do quadrado do que já eſtá na raiz, e ſe achará ſer $27c^2+36cd+12dd$: buſcar-ſe-ha pois hum termo, que ſeja diviſivel por $27c^2$, o qual termo he o primeiro do ultimo reſto, ou $135c^2f$, que dividido por $27c^2$, dá $5f$ no quociente: eſcrevo de baixo do diviſor eſte meſmo diviſor com as quantidades ſeguintes $45cf+30df+25ff$, das quaes duas primeiras são o triplo da raiz multiplicado pelo quociente $5f$, e a terceira he o quadrado do meſmo quociente $5f$: toda eſta quantidade multiplico por $5f$; e como o producto que reſulta deſtroe todos os termos do producto, trocando os ſinaes $+$ em $-$, concluo que $5f$ he o terceiro termo da raiz, que eſcrevo depois dos outros.

Art.

Art. 173.

Resto $135c^2f+180dcf+60d^2f+225cf^2+150df^2+125f^3-135c^2f-180dcf-60d^2f-225cf^2-150df^2-125f^3$.

$$\begin{array}{l|l} 3c+2d+5f & \text{Raiz.} \\ \hline 27c^2+36cd+12dd & \\ +45cf+30df+25ff & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 5f & \\ \hline 135c^2f+180cdf+ & \\ 60d^2f+225cf^2+ & \\ 150df^2+125f^3. & \end{array}$$

DEMONSTRAÇÃO.

Esta pratica traz comsigo mesmo a demonstração, pois he evidente que seguindo-a, se conhece que a quantidade proposta he hum cubo, pois desta quantidade se tirão todas as partes, que formão o cubo de huma quantidade complexa. Quem tiver hum pouco de uso do calculo logo á primeira vista conhece se a quantidade he, ou não cubo perfeito; porque se a quantidade contém só 2, 3, 5, 6, 7, 8, ou 9 termos, não he cubo perfeito, porque não póde ser cubo, senão de hum binomio, ou trinomio, ou de outra quantidade mais complicada; o binomio tem no cubo só 4 termos, o trinomio 10:

lo-

logo o que tiver os numeros intermedios não he cubo.

Da formação algebraica do cubo de qualquer numero, e da extracção da raiz cubica das quantidades numericas.

174 Pàra elevar hum numero, como 47, ao ſeu cubo, ſe póde fazer de dous modos, ou multiplicando 47 por ſi meſmo para ter o quadrado 2209, e tornar a multiplicar o quadrado por 47, que dará 103823, ou ſervindo da expreſſão $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, e para iſto ſe toma 47, como huma quantidade complexa, que ſe repreſenta por $a+b$, a ſaber, 40 por a, e 7 por b, o que me dá $40+7=a+b$: buſcarei a^3, elevando 40 ao cubo, e terei $a^3=64000$: depois tómo o triplo do quadrado de 40, que multiplico por 7 para ter $3a^2b$, o que me dá $3a^2b=33600$: ſemelhantemente buſco $3ab^2$, ou o triplo do primeiro multiplicado pelo quadrado do ſegundo, o que dá $3ab^2=5880$: finalmente por b^3 tenho $b^3=343$; e pondo todas eſtas igualdades, teremos

$$64{,}000 = a^3$$
$$33{,}600 = 3a^2b$$
$$5{,}880 = 3ab^2$$
$$343 = b^3$$
$$\overline{103{,}823 = \overline{a+b}^3}$$

Sobre o que he de notar. *Primeiro.* Que dividindo os productos particulares, e o cubo total de trez em trez caracteres, excepto a ultima divisão da esquerda, que póde conter duas, ou huma, o numero 64, cubo do primeiro 4 da quantidade 47, tem depois de si tantas divisões de trez caracteres, quantos caracteres ha depois delle na raiz, a saber, huma divisão, 000 depois de 64, e hum caracter 7 depois de 4 em 47.

Segundo. Que o producto representado por $3a^2b$ está posto de modo, que o triplo do quadrado de 4, ou de 16, que he 48 multiplicado por 7, ou 336, tem duas cifras depois de si: logo tambem no cubo total terá dous caracteres depois de si, e será conteúdo nos caracteres, que se terminão até ao caracter 8, primeiro da segunda divisão.

Ter-

Terceiro. Que o producto representado por $3ab^2$, ou o triplo 12 do primeiro caracter 4, multiplicado por 49 quadrado do segundo, tem huma divisão depois de si, pois he 5880, e que em fim o cubo do segundo caracter 7 está todo inteiro na segunda divisão.

Isto supposto, fica facil de entender a razão do methodo da extracção da raiz cubica, que vamos dar, depois de algumas reflexões, que são absolutamente necessarias, para que não fique nada por entender nesta materia.

Para extrahir a raiz cubica de qualquer quantidade, devem-se conhecer os cubos dos nove primeiros caracteres, o que se conhecerá por meio da seguinte taboada, que basta, quando os numeros propostos não tem mais que trez caracteres.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

175 Notar-se-ha que o maior numero, que só tem trez caracteres, não póde ter na sua raiz mais que hum, por-

porque o maior numero, que tem 3 caracteres, he 999, e o menor de todos de 2 he 10; mas o cubo de 10 he 1000, que tem 4 caracteres: logo todas as raizes cubicas de hum caracter ficão comprehendidas inclusivamente de 1 até 999.

176 O numero maior, que tiver seis caracteres, não póde ter mais que dous na raiz; o maior numero de seis caracteres he 999999, e o mais pequeno de trez caracteres he 100, cujo cubo he 1000000, que tem sete caracteres, o qual he maior que 999999: assim todas as raizes cubicas de dous caracteres são dos numeros 1000 até 999999 inclusivamente.

177 O maior numero de nove caracteres não póde ter mais que trez na raiz cubica, porque o maior numero de 9 caracteres he 999999999, e a menor raiz de quatro letras he 1000, cujo cubo he 1000000000, que contém 10, e he necessariamente maior que 999999999, de que se segue que todas as raizes cubicas de trez letras ficão comprehendidas inclusivamente do numero 1000000 até 999999999.

178 E continuando a discorrer deste modo, se verá que geralmente hum numero proposto deve ter tantos caracteres na sua raiz cubica, quantas divisões puder ter de trez caracteres cada huma, excepto a primeira á esquerda, que póde conter duas, ou huma só, que sempre se toma por huma divisão, porque 999 dá só hum caracter na raiz, como se mostra *, e este numero contém huma divisão de trez caracteres; 1000 dá dous caracteres na raiz cubica, porque além da divisão de trez cifras, contém outra de hum caracter. Do mesmo modo 999999 não póde ter mais de dous caracteres na raiz, assim como todos os intermedios entre 1000, e 999999, porque só contém duas divisões, e assim as outras. Supposto tudo isto, vamos dar a regra geral, e applicalla a alguns exemplos.

* Numer. 179.

Regra geral para a extracção da raiz cubica das quantidades numericas.

179 *Primeiro.* Começar-se-ha dividindo o numero dado em divisões de trez

trez caracteres cada huma, tendo por huma divisão a primeira á esquerda, que poderá conter dous caracteres, ou hum só.

180 Depois se buscará o maior cubo, que póde caber na primeira divisão á esquerda, e se lhe tirará a raiz, que se porá á direita do numero proposto, depois de o ter separado da raiz com huma risca vertical, e esta raiz se elevará ao seu cubo, que se diminuirá da primeira divisão, e ficará acabada a operação com esta divisão.

Terceiro. Ao pé do resto que ficar, tirando o cubo do primeiro caracter, se abaixará a segunda divisão, observando por hum ponto de baixo da primeira letra desta segunda divisão: para ter o segundo termo da raiz, far-se-ha o quadrado da primeira raiz, e se tomará trez vezes, que será o divisor, de que nos serviremos para achar o segundo termo da raiz.

Quarto. Dividir-se-hão os caracteres que houver até áquelle, em que se poz o ponto por este divisor achado, e ter-se-ha o quociente, que se exami-

na-

nará como ſe ſegue antes de o pôr na raiz: ajuntaremos os productos repreſentados por $3a^2b+3ab^2+b^3$, iſto he, o producto do diviſor pelo caracter, que ſe examina, o triplo do primeiro termo da raiz pelo quadrado do meſmo caracter, e em fim o cubo deſte meſmo caracter, obſervando pollos antes da ſomma, de ſorte que ſe excedão todos hum caracter para a direita: tiraremos eſta ſomma da ſegunda divisão junto com o reſto que ficou; e ſe ſe puder diminuir, ſe porá o caracter na raiz, quando não ſe diminuirá huma unidade, até que a ſomma deſtes productos ſeja menor, ou ao menos igual aos caracteres, a que ſe faz a operação. Se o numero propoſto tem ſó duas divisões, eſtá feita a extracção, e a raiz ſerá exactamente a raiz, que ſe buſca, ſe a diminuição não deo reſto. Se o numero tiver mais divisões, ſe abaixará huma depois da outra para diante do ultimo reſto, determinando os diviſores, e os caracteres, que ſe devem pôr na raiz, como ſe fez com o ſegundo da meſma raiz.

Ex.

EXEMPLO I.

180 Seja-nos dado para extrahir a raiz cubica o numero 103823. Depois de haver dividido eſte numero de trez em trez caracteres, digo: em 103 o maior cubo, que ſe póde conter he o cubo 64, (como ſe póde ver na taboada dos cubos) cuja raiz cubica he 4: ponho 4 na raiz á direita do numero propoſto, depois de haver ſeparado com huma riſca vertical, e diminuo o cubo 64 deſta raiz 4 de 103, e o reſto he 39: abaixo a ſegunda divisão 823 para diante do reſto 39, pondo hum ponto de baixo no primeiro caracter 8 para denotar que 398 he o que ha de ſer dividendo, que contém o triplo do quadrado do primeiro termo multiplicado pelo ſegundo. Para achar o ſegundo termo triplico o quadrado de 4, e acho 48 para diviſor, pelo qual divido 398, imaginando o caracter 8 do diviſor de baixo do caracter 8 do dividendo parcial, e digo: em 39 quantas vezes ha 4? acho 9 vezes; mas como logo vejo que 9 não caberia, exami-

no

no 8, ainda que ſei muito bem que nem ainda he o que ſe buſca, mas para moſtrar o modo, com que ſe faz eſte exame. Multiplico o diviſor por 8, e tenho 384, que me repreſenta o producto deſignado por $3a^2b$: depois multiplico o numero 12 triplo da raiz por 64 quadrado de 8, e o producto 768 eſcrevo de baixo de 384, de ſorte que exceda hum caracter para a direita, e eſte numero me repreſenta $3ab^2$; finalmente faço o cubo de 8, que he 512, que eſcrevo de baixo do ſegundo producto, de maneira que o caracter 2 exceda mais hum lugar na direita ao ultimo caracter 8 deſte ſegundo producto: ſommo eſtes trez productos; e como a ſomma 46592 he maior que o reſto junto com a ſegunda divisão 39823, concluo que 8 não he bom: diminuo huma unidade, e examino 7 do meſmo modo: multiplico o diviſor 48 por 7, e tenho 336, que me repreſenta o producto deſignado por $3a^2b$, depois multiplico 12 triplo do que temos na raiz por 49 quadrado de 7, e tenho o producto 588, que eſcrevo de ſorte que o ultimo ca-

ra-

racter 8 exceda o ultimo ſuperior hum lugar á direita, e eſte producto me denota $3ab^2$; em fim faço o cubo de 7, que he 343, que tambem eſcrevo de baixo do ſegundo producto, de ſorte que o ultimo caracter 3 ſaia mais hum lugar á direita que o ultimo ſuperior: ſommo eſtes productos; e como a ſua ſomma 39823 he igual ao numero, com que faço a operação, concluo que 7 he bom, e o ponho na raiz, que acho ſer 47, como já conſta do *.

* Numer. 174.

Art. 180.

103,823	47	Raiz.
64	$48 = 3a^2$	Diviſor.
39,823	$384 = 3a^2b$	
39,823	$768 = 3ab^2$	
00 000	$512 = b^3$	
	$46592 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
	48 $3a^2$	Diviſor.
	$336 = 3a^2b$	
	$588 = 3ab^2$	
	$343 = b^3$	
	$39823 = 3ab^2 + 3a^2b + b^3$	

Ex.

EXEMPLO II.

181 Seja dado para extrahir a raiz cubica o numero 99865243. Depois de fazer as divisões de trez letras, começando da direita, busco a raiz cubica de 99,865 inteiramente do mesmo modo que no exemplo precedente, não fazendo por ora caso da terceira divisão 243, e digo: em 99 o maior cubo que póde caber he 64, que tirado de 99 restão 35, e não tenho mais operação com a primeira divisão: abaixo a segunda divisão, pondo hum ponto de baixo do primeiro caracter desta divisão, para denotar que o numero 358 contém o triplo do quadrado do primeiro termo multiplicado pelo segundo: triplico o quadrado do que tenho na raiz, e tenho o divisor 48, o qual deve dividir 358 para ter o segundo caracter da raiz: dividindo pois 358 por 48, digo: em 35 ha 4 oito vezes; mas nem 8, nem 7 podem entrar na raiz, porque examinando 7, como no exemplo antecedente, se verá que os productos denotados por $3a^2b+3ab^2+b^3$, que

ſe devem diminuir do reſto com a ſegunda divisão, dão hum numero muito maior: multiplico pois o diviſor por 6 para ter o producto 288 denotado por $3a^2b$, depois multiplico o triplo do que tenho na raiz, ou 12 pelo quadrado de 6, que he 36, e tenho 432, que me repreſenta $3ab^2$, e eſcrevo de baixo do primeiro producto de maneira que o ultimo caracter ſaia hum lugar mais á direita que o ultimo do antecedente: finalmente eſcrevo o cubo de 6, que he 216, de modo que 6 tambem ſaia hum lugar mais á direita; e ſommando todos eſtes productos, diminuo a ſomma 33336 de 35865, pois he menor, de que concluo que 6 póde entrar na raiz, em que o eſcrevo, e o reſto, feita a diminuição, he 2529. Senão tiveſſemos a terceira divisão, eſtava a operação acabada, e ſeria a raiz 46 com o reſto 2529, que não póde dar unidade inteira; mas como temos outra divisão, he preciſo achar o terceiro caracter deſta raiz, para iſto quadro á parte 46, e acho ſer o ſeu quadrado 2116, de que tómo o triplo, ou 6348, pelo qual de-

vo

vo dividir o resto, que me ficou com o primeiro caracter da terceira divisão, para o que abaixo a terceira divisão 243 para o pé do resto 2529, pondo hum ponto de baixo do primeiro caracter 2, e divido 25292 por 6348, dizendo: em 25 cabem 6 quatro vezes; mas fazendo o exame como no exemplo, se verá que 4 não póde caber na raiz, e assim examino 3: tómo logo o producto do divisor por 3, que he 19044, que me representa $3a^2b$, depois tómo o triplo do que tenho na raiz, que multiplico por 9 quadrado de 3; e feita a multiplicação, acharei 1242, que ponho de baixo do outro producto, excedendo-o hum lugar á direita, e este producto me representa $3ab^2$: finalmente escrevo de baixo deste segundo producto tambem, excedendo o seu ultimo caracter hum lugar para a direita do antecedente, o cubo de 3, ou 27, e sommando estes trez productos, acho 1916847; e como esta somma he menor que 2529243, concluo que 3 póde caber na raiz, onde o escrevo: diminuo este ultimo producto de 2529243,

e o resto he 612396, que não póde dar mais unidade na raiz, e deste modo ficará acabada a operação.

Art. 181.

99,865,243	463	Raiz.
64	48 $= 3a^2$	1.º Divisor.
35 865	288 $= 3a^2b$	
33 336	0432 $= 3ab^2$	
2 529 243	216 $= b^3$	
1 916 847	33336 $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
612 396	6348 $= 3a^2$	2.º Divis.
	19044 $= 3a^2b$	
	1242 $= 3ab^2$	
	27 $= b^2$	
	1916847 $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	

Modo de aproximar o mais que he possivel huma raiz cubica por meio das decimaes.

182 Ao numero proposto, para se lhe extrahir a raiz cubica, se lhe accrescentarão tantas divisões de trez cifras cada huma, quantos decimaes quizermos que tenha a raiz: depois se extra-

trahirá a raiz do numero propoſto, como no exemplo adiante; e depois de lhe achar o reſto, pois a raiz não he juſta, ſe lhe abaixará a primeira divisão de cifras, e ſe fará a operação com eſta parte, como com numeros inteiros, e ſe examinarão os caracteres, que ſe devem pôr na raiz, como nos numeros inteiros, inteiramente do meſmo modo, o qne baſtantemente moſtra o exemplo ſeguinte, no qual nos contentamos em indicar as operações ſem as averiguar.

183 Se ſuppuzermos que 694 ſeja hum numero de braças, de que queremos ſaber a raiz em braças, palmos, e pollegadas, ſerá preciſo reduzir as decimaes 853 a valor conhecido, conforme diſſemos *, multiplicando o numero 0.853 por 10, tomando os inteiros por palmos, e multiplicando o reſto por 8 para ter as pollegadas, e aſſim para as linhas, e pontos; e trabalhando deſte modo, ſe verá que a raiz cubica de 694 braças cubicas he 8 braças, 8 palmos, 4 pollegadas, 2 linhas, e 10 pontos.

* Numer. 131.

Se

184 Se pelo contrario nos deſſem, para extrahir a raiz cubica, hum numero, que tiveſſe braças, palmos, e pollegadas, ſer-nos-hia preciſo buſcar hum quebrado decimal de braça igual aos palmos, pollegadas, linhas, &c., que eſtão juntas ao numero inteiro, e buſcar a raiz pelas regras precedentes, e a raiz que ſahiſſe ſeria a que ſe buſcava, expreſſada em braças, e partes decimaes de braça, que ſe reduzirião a palmos, pollegadas, linhas, e pontos, conforme o methodo do *.

*Numer. 131.

Art. 182.

694,000,000,000	8.853 Raiz.
512	192 $= 3a^2$ 1.º Diviſor.
182 000	1536 $= 3a^2b$
169 472	1536 $= 3ab^2$
12 528 000	512 $= b^3$
11 682 125	169472 $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
845 875 000	23232 $= 3a^2$ 2.º Diviſor.
705 141 477	116160 $= 3a^2b$
	6600 $= 3ab^2$
	125 $= b^3$
	11682125 $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$2349675 = 3a^2$ 3.º Divisor.

$7049025 = 3a^2b$

$23895 = 3ab^2$

$27 = b^3$

$705141477 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Demonstração da raiz cubica.

185 O cubo de qualquer numero póde ser considerado como o de hum binomio, de que o primeiro termo represente todos os caracteres, excepto o primeiro á direita, e o segundo represente este primeiro; mas o cubo de hum binomio contém o cubo do primeiro termo, o triplo do quadrado do primeiro pelo segundo, o triplo do primeiro pelo quadrado do segundo, e o cubo do segundo: logo não ha mais que mostrar que no methodo proposto se determinão todas estas partes, de que se compõe o cubo, o que facilmente se conhece; porque no primeiro exemplo, quando ponho 4 na raiz cubica, como sei que deve ter dous caracteres, ponho realmente 40, cujo cubo he 64000, que diminuo de 10383, e o

res-

resto he 39823: triplico depois o quadrado de 4, e divido 398 por 48, como se dividisse 39823 por 4800, pois 8 he o primeiro caracter da segunda divisão. Ora he certo que o quociente que sahir he o segundo termo da raiz, pois o triplo do quadrado do primeiro termo multiplicado pelo segundo deve ter dous caracteres depois de si. Além disso pelo modo, com que escrevo o producto do triplo do primeiro termo pelo quadrado do segundo, adiantando-o hum lugar para a direita, diminuo o triplo do quadrado do segundo termo pelo primeiro, pois não deve ter mais que hum caracter depois de si, e em fim tiro o cubo do segundo termo, do que se segue que tenho tirado do numero proposto todas as partes, que formão hum cubo; e se o cubo he perfeito, não deve haver resto depois da diminuição da somma destes trez productos: se o cubo he imperfeito, se toma sempre o mais proximo com alguma diminuição; mas ficamos certos pela prova que se faz que a raiz achada não differe huma unidade da

que

que ſe buſca, pois ſe ſe lhe accreſcentaſſe huma unidade, o cubo da raiz ſeria maior que o cubo propoſto.

O meſmo diſcurſo ſe póde applicar a huma raiz de qualquer numero de caracteres que quizermos, pois os caracteres achados ſe podem tomar como o primeiro termo da raiz, e o que reſta como ſegundo, conſiderando o numero propoſto, como ſe tiveſſe ſó duas divisões.

A prova da extracção das raizes quadradas, e cubicas ſe faz, elevando as raizes quadradas, e cubicas ao quadrado, e cubo: ſe o numero propoſto for quadrado, ou cubo perfeito, ſe deve achar, multiplicando a raiz huma, ou duas vezes por ſi meſmo hum numero igual ao primeiro: ſe os numeros não são quadrados, ou cubos perfeitos, ajuntando o reſto com a meſma potencia da raiz, deve dar o numero propoſto.

Da

Da extracção das raizes quadradas, e cubicas dos quebrados numericos.

186 Para extrahir a raiz quadrada de hum quebrado numerico he preciso extrahir a raiz do numerador, e do denominador, e das duas raizes fazer hum novo quebrado, que será o que se pede, assim a raiz de $\frac{16}{25}$ he $\frac{4}{5}$, e o mesmo dos outros. A razão he, porque o quadrado de hum quebrado se faz, multiplicando o numerador por si mesmo, como tambem o denominador: logo para extrahir as raizes se deve tomar a do denominador, e a do numerador.

187 Quando o denominador do quebrado não he quadrado, se multiplica o denominador, e o numerador pelo mesmo denominador, deste modo o quebrado não mudou de valor, e fica o denominador hum perfeito quadrado, o que contribue muito para determinar o valor da raiz fraccionaria; assim para extrahir a raiz quadrada de $\frac{3}{8}$ multiplico 3, e 8 por 8 para ter o que-

quebrado $\frac{24}{64}$ cuja raiz he $\frac{5}{8}$, pois fazendo o seu quadrado será $\frac{25}{64}$, que só difere do quebrado $\frac{3}{8}$, ou $\frac{1}{64}$. Do mesmo modo a raiz de $\frac{3}{5}$, ou $\frac{15}{25}$ he $\frac{4}{5}$ com pouca differença. Quando se querem termos exactos, se busca huma fracção decimal igual á fracção proposta, e se extrahe a raiz conforme as regras ordinarias.

188 Do mesmo modo para extrahir a raiz cubica de hum quebrado numerico se deve buscar a raiz do numerador, e do denominador. Por exemplo: a raiz de $\frac{216}{64}$ he $\frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{2}$, do mesmo modo a de $\frac{512}{64}$ he $\frac{8}{9}$: se o denominador não for numero cubico perfeito, se multiplicarão os dous termos do quebrado pelo quadrado do denominador para achar a raiz cubica, que se pede

mais

mais exatta. Tudo isto se faz bastantemente evidente, fazendo huma pouca de reflexão na formação das potencias dos mesmos quebrados, que já fica explicada.

Fim do pr.º L.º

Novo Curso de Mathematica

Livro 2.

Trata-se das razões, ou relações, proporções, e progressões Geometricas, e Arithmeticas: dos Logarithmos, e da resolução Analytica dos problemas do primeiro, e segundo grão, e de suas operações.

Definições.

189. Chamão-se homogeneas as grandezas, que são da mesma natureza, como duas linhas, duas superficies, ou dous solidos, dous espaços, ou dous tempos, &c.

190 As grandezas, que não são da mesma natureza, se chamão Heterogeneas, como hum palmo, e huma moeda, que são grandezas He-

he torogenias, como tambem huma linha, e huma superficie, ou hum solido, e o tempo, porque estas grandezas não se podem conter huma na outra, pois não são da mesma natureza.

191 Chama-se razão, ou respeito de duas, ou muitas grandezas a comparação, que se póde fazer destas grandezas entre si. Assim para determinar quantas sortes de respeitos, ou razões póde haver, he preciso examinar de quantos modos se póde comparar huma grandeza com outra.

192 Primeiro. Podem se comparar duas grandezas, examinando quanto huma excede á outra com quem se compara, ou quanto he excedida; a esta comparação se chama razão, ou respeito arithmetico: assim

se

se se conceder a quanto 15 he mais que 5, o numero 10, que se acha diminuindo 5 de 15, he a razão Arithmetica de 5 a 15, que ordinariamente se escreve assim 15-5, do mesmo modo que na Algebra a-b he a razão arithmetica de a a b: de que se segue, que geralmente se póde conhecer a razão arithmetica de duas grandezas pela diminuição, pois por esta operação, he que se póde determinar o quanto huma excede á outra.

193 Segundo: Pode-se comparar huma grandeza com outra, examinando quanto huma contém, ou se contende na outra: a esta comparação chamão razão geometrica: assim na comparação de 12 a 4 pollo exami

nar

ner quantas vezes 12
contem a 4, e nade a
a b, posso examinar
quantas vezes contem
a, a b; e como se não
póde saber, senão pela
divizão, se expressa
esta razão assim $\frac{12}{4}$, $\frac{a}{b}$;
e porquanto esta expres-
são da divizão se póde
tomar pela mesma di-
vizão já feita, ou pelo
quociente, que rezulta
da divizão, quando for
preciso nos poderemos
servir destes termos, di-
vizão indicada, quociem-
te, fracção, razão, ou
respeito geometrico,
pois tudo segnifica a
mesma Cousa, ou o
mesmo numero: o quo-
ci-

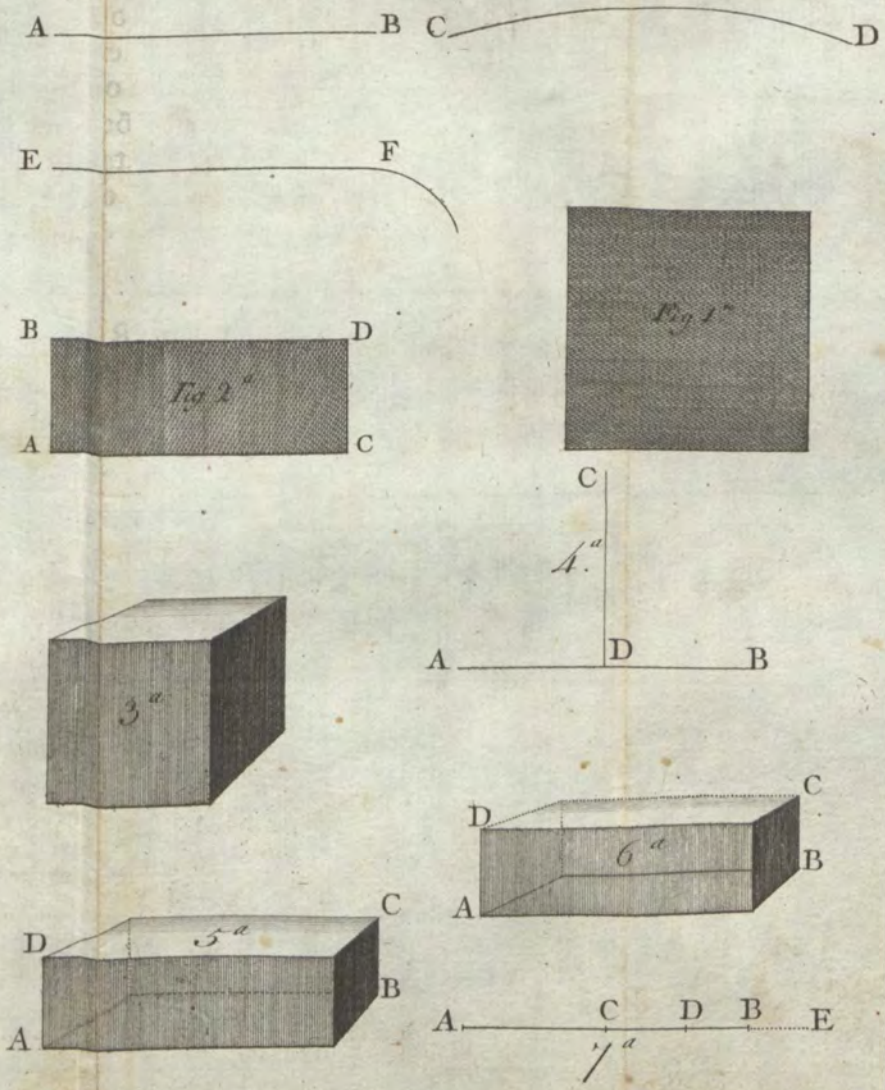
ciente de 12 dividido por 4 he 3, a fracção de $\frac{12}{4}$ he 3, a razão geometrica de 12 a 4 he tambem 3. Deve-se tambem notar, que como nas Mathematicas nos servimos mais commummente da razão geometrica, quando dizemos simplesmente razão, se entende a razão geometrica de duas grandezas.

194 As grandezas, que tem entre si huma razão de numero a numero, se chamão commensuraveis, porque tem ao menos a unidade por

com

commua medida. Por
exemplo: huma li-
nha de 4 palmos se
diz commensuravel
com outra de 9 palmos,
porque a razão desta
duas linhas he dos
numeros 4, e 9.

195 As grandezas, que
não tem razão de nu-
mero a numero, ou que
não podem ter medida
commua, por mais pe-
quena que seja, se cha-
mão incommensuraveis,
como por exemplo, se
temos huma quadrado de
16 palmos, e outro de 32,
a raiz do primeiro será
incommensuravel com
a do segundo: por


A
B
C
D
E
F
B
D
Fig 2.a
A
C
Fig 1.a
C
4.a
A
D
B
3.a
C
D
6.a
B
A
C
D
5.a
B
A
A
C
D
B
E
7.a

porque como 32 não he quadrado perfeito, por mais que ſe aproxime o quadrado a eſte numero, ſempre haverá algum reſto, e eſta raiz ſerá incommenſuravel com a de 16, pois ſe não póde determinar exactamente.

196 Em qualquer razão arithmetica, ou geometrica ſempre ha dous termos, o primeiro ſe chama antecedente, e o ſegundo conſequente: na comparação de 12 a 4 he 12 o antecedente, e 4 o conſequente; na de *a* a *b* *a* he antecedente, e *b* conſequente.

197 Huma razão he igual a outra, quando o antecedente de huma contém tantas vezes o ſeu conſequente, como o antecedente da outra contém o ſeu. Por exemplo: a razão de 12 a 4 he igual á de 15 a 5, porque 12 contém a 4 tantas vezes, como 15 a 5, e vem a ſer 3 vezes. Eſta igualdade de razão ſe expreſſa algumas vezes aſſim $\frac{12}{4}=\frac{15}{5}$; e ſe *a* tem a meſma razão a *b*, que *c* a *d*, ſe póde tambem expreſſar eſta igualdade de razão, eſcrevendo $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, que

moſtra que as quatro grandezas a, b, c, e d formão duas razões geometricas iguaes.

198 Como eſta expreſsão $\frac{12}{4}$, ou $\frac{a}{b}$ repreſenta razão geometrica, divisão, e fracção, ſe deve advertir, que quando tratarmos da razão, chamaremos ao termo, que eſtá ſobre a riſca, antecedente, e ao que eſtá de baixo, conſequente; e quando fallarmos de divisão, ao primeiro ſe chama dividendo, e ao ſegundo diviſor; em fim que quando tratarmos de fracção, chamar-ſe-ha o primeiro numerador, e o ſegundo denominador.

199 Chama-ſe razão de igualdade aquella, em que o antecedente he igual ao conſequente; e razão de deſigualdade, quando os dous termos são deſiguaes, o que póde ſer de dous modos: quando o antecedente he maior que o conſequente, e então ſe chama razão de maior deſigualdade; quando o antecedente he menor que o conſequente, e ſe chama razão de menor deſigualdade.

Duas

200 Duas razões iguaes fazem a proporção: se as duas razões iguaes são arithmeticas, a proporção he arithmetica; e se são geometricas, he a proporção geometrica: assim em toda a proporção ha quatro termos, pois cada razão tem dous. Dá-se proporção arithmetica entre quatro grandezas, quando a primeira excede á segunda tanto, quanto a terceira á quarta; ou tambem quando a segunda excede á primeira tanto, quanto a quarta excede á terceira: assim estes quatro numeros 9, 7, 5, 3 formão huma proporção arithmetica, que se póde expressar $9-7=5-3$, ou $2=2$, mas mais commummente desta maneira 9.7:5.3., e se diz assim 9 he *a* 7, como 5 he *a* 3: o ponto, que se põe entre 9, e 7, significa *he para*; e os dous pontos, que estão entre cada comparação, significão *como*: o ponto, que separa os dous termos da segunda comparação, significa o mesmo que o que está entre os primeiros termos 9, e 7. A proporção arithmetica se denota do mesmo modo na Algebra. Se $a-b=c-d$, escreveremos $a.b:c.d.$,

que ſe lê *a* he para *b* arithmeticamente, como *c* he para *d*.

A proporção geometrica entre dous numeros ſe dá, quando o primeiro contém nelle o ſegundo, ou he conteúdo tantas vezes, como o terceiro contém, ou he conteúdo no quarto: aſſim eſtes quatro numeros 12, 4, 15, 5 fazem huma proporção geometrica, pois 12 contém 4 tantas vezes, como 15 contém a 5. Eſta proporção ſe póde notar aſſim $\frac{12}{4}=\frac{15}{5}$, e eſta maneira talvez he a mais natural, mas o mais commum he notalla aſſim 12:4::15:5, e quer dizer, que 12 he para 4 geometricamente, como 15 he para 5. A proporção geometrica ſe nota do meſmo modo na Algebra; e aſſim ſe *a* contém *b* tantas vezes, como *c* contém *d*, eſcreveremos $a:b::c:d$.

201 Huma proporção arithmetica, ou geometrica ſe chama diſcreta, quando os quatro termos são quatro grandezas differentes; e quando em huma, ou outra o meſmo numero he antecedente de huma razão, e conſequente de outra, ſe chama proporção contínua,

nua, por iſſo eſtas trez grandezas 3, 5, e 7 eſtão em proporção contínua arithmetica, porque temos 3.5:5.7, e eſta proporção ſe denota aſſim ÷3.5.7, e ſe expreſſa, dizendo: 3 he para 5, como 5 he para 7 arithmeticamente, para a diſtinguir da proporção arithmetica diſcreta, como eſta 2.4:8.10, e outras ſemelhantes. Do meſmo modo eſtas trez grandezas 18,6,2 fazem huma proporção geometrica contínua, porque 18:6::6:2, em que ſe vê que 6 he conſequente da primeira, e antecedente da ſegunda. Para diſtinguir eſta eſpecie de proporção das outras, convierão notalla aſſim ÷18:6:2, o meſmo que na Algebra ÷a:b:c nota que as trez grandezas a, b, e c formão huma progreſsão geometrica.

As quantidades, que formão huma proporção arithmetica, ou geometrica, ſe chamão proporcionaes; o primeiro, e ultimo termo de huma proporção, qualquer que ſeja, ſe chamão extremos; e o ſegundo, e terceiro ſe chamão meios: nas proporções contínuas arithmeticas, ou geometricas o

ter-

termo, que ſerve de conſequente, e antecedente, ſe chama meio arithmetico, ou geometrico.

ADVERTENCIA.

Julgo que devo advertir neſte lugar aos que começão a Geometria, que importa muito ſaber bem as propoſições deſte ſegundo Livro, particularmente a primeira, e ſeus corollarios, pois quaſi por ella ſó ſe demonſtrão todas as propoſições, em que ſe trata de razão, e proporção. Para lhes facilitar a intelligencia della, lhes daremos muitas demonſtrações deſta propoſição, demorando-nos principalmente nas que ſe demonſtrão com razões metafyſicas.

PROPOSIÇÃO I.

THEOREMA.

202 Se quatro grandezas eſtiverem em proporção geometrica, o producto dos extremos ſerá igual ao dos meios, iſto he, ſe $a:b::c:d$, ſerá $ad=bc$.

DEMONSTRAÇÃO I.

Por quanto qualquer proporção não he outra cousa mais que a igualdade de duas razões, em lugar de expressalla assim $a:b::c:d$, se póde notar $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$: logo multiplicando os dous termos desta igualdade por huma mesma grandeza bd, ficará a mesma igualdade, e assim teremos $\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d}$; mas tirando as letras commuas ao numerador, e denominador, fica $\frac{abd}{b}=ad$; do mesmo modo $\frac{cbd}{d}=bc$: logo teremos $ad=bc$: logo o producto dos extremos he igual ao dos meios, e he o que se queria demonstrar.

DEMONSTRAÇÃO II.

203 Sendo $a:b::c:d$ por causa da igualdade das razões, será $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$: supponhamos $\frac{a}{b}=f$, será tambem $\frac{c}{d}=f$: multi-

tipliquemos ambos os termos da primeira equação por b, teremos $\frac{ab}{b} = bf$, ou $a = bf$: multipliquemos ambos os termos da segunda equação por d, e teremos $\frac{cd}{d} = df$, ou $c = df$: logo se puzermos na proporção $a:b::c:d$ em lugar de a, e c os seus iguaes bf, e df, teremos $bf:b::df:d$: logo o producto dos extremos he igual ao dos meios, pois hum, e outro he igualmente bdf.

DEMONSTRAÇÃO III.

204 Supponhamos que em lugar da proporção $a:b::c:d$ nos dão estoutra $12:6::4:2$, devemos mostrar porque razão o producto dos extremos 12×2 he igual ao dos meios 6×4. Para isto se deve attender, que sendo 12 duplo de 6, se eu multiplicar 12, e 6 pelo mesmo numero 4, o producto de 12 por 4 será duplo do producto de 6 pelo mesmo 4; mas se em lugar de multiplicar 12 por 4, multiplicar este numero por outro, que seja metade de 4, o producto será metade de 12 por 4, será pois igual ao

de

de 6 por 4, pois perde tanto pelo multiplicador 2, quanto o numero 6 ganha pelo multiplicador 4: em huma palavra, 6 não he mais que metade de 12; mas na proporção ha hum multiplicador duplo do de 12, que faz huma compensação perfeita.

Este discurso se póde applicar a qualquer outra razão numerica, ou algebraica, e assim a nossa demonstração he geral, porque não depende do exemplo, a que se applicou, mas da universalidade dos principios sobre que se funda.

COROLLARIO I.

205 Desta proposição se segue que em huma proporção geometrica contínua o producto dos extremos he igual ao quadrado do termo medio; porque se tivermos $\div a:b:c$, ou $a:b::b:c$, teremos $ac=bb$.

COROLLARIO II.

206 Segue-se tambem que conhecidos os trez termos de huma proporção, poderemos conhecer o quarto; porque se chamarmos x a este quarto, te-

teremos $a:b::c:x$, e conſequentemente $ax=bc$; e dividindo cada membro da igualdade por a, teremos $\frac{ax}{a}$, ou $x=\frac{bc}{a}$, o que moſtra que para achar eſte quarto termo ſe deve multiplicar o ſegundo termo pelo terceiro, e dividir o producto pelo primeiro.

COROLLARIO III.

207 Segue-ſe mais que o producto do ſegundo, e terceiro termo de huma proporção dividido pelo primeiro ſe póde tomar pelo quarto termo delle; porque como x he igual a $\frac{bc}{a}$, poderſe-ha com os trez termos a, b, c eſcrever $a:b::c:\frac{bc}{a}$, e neſta proporção ſe funda a regra chamada a regra de trez, com que ſe acha o quarto termo de huma proporção, conhecidos os trez primeiros; e ſe em qualquer proporção ſe conhecerem os trez termos, poder-ſeha conhecer o quarto de qualquer ſorte que ſejão diſpoſtos.

208 Tambem na proporção contínua,

nua, conhecendo-ſe os dous primeiros termos, ſe póde conhecer o terceiro, dividindo o quadrado do medio pelo primeiro; e aſſim tendo os dous primeiros termos a, e b da proporção contínua, teremos o terceiro $\frac{bb}{a}$, pois que $a:b::b:\frac{bb}{a}$.

209 Mas ſe nos derem o primeiro termo a, e o terceiro c, e quizerem o termo medio, que chamaremos x, multiplicaremos o primeiro pelo terceiro, e a raiz deſte producto ſerá o meio proporcional pedido; porque tendo $a:x::x:c$, temos $xx=ac$, e conſequentemente $x=\sqrt{ac}$.

PROPOSIÇÃO II.

THEOREMA.

210 Se quatro grandezas são diſpoſtas de tal ſorte, que o producto dos extremos he igual ao producto dos meios, eſtas quatro grandezas são proporcionaes.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

Se estas quatro grandezas a, b, c, d tem os seus productos $ad = bc$, digo, que $a : b :: c : d$, ou tambem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Para o provar não he preciso mais que dividir os dous membros da equação $ad = bc$ por huma mesma grandeza bd, e teremos $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, e tirando as letras commuas, fica feita a divisão $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; pois como dividimos quantidades iguaes por outras iguaes, os quocientes $\frac{a}{b}$, e $\frac{c}{d}$ devem ser iguaes: logo $a : b :: c : d$, e he o que se queria demonstrar.

211 Este theorema, que he inverso do precedente, serve de mostrar que quatro grandezas são proporcionaes, quando o producto dos extremos he igual ao dos meios, e por isto he util estar prevenido com este principio, que será o fundamento de todas as demonstrações algebraicas que fizermos.

Co-

COROLLARIO I.

212 Segue-ſe deſta propoſição que huma equação ſe póde tomar, como ſe tiveſſe hum dos ſeus membros compoſto do producto dos extremos, e outro do dos meios de huma proporção, e que ſe póde tambem fazer huma proporção com as raizes dos productos, que formão cada membro da equação, como veremos em outro lugar.

COROLLARIO II.

213 Segue-ſe do theorema precedente que ſe quatro grandezas eſtão em proporção geometrica, ſempre ficarão, mudando-as dos quatro modos ſeguintes, a que ſe chamão inverter, alternar, compôr, e dividir, a que outros chamão razão inverſa, razão alterna, compoſição, e divisão de razão.

214 Para mudar huma proporção dada em razão inverſa, ſe põem os antecedentes em lugar de conſequentes, e os conſequentes no lugar dos antecedentes, quero dizer, que ſe $a:b::c:d$, ſerá tambem $b:a::d:c$, o que he evidente,

te, pois diſſemos que os quatro termos de huma proporção podem ſempre fazer huma equação; e como na proporção inverſa temos $bc=ad$ o meſmo que na direita, ſegue-ſe que invertendo os termos, ſempre conſervão proporção.

215 Para mudar huma proporção em razão alterna, ou alternando, ſe trocão os termos medios, ſem mudar os extremos: quero dizer, que ſe tivermos $a:b::c:d$, teremos tambem $a:c::b:d$, o que he evidente, porque ſempre fica ad por producto dos extremos, e bc producto dos meios, cujos productos são iguaes pela primeira proporção $a:b::c:d$, em que achámos $ad=bc$.

216 Para mudar huma proporção em compoſta, ou compondo, ſe ſomma o antecedente com o conſequente em todas as razões, e a ſomma ſe compara com o meſmo antecedente, ou com o conſequente, quero dizer, que ſe $a:b::c:d$, ſerá tambem $a+b:b::c+d:d$, o que he evidente, ſe moſtrarmos o producto dos extremos igual ao producto dos meios. O producto dos extremos he $ad+bd$, o dos meios he $bc+bd$, que he

igual

igual ao outro, pois
sendo a:b::c:d, terá ad
=bc, e bd em hum, e
outro producto he o mesmo:
logo bc+bd=ad+bd.

247 A mudança chamada
divisão, que mais propria-
mente se deve chamar
diminuição, ou subtrac-
ção, se faz diminuindo
o consequente do antece-
dente em todas as razões,
e comparando cada huma
das differenças com o ante-
cedente, ou consequente
da razão. Por exemplo: se
a:b::c:d, será tambem a-b
:b::c-d:d, ou a:a-b::c:
c-d, porque em hum, e ou-
tro caso o producto dos ex-
tremos he igual ao dos me-
ios. No primeiro caso o pro-
ducto dos meios he bc-bd, e
o dos extremos ad-bd igual
ao primeiro, por ser ad=bc.
No segundo o producto dos
meios he ac-bc, e o dos
ex

extremos ac = ad e evidentemente igual ao outro, porque os termos deum são iguaes aos termos do outro, pois que ac = ac, e ad = bc por termos a : b :: c : d.

218 Há muitas outras mudanças differentes destas que se podem fazer em huma proporção sem a distruir, mas que resultão da combinação destas primeiras, cujo uso temos frequente nas Mathematicas, basta a regra geral para conhecer se as mudanças, que se fazem, destroem ou não a proporção, e por isso não ha em todos os casos mais que examinar se o producto dos extremos he igual ao dos meios. Daremos agora huma especie de taboada destas mudanças, tanto em numeros, como em letras, para que se possão decorar com facilidade.

Em letras

Se a : b :: c : d, será

Ou-

a:b::c:d.

Invertendo b:a::d:c, ou d:c::b:a

Alternando a:c::b:d, ou b:d::a:c

Compondo a+b:a::c+d:d, ou

a:a+b::c:c+d.

Dividindo a−b:a::c−d:d, ou

a:a−b::c:c−d.

Em numeros

Invertendo se 3:4::6:8, será

4:3::8:6, ou

8:6::4:3.

Alternando 3:6::4:8, ou

4:8::3:6.

Compondo 3:4+3::6:8+6,

ou 7:4::14:6.

Dividindo 3:4−3::6:8−6,

ou 3:1::6:2.

Nas duas primeiras medianeas os productos dos extremos, e dos meios são os mesmos que os da primeira proporção; nas outras os productos dos extremos, e dos meios são simplesmente iguaes, sem ser os mesmos que os da primeira proporção.

Proposição 3.

Theorema.

Se

219 Se duas razoens tem a mesma razão a huma terceira, serão iguaes entre si, isto he, se a:b::e:f, e c:d::e:f, será a:b::c:d.

Demonstração.

Divida-se o antecedente a pelo seu consequente b, e seja g o quociente: dividindo c por d, e e por f, serão tambem os quocientes g, e g, o quedará a=bg, e c=dg, e=fg: para concluirmos que a:b::c:d basta pôr no lugar de a o seu valor bg, e no lugar de c o seu valor dg, e teremos bg:b::dg:d, porque o produto dos extremos he bdg=bdg produto dos meios. Mais breve: Se a:b::e:f, e c:d::e:f, será $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$, $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$: logo $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$: logo a:b::c:d. O.Q.S.Q.D.

Proposição 4.

Theorema. Se

Se muitas grandezas estiverem em proporção geometrica, ou fizerem razoẽs iguaes, a somma dos antecedentes se a somma dos consequentes, como hum antecedente ao seu consequente, isto he, que se as grandezas a, b, c, d, e, f formão razoẽs iguaes $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, teremos $a+c+e : b+d+f :: a : b$, ou $:: c : d$.

Demonstração.

Para o provarmos, mostraremos que o producto dos meios he igual ao dos extremos, ou o que vem a ser o mesmo, que $ab+bc+be = ab+ad+af$, o que he evidente, porque primeiro $ab = ab$; segundo por ser $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ou $a : b :: c : d$, temos $ad = bc$; terceiro, pois que $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, ou $a : b :: e : f$, será $af = be$: logo todos os productos parciaes, que fazem o producto dos extremos, são iguaes ao que

for-

formão o producto dos meios, e fica em proporção.

Proposição 5.

Theorema.

224. Duas grandezas conservão a mesma razão ainda que se accrescentem, contanto que o que se accrescenta á primeira seja o que se accrescenta á segunda, como a primeira se á segunda.

Demonstração.

Se ás duas grandezas a, e b se accrescentão as duas c, e d, e que a, seja para b, como c para d, digo que a+c : b+d :: a : b, porque a : b :: c : d, alternando a : c :: b : d, compondo
N.º 215. a+c : a :: b+d : b, e alternando
N.º 216. a+c : b+d :: a : b. O. Q. F. Q. D.

Proposição 6.

Theorema.

222 Duas grandezas concertas ainda mesma razão, ainda que se diminua hum a, e outro, contanto que o que se diminuir da primeira seja para o que se

se diminuir da segunda, como a primeira se á segunda.

Demonstração.

Se tiverem duas grandezas a, e b, e outras duas c e d, tais que a, seja para b, como c para d, digo que a-c : b-d :: a : b; porque se a : b :: c : d, alternando + a : c :: b : d, e dividindo + a-c : a :: b-d : b, e tornando a alternar a-c : b-d :: a : b. O. Q. S. Q. D.

+ N.º 215.

+ N.º 217.

Proposição 7.ª

Theorema.

223 Se multiplicarmos os dous termos de huma razão por huma mesma quantidade os productos ficarão na mesma razão, que tinhão os termos antes de se multiplicarem.

Demonstração.

Multiplique-se duas grandezas, como v. gr. a, e b, por outra grandeza c, e teremos ac : bc :: a : b, pois os productos dos extremos, e dos meios se ac = ac. O. Q. S. Q. D.

Do

Proposição 8ª

Theorema.

224 Se os dous termos de huma razão se dividirem por hum mesmo quantidade, os quocientes terão a mesma razão, e serão as quantidades divididas.

Demonstração.

Dividão-se duas grandezas a, e b, por huma mesma c, e os quocientes terão na mesma razão que as grandezas. Supponhamos que $\frac{a}{c} = d$, e que $\frac{b}{c} = f$, isto supposto, teremos $a = cd$, e $b = cf$; e para provar que $a : b :: d : f$, basta só pôr em lugar de a, e b na comparação o seu valor cd, e cf, e teremos $cd : cf :: d : f$, por que dará $cdf = cdf$, producto dos extremos, e meios.

Proposição 9ª

Theorema.

225 Se multiplicarmos duas proporções, termos por termos, os productos formarão huma proporção.

Demonstração.

Seja

Sejaõ as duas proporçoẽs a:b::c:d, e f:g::m:n, devemos mostrar que af:bg::em:dn, ou que bgem = afdn, que vem a ser o producto dos extremos igual ao producto dos meios: para isto se precizo advertir que bgem = bc × gm, e que afdn = ad × fn, mas ad = bc, porque a:b::c:d, e gm = fn, pois f:g::m:n: logo bgem = afdn, que he o mesmo que ser a proporçaõ, pois o producto dos meios he igual ao dos extremos.

Corollario.

226 Segue-se desta proposiçaõ, que se quatro quantidades estaõ em proporçaõ geometrica, os seus quadrados, e os seus cubos, e geralmente as suas potencias destas quantidades ficaraõ tambem em proporçaõ, isto he se a:b::c:d, sera $a^2:b^2::c^2:d^2$, ou $a^3:b^3::c^3:d^3$, porque multiplicando a proporçaõ a:b::c:d por si mesma hũa, ou mais vezes, estamos no caso da presente proposiçaõ. Por outra parte facilmente se vê, que em todos estes casos o producto dos extremos he

igual

 igual ao dos meios.

Proposição 10.ª

Theorema.

227 Em huma proporção continua o quadrado do primeiro termo he ao quadrado do segundo, como o primeiro ao terceiro, isto he que se tivermos na proporção continua $a:b::b:c$, ou $a:b::b:c$, teremos tambem $a^2:b^2::a:c$.

Demonstração.

Porque $a:b::b:c$, será $b^2=ac$; e multiplicando cada hum dos membros da equação por a, será $ab^2=a^2c$, de que se tira a proporção $a^2:b^2::a:c$, porque já mostrámos que de huma equação se pode tirar huma proporção, e reciprocamente de huma proporção huma equação.

vid.º 212.

Das proporções, e progressões arithmeticas.

228 Já dissemos que a proporção arithmetica he a igualdade de duas razões arithmeticas, e que se compõem de quatro quantidades, tais, que a primeira exceda a segunda tanto, quanto

a ter cinco excede a quarta, como nos seguintes numeros. 2:5:6:9, que estão em proporção arithmetica.

Proposição 55.ª

Theorema.

229 Se quatro grandezas estão em proporção arithmetica, a somma das extremas se igual á das medias, isto he, se a.b:c.d, será a+d=b+c.

Demonstração.

Pois que na proporção entre quatro quantidades a, b, c, d, e estas não he mais que a igualdade de razões, o excesso de b a a, será igual ao de d a c. Supponhamos que este excesso seja f, teremos b=a+f, e do mesmo modo d=c+f, pondo em lugar da proporção a.b:c.d esta a.a+f:c.c+f, tomando a somma dos extremos, e dos meios desta segunda proporção, que he igual á primeira, teremos a+c+f=a+f+c, o que he bem evidente, pois são as mesmas letras de ambas as partes.

Corollario 1.º

230 Segue-se da que sendo conhecidos tres termos de huma proporção arithmetica, se conhecerá tambem o quarto. Por exemplo: se nos derem estes tres numeros 2, 5, 7, por tres primeiros termos de huma proporção arithmetica, de que se pede o quarto; seja x o quarto termo, teremos 2.5.7.x: logo 2+x = 5+7; e tirando de cada membro o mesmo numero 2, teremos 2+x-2, ou x = 5+7-2 = 10, o que he evidente, pois o excesso de 10 a 7 he 3, e o excesso de 5 a 2 he tambem 3: donde geralmente se deduz que o quarto termo de huma proporção arithmetica se acha, tomando a somma dos meios, e tirando da sua somma o primeiro termo.

Corollario 2.º

231 Se a proporção he continua, será a somma dos extremos igual ao dobro do medio; assim se tivermos esta proporção continua arithmetica a.b.b.c, teremos a+c = b+b, porque es-

estando estas trez grandezas em proporção arithmetica, a primeira excede á segunda tanto, quanto a mesma segunda excede á terceira; e chamando d, ao excesso da primeira á segunda será a=b+d, e b=c+d: logo por ser o excesso de b, sobre c, o mesmo, será b=c+d, ou b-d=c-2d=c: assim em lugar da proporção continua a.b:b.c, teremos esta a.a-d.a-2d, na qual evidentemente se vê que a somma dos extremos a+a-2d he igual á dos meios a+a-d-d, ou a dobro de a-d, o que he outra demonstração desta mesma propriedade.

Corollario 3.°

232 Conhecidos os dous extremos de huma proporção continua arithmetica, he facil achar o termo medio, tomando metade da somma dos dous termos dados: assim se nos pedirem hum meio arithmetico

entre

entre 3. e 5. se tomará metade da somma destes dous numeros, que he 4. e esta será o medio que se procura, porque he evidente, que fica 3. 4. 4. 5. Na Algebra he o mesmo. Para achar hum meio arithmetico entre as duas grandezas a, e b. sommão-se estes dous numeros, para termos a+b, cuja metade $\frac{a+b}{2}$ he o meio buscado: Com effeito a, $\frac{a+b}{2}$. $\frac{a+b}{2}$, b. porque a differença do primeiro termo ao segundo he igual á do segundo ao terceiro.

Proposição 12.ª

Theorema.

233 Se quatro grandezas são taes, que a somma das extremas he igual á das medias, estas quatro grandezas estão em proposição arithmetica, isto he, que se quatro quantidades a, b, c, d são taes, que a+d somma das extremas, seja igual á

b+c

b+c, somma das medias, será a.b:c.d.

Demonstração.

Tudo se reduz a provar que o excesso de a, para b he igual ao de c para d, ou reciprocamente que o excesso de b, a a he igual ao de d, a c, porque a+d=b+c, ajuntando, de huma, e outra parte desta equação as mesmas quantidades, ficarão iguaes: ajuntemos pois a cada membro a quantidade negativa -b-d, ficará a+d-b-d = b+c-b-d, ou a-b=c-d, porque +d-d se destroem no segundo: logo o excesso de a, a b, he igual ao de c a d. Com a mesma facilidade se póde mostrar que o excesso de b a a, he igual ao de d, a c: logo se quatro quantidades são taes, que a somma das extremas seja igual á das medias, estas quatro quantidades

estão

estão em proporção arithmetica.

Corollario.

234 Segue-se daqui que se provará que quatro quantidades estão em proporção arithmetica todas as vezes que se mostrar que a somma das extremas he igual ás medias. Segue-se tambem desta proposição que dos mesmos proporção se podem fazer as mudanças de alternas, e invertes, sem adestruir, porque he evidente que se 3.5:7.9, será tambem 3.7:5.9, 5.3:9.7.

Definições.

235 Se muitas grandezas são tais, que todas se excedem igualmente humas a outras, se chama progressão arithmetica o seguimento das razões, que se reputa; a progressão arithmetica se trata do mesmo modo que a proporção

Con-

continua: assim ÷ a. b. c. d. f quer denotar que as grandezas a, b, c, d, f estão em progressão arithmetica.

236 A progressão arithmetica se divide principalmente em duas, progressão arithmetica descendente, e progressão arithmetica ascendente: a primeira se aquella, em que os termos são diminuindo, ou o que se o mesmo em que cada um se mais que o que se lhe segue; e a segunda he aquella, na qual cada termo se menos que o que se lhe segue, como nas duas seguintes progressões, que a primeira se ascendente, e a segunda descendente ÷ 2. 5. 7. 9. 11. 13, e ÷ 15. 12. 9. 6. 3.

O: cada hum destas progressões contem huma infinidade de differentes numeros, com forme os differentes respeitos, que ha entre

cada

Cada razão em particular.

Proposição 13ª

Theorema

237 Em qualquer progressão arithmetica, a somma de dous termos, igualmente distantes dos extremos, he igual á dos mesmos extremos.

Demonstração.

Seja — a.b.c.d.f.g.h. huma progressão arithmetica assellhante, digo que c+f somma de dous termos igualmente distante dos extremos, he igual á somma dos mesmos extremos a+h. A progressão não he mais que hum seguimento de razões iguaes. Supponamos q a razão arithmetica de a, a b, seja e, isto he, que b, exceda a a, pela quantidade e, será b=a+e pela mesma razão e, será o excesso de c a b: logo c=b+

que $c = a + e + e = a + 2e$; e
Continuando a discorrer des-
ta maneira, será $d = a + 3e$, e
$f = a + 4e$, $g = a + 5e$, $h = a + 6e$:
logo em lugar da primeira pro-
gressão podemos ter esta
$a \cdot a+e \cdot a+2e \cdot a+3e \cdot a+4e$
$\cdot a+5e \cdot a+6e$, na qual se
evidente que a somma de
qualquer dous termos igu-
almente distantes dos ex-
tremos, he igual á dos ex-
tremos; assim a somma do
terceiro, e quinto he $2a+6e$,
e a somma dos extremos se
tambem $2a+6e$, isto he
$c+f = a+b$.

Corollario.

238 Se o numero dos termos da
progressão arithmetica se impar,
a somma dos extremos se igual
ao dobro do termo medio: e
a somma de todos os termos de
huma progressão arithmetica
será igual ao producto da som-
ma dos extremos, multipli-
cado por metade do numero dos
termos, porque se multiplicas-
semos a somma dos extremos
pelo numero dos termos, seria

dupla da somma de todos os termos, porq a somma dos extremos não vale huũ só termo, mas dous termos juntos igualmente apartados dos extremos.

Corollario 2.º

239 Se tomarmos quaisquer dous termos, e outros dous igualmente distantes do medio, se o numero dos termos for impar, ou dos meios, se o numero dos termos for par, estes quatro termos se verão em progressão arithmetica. Por exemplo: na progressão — a. a+e. a+2e. a+3e. a+4e. a+5e. a+6e, porque he evidente que o segundo excede ao primeiro tanto quanto o quarto ao terceiro.

Corollario 3.º

240 Segue-se tambem desta proposição, e da expressão geral, que qual quer termo de huma progressão arithmetica apendente he igual ao primeiro termo, e mais ao producto da differença do segundo ao primeiro, multiplicado pelo numero dos termos, que o precedem: assim o quinto termo a+4e da progressão sitada nos corollarios he igual ao primr.º termo a, e mais que

tro vezes o excesso *e* do segundo ao primeiro, por haver quatro termos antes de si. Daqui se tira o que se deve fazer para achar qualquer termo, quando se conhece o primeiro, e a differença entre o segundo, e o primeiro; como por exemplo: se me pedem o sexto termo de huma progressão arithmetica ascendente, de que o primeiro termo he 2, e a differença do segundo ao primeiro 3, multiplico esta differença 3 por 5, porque antes se achão sinco termos, e se junta ao seu producto 15 o primeiro termo 2, e a somma 17 será o sexto termo.

COROLLARIO IV.

241 Reciprocamente dado o primeiro, e sexto termo de huma progressão, se póde achar a differença desta progressão, e todos os termos intermedios: assim se o primeiro termo he 2, e o sexto 17, tiro o primeiro do ultimo, e o resto 15 divido por 5, que he o numero dos termos, que precedem ao sexto, e o quociente 3 he a differença. O mesmo na Algebra. Se hum termo he a, e o sexto $a+5e$, tiro a de

$a+5e$, e divido $5e$ por 5 para achar o excesso e do segundo termo ao primeiro.

COROLLARIO V.

242 Tambem se vê o que se deveria fazer para achar todos os termos de huma progressão arithmetica, de que se conhecem o primeiro, e segundo; porque se trez termos seguidos formão huma progressão contínua arithmetica, não ha mais que tirar o primeiro do dobro do segundo para achar o terceiro termo.

COROLLARIO VI.

243 Desta proposição se colhe o modo de metter quantos meios proporcionaes arithmeticos quizerem entre dous numeros dados. Para isto se deve diminuir o menor numero do maior, e o resto dividillo pelo numero dos meios arithmeticos accrescentado com a unidade. Por exemplo: se me pedem quatro meios arithmeticos entre 2, e 17, tiro 2 de 17, e o resto 15 divido por 5, que he o numero dos meios, que se me pedem, e mais a unidade, o quoci-

en-

ente 3 he a differença do ſegundo ao primeiro termo: aſſim accreſcentando eſta differença ao primeiro termo, o ſegundo he 5, e a progreſsão ſerá ÷2. 5.8.11.14.17, que he tal, que entre 2, e 17 ha quatro meios arithmeticos.

NOTA.

Tudo o que acabamos de dizer ſobre as progreſsões arithmeticas aſcendentes ſe moſtra com a meſma facilidade, e quaſi da meſma maneira das progreſsões deſcendentes. He preciſo notar que huma progreſsão arithmetica póde começar por cifra, e neſte caſo a differença he igual ao ſegundo termo, o que ſuccede na progreſsão dos numeros naturaes ÷0.1.2.3.4, &c. Deve-ſe tambem notar que toda a progreſsão, em que a differença não for igual ao ſegundo termo, não poderá começar por cifra.

DEFINIÇÕES.

245 Se houverem muitos termos ſeguidos taes, que cada hum, excepto o primeiro, ſeja antecedente, e conſe-

quente de huma ordem de razões geometricas iguaes, todas estas quantidades formarão huma progressão geometrica. Por exemplo: os numeros seguintes 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 formão huma progressão geometrica, porque 64:32:: 32:16, 32:16::16:8, o que mostra evidentemente que cada termo póde ser consequente, e antecedente de razões iguaes. Denotão-se ordinariamente as quantidades em progressão geometrica, pondo antes dellas á esquerda huma pequena risca entre quatro pontos desta maneira ÷64:32:16:8:4:2, &c.

245 Póde-se tambem definir huma progressão geometrica, dizendo que he huma serie de numeros de tal maneira, que cada hum dividido pelo que se lhe segue, tem sempre o mesmo quociente. Distinguem-se principalmente duas castas de progressões: ascendente, que he aquella, em que cada termo he menor que o que se lhe segue; e descendente, que he aquella, em que cada termo he sempre maior que o que se segue.

PRO-

PROPOSIÇÃO XIV.

THEOREMA.

246 Qualquer progresſão geometrica aſcendente ſe póde repreſentar por eſta $\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5$, e qualquer progresſão geometrica deſcendente por eſta $\div aq^6 : aq^5 : aq^4 : aq^3 : aq^2 : aq : a$, que he inverſa da antecedente.

DEMONSTRAÇÃO.

Para moſtrar que eſtas quantidades eſtão em razão geometrica, não he preciſo mais que dividir qualquer termo pelo que ſe lhe ſegue immediatamente, e ver ſe tem o meſmo quociente. Na primeira progresſão divido aq por aq^2, e o quociente he $\frac{1}{q}$: depois divido aq^2 por aq^3, e o quociente he tambem $\frac{1}{q}$: logo ha huma progresſão, porque $aq : aq^2 :: aq^2 : aq^3$, o meſmo na ſegunda: divido aq^6 por aq^5, e o quociente he q: divido do meſmo modo aq^5 por aq^4, e o quociente he q igual ao primeiro: logo eſtes termos eſtão em progresſão geometrica, pois tem o meſmo quociente.

Co-

COROLLARIO I.

247 Daqui se segue que em huma progressão geometrica ascendente o quadrado do primeiro termo he ao quadrado do segundo, como o primeiro termo ao terceiro: assim na progressão $a : aq : aq^2 : aq^3$, &c. temos $a^2 : a^2 q^2 :: a : aq^2$, porque o producto dos extremos he igual ao dos meios $a^3 q^2 = a^3 q^2$. Segue-se tambem da mesma formação das progressões que o cubo do primeiro termo he ao cubo do segundo, como o primeiro ao quarto, porque $a^3 : a^3 q^3 :: a : aq^3$, pois $a^4 q^3$, producto dos extremos, he igual $a^4 q^3$, producto dos meios; e geralmente se chamarmos a ao primeiro termo de huma progressão, e b ao segundo, a qualquer potencia, a que se elevem os dous primeiros termos, será $a^m : b^m :: a$ ao termo, cujo lugar indicasse $m + 1$.

COROLLARIO II.

248 Suppondo sempre que a progressão vá ascendendo, qualquer termo he igual ao producto do primeiro

ter-

termo, multiplicado pelo quociente do ſegundo termo dividido pelo primeiro, o qual quociente ſeja elevado á potencia ſinalada pelos numeros dos termos, que o precedem. Por exemplo: o quarto termo he igual ao primeiro a, multiplicado por q, quociente do ſegundo aq, dividido pelo primeiro termo, elevado á terceira potencia, porque ha trez termos precedentes ao quarto, e ſerá aq^3, aſſim conhecendo os dous primeiros termos de huma progreſsão geometrica, ſe conhecerá facilmente qualquer outro: para iſto baſta dividir o ſegundo pelo primeiro, e multiplicar o primeiro termo por eſte quociente, elevado a huma potencia determinada pelo numero dos termos, que precedem ao que ſe buſca. Por exemplo: ſe me pedem o ſexto termo de huma progreſsão geometrica aſcendente, de que o primeiro he a, e o ſegundo aq, divido o ſegundo pelo primeiro a, e o quociente he q: multiplico a por q, elevado á quinta potencia, e o ſexto termo ſerá aq^5. Se o primeiro termo he a, e o ſegundo b, divido b por a, e o quociente

he

he $\frac{b}{a}$; e ſe me pedem o quinto termo da progreſsão aſcendente, de que a, e b são os dous primeiros termos, multiplico a pela quarta potencia de $\frac{b}{a}$, que he $\frac{b^4}{a^4}$; e chamando x eſte quinto termo, terei $x = \frac{ab^4}{a^4}$, ou $\frac{b^4}{a^3}$: de que ſe ſegue que qualquer termo de huma progreſsão geometrica aſcendente he igual ao ſegundo termo, elevado a huma potencia hum gráo menor que o numero deſte termo, e dividido pelo primeiro, elevado a huma potencia menor dous gráos que o meſmo numero.

COROLLARIO III.

249 Se ſuppuzermos a igual á unidade, a progreſsão $\div a : aq : aq^2$, &c. ſerá $\div q^1 : q^2 : q^3 : q^4 : q^5$: de que ſe ſegue que todas as potencias de hum numero formão huma progreſsão geometrica; o que tambem he evidente pela idéa, que ſe deve formar das potencias ſucceſſivas de qualquer numero.

PRO-

PROPOSIÇÃO XV.

THEOREMA.

250 Em qualquer progreſsão a ſomma dos antecedentes he á ſomma dos conſequentes, como hum ſó antecedente he ao ſeu conſequente, iſto he, que ſe as quantidades a, b, c, d, f fazem huma progreſsão geometrica, $a+b+c+d : b+c+d+f :: a : b$.

DEMONSTRAÇÃO.

Devemos moſtrar que o producto dos extremos $ab+bb+bc+bd$ he igual ao producto dos meios $ab+ac+ad+af$: *primeiro*, $ab=ab$; *ſegundo*, pois que pela natureza da progreſsão $a:b::b:c$, $bb=ac$; *terceiro* pela meſma razão, pois que $a:b::b:c$, e $b:c::c:d$, ſerá $a:b::c:d$: logo $ad=bc$: *quarto*, ſe $a:b::c:d::d:f$, ſerá $a:b::d:f$: logo $af=bd$, e aſſim todos os productos parciaes do producto dos extremos são iguaes aos productos parciaes do producto dos meios, de que ſe infere ter lugar a proporção.

Co-

COROLLARIO.

251 Se a proporção he descendente até o infinito, o ultimo termo póde ser considerado como cifra, e assim a somma dos antecedentes, que he todos os termos, excepto o ultimo, será a somma de todos os termos da progressão, e a somma dos consequentes será a somma de todos os termos, excepto o primeiro, o que não destroe a proporção. Esta proposição, e seu corollario serve de dar solução aos problemas, que se podem propôr sobre a somma das progressões geometricas, como se verá no tratado das equações. Nenhum estudo nesta proposição he escusado, nem demaziado a quem quer resolver semelhantes problemas.

PROPOSIÇÃO XVI.

THEOREMA.

252 Em huma progressão geometrica, como v. gr. $\div a:b:c:d:f:g$, o producto de dous termos, igualmente distantes dos extremos, he igual ao producto dos mesmos extremos.

DE-

DEMONSTRAÇÃO.

Tomemos os termos c, e d, que são igualmente diſtantes dos extremos, devemos provar que cd he igual ao producto dos extremos ag. Para iſſo ſe deve advertir que a natureza da progreſsão dá as ſeguintes proporções.

$a:b::b:c$, $b:c::c:d$, $c:d::d:f$.
$b:c::c:d$, $c:d::d:f$, $d:f::f:g$.

Multiplicando de dous em dous, termos por termos, teremos $ab:bc::bc:cd$, $bc:cd::cd:df$, $cd:df::df:fg$.

De que ſe deduz eſta, dividindo cada termo das razões por letras commuas ao antecedente, e conſequente $a:c::b:d$, $b:d::c:f$, $c:f::d:g$; e como todas eſtas razões são iguaes entre ſi, teremos eſta proporção $a:c::d:g$: logo $ag=cd$, iſto he, o producto dos extremos da progreſsão igual aos de quaeſquer dous termos, igualmente diſtantes dos meſmos extremos.

COROLLARIO.

253 Segue-ſe deſta propoſição que os dous extremos, e dous termos, quaeſquer que forem, igualmente diſtan-

tantes, farão huma proporção, de que os dous primeiros ſerão os extremos, e os outros dous os meios. Se o numero dos termos da progreſsão he impar, o producto dos extremos, ou de dous termos, que forem igualmente diſtantes, ſerá igual ao quadrado do meio.

NOTA.

254 Tudo o que temos dito ácerca das progreſsões geometricas aſcendentes ſe deve tambem entender das progreſsões deſcendentes, fazendo as preciſas mudanças; além de que toda a progreſsão deſcendente ſe deve conſiderar como huma progreſsão aſcendente, indo da direita para a eſquerda. Notar-ſe-ha mais que os ultimos dous theoremas ſe podião demonſtrar com muita facilidade pela expreſsão geral $\div a. aq. aq^2 aq^3$, &c.; mas expreſſamente por cauſa deſta facilidade me pareceo ſe devia demonſtrar hum pouco differentemente, porque eſta expreſsão não nos dá lugar a fazer diſcurſo algum, moſtrando logo o que ſe procura; e corre muitas vezes o riſco de ſe diſcor-

rer

rer mal, ou ao menos de ignorar a arte de discorrer, quando se não discorre com fórma, e se quer poupar o trabalho de o fazer por si mesmo.

PROBLEMA.

255 Achar muitas meias proporcionaes geometricas entre dous numeros.

SOLUÇÃO.

Divida-se o maior pelo menor para achar a razão da progressão, e tire-se a raiz do quociente notada pelo numero das meias proporcionaes, que se buscão, e augmentada da unidade. Exemplo: pedem-me trez meias proporcionaes geometricas entre 4, e 64, divido 64 por 4, e ao quociente 16 tiro a quarta raiz, que he 2; porque se me pedem trez meias proporcionaes, e esta raiz he a razão da progressão, isto he, que cada termo he duplo do que se lhe segue, e será o segundo termo 8, o terceiro 16, o quarto 32, e a progressão ÷ 4:8:16:32:64, em que estão trez meias entre 4, e 64: se se tivessem pedido 4, seria preciso tirar a quin-

quinta raiz do quociente do maior numero dividido pelo menor.

DEMONSTRAÇÃO.

A razão desta operação se deduz immediatamente da fórma, ou geral expressão das progressões $\div a : aq : aq^2 : aq^3$, &c.: supponho que se me pedem 3 meias geometricas entre a, e aq^4, divido aq^4 por a, o quociente he q^4, de que a quarta raiz he a razão da progressão, e assim aq será o segundo termo $aq \times q$, será o terceiro $aq^2 \times q$, ou aq^3 será o quarto.

Deve-se notar que qualquer progressão geometrica não póde ter cifra por termo, senão quando esta lhe serve de expoente, pois qualquer progressão póde começar pela unidade, ou outra grandeza, elevada a potencia cifra, como a^0, q^0, que não differe da unidade.*

* Numer. 136.

Dos logarithmos, sua natureza, e usos.

DEFINIÇÕES.

256 Logarithmos são huns numeros em progressão arithmetica correspondentes a outros numeros em progres-

greſsão geometrica: por exemplo eſtas duas ordens de numeros 2: 4: 8: 16: 32, e 3.5.7.9.11, de que os primeiros eſtão em progreſsão geometrica, e os ſegundos em progreſsão arithmetica, pondo huns de baixo dos outros, como ſe ſegue 3, 5, 7, 9, 11.

2, 4, 8, 16, 32.

Cada termo ſuperior da progreſsão arithmetica ſe chama logarithmo do termo inferior, que lhe correſponde, e aſſim 3 he o logarithmo de 2, 5 logarithmo de 4, e aſſim os mais.

257 O meſmo ſuccede ſe ſe puzerem as ordens ſeguintes

0, 1, 2, 3, 4, 5.

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000.

de que huma he huma progreſsão arithmetica, que tem por differença a unidade, e a outra he a progreſsão geometrica, que reſulta das diverſas potencias de 10: cada termo da progreſsão arithmetica ſerá o logarithmo do termo da progreſsão geometrica, que lhe correſponde, aſſim 1 he logarithmo de 10, 3 de 1000, e aſſim os mais.

Co-

COROLLARIO.

258 Como ſe podem tomar infinitas progreſsões arithmeticas, cujos termos ſe ponhão ſobre as progreſsões geometricas, ſegue-ſe que cada termo deſta progreſsão póde ter huma infinidade de logarithmos; mas aſſentárão em dar á progreſsão decupla os logarithmos da progreſsão arithmetica dos numeros naturaes, dando a cifra por logarithmo da unidade.

NOTA.

Como as propriedades dos logarithmos dependem das proporções, e progreſsões geometricas, e arithmeticas, e tambem das dos expoentes, como veremos depois, he ſummamente importante ter preſente tudo o que temos tratado, e por eſta razão tornemos á fórma das progreſsões geometricas, e examinemos a razão, que tem com os logarithmos.

PRO-

PROPOSIÇÃO XVII.

THEOREMA FUNDAMENTAL.

259 Os expoentes de huma ſerie de potencias de qualquer quantidade, que formem huma progreſsão geometrica, eſtão em progreſsão arithmetica.

DEMONSTRAÇÃO.

Repreſentemos eſta ſerie pelas potencias ſucceſſivas de q, aſſim $\div q^0 : q^1 : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 : q^7 : q^8 : q^9 : q^{10}$, &c.: he evidente que eſtas quantidades fazem huma progreſsão geometrica, como temos dito, pois cada termo dividido pelo precedente tem ſempre o meſmo quociente q. Tambem he evidente que os expoentes eſtão em progreſsão arithmetica dos numeros naturaes. *O Q. S. Q. D.*

COROLLARIO I.

260 Segue-ſe que eſtes expoentes ſe podem tomar como logarithmos dos termos, a que correſpondem, conforme a definição dos logarithmos; aſſim o logarithmo de hum numero não he outra couſa mais que o expoente de hu-

ma potencia, e o que dizemos das letras ſe póde applicar aos numeros. Por exemplo: a progreſsão geometrica dupla, que reſulta de todas as potencias ſucceſſivas de 2, que he ÷ 2:4:8:16:32:64: &c., ſe póde eſcrever aſſim ÷ 2^0: 2^1: 2^2: 2^3: 2^4: 2^5: 2^6: &c.; e do meſmo modo a progreſsão decupla, ou a das potencias ſucceſſivas de 10, que he ÷ 1: 10: 100: 1000: 10000: 100000, ſe poderá eſcrever ÷ 10^1: 10^2: 10^3: 10^4: 10^5:, &c.; em huma, e outras os numeros 0, 1, 2, 3, 4, 5 são logarithmos dos termos, a que correſpondem, e ao meſmo tempo expoentes da potencia de 10. Já advertimos que nos ſervimos deſta ultima ſerie no calculo, como diremos depois.

COROLLARIO II.

261 Logo ſe tomarmos quaeſquer quatro termos em proporção geometrica, os ſeus expoentes, ou logarithmos farão huma proporção arithmetica. Por exemplo: ſe tivermos eſtes quatro termos q^0, q^1, q^4, q^5, que eſtão em proporção geometrica, porque $q^0 : q^1 :: q^4 : q^5$, pois o producto dos extremos

mos he igual ao dos meios, he claro que os ſeus expoentes eſtão em proporção arithmetica 0.1.4.5.

COROLLARIO III.

262 Para achar o producto de hum termo deſta ſerie por outro, deve-ſe buſcar hum termo, cujo expoente ſeja igual á ſomma dos expoentes dos dous termos, pois vimos no calculo dos expoentes * que o producto das quantidades exponenciaes ſe acha pela ſomma dos expoentes; aſſim para multiplicar q^2 por q^3, buſco o termo, cujo expoente ſeja 5, igual á ſomma dos expoentes 2+3, e o termo q^5 he o producto que ſe buſca: logo para achar o producto de dous numeros pelos logarithmos he preciſo juntar os logarithmos deſtes dous numeros, e a ſomma ſerá o logarithmo do producto, com tanto que a progreſsão arithmetica, que ſe eſcolheo, tenha a cifra por logarithmo da unidade.

* Numer. 134.

COROLLARIO IV.

263 Para dividir qualquer termo desta serie por outro, he preciso tirar o expoente do divisor do do dividendo, e a differença será o expoente do quociente. Por exemplo: para dividir q^9 por q^4, tiro 4 de 9, o resto 5 he o expoente do quociente, que he q^5, porque vimos no calculo dos expoentes * que a divisão se faz pela diminuição dos expoentes destas quantidades: logo geralmente para dividir hum numero por outro por meio dos logarithmos, deve-se tirar do logarithmo do divisor o do dividendo, e buscar hum numero, cujo logarithmo seja igual á differença dos dous logarithmos dos numeros dados, e o numero, que lhe corresponder, será o quociente, que se busca, suppondo sempre a cifra por logarithmo da unidade.

* Numer. 335.

COROLLARIO V.

264 Para fazer huma regra de 3 com os logarithmos, se devem juntar os logarithmos dos dous meios, e da somma ti-

tirar o logarithmo do primeiro extremo, e o resto será o logarithmo do ultimo extremo, porque huma regra de 3 se faz multiplicando estes dous meios hum por outro, e dividindo o producto pelo primeiro termo; mas pelo corollario terceiro a multiplicação de dous termos da nossa progressão se faz com a addição dos logarithmos, ou expoentes dos dous termos; e o termo, que tiver por expoente a somma destes expoentes, he o producto destes dous termos; e pelo corollario quarto a divisão deste producto pelo primeiro termo se faz com a diminuição dos expoentes: logo tirando o expoente do primeiro termo da somma dos expoentes dos dous meios, temos o expoente, ou o logarithmo do quarto termo; e para achar hum termo quarto proporcional aos trez termos q^2 q^3 q^5, se tome 8, somma dos expoentes 5, e 3 dos termos medios q^3, e q^5: desta somma se tire 2, expoente do primeiro, e o resto 6 he o logarithmo do quarto termo, que procuro, que he q^6, e com effeito $q^2 : q^3 :: q^5 : q^6$, pois o producto dos extremos

mos he igual ao producto dos meios. Além de que como estes quatro termos estão em proporção geometrica, os seus expoentes, ou logarithmos pelo corollario segundo estão em proporção arithmetica; e assim o logarithmo, que se busca, he o quarto termo de huma proporção arithmetica, que se determina, tirando o primeiro termo da somma dos dous meios *; e geralmente para fazer huma regra de 3 com os logarithmos, he preciso juntar os logarithmos dos meios, e da somma tirar o do primeiro termo, e o resto he o quarto.

* Numer. 230.

265 Como a multiplicação enserra esta proporção, a unidade ao multiplicador, como o multiplicando ao producto, segue-se que o mesmo he fazer huma multiplicação que huma regra de 3: logo he preciso juntar o logarithmo do multiplicador ao do multiplicando, e da somma tirar o logarithmo da unidade. Por isso nas progressões arithmeticas, que se escolhêrão para determinar os logarithmos dos numeros naturaes, se escolheo a cifra pelo logarithmo da unidade, para que toda a multi-

tiplicação ſe reduza á ſomma de dous numeros.

266 Como toda a divisão enſerra eſta proporção, a unidade ao diviſor, como o quociente ao dividendo, ſegue-ſe que não poderemos fazer huma divisão, ſem que façamos huma regra de 3; e como neſta regra de proporção o termo, que ſe buſca, he o terceiro, devem-ſe juntar os logarithmos, ou expoentes dos termos, que são a unidade, e o dividendo, e da ſomma tirar o expoente do diviſor para achar o logarithmo, ou expoente do quociente: logo ſe o logarithmo da unidade he cifra, toda a divisão pelos logarithmos ſe reduzirá á diminuição de dous numeros, e por eſta razão ſe tomou a cifra por logarithmo da unidade.

COROLLARIO VI.

267 Para elevar qualquer termo a huma potencia propoſta, baſta multiplicar o ſeu expoente pelo da potencia, a que ſe quer elevar, e fazer do producto o expoente da meſma letra, que ſerá a potencia pedida, como ſe

moſ-

mostra na formação das potencias das quantidades exponenciaes. Por exemplo: para elevar q^2 ao cubo, multiplico o seu expoente 2 por 3, expoente da potencia pedida, e o producto 6, posto por expoente diante da mesma quantidade, me dá q^6, que he o cubo de q^2: logo geralmente para achar a potencia de hum numero por meio dos logarithmos, se deve multiplicar o logarithmo deste numero pelo expoente da potencia, e o producto será o logarithmo da potencia, que se pede, que se achará ao lado do mesmo logarithmo.

COROLLARIO VII.

268 Para extrahir a raiz de qualquer termo desta serie, deve-se dividir o expoente, ou logarithmo deste termo pelo expoente da raiz; por 2, se a raiz, que se pede, he quadrada; por 3, se he a raiz cubica, e assim das mais; porque, como dissemos no tratado do calculo dos expoentes, a raiz das quantidades exponenciaes se acha, dividindo o seu expoente pelo expoente da raiz, e assim para extrahir a raiz cubica de

q^9 divido o logarithmo, ou expoente 9 por 3, o quociente he 3, e ſerá q^3 a raiz cubica deſta quantidade: logo geralmente a extracção da raiz quadrada, ou cubica de hum numero ſe reduz a dividir hum numero por 2, ou por 3, e he principalmente neſta operação, que ſe vê bem a importancia deſte deſcubrimento, que ſomos devedores ao Barão de Neper Eſcoſſez, cujo nome ſempre ſerá reſpeitado de todos os que precisão calcular.

NOTA.

269 Como tudo iſto he ſummamente importante, vamos applicallo a qualquer ſyſtema de logarithmos differentes do das taboas ordinarias, depois do que em poucas palavras exporemos o modo, com que ſe achárão os logarithmos dos numeros naturaes. Não ceſſamos de recommendar aos principiantes, que ſe appliquem a fazer geraes as idéas, examinando-as com particularidade, como tambem a poſſibilidade de huma infinidade de ſyſtemas de logarithmos, procurando deſcubrir as razões,

zões, que obrigárão aos primeiros, que calculárão taboas, a ſervir-ſe da progreſsão decupla, e verão que iſto procede da natureza dos logarithmos conſiderados como expoentes das potencias.

Logarith. ÷ 0 1.2.3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
Progreſſ. geomet. ÷ 1:2:4:8:16:32:64:128:256:512.

Primeiro. Para multiplicar qualquer termo deſta ſerie, por exemplo 8 por 16, ſe ſommem os dous logarithmos 3, e 4, e a ſomma he 7; e o numero 128, que ſe acha de baixo, he o producto de 16 por 8. Do meſmo modo para multiplicar o numero 8 da progreſsão geometrica por 32, ſe ſommem os ſeus logarithmos 3, e 5, e a ſomma 8 he o logarithmo do producto, que ſerá 256, como ſe póde facilmente ver, fazendo a multiplicação.

Segundo. Para dividir qualquer termo da progreſsão geometrica por outro termo da meſma progreſsão 128, v. gr. por 4, tire-ſe o logarithmo de 4 do logarithmo de 128, e a differença 5 deſtes dous 5, e 7 he o logarithmo do quociente 32. Do meſmo modo

pa-

para dividir 512 por 64, tiro 6, logarithmo, ou expoente do divisor, de 9, expoente do dividendo, e a differença 3 he o logarithmo do quociente 8: com effeito 512 dividido por 64 dá 8.

Terceiro. Para achar hum quarto termo proporcional a trez numeros 4:32:: 64, tome-se a somma dos logarithmos dos dous meios, que he 11, e tire-se o logarithmo 2 do primeiro extremo 4, o resto 9 he logarithmo de 512, que he o termo que se busca.

Quarto. Para elevar 8 ao cubo, multiplique-se o seu expoente, ou logarithmo, que he 3, por 3, expoente da potencia, e o producto 9 será o logarithmo do cubo de 8, ou de 512, como vimos na taboa dos cubos.

Quinto. Para tirar a raiz quadrada de 256, divida-se o seu logarithmo 8 por 2, expoente da raiz quadrada, e o quociente 4 he o logarithmo da raiz 16; e elevando 16 a quadrado, teremos effectivamente 256, como se vê facilmente.

REFLEXÃO GERAL.

270 Daqui ſe vê que toda a multiplicação ſe reduz á ſomma de dous numeros, e que toda a divisão ſe faz com a diminuição de dous numeros, que toda a regra de 3 ſe faz, ſommando dous numeros, e da ſomma diminuindo hum terceiro, e finalmente que a formação das potencias ſe faz com o dobro, ou triplo do logarithmo do numero, de que ſe quer o quadrado, ou o cubo, e que a extracção das raizes ſe reduz a tomar metade, terço, ou quarto do logarithmo propoſto para ſe lhe achar a ſegunda, terceira, ou quarta raiz; mas para iſto he preciſo que os numeros propoſtos ſejão ſómente dos termos propoſtos na progreſsão para ſe lhe conhecerem os logarithmos; aſſim para que eſta grande ventagem foſſe praticavel em todos os numeros poſſiveis, foi neceſſario achar-lhe os logarithmos, ou, o que quer dizer o meſmo, o expoente do lugar, que cada hum tem na progreſsão dos numeros, em que eſtá, para calcular os logarithmos, e he o que vamos explicar nos artigos ſeguintes.

Ima-

271 Imaginárão que todos os numeros naturaes eſtavão comprehendidos entre huma ſó progreſsão geometrica, de que cada termo foſſe differente potencia do numero 10, todas potencias fraccionarias, excepto os termos da progreſsão decupla ÷ 10: 100: 1000: 10000, que são potencias completas de 10: para iſto ſe intromettêrão entre 1, e 10 9999999 meios geometricos, e entre cada expoente 0, e 1 deſtes numeros outros tantos meios arithmeticos correſpondentes aos primeiros. Para acharem com mais facilidade eſtes meios arithmeticos, accreſcentárão huma ſerie de ſete decimaes a cada expoente, o que não muda a progreſsão arithmetica; aſſim em lugar da primeira ſerie ÷ $10.^{0}$ 10^{1}: 10^{2}: 10^{3}: 10^{4}: 10^{5}: puzerão eſta ÷ $10.^{0.0000000}$: $10.^{1.0000000}$: $10^{2.0000000}$: $10.^{3.0000000}$, e ſempre tal, que os expoentes fiquem em progreſsão arithmetica, e cada termo huma potencia completa do numero 10. Suppondo entre os expoentes 0.0000000, e 1.0000000 9999999 meios arithmeticos, ſe achará o primeiro termo

0.

0.0000001, e o da progressão geometrica, que lhe corresponde, ou, o que he o mesmo, a potencia de 10 correspondente a este logarithmo he $10^{0.0000001}$, porque * para ter hum numero de meios arithmeticos entre quaesquer dous numeros, deve-se diminuir o maior do menor, e o resto dividillo pelo numero de meios, que se pede, augmentando com a unidade. Conforme esta regra, diminuo o menor termo 0.0000000 de 1.0000000, isto he, o de de 1, e divido a differença por 10000000, numero dos 9999999 meios arithmeticos, accrescentado com a unidade, e será o primeiro meio arithmetico $\frac{1}{10000000}$; e reduzindo este quebrado a decimaes, ficará 0.00000001: tambem o segundo meio arithmetico será 0.0000002, e o termo da progressão geometrica correspondente a este logarithmo será $10^{0.0000002}$; e continuando assim, se construírão as taboas dos logarithmos de todos os numeros naturaes, e se achou que o numero 2 he quasi igual a 10, elevado á potencia 0.3010300,

* Numer. 243.

ou

ou $10.^{0.3010300}$, e achou-ſe tambem que 3 era igual a 10, elevado á potencia 0.4771213, ou igual a $10.^{0.4771213}$, e a eſtes numeros ſe chamão logarithmos de 2, e 3.

272 Tambem ſe procurou o meſmo numero de meios arithmeticos entre os expoentes 10000000.20000000, ou entre os numeros 1, e 2, e ſe achou que 12, por exemplo, era igual a 10, elevado á potencia 10791812, ou que $12 = 10.^{0.10791812}$: depois de achados os logarithmos dos numeros, chamados primeiros, iſto he, que não tem outro diviſor mais que a unidade, eſteve vencida a maior parte do trabalho, pois para ter os logarithmos dos multiplices, ou ſubmultiplices deſtes, baſta ſommar os ſeus logarithmos, e os do multiplicador, ou diminuir o do diviſor. Por exemplo: depois de achado o logarithmo de 2, que he 0.3010300, ſe achou facilmente ſem calculo o de 5, tirando 0.3010300 de 1.0000000, logarithmo de 10, e eſte logarithmo ſerá 0.6989700.

273 He preciſo advertir, que quando

do dizemos que ſe comprehendêrão em huma ſó progreſsão geometrica todos os numeros naturaes, não queremos dizer niſto que os numeros naturaes eſtão em progreſsão geometrica, mas ſómente que cada hum delles em particular he hum termo deſta progreſsão, de que o numero, ou lugar que occupa, he determinado pelo ſeu logarithmo; aſſim os logarithmos dos quatro numeros de huma ſerie nas taboadas dos logarithmos não eſtão em progreſsão arithmetica, como devia ſucceder, ſe os numeros, a que correſpondem, formaſſem huma progreſsão geometrica.

274 Chama-ſe carateriſtico de hum logarithmo o numero deſte, que eſtá no lugar dos inteiros, aſſim com huma pequena reflexão ſe vê que os numeros menores de 10 tem por carateriſtico 0, dos numeros menores que 100 he o carateriſtico 1, e dos numeros menores que 1000 he 2, e geralmente o carateriſtico do logarithmo de hum numero contém tantas unidades, como a mais proxima potencia de 10, a que

hum

hum numero he ſuperior, contém de cifras: aſſim o logarithmo de 99 não póde ter outro carateriſtico, que a unidade, porque a mais proxima potencia de 10, á qual he ſuperior, que he 10, não tem mais que huma cifra.

275 Os numeros fraccionarios menores que a unidade terão expoentes, ou logarithmos negativos, porque em huma progreſsão arithmetica os termos, que eſtão antes da cifra, são negativos; além diſſo a unidade tem a cifra por expoente: logo os mais quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, cujo numerador he a unidade, e denominador alguns dos numeros naturaes, que lhe ſervem de denominadores, terão expoentes, tomados por menos, ou negativos; do que ſe ſegue que ſe podem facilmente fazer as operações com os quebrados pelos logarithmos.

Quem quizer ver com mais miudeza os logarithmos, e particularmente a conſtrucção das taboas, conſulte o livro de Trigonometria de Mr. Rivard. Eſte eſtudo não póde deixar de ſer util,

e além disso como muitas vezes precisamos servir-nos destes numeros artificiaes no calculo dos triangulos, sempre se obra com mais segurança nas operações, quando se conhecem bem as propriedades dos numeros, de que nos servimos.

Das razões compostas.

DEFINIÇÃO.

276 Huma razão composta he o producto de duas razões, multiplicada huma pela outra. Por exemplo: a razão de *ab* a *cd* he composta da razão de *a* a *b*, e da de *c* a *d*; assim huma razão composta póde-se tomar como o producto de dous quebrados, pois cada razão póde fazer hum quebrado; o mesmo he nos numeros: a razão de 10 a 21 he composta da razão de 2 a 3, e de 5 a 7; as razões da multiplicação, das quaes resulta a razão composta, se chamão razões componentes.

277 Se as razões componentes são iguaes, a razão composta, que resulta, se chama duplicada, quando se com-

põe da multiplicação de duas razões iguaes: se se multiplicárão trez razões iguaes huma por outra, se chama razão triplicada. Por exemplo: se tivermos a proporção de $a:b::c:d$, ou, o que vem a ser o mesmo, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, a razão de ac a bd he duplicada da razão de a a b, e de c a d, pois a proporção suppõe haver igualdade nestas duas razões. Se temos $a:b::c:d::f:g$, ou $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{f}{g}$, a razão de acf a bdg será triplicada de a a b, ou da de c a d, pois todas estas razões são iguaes.

278 Quando se diz que dous productos são entre si em razão duplicada de outras duas grandezas, he como se dissessemos que o primeiro producto he ao segundo, como o quadrado de huma grandeza he ao quadrado de outra; assim suppondo sempre $a:b::c:d$, quando digo que a razão de ac a bd he duplicada da de a a b, he o mesmo que se fizesse esta proporção $ac:bd::aa:bb$. Para mostrar esta proporção, basta mostrar que o producto dos extremos he igual

ao dos meios, ou que $aabd = acbb$, o que he evidente, dividindo cada membro por ab, pois feita a divisão, ficão os quocientes ad, e bc, que são iguaes; porque sendo $a:b::c:d$, será $ad = bc$.

279 Do mesmo modo, quando dizemos que a razão de hum producto de trez dimensões a outro producto de trez dimensões he triplicada da de huma quantidade linear a outra, he como se dissessemos que o primeiro producto he ao segundo, como o cubo da primeira grandeza he ao cubo da segunda. Por exemplo: se tivermos $a:b::c:d::f:g$, quando dizemos que a razão de acf a bdg he triplicada da de a a b, he como se se fizesse esta proporção $acf:bdg::a^3:b^3$. Para provar esta proporção, basta ver que o producto dos extremos he igual ao producto dos meios, ou que $acfb^3 = a^3bdg$, o que he facil de mostrar, pois $ab = ab$: logo dividindo cada membro por esta mesma quantidade, ficará de huma parte cfb^2, e da outra a^2dg; resta mostrar $cfb^2 = a^2dg$: por ser $a:b::c:d$, será $ad = bc$: logo dividindo o primeiro membro por bc, e o segundo

por

por ad, teremos para mostrar $bf = ag$, o que he evidente, pois $a:b::f:g$.

PROPOSIÇÃO XVIII.

THEOREMA.

280 O expoente dos dous termos de huma razão duplicada he igual ao quadrado do dos dous termos da razão simples; e o expoente dos dous termos de huma razão triplicada, igual ao cubo do dos dous termos da razão simples.

DEMONSTRAÇÃO.

Entende-se aqui por expoente de huma razão o quociente, que resulta da divisão de dous termos hum por outro: isto supposto, imaginemos que o quociente de a dividido por b seja f, e que o de c dividido por d seja tambem f, que dará $a:b::c:d$, devemos mostrar $\frac{ac}{bd} = ff$, o que he evidente; porque se $\frac{a}{b} = f$, e $\frac{c}{d} = f$: logo $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = f \times f$, ou ff: do mesmo modo se $a:b::c:d::f:g$, e que o quociente de a a b, isto he $\frac{a}{b}$,

se-

ſeja q, tambem o de $\frac{c}{d}$, e de $\frac{f}{g}$ ſerá q, e ſerá $\frac{acf}{bdg}=q^3$, porque $\frac{a}{b}=q$, $\frac{c}{d}=q$, e $\frac{f}{g}=q$: logo $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$, $\times\frac{f}{g}=q\times q\times q=q^3$. O meſmo he em numeros a razão de 12 a 3 he 4, a de 20 a 5 he 4, a de 12×20, ou de 240 a 5×3, ou 15 he 16 quadrado de 4.

COROLLARIO.

281 A razão, que ha entre os quadrados de dous numeros, he duplicada da das ſuas raizes: a razão, que ha entre os cubos de dous numeros, he triplicada da que ha entre as raizes, e aſſim as mais.

Deve-ſe cuidar em não confundir a razão dupla com a razão duplicada: huma razão dupla, ou tripla não he mais que huma razão ſimples, na qual o antecedente he duplo, ou triplo do conſequente; mas huma razão duplicada he compoſta de duas razões iguaes, e huma razão triplicada he compoſta do producto de trez razões iguaes.

Re-

Regras geraes para a resolução dos Problemas, ou applicação do calculo analitico ao methodo do desembaraçar as incognitas.

DEFINIÇÕES.

282 Quando huma quantidade he positiva, e se não acha mais que huma vez em hum só membro de huma equação, se chama quantidade desembaraçada, como por exemplo a quantidade x nesta equação $a+b=x$.

AXIOMA I.

283 Se a quantidades iguaes se accrescentão iguaes, os todos que resultão serão iguaes.

II.

284 Se de quantidades iguaes se tirão iguaes, os restos serão iguaes.

III.

285 Se quantidades iguaes se multiplicão por huma mesma quantidade, os productos serão iguaes.

IV.

286 Se quantidades iguaes se dividirem por huma mesma quantidade, os quocientes serão iguaes.

V.

V.

287 As raizes de quantidades iguaes ſerão iguaes.

REGRA I.

Em que ſe moſtra o uſo da ſomma, e diminuição para deſembaraçar as incognitas.

288 Para deſembaraçar huma quantidade, devem-ſe paſſar para outro membro as quantidades, que a acompanhão, pondo-lhe o ſinal contrario, e tirando-as do membro, em que ſe achão. Exemplo: ſe tivermos eſta equação $a+c=x-d$, para deſembaraçar x he preciſo paſſar $-d$ do ſegundo membro para o primeiro com o ſinal $+$, e teremos $a+c+d=x$, em que a quantidade x eſtá deſembaraçada, pois o ſeu valor he $a+c+d$, pois como ſe accreſcentou d a cada membro da equação, ſegue-ſe pelo axioma primeiro que ſe não mudou a igualdade.

Do meſmo modo para deſembaraçar y na equação $y+a=b+c$, ſe fará paſſar a do primeiro membro para o ſegundo com o ſinal $-$, e teremos $y=b+c-a$,

que

que dá o valor de y, pois pelo ſegundo axioma não ſe fez mais que tirar de duas quantidades iguaes huma meſma quantidade.

COROLLARIO.

289 Segue-ſe da regra precedente primeiramente que todos os termos de huma equação ſe podem fazer poſitivos, mudando o que tem o ſinal $-$ de hum membro da equação para o outro com o ſinal $+$. Por exemplo: para fazer poſitivos todos os termos da equação $ab-cc+cd-dd=aa+bb$ não ha mais que fazer paſſar os termos cc, e dd, que tem o ſinal $-$, do primeiro membro para o ſegundo, pondo-lhe o ſinal $+$, tirando-os do primeiro membro, e teremos $ab+cd=aa+bb+cc+dd$, em que não ha quantidades negativas: do meſmo modo ſe tivermos $aa-dd+cd-ab=ac+cc-ad$, não temos mais que trocar dd, e ab do primeiro membro para o ſegundo, e ad do ſegundo para o primeiro com os ſinaes contrarios, e teremos $aa+cd+ad=ac+cc+dd+ab$, que todos são termos poſitivos.

Pó-

290 Póde-ſe tambem pela meſma regra fazer paſſar todos os termos de hum dos membros de huma equação para outro, reduzindo a igualdade a cifra; porque para fazer paſſar, por exemplo, os termos do ſegundo membro deſta equação $aa+bb=cd+bc-dd$ ao primeiro, não tem mais que tranſpôr os termos com os ſinaes contrarios, e ſerá $aa+bb-cd-bc+dd=0$.

REGRA II.

Em que ſe faz uſo da multiplicação para deſembaraçar as incognitas, e livrar as equações das fracções que contém.

291 Para deſembaraçar huma quantidade, que ſe acha dividida por qualquer numero, ou por qualquer letra, devem-ſe multiplicar os outros termos da equação pelo diviſor deſta quantidade, ſem bulir na quantidade mais, que para lhe deſtruir o diviſor; aſſim para deſembaraçar $\frac{xx}{c}$ na equação $a+b=\frac{xx}{c}$, he preciſo multiplicar o membro $a+b$ pelo diviſor c, e teremos $ac+bc=$

xx,

xx, e desembaraçado xx. Do mesmo modo se tivessemos $c+d=\frac{z}{2}$ para desembaraçar z, se devem multiplicar os termos $c+d$ pelo divisor 2, e teremos $2c+2d=z$, o que he evidente pelo axioma terceiro, pois tendo multiplicado os dous membros desta equação por huma mesma quantidade, não mudamos a equação.

COROLLARIO.

292 Como a divisão indicada, ou $\frac{a}{b}$ não he mais que huma fracção, segue-se da regra precedente, que não sómente se podem desembaraçar as quantidades incognitas, que estão divididas, mas tambem reduzir a inteiros os quebrados dos termos de huma equação, multiplicando todos os termos da equação pelos denominadores dos quebrados. Por exemplo: para reduzir o quebrado, que se acha na equação $a+\frac{dt}{c}+b=d+c$, multiplico todos os termos pelo denominador c do quebra-

brado $\frac{dd}{c}$, e fica $ac+dd+bc=dc+cc$, em que não ha quebrados: para tirar os quebrados da equação $xd+\frac{bbc}{a}-cc=dd-\frac{aad}{c}+bc$, começo, multiplicando todos os termos da equação pelo denominador a do primeiro quebrado para ter $xda+bbc-acc=add-\frac{aaad}{c}+abc$, em que não ha quebrados no primeiro termo: depois multiplico todos os termos desta nova equação pelo denominador c da segunda fracção para ter $adxc+bbcc-accc=addc-aaad+abcc$, em que não ha quebrados. Tambem se tivessemos huma equação, como $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{x}{a}=\frac{b}{c}+\frac{y}{c}$, se desvanecerião todas as fracções, multiplicando cada numerador pelos denominadores das outras fracções, e teriamos $aacdc+abc^3+bcdcx=abbdc+abcdy$.

293 Mas em lugar de multiplicar cada numerador, hum depois do outro, por todos os denominadores das outras fracções, se podem logo tirar todos os quebrados de huma equação, multiplican-

cando cada termo pelo producto de todos os denominadores, e riſcando nos numeradores, e denominadores de cada nova fracção as letras ſemelhantes.

REGRA III.

Em que ſe moſtra o uſo da divisão para deſembaraçar as incognitas.

294 Quando huma quantidade incognita, que ſe quer deſembaraçar, eſtá multiplicada por huma grandeza conhecida, ſe deſembaraça a incognita, dividindo cada hum dos membros da equação pela quantidade conhecida; aſſim para deſembaraçar a incognita na equação $ax = bb - cc$, ſe dividirá cada membro por a, e teremos $x = \frac{bb-cc}{a}$: do meſmo modo ſe tivermos $cz = dd + az$, conheceremos a incognita, fazendo paſſar az do ſegundo membro para o primeiro com o ſinal contrario para termos $cz - az = dd$; e dividindo cada membro por $c - a$, teremos $z = \frac{dd}{c-a}$, o que he evidente pelo axioma quarto, pois tendo dividido cada membro da equação

ção pela mesma grandeza, os quocientes devem ser iguaes.

COROLLARIO.

295 Segue-se desta regra, que quando todos os termos de huma equação estão multiplicados por huma mesma letra, ou por huma mesma quantidade, se póde fazer a equação mais simples, dividindo todos os termos por essa quantidade. Por exemplo: se temos $aa+ab=ac-ad$, em que todos os termos estão multiplicados por a, não temos mais que dividir os dous membros desta equação pela letra a, e será a equação $a+b=c-d$, que he mais simples que a precedente; mas se se encontrasse algum termo, que não pudesse ser dividido como os outros, por não ter letra semelhante no divisor, isto não embaraça fazer-se a divisão, porque quando effectivamente se não póde fazer com algum termo, basta indicalla. Por exemplo: para dividir esta equação $abb-cbb=cdx+bbc$ por bb, na qual o termo cdx não tem letras semelhantes no divisor, se tira bb dos outros termos,

e se

e se denota $\frac{cdx}{bb}$, e teremos $a-c=\frac{dxc}{bb}$ $+c$.

Em fim quando os dous membros de huma equação tem commum divisor, se poderão reduzir a huma equação mais simples, dividindo cada membro pelo commum divisor. Por exemplo: se tivermos huma equação, como $bbx-bxx$ $=abb-abx$, na qual os membros tem por commum divisor $bb-bx$, se fará a divisão, que dará esta outra equação $x=a$.

REGRA IV.

Que mostra o uso da extracção das raizes para desembaraçar as incognitas.

296 Quando temos huma equação, em que hum dos membros contém só quantidades conhecidas, e o outro, em que está a incognita, he hum quadrado, ou cubo perfeito, se deve extrahir a raiz destes dous membros para ter huma nova equação, na qual se póde conhecer a incognita. Por exemplo: se temos $xx+2ax+aa=a+bc+dd$, em que o primeiro membro desta equação he hum quadrado perfeito, se extrahirá a raiz de cada membro: a do primeiro mem-

bro

* Numer. 147. * Numer. 149. * Numer. 288.

bro * he $x+a$: a do ſegundo * $\sqrt{bc+dd}$, e ſerá a equação $x+a=\sqrt{bc+dd}$; e fazendo paſſar a do primeiro membro ao ſegundo *, teremos $x=\sqrt{bc+dd}-a$, o que moſtra que ſe ſe extrahe a raiz de $bc+dd$, tirando deſta raiz a quantidade a, a differença ſerá o valor de x.

Do meſmo modo para deſembaraçar x da equação $xx-2ax+aa=bb$, extrahirei a raiz de cada membro, e terei $x-a=b$, de que ſe deduz que $x=b+a$.

297 Como o primeiro membro deſta equação $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=aab$ he hum cubo perfeito, tirando a raiz cubica de cada membro, teremos a equação mais ſimples $x+a=\sqrt[3]{aab}$; e tranſpondo, ſerá $x=\sqrt[3]{aab}-a$, que moſtra que ſe ſe extrahe a raiz cubica de aab, e deſta raiz ſe tira a quantidade a, o reſto ſerá o valor de x. Do meſmo modo, ſendo o primeiro membro deſta equação $x^3-3axx+3a^2x-a^3=bdd$, tambem hum cubo perfeito, ſe ſe extrahe de cada membro a raiz cubica, teremos $x-a=\sqrt[3]{bdd}$, ou $x=a+\sqrt[3]{bdd}$, que moſ-

moſtra que a quantidade a com a raiz cubica de bdd he igual a x.

REGRA V.

Em que ſe dá o modo de ſubſtituir em huma equação o valor das incognitas.

298 Quando ſe conhece o valor de algumas letras, que ſe querem deſvanecer em huma equação, ſe ſubſtituem em ſeu lugar quantidades, que lhe são iguaes, com o meſmo ſinal. Por exemplo: ſe tivermos a equação $a+z=y+b-c$, e quizermos deſvanecer z da equação, ſupponhamos $z=d+c$, tiraremos z da equação, pondo em ſeu lugar $d+c$, o que dará $a+d+c=y+b-c$, em que não ha z: ſe tivermos eſta equação $b+d-x=c+z$, e quizermos deſvanecer a quantidade x, ſupponhamos $x=a+e$, tiraremos x, pondo em ſeu lugar $a+e$; e porque x tem o ſinal $-$, ſerá $b+d-a-e=c+z$, em que x não apparece.

299 Se a letra, que ſe quer deſvanecer, eſtá multiplicada, ou dividida na equação por outra grandeza, ſe deve multiplicar, ou dividir o ſeu valor por eſta meſma grandeza, e eſcrevella

na equação com o mesmo sinal. Por exemplo: se da equação $bb+ax-ee=ad+ae-yy$ se quer desvanecer x, suppondo que $x=e+f$, como x está na equação multiplicado por a, se deve multiplicar o seu valor $e+f$ por a para ter $ax=ae+af$; e pondo $ae+af$ em lugar de ax, teremos $bb+ae+af-ee=ad+ae-yy$, em que não apparece x.

300 Para fazer desvanecer da equação $cc+yy-2bd=ac-bz$ a letra z, suppondo $z=d-c+g$, se deve multiplicar o valor de z por b para ter $bz=bd-bc+bg$; e como bz tem o sinal $-$ na equação, se mudão os sinaes de $bd-bc+bg$, e se põem na equação $-bd+bc-bg$, o que dá $cc+yy-2bd=ac-bd+bc-bg$, em que não ha a letra z.

301 Para fazer desvanecer y na equação $2ab+cz=bc+\frac{ddy}{a-f}$, suppondo que temos $y=e-g$, deve-se multiplicar $e-g$ por dd para ter $ddy=dde-ddg$; mas como ddy está dividido por $a-f$ na equação, para substituir $dde-ddg$ dividir-se-ha tambem por $a-f$, e então será $2ab+cz=bc+\frac{dde-ddg}{a-f}$, em que não ha y.

Pa-

302 Para desvanecer u da equação $aa+dd=au+bd$, suppondo $u=\frac{aa-cc+fg}{b+d}$, porque u he igual a hum quebrado, he preciso multiplicar o numerador deste quebrado por a para ter $au=\frac{a^3-acc+afg}{b+d}$, e depois pôr no lugar de au na primeira equação o quebrado, que lhe he igual, e será $aa+dd=\frac{a^3-acc+afg}{b+d}+bd$, na qual se não acha u: se se quizer tirar o quebrado desta equação, não temos mais que multiplicar os outros termos pelo denominador $b+d$*; e tirando os termos, que se achão em ambos os membros com os mesmos sinaes, a equação se transformará nesta $aab+aad+d^3=a^3-acc+afg+bbd$.

* Numer. 291.

303 Se a letra, que se quer desvanecer, he lado de hum quadrado, ou de hum cubo, deve-se quadrar, ou cubicar o seu valor, e pôr o seu quadrado, ou cubo na equação em lugar do quadrado, ou cubo da letra, que se quer desvanecer. Por exemplo: se se quer desvanecer y da equação $yy-2bd$

$=2ax+dd$, ſuppondo $y=b+d$, deve-ſe quadrar o valor de y para ſe ter $bb+2bd+dd=yy$, e pôr eſte ſeu valor em lugar de yy, e teremos eſta equação $bb+2bd+dd-2bd=2ax+dd$; e tirando $+2bd-2bd$, que ſe deſtroem, e dd, que he commum ao primeiro, e ſegundo membro com o meſmo ſinal, teremos $bb=2ax$; e deſembaraçando x, ſerá $x=\frac{bb}{2a}$, que he o valor de x: póde-ſe tambem ſubſtituir em huma equação o valor do cubo, depois de conhecido o da ſua raiz.

Como na ſubſtituição não ſe faz mais que pôr huma quantidade igual no lugar de outra, que eſtava na equação, ſempre ficão iguaes.

REGRA VI.

Do modo, com que ſe podem deſvanecer todas as incognitas de huma equação.

304 Para ſe reſolver eſte problema, deve-ſe attender bem ao eſtado da queſtão, e todas as ſuas condições; e depois de notar as quantidades conhecidas com as primeiras letras do alfabe-

to,

to, e as que o não são com as ultimas, ſuppondo o problema já reſolvido, ſe procurarão tantas equações, quantas são as letras deſconhecidas, ao que chamaremos primeiras equações.

Depois ſe eſcolherá a equação mais ſimples de todas para deſembaraçar huma das incognitas, que ella enſerra; e tendo achado o valor deſta incognita, ſe ſubſtituirá nas outras equações nos lugares, em que ſe achar a dita incognita.

Eſcolher-ſe-ha de novo o mais ſimples equação para deſembaraçar huma ſegunda incognita, e o ſeu valor ſe ſubſtituirá nas outras equações, e iſto ſe irá repetindo para deſvanecer todas as incognitas, e deſte modo ſe achará conhecido o valor de todas as incognitas, que dará a ſolução do problema.

Para fazer iſto mais ſenſivel, vamos deſvanecer todas as incognitas das trez equações $x+y=z+a$, $y+z=b+x$, e $x+z=c+y$: para iſto ſe começa a buſcar o valor de z na primeira equação, deſembaraçando z de a, que eu paſſo a outro membro com o ſinal contrario

pa-

para ter $x+y-a=z$, que me dá o valor de z: depois ponho nas outras equações este valor em lugar de z, que ficão mudadas nestas $2y+x-a=b+x$; e $2x+y-a=c+y$: depois tiro x da primeira equação, pois se acha em ambos os membros della com o mesmo sinal $+$, como tambem y da segunda equação pela mesma razão; e desembaraçando as incognitas que restão, fica $2y=b+a$, e $2x=c+a$, ou tambem $y=\frac{b+a}{2}$, e $x=\frac{c+a}{2}$, em que se achão logo conhecidos os valores de x, e y, sem fazer outra substituição: depois ponho na primeira equação, em que está desembaraçada a incognita, o valor de x, e y, que será $\frac{b+a+c+a}{2}-a=z$, ou $\frac{b+c}{2}=z$, e consequentemente está achado o valor das incognitas x, y, e z em letras conhecidas.

ADVERTENCIA.

Contentamo-nos de dar só hum exemplo desta regra, porque vamos appli-

plicalla, assim como as precedentes, aos que se seguem, em que se resolvem problemas curiosos, que trazemos expressamente para familiarizar os principiantes no calculo Algebraico, e para fazer mais interessante o que dissemos até agora, que he bom entender perfeitamente para comprehender tudo o mais que se segue nesta Obra.

Applicação das regras precedentes á resolução de varios problemas curiosos.

QUESTÃO I.

Trez companheiros ganhárão todos juntos no jogo 875 moedas, o segundo ganhou duas vezes mais que o primeiro, e mais 10 moedas, o terceiro ganhou tanto como o primeiro, e segundo, e 15 moedas mais, pergunta-se quanto ganhou cada hum.

Para resolver esta questão chamo x ao ganho do primeiro, e consequentemente o ganho do segundo será $2x$; e como ganhou mais 10 moedas, o seu ganho será $2x+10$. Ora como o terceiro ganhou tanto como o primeiro, e se-

ſegundo, e 15 moedas mais, ſommo os ganhos dos dous primeiros, iſto he, x, e $2x+10$, e lhe accreſcento 15, ſerá o ganho do terceiro $3x+25$; e como o ganho de todos trez he igual a 875 moedas, faço eſta equação $x+2x+10+3x+25=875$, de que deſembaraçando a quantidade deſconhecida, fazendo paſſar a ſomma dos numeros conhecidos do primeiro membro para o ſegundo * com o ſinal $-$; e reduzindo tudo a hum ſó termo, teremos eſta nova equação $6x=875-35$, ou $6x=840$, que dividido por 6 * para ter $x=140$, dar-me-ha o ganho do primeiro companheiro 140 moedas: para achar o ganho do ſegundo, dobro 140, e accreſcento ao producto 10, que me dá $2x+10=290$; em fim ſomme-ſe eſta equação com a precedente, e accreſcentando 15, ſerá o ganho do terceiro companheiro $3x+25=445$; por conſequencia a primeira peſſoa ganhou 140 moedas, a ſegunda 290, e a terceira 445, o que he bem evidente, pois eſtas trez ſommas fazem 875 moedas, e tem todas as condições do problema.

* Numer. 288.

* Numer. 294.

QUES-

QUESTÃO II.

Quatro Mineiros, tendo cada hum feito certas braças de mina, ganhárão juntos 140 mil reis; o ſegundo ganhou trez vezes mais que o primeiro menos 8 mil reis; o terceiro ganhou metade do ganho do primeiro, e ſegundo menos 12 mil reis; e o quarto ganhou tanto como o primeiro, e terceiro, pergunta-ſe quanto ganhou cada hum.

Para reſolver eſta queſtão chamo x ao ganho do primeiro, aſſim $3x-8$ ſerá o ganho do ſegundo; $2x-16$ do terceiro, e $3x-16$ do quarto; e como todas eſtas quantidades são iguaes a 140 mil reis, faço eſta equação $x+3x-8+2x-16+3x-16=140$, que reduzo á mais ſimples expreſsão, ſommando todas as quantidades ſemelhantes, e ſerá $9x-40=140$, ou $9x=180$, fazendo paſſar 40 do primeiro para o ſegundo membro; e dividindo os membros da equação por 9 * para deſembaraçar a incognita, acharei $x=20$, que moſtre o ganho do primeiro 20 mil reis; o ganho do ſegundo $3x-8$ ſerá 52 mil reis; o

* Numer. 294.

do

do terceiro, que he $2x-16$, ſerá 24 mil reis; o do quarto, que he $3x-16$, ſerá 44 mil reis, o que he evidente, pois ſommados eſtes quatro numeros, dão 140 mil reis, e ſe ſatisfazem as mais condições do problema.

QUESTÃO III.

Sinco Artilheiros atirárão em huma tarde 96 tiros; o ſegundo atirou dobrado do primeiro, e 2 tiros mais; o terceiro atirou tanto como o primeiro, e ſegundo menos ſeis tiros; o quarto tanto como o ſegundo, e terceiro, e mais 10 tiros; e o quinto atirou tanto como o primeiro, e quarto menos vinte tiros, pergunta-ſe quantos tiros atirou cada hum.

Chame-ſe o numero dos tiros, que atirou o primeiro, x, ſerá o do ſegundo $2x+2$; o do terceiro $3x+2-6$, ou, o que he o meſmo, $3x-4$; o do quarto $5x+2-4+10$, ou $5x+8$; em fim o do quinto $6x+8-20$, ou $6x-12$. Ora como eſtas quantidades em ſomma devem ſer iguaes a 96, faço eſta equação $x+2x+2+3x-4+5x+8+6x-12=96$,

que

que reduzo á mais ſimples expreſsão, ſommando todas as quantidades conhecidas, que tem o ſinal +, ou —, e ſerão $17x-6=96$, ou $17x=102$, paſſando 6 do primeiro membro para o ſegundo *; e para ter o valor de x, divido eſta equação por 17, e acho $x=6$, o que moſtra que o primeiro Artilheiro atirou 6 tiros; o ſegundo, que he $2x+2$, atirou 14; o terceiro, que he $3x-4$, atirou tambem 14; o quarto, que he $5x+8$, atirou 38; e o quinto $6x-12$ atirou 24, o que he evidente, pois todos os numeros juntos fazem 96.

* Num. 50. e 288.

QUESTÃO IV.

Hum official de Mineiros fez com os ſeus trabalhadores em 3 mezes mil braças andantes de galeria de mina: fez no ſegundo mez o dobro da obra do primeiro, e mais 50 braças, porque teve hum reforço de Mineiros: no terceiro mez fez 200 braças menos, porque lhe adoecêrão parte dos ſeus homens, pergunta-ſe quantas braças ſe fizerão no primeiro, no ſegundo, e no terceiro mez.

Pa-

Para resolver esta equação chamo x ao numero de braças de galerias das minas, que se fizerão no primeiro mez; $2x+50$ he o trabalho do segundo mez; e $2x+50-200$, ou $2x-150$, he a quantidade, que se fez no terceiro; e como a somma destas quantidades deve ser igual a 1000, faço esta equação $x+2x+50+2x-150=1000$, que reduzida á mais simples expressão *, fica $5x-100=1000$, ou $5x=1100$; e dividindo cada membro desta equação por 5, teremos $x=220$, o que mostra que no primeiro mez se fizerão 220 braças de galeria de minas, e consequentemente se fizerão 490 no segundo, e 290 no terceiro, o que he evidente, pois a somma destas quantidades he 1000 braças.

* Numer. 150.

QUESTÃO V.

Mandou-se para atacar certo posto hum destacamento de granadeiros, entre os quaes se achão dous, que discorrendo sobre as granadas, que tem nas suas patronas, diz o primeiro ao segundo: Se tu me désses huma das tuas granadas, teria eu tantas como tu; e

o se-

o ſegundo lhe reſpondeo: Se tu me déſſes huma das tuas, eu teria dobrado das que tu tens, pergunta-ſe quantas granadas tem cada hum.

Como eſta queſtão enſerra duas incognitas, chamo x o numero das granadas do primeiro, e z o numero das granadas do ſegundo, e fação tantas equações, quantas são as incognitas *. Para fazer a primeira equação, digo: Se x tiveſſe huma granada mais, e z huma menos, eſtas duas quantidades ſerião iguaes, o que dá $x+1=z-1$. Para ter a ſegunda equação, faço eſte diſcurſo: Se z tiveſſe huma granada mais, e x huma menos, a primeira quantidade ſeria dupla da ſegunda, o que me dá eſta igualdade $z+1=2x-2$. Preſentemente tenho tantas equações, como incognitas, deſembaraçarei a incognita z da primeira equação, fazendo paſſar -1 do ſegundo membro ao primeiro para ter $x+2=z$: depois ſubſtituo na ſegunda equação em lugar de z o ſeu valor *, e tenho $x+3=2x-2$, em que já não apparece z; e fazendo paſſar -2 do ſegundo membro ao primei-

* Numer. 304.

* Numer. 208.

meiro, temos $x+5=2x$; e tirando x de huma, e outra parte, fica $5=x$, que me dá o valor de x: ſubſtituindo eſte valor de x na equação, em que z eſtá deſembaraçada, teremos $z=7$, e conſequentemente o primeiro granadeiro tinha 5 granadas, e o ſegundo 7, o que he bem evidente, pois eſtes dous numeros ſatisfazem as condições do problema.

QUESTÃO VI.

Trez Bombeiros deitárão em huma Cidade citiada certa quantidade de bombas; o primeiro, e o ſegundo juntos deitárão mais 20 bombas que o terceiro; o ſegundo, e terceiro deitárão 32 mais que o primeiro; e o primeiro, e terceiro 28 mais que o ſegundo, pergunta-ſe quantas bombas deitou cada hum.

Como as quantidades conhecidas neſta queſtão são expreſſadas por numeros, ſubſtituiremos em ſeu lugar as primeiras letras do alfabeto; aſſim em lugar dos numeros 20, 32, e 28, tomaremos a, b, c, ſuppondo $a=20$, $b=32$,

e c

e $c=28$. Para fazer mais geral a resolução deste problema, chamo x á quantidade das bombas, que deitou o primeiro bombeiro; y á quantidade, que deitou o segundo; e z á quantidade do terceiro. Isto supposto, $x+y$ expressa a quantidade de bombas, que deitou o primeiro, e o segundo Bombeiro; a he o numero das bombas, que o primeiro, e segundo atirárão demais que o terceiro: logo terei $x+y-a=z$, que he a primeira equação; $y+z-b=x$, que he a segunda; e a terceira $x+z-c=y$; e como tenho trez equações, que comprehende cada huma trez incognitas, busco o valor de huma destas incognitas para substituir nas outras equações nos lugares, em que ella se achar *; e como na primeira equação $x+y-a=z$ tenho o valor de z, que he o mesmo que $x+y-a$, ponho este valor na segunda, e terceira equação em lugar de z, e terei estas $x+y+y-a-b=x$, e $x+y-a+x-c=y$; e fazendo que os termos sejão positivos, e reduzindo-as á mais simples expressão, dá $2y=a+b$, e $2x=a+c$; e dividindo $2y$, e $2x$ por 2, dá em

* Numer. 298.

em fim $y=\frac{a+b}{2}$, e $x=\frac{a+c}{2}$; e como neſtas duas equações não ha mais incognitas, he preciſo tornar á primeira, que he $x+y-a=z$, para ſubſtituir em lugar de x, e de y os ſeus valores $\frac{a+b}{2}$, e $\frac{a+c}{2}$ para ter $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c-a=z$; ou tambem $\frac{b+c}{2}=z$, porque os dous termos $+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a$, que valem a, ſe deſtroem com o termo $-a$: temos logo o valor de z, que he a ultima quantidade, e que nos reſtava a conhecer. Preſentemente ſei que $x=\frac{a+c}{2}$, e que $y=\frac{a+b}{2}$, e $z=\frac{b+c}{2}$: tómo no lugar de $\frac{a+c}{2}$ metade dos numeros repreſentados por a, e c, iſto he, metade de $20+28$, que he 24, que ſerá o valor de x: em lugar de $\frac{a+b}{2}$ tomarei metade de $20+32$ para ter 26, que he o valor de y, e finalmente em lugar de $\frac{b+c}{2}$ tómo metade dos numeros 28, e

32 para ter 30, que ſerá o valor de z, de que concluo que o primeiro Bombeiro deitou 24 bombas, o ſegundo 26, e o terceiro 30, pois eſtes trez numeros ſatisfazem plenamente as condições do problema.

QUESTÃO VII.

Sitiou-ſe huma Praça, cuja guarnição ſe compunha de Tropas Alemans, Inglezas, Hollandezas, e Portuguezas: tomada a Praça, ſe achou que a ſomma dos mortos Alemães, Inglezes, e Hollandezes, menos 620, era igual ao numero dos mortos Portuguezes: que o numero dos mortos Alemães, Inglezes, e Portuguezes juntos, menos 460, era igual ao dos Hollandezes: o numero dos Alemães, Hollandezes, e Portuguezes juntos, menos 380, era igual ao dos Inglezes; e finalmente que o numero dos Inglezes, Hollandezes, e Portuguezes, menos 500, era igual ao dos Alemães, pergunta-ſe quantos mortos ha Alemães, quantos Inglezes, Hollandezes, e Portuguezes.

Chamemos u o numero dos Alemães, x o dos Inglezes, y o dos Hollandezes, e z o dos Portuguezes: supponhamos, para fazer mais geral a solução do problema, $620=a$, $460=b$, $380=c$, e $500=d$: isto supposto, todas as condições do problema me dão quatro equações, a primeira $u+x+y=z+a$, a segunda $u+x+z=y+b$, e a terceira $u+y+z=x+c$, e em fim a quarta $x+y+z=u+d$: depois disto desembaraço huma incognita da primeira equação, que será por exemplo z, para ter $u+x+y-a=z$, que me dá o valor de z, cujo valor substituirei nas outras trez equações *, o que as muda nestas $u+x+y-a=z$, $u+x+u+x+y-a=y+b$, $u+y+u+x+y-a=x+c$, e $x+y+u+x+y-a=u+d$, que reduzidas á mais simples expressão, será $2u=a+b-2x$, $2y=a+c-2u$, e $2x=a+d-2y$ *; e depois de desembaraçar $2u$, $2x$, e $2y$, substituirei o valor de $2u$ na equação $2y=a+c-2u$, e tenho $2y=a+c-a-b+2x$, em que se não acha já u; e se na equação $2x=a+d-2y$ puzer em lugar de $2y$ o seu valor achado, haverá esta ultima equação $2x=a+d-a-c+a+b-$

* Numer. 298.

* Numer. 288.

$b-2x$, ou $4x=a+b+d-c$*, e $x=\frac{a+b+d-c}{4}$*, ſem incognitas. Se em lugar de $2x$ na equação $2u=a+b-2x$ ſe põe metade do valor de $4x$, que he $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}c$, teremos $2u=a+b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}d$, ou $2u=\frac{a+b+c-d}{2}$, ou tambem $u=\frac{a+b+c-d}{4}$, que dá o valor de u; e ſe na equação, em que ſe acha $2y=a+c-2u$ ſe põe metade do valor de $4u$, que he $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}d$, teremos $2y=a+c-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d$, ou $y=\frac{a+c+d-b}{4}$, que dá o valor de y: finalmente ſe na equação $u+x+y-a=z$ ſe põem os valores de u, de x, e de y, teremos depois das reducções neceſſarias $z=\frac{b+c+d-a}{4}$; e como ſe acabou de achar $u=\frac{a+b+c-d}{4}$, $x=\frac{a+b+d-c}{4}$, $y=$

* Numer. 288.
* Numer. 294.

$\frac{a+c+d-b}{4}$, e $z=\frac{b+c+d-a}{4}$, ſegue-ſe que eſtá feita a reſolução do problema, pois ſe ſe divide 1460—500 por 4, que he igual a $\frac{a+c+b-d}{4}$, achar-ſe-ha 240, valor de u: fazendo o meſmo com as outras, ſe achará 300, valor de x, e 260 por valor de y, e 180 por valor de z: aſſim ha 240 Alemães mortos, 300 Inglezes, 260 Hollandezes, e 180 Portuguezes, o que he bem evidente, pois eſtes numeros ſatisfazem as condições do problema.

QUESTÃO VIII.

Hum Sargento de Mineiros ſe achou em 32 ſitios, e em varias batalhas, em que recebeo muitas feridas: prometteo-lhe o Rei dar-lhe a gratificação, que lhe pediſſe dos ſeus ſerviços: o Sargento pedio ſómente que lhe déſſe em dinheiro a ſomma das gratificações, que elle teria tido, ſuppondo ter-lhe dado hum cruzado pela primeira ferida, dous pela ſegunda, quatro pela terceira, e aſſim das mais, dobrando

ſem-

ſempre: concedeo-lhe o Rei a ſua petição, e recebeo 65535 cruzados, pergunta-ſe quantas feridas tinha.

Para reſolver eſta queſtão tirarei della tudo o que he eſtranho, e a reduzo ao que tem de mais ſimples, e vejo que o numero 65535 he a ſomma dos termos de huma progreſsão geometrica, da qual o primeiro termo he 1 o ſegundo, 2 o terceiro, 4 cuja razão he tambem 2, ou, o que vem a ſer o meſmo, que eſte numero he a ſomma de muitas potencias ſucceſſivas de 2, da qual a ultima accreſcentada com a unidade denota o numero dos termos da progreſsão; e fazendo reflexão que tendo o ultimo termo deſta progreſsão ſer-me-hia facil conhecer o numero delles, pois eſte ultimo termo he igual ao primeiro multiplicado pela potencia de 2, expreſſada pelo numero dos termos, que precedem *, chamo x a eſte ultimo termo: a ſomma dos antecedentes he a ſomma de todos os termos, excepto o ultimo; e a ſomma dos conſequentes he a meſma ſomma de todos os termos, excepto o primeiro, que he

* Numer. 248.

* Numer. 250. he 1; mas * a ſomma de todos os antecedentes he á ſomma dos conſequentes, como hum antecedente a ſeu conſequente: logo expreſſando iſto analiticamente, e chamando s o numero 65535, que he a ſomma dos termos da progreſsão, terei $s - x : s - 1 :: 1 : 2$, de que ſe tira, fazendo o producto dos extremos, e meios, $2s - 2x = s - 1$; e

* Numer. 288. e 294. deſembaraçando x *, teremos $x = \frac{s+1}{2} = \frac{65536}{2} = 32768$, o que moſtra que o ultimo termo da progreſsão he 32768, que he certamente huma potencia de 2: para ſaber a que potencia de 2 he igual eſte numero, elevo 2 ás potencias ſucceſſivas, e acho que he igual á decima quinta potencia de 2: logo eſte termo he o 16, pois o numero 15, que nota a potencia de 2, á qual eſte termo he igual, denota tambem o numero dos termos, que o precedem, aſſim tinha o Sargento 16 feridas.

RE-

REFLEXÃO.

A mesma proporção, que nos servio para resolver esta questão, póde tambem servir para a solução de todas as questões, que se propuzerem ácerca das progressões geometricas, e particularmente na somma das mesmas series. Para conhecer melhor esta utilidade, vamos applicalla á solução do problema seguinte.

PROBLEMA.

305 Achar a somma dos termos de huma progressão geometrica descendente infinitamente, cujo primeiro termo he a, e o segundo b.

SOLUÇÃO.

Por ser a progressão descendente, e o numero dos termos infinito, o ultimo termo póde ser tomado como cifra: assim a somma dos antecedentes será a somma de todos os termos, menos a cifra; e a somma dos consequentes será a somma de todos os termos, menos o primeiro: logo chamando s á

som-

ſomma dos antecedentes, e $s-a$ á ſomma dos conſequentes, ſerá a ſomma dos antecedentes á ſomma dos conſequentes, como o primeiro termo ao ſegundo, ou analiticamente $s-0 : s-a :: a : b$, de que ſe tira $as-a^2 = sb$, ou $as-bs = a^2$; e deſembaraçando s, teremos $s = \frac{a^2}{a-b}$*, o que moſtra que geralmente a ſomma dos termos de huma progreſsão geometrica deſcendente infinitamente he igual ao quadrado do primeiro termo, dividido pela differença do primeiro ao ſegundo. Por exemplo: ſe ſe quizerem ſommar todos os termos deſta progreſsão $\div\div$ 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, &c., elevo 2 ao ſeu quadrado, que he 4, que divido por $2-1$, que he 1, aſſim a ſomma dos termos deſta progreſsão he 4; do que ſe ſegue que todas as fracções $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ não valem mais que 1, ainda que ſe divida até o infinito. Do meſmo modo ſe tivermos $\div\div$ 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, &c., buſco o quadrado de 3,

* Numer. 294.

que

que he 9, que divido por 3—1, ou 2, e tenho a ſomma dos termos da progreſsão $s = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$, de que ſe ſegue que todos os termos $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, &c. não valem mais que meio, pois os dous primeiros termos fazem 4: o meſmo he das outras progreſsões, ás quaes ſe faz facilmente a applicação da formula geral.

Das reſoluções das equações do ſegundo gráo.

DEFINIÇÕES.

306 As equações, que acabamos de reſolver, ſe chamão equações do primeiro gráo, como tambem os problemas, cujas condições expreſsão, porque as incognitas não eſtão multiplicadas por ſi meſmas, nem humas por outras; mas ſe iſto ſuccedeſſe, a equação não eſtaria neſte caſo, e eſtaria mais embaraçada que as precedentes, a que ſe chamarão de ſegundo, terceiro, e quarto gráo, conforme ſe acha a incognita elevada á ſegunda, terceira, ou quar-

quarta potencia: por exemplo $ax^2 - 2ax = 3$ he huma equação do ſegundo gráo, $x^3 - 5x^2 + 7x + 12 = 15$ he huma equação do terceiro gráo. Não fallaremos aqui mais que das equações do ſegundo gráo; e depois de as ter reſolvidas em alguns exemplos, applicando-as a caſos particulares, reſolveremos em geral em formulas, que comprehendem todos os caſos poſſiveis deſtas caſtas de equações.

ADVERTENCIA.

307 As regras, que ſe devem ſeguir para fazer a equação de hum problema do ſegundo gráo, são inteiramente as meſmas que démos para os outros problemas: tudo conſiſte em expreſſar bem analiticamente as condições dadas, ou comprehendidas na meſma queſtão, o que depende mais da habilidade de quem reſolve o problema, do que de alguma regra geral, que ſe poſſa eſtabelecer.

308 Primeiro que tudo ſe deve notar, que o quadrado de qualquer quantidade póde ter o ſinal $+$, ou $-$ na ſua raiz,

raiz, isto he, que o quadrado *aa* póde resultar de $+a$ multiplicado por $+a$, ou $-a$ multiplicado por $-a$, pois hum, e outro dá igualmente a^2 no producto; de que se segue que geralmente huma equação do segundo gráo deve ter duas raizes: huma, que se chama negativa, porque he precedida do sinal $-$; e outra, que se chama positiva, porque he precedida do sinal $+$: o estado da questão determina ordinariamente a que se deve tomar; mas não se devem, principalmente nos principios, rejeitar os valores negativos, sem ter examinado primeiro o que podem significar, porque não servem menos para a resolução do problema, do que os que se chamão positivos, ainda que não o resolvem no sentido, que logo se propõe: além disto estas resoluções nos mostrão sempre verdades, que nunca conheceriamos, senão tivessemos feita a resolução analitica. Tudo isto se faz bem sensivel nos problemas, que vamos resolver.

QUES-

QUESTÃO I.

309 Hum ſoldado ſe vai incorporar no ſeu Regimento, de que eſtá diſtante 64 leguas: caminha o primeiro dia huma legua, trez no ſegundo, ſinco no terceiro, e aſſim vai augmentando ſempre duas leguas, pergunta-ſe quantos dias lhe são neceſſarios para ſe incorporar no ſeu Regimento.

Para reſolver eſta queſtão tiro fóra della tudo o que lhe he extranho, porque deſte modo he que o eſpirito ſe coſtuma a idéas geraes: além diſto eſta regra he de ſumma importancia para achar com facilidade as equações dos problemas, e ſe reduz a queſtão a achar o numero dos termos de huma progreſsão arithmetica, de que o primeiro termo he 1, o ſegundo 3, e a ſomma 64; e para fazer mais geral o problema, ſupponho que o primeiro termo he a, o ſegundo b, e a ſomma s: chamo x ao numero dos termos, e d o exceſſo de b a a, ſei que a ſomma dos termos de huma progreſsão arithmetica he igual ao producto da ſomma das extremas, multiplicada por metade do numero dos

ter-

termos *: conheço o primeiro extremo que he a, mas não conheço o ultimo: ſei com tudo geralmente que eſte ultimo termo he igual ao primeiro termo, e mais á differença do ſegundo ao primeiro, multiplicada pelo numero dos termos, que o precedem *; e como x he o numero dos termos, $x-1$ ſerá o dos termos, que precedem o ultimo: logo eſte ultimo ſerá $a+d\times x-1$, ou $a+dx-d$, ao qual accreſcentando o primeiro, temos a ſomma dos extremos $a+a+dx-d$, ou $2a+dx-d$, que multiplico por metade do numero dos termos $\frac{x}{2}$ para formar a equação $\frac{2ax+dxx-dx}{2}=s$; e tirando o diviſor 2, teremos $2ax+dxx-dx=2s$, que he a equação, que ſe deve reſolver para ſe ter a reſolução do problema.

* Numer. 238.

* Numer. 240.

Para reſolver eſta equação, começo por deſembaraçar de todo o coefficiente o termo, que tem a maior potencia da incognita, que he xx, dividindo cada termo da equação por d, o que me dá $xx+2\frac{ax}{d}-\frac{dx}{d}=\frac{2s}{d}$, ou $xx+\frac{2ax}{d}-x=\frac{2s}{d}$,

ou

ou $xx + x \times \frac{2a}{d} - 1 = \frac{2s}{d}$. Para facilitar mais o calculo, ſupponho que o coefficiente do ſegundo termo, que he $\frac{2a}{d} - 1$, he = a huma ſó letra c, e em lugar de $xx + x \times \frac{2a}{d} - 1$, tenho $xx + cx = \frac{2s}{d}$, que he a fórma mais ſimples, que ſe póde dar a huma equação do ſegundo gráo de dous termos.

Preſentemente para reduzir eſta equação ás do primeiro gráo, não ha mais que fazer com que o primeiro membro ſeja hum quadrado perfeito, de que ſe poſſa extrahir a raiz, o que ſe faz deſta fórma: accreſcenta-ſe a cada membro da equação o quadrado da metade do coefficiente de x ao ſegundo termo: metade do coefficiente de x he $\frac{c}{2}$, cujo quadrado he $\frac{cc}{4}$, que accreſcento a cada membro, o que me dá a nova equação $xx + cx + \frac{cc}{4} = \frac{cc}{4} + \frac{2s}{d}$, na qual o primeiro membro he hum quadrado perfei-

feito, a ſaber de $x+\frac{1}{2}c$, pois contém o quadrado xx do primeiro termo; cx dobro do producto do primeiro termo pelo ſegundo, e o quadrado do ſegundo: aſſim extrahindo as raizes de huma, e outra parte, temos $x+\frac{1}{2}c=\sqrt{\frac{cc}{4}+\frac{2s}{d}}$; e tranſpondo $\frac{1}{2}c$, ſerá $x=-\frac{1}{2}c\sqrt{\frac{cc}{4}+\frac{2s}{d}}$. Para applicar eſta expreſsão, ou formula geral ao noſſo problema, faço $a=1$, pois 1 he o primeiro termo da progreſsão arithmetica; $b=3$, porque no ſegundo dia faz 3 leguas de caminho; $b-a$, ou $d=3-1=2$, que he a differença do ſegundo termo ao primeiro; e $s=64$, que he a ſomma de todos os termos: por eſtes valores buſco o de c, que faço igual a $\frac{2a}{d}-1$, que acho ſer $\frac{2\times1}{2}-1$, ou $\frac{2}{2}-1$, ou $1-1=0$, aſſim c he cifra, ou nada na noſſa queſtão, e por conſequencia tirando-o em toda a parte, em que ſe acha na expreſsão, ou formula geral, $x=$

$-\frac{1}{2}c+\sqrt{\frac{cc}{4}+\frac{2s}{d}}$, se reduz a este $x=+\sqrt{\frac{2s}{d}}=+\sqrt{\frac{2\times 64}{2}}=+\sqrt{64}=+8$, isto he, que o soldado, de que trata a questão, gastou oito dias no caminho, o que me dá ao mesmo tempo; que o numero 64, que he a somma dos termos da progressão, tambem he o quadrado do numero dos termos da mesma progressão, de sorte que os oito primeiros termos da progressão dos numeros impares ÷ 1.3.5.7.9.11.13.15. fazem a somma de 64, e he huma propriedade commua a quantos termos se quizerem desta progressão, com tanto que se tomem depois da unidade. Esta propriedade merece muita attenção, como veremos depois no tratado de lançar as bombas.

QUESTÃO II.

310 A somma de dous numeros he 6, e a dos seus quadrados he 20, pergunta-se qual he cada numero destes.

SOLUÇÃO.

Seja x hum destes numeros, e o outro será $6-x$, pois a sua somma he 6; os

os quadrados deſtes numeros são xx, e $36-12x+xx$, cuja ſomma deve ſer igual a 20 pela ſegunda condição do problema, o que dá $2xx-12x+36=20$: faço logo paſſar 36 para o outro membro, o que me dá $2xx-12x=20-36$; e dividindo cada membro da queſtão por 2, ſerá $xx-6x=10-18=-8$. Para fazer o primeiro membro deſta equação hum quadrado perfeito, pela regra geral accreſcento de huma, e outra parte o quadrado 9 de 3 metade de 6 coefficiente de x no ſegundo termo, e terei $xx-6x+9=9-8=1$: tiro as raizes de huma, e outra parte, e acho $x-3=\pm\sqrt{1}=\pm 1$; e deſembaraçando x, teremos $x=3\pm 1=4$, ou 2; e ſe eu tómo por x 4, ſerá o ſegundo numero 2; e ſe pelo contrario tomar 2, ſerá o ſegundo numero 4, pois eſtes dous numeros 4, e 2 dão a ſomma 6, e a ſomma dos ſeus quadrados 20, em que ſe notará tambem que no ſentido, em que ſe propoz o problema, a raiz negativa reſolve tanto o problema, como a poſitiva.

QUESTÃO III.

311 Pedem-me hum numero tal, que juntando-lhe a raiz quadrada do ſeu producto por 10, a ſomma ſeja 20.

SOLUÇÃO.

Seja x o numero, que ſe buſca; ſupponhamos $10=a$, $20=2a$, teremos $x+\sqrt{ax}=2a$: deixo eſta radical em hum membro *, e temos $\sqrt{ax}=2a-x$: para tirar a radical, elevo cada membro ao ſeu quadrado, o que me dá $ax=4a^2-4ax+xx$; e reduzindo, $xx-5ax=-4a^2$: para completar o quadrado, accreſcento a hum, e outro membro o quadrado de metade do coefficiente, que he $\frac{25}{4}a^2$, e tenho $xx-5ax+\frac{25}{4}a^2=\frac{25}{4}a^2-\frac{16}{4}a^2=\frac{9}{4}a^2$: tirando a raiz de huma, e outra parte, $x-\frac{5}{2}a=\pm\sqrt{\frac{9}{4}a^2}=\pm\frac{3}{2}a$; e deixando ſó x, teremos $x=\frac{5}{2}a\pm\frac{3}{2}a$, ou $x=4a$, e $x=a$, iſto he

* Numer. 288.

he, que hum destes numeros he 10, e o outro 40.

He evidente que o numero 10 he tal, que a raiz quadrada do seu producto por 10, que he 100, cuja raiz he 10, faz effectivamente 20, mas não se vê com a mesma facilidade: como a raiz quadrada de 40, multiplicados por 10, satisfaz as condições do problema, para isto he de notar que 400 póde dar na sua raiz -20, ou $+20$, pois $-20 \times -20 = 400$, e $+20 \times +20 = 400$: logo juntando esta raiz -20 ao numero 40, tenho o numero $40 - 20 = 20$.

QUESTÃO IV.

312 Pedem-se-me os termos de huma progressão geometrica, da qual o primeiro termo he 4, e a differença do segundo ao terceiro seja 3.

SOLUÇÃO.

Seja x o segundo termo, será o terceiro termo $x + 3$, e tambem teremos $4 : x :: x : x + 3$, de que se tira $xx = 4x + 12$, ou $xx - 4x = 12$, accrescentando a cada parte o quadrado da metade do

coefficiente, que he 4, e tenho $xx-4x+4=16$, de que se deduz, tomando as raizes de cada membro $x-2=\pm 4$, isto he, que hum dos valores de x he 6, e o outro he $2-4$, ou -2; e estes valores são taes, que só hum resolve o problema no sentido proposto, fazendo esta progressão $4:6::6:9$; mas póde-se tambem dizer que o outro não resolve menos o problema que o primeiro, dando esta outra progressão geometrica $4:-2::-2:1$, porque he evidente que estas trez grandezas estão em proporção geometrica, pois o producto das extremas he igual ao quadrado da media; e conforme a segunda condição, a differença do segundo termo ao terceiro he 3, porque he evidente que a differença de -2 a 1 he 3, como se póde ver, tirando -2 de 1.

QUESTÃO V.

313 Dous commerciantes empregárão no commercio huma somma de 1300 moedas, com que ganhárão 900; o primeiro, tanto de entrada, como de lucro de trez mezes, tirou 870 moedas;

das; o ſegundo ſemelhantemente tirou 1330 moedas de entrada, e ganho do ſeu dinheiro por ſeis mezes, pergunta-ſe qual foi a entrada de cada hum em particular.

SOLUÇÃO.

Seja x a entrada do primeiro, e ſerá $1300-x$ a do ſegundo, pois a de ambos foi 1300; o ganho do primeiro he $870-x$; e o do ſegundo $1330-1300+x$, ou reduzindo $30+x$, pois he claro que para achar o ganho de cada hum, ſe deve tirar a entrada do numero, que dá na hypotheſe a ſua entrada com o ſeu ganho. Ora pelas condições do problema a entrada, e o ganho do primeiro ſe contém na ſua parte 870, e tambem a entrada, e o ganho do ſegundo ſe contém na ſua parte, que he 1330. Sabe-ſe mais que os ganhos eſtão na razão compoſta das entradas, e dos tempos, iſto he, como os productos das entradas pelos tempos; porque he evidente que ſe hum homem deo para o commercio trez vezes mais que outro, pelo meſmo tempo deve ganhar

trez

trez vezes mais; e ſe deo o ſeu dinheiro por hum tempo quadruplo, deve ganhar ainda quatro vezes mais que o outro, iſto he, o ſeu ganho ſerá quatro vezes trez mais que o do ſegundo, ou ſerá ao do ſegundo, como 12 a 1, que são os productos das entradas pelo tempo: multiplicando pois a entrada do primeiro x pelo ſeu tempo 3, e a do ſegundo pelo ſeu tempo 6, e fazendo depois huma proporção com os productos, e ganhos em particular, teremos $3x : 1300 - x \times 6 :: 870 - x : 30 + x$; e dividindo cada termo da primeira razão por 3, ſerá $x : 1300 - x \times 2 :: 870 - x : 30 + x$; e depois tomando o producto dos extremos, e dos meios, haverá eſta igualdade $30x + xx = 2262000 - 4340x + 2xx$, que enſerra todas as condições do problema: tirando xx de ambos os membros, e fazendo paſſar $30x$ para o outro membro, e 2262000 para o primeiro membro, teremos $-2262000 = xx - 4370x$, ou $xx - 4370x = -2262000$: acreſcentando a cada membro o quadrado de 2185, metade do coefficiente, para completar o quadrado, teremos

xx

$xx - 4370x + 4774225 = 4774225 - 2262000 = 2512225$; e tirando depois a raiz de cada membro, temos $x - 2185 = \pm\sqrt{2512225} = \pm 1585$, ou em fim $x = 2185 \pm 1585$, que dá 3770 por hum dos valores de x, e por outro 600: este numero he o que resolve o problema no sentido, que se propoz, como se vê facilmente, determinando a parte do ganho total de 600 por huma regra de 3, da qual o primeiro termo será a somma das entradas multiplicada pelos tempos; e o segundo termo o ganho total; o terceiro a entrada 600 do primeiro multiplicada pelo seu tempo; e o quarto o ganho do mesmo primeiro.

Reflexão geral, e importante ácerca da solução deste problema.

314 Notar-se-ha primeiro que o valor da incognita, que satisfaz as condições do problema, he a que he determinada pela raiz negativa do quadrado, que estava de baixo do sinal radical; do que se segue que se não deve estabelecer como regra geral, que as quantidades determinadas pelas raizes

zes negativas são fóra da questão, pois neste caso a negativa he que dá a solução do problema no sentido proposto. Para ver o que significa a raiz 3770, devo attender que por ser a somma das entradas 1300, tirando huma entrada deste numero, fica a outra: tiro logo 3770 de 1300; e ainda que isto não seja possivel em hum sentido, com tudo em outro he verdade dizer, que tirando 3770 de 1300, o resto he — 2470, pois sommando este resto com a quantidade tirada, temos 1300, o que me mostra que hum dos commerciantes em lugar de pôr no commercio realmente, tirou 2470 moedas: multiplico depois as entradas, quaesquer que sejão, pelo tempo; e multiplicando 3770 por 3, teremos 11310; e multiplicando tambem a entrada do segundo — 2470 por 6, temos no producto — 14820; a somma destes dous productos, que se julga a causa do ganho total, he — 3510. Faço depois huma regra de 3, da qual seja o primeiro termo — 3510; o segundo a entrada do primeiro multiplicada pelo seu tempo; o terceiro o ganho total,

tal, que ſe ſuppõe 900; e chamando x ao quarto termo, que ſerá o ganho do primeiro, tenho eſta proporção -3510: $11310 :: 900 : x = \frac{11310 \times 900}{-3510} = -2900$: logo o quarto termo moſtra que o primeiro em lugar de ganhar, perdeo 2900; e eſta perca he tal, que a ſomma da perda -2900, e da entrada 3770 faz exactamente 870; e porque o primeiro perdeo, he preciſo que o ſegundo ganhaſſe, e tanto mais, quanto mais dinheiro tirou, e mais tempo ha que tirou o ſeu dinheiro, iſto he, que o ganho que ha, he na razão compoſta do dinheiro, que tirou do commercio multiplicado pelo tempo, ou como o producto deſte dinheiro pelo tempo, que ſe paſſou, depois que o retirou. Faço tambem huma proporção para determinar o ſeu ganho, de que o primeiro termo ſeja a ſomma dos productos das entradas pelos ſeus tempos; o ſegundo o producto da entrada deſte commerciante pelo ſeu tempo; o terceiro o ganho total; e o quarto o ganho deſte commerciante, o que me dá -3510: $-$

14820

$14820 : : 900 : x = \frac{-14820 \times 900}{-3510} = \frac{-13338000}{-3510}$ $= +3800$ moedas, pois $-$ dividido por $-$, dá $+$: este ganho he tal, que sommado com a entrada negativa -2470, dá a somma 1330, que he o numero expressado nas condições do problema.

Por aqui se vê que ainda que os valores algebraicos pareção algumas vezes não significar nada, porque são extremamente diversos do que teriamos imaginado, nem por isso são menos verdadeiros, nem menos bem imaginados; e ainda que nem em todos os casos se devão applicar a reconhecellos, porque seria inutil, he util procurallos em alguns casos para se costumar ás expressões algebraicas, e estar em estado de interpretar em caso de necessidade os oraculos, que nos dá a analyse.

315 Estes exemplos bastão para conhecer o uso, que se deve fazer das raizes negativas: vamos agora resolver as equações do segundo gráo nas suas formulas geraes, porque o methodo sempre he o mesmo. Se tivermos huma equação do segundo gráo, como

esta

esta $xx-4x=12$, se faz ordinariamente passar o termo 12 da outra parte do sinal da igualdade, e então se diz que a questão he igual á cifra, e se escreve assim $xx-4x+12=0$. Isto supposto, toda a equação do segundo gráo se póde reduzir a huma destas seis formulas.

$$xx+px+q=0$$
$$xx-px-q=0$$
$$xx+px-q=0$$
$$xx-px+q=0$$
$$xx+q=0$$
$$xx-q=0$$

316 Estas equações se resolvem como as precedentes; o termo q representa as quantidades conhecidas; a letra p os coefficientes, que multiplicão a incognita no segundo termo: passe-se o termo q ao outro membro, e ajunte-se a cada hum o quadrado de metade do coefficiente p: tire-se a raiz do primeiro membro, que fica hum quadrado perfeito, e as quantidades do outro membro se ponhão de baixo do final radical para denotar que se toma a raiz, o que dá as seis formulas seguintes correspondentes ás precedentes equações.

I.

I. $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$

II. $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$

III. $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$

IV. $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$

V. $x = \pm\sqrt{q}$

VI. $x = \pm\sqrt{-q}$

Eis-aqui o que he de notar ácerca destas formulas: na primeira, e terceira o problema será possivel, com tanto que $\frac{1}{4}pp$ seja maior que q, ou ao menos igual; mas se fosse menor o problema, seria impossivel, pois neste caso $\sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$ seria huma quantidade imaginaria: chama-se imaginaria huma quantidade negativa, e que está de baixo da radical, porque não ha quantidade, que dê quadrado negativo.

Todos os problemas, que se reduzem á segunda, e quarta formula, sempre serão possiveis, pois huma quanti-

tidade $\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$ nunca póde ſer imaginaria. Em fim a quinta fórma ſempre terá dous valores iguaes, hum poſitivo, que he $+\sqrt{q}$, outro negativo, que he $-\sqrt{q}$; e a ſexta comprehenderá ſempre algum abſurdo, pois $\pm\sqrt{-q}$ ſempre ſerá huma quantidade imaginaria.

Ha certas equações do quarto gráo, que ſe reſolvem como as do ſegundo, como vamos moſtrar no ſeguinte exemplo.

QUESTÃO VI.

317 Pedem-ſe dous numeros, cujo producto ſeja 12, e a differença dos quadrados 7.

SOLUÇÃO.

Sejão eſtes dous numeros x, e y a primeira condição do problema, dá $xy=12$, de que ſe tira $y=\frac{12}{x}$, e a ſegunda dá $xx-yy=7$; e ſubſtituindo em lugar de yy o ſeu valor $\frac{144}{xx}$, teremos $xx-\frac{144}{xx}=7$; e multiplicando por xx para deſva-

vanecer o quebrado $\frac{144}{xx}$, teremos $x^4 - 144 = 7xx$, ou $x^4 - 7xx = 144$: accrescento a cada membro o quadrado da metade do coefficiente de x, que he de $3\frac{1}{2}$, e temos $x^4 - 7xx + 12 + \frac{1}{4} = 12 + \frac{1}{4} + 144$, de que o primeiro membro he hum quadrado perfeito; e tirando as raizes de huma, e outra parte, depois de haver reduzido o segundo membro, teremos $xx - 3\frac{1}{2} = \pm\sqrt{156\frac{1}{4}}$, a raiz de $156\frac{1}{4}$ he $12\frac{1}{2}$, assim $xx - 3\frac{1}{2} = \pm 12\frac{1}{2}$; e desembaraçando xx, teremos $xx = \pm 12\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 16$, ou -9; e tirando ainda as raizes para reduzir x ao primeiro grão, teremos $x = \pm\sqrt{16}$, e $x = \pm\sqrt{-9}$: logo os dous primeiros termos são ± 4, e os outros dous são imaginarios, isto he, hum dos valores de x he 4: divido 12 por 4 para ter $y = \frac{12}{x}$, e o quociente he 3: logo os nu-

me-

meros pedidos são 4, e 3, pois o ſeu producto he 12, e a differença dos ſeus quadrados 16, e 9 he 7.

Eſte problema ſe poderia tambem reſolver, ſervindo-ſe da ſegunda formula, e fazendo $-7=-p$, e $-144=-q$, o que dará a meſma ſolução.

Do calculo das radicaes, e das operações, que lhes são particulares: modo de as reduzir, ſommar, diminuir, multiplicar, e dividir.

318 Chama-ſe radical huma quantidade, da qual ſe não póde exactamente extrahir a raiz: por poucas reſoluções, que ſe queirão fazer dos problemas do ſegundo gráo, ſe encontra neceſſariamente eſta caſta de expreſsões, que ſe chamão radicaes, e incommenſuraveis; mas ainda que não poſsão ter raizes exactas, ha caſo, em que eſtas expreſsões ſe fazem muito mais ſimples de outras, com as quaes nos vemos obrigados a trabalhar com eſtas grandezas por ſomma, multiplicação, ou divisão, o que principalmente ſucce-de nas equações do quarto gráo, que

ſe

ſe podem reduzir ao ſegundo, por cuja razão he util enſinar de que modo ſe devem praticar todas eſtas operações, e niſto he que conſiſte o calculo das radicaes, ou incommenſuraveis, o que vamos explicar em poucas palavras. As radicaes são de tantas caſtas, como as differentes potencias; mas para não entrar em grande miudeza, não fallaremos mais que das radicaes do ſegundo gráo, ás quaes ſe ajuntarão alguns exemplos das radicaes do terceiro; e como as regras são geraes, ſe podem per ſi meſmo applicar ás radicaes mais embaraçadas.

Reduzir as quantidades irracionaes, e incommenſuraveis á ſua mais ſimples expreſsão.

319 Examinar-ſe-ha primeiramente ſe a quantidade, que eſtá de baixo da radical, tem entre os ſeus factores alguma potencia do meſmo nome que a radical, ou eſta potencia ſeja huma quantidade complexa, ou não ſeja mais que hum monomio: para conhecer os ſeus fractores ſe deve ſaber deſman-

manchar huma quantidade, isto he, achar outras quantidades de multiplicação, das quaes resulte a grandeza dada. Isto supposto, quando se acharem hum, ou muitos fractores com a mesma potencia que a raiz, se lhe extrahirá a raiz, e o resto se porá de baixo da radical.

Por exemplo $\sqrt{a^3b} = a\sqrt{ab}$, porque he evidente que $a^3b = a^2 \times ab$: logo tomando a raiz do quadrado a^2, e deixando o resto de baixo da radical, teremos $a\sqrt{ab}$: do mesmo modo $\sqrt{16a^2b - 32a^3} = \sqrt{16a^2 \times \overline{b-2a}}$; mas he evidente que $16a^2$ he hum quadrado perfeito de $4a$: logo extrahir-se-ha esta raiz, e teremos a expressão mais simples desta radical $4a\sqrt{b-2a}$: se tivessemos $\sqrt[3]{a^3c^2 - a^3bd}$, he claro que a^3, que he commum aos dous termos, he hum cubo perfeito, póde-se logo tomar a raiz cubica, assim se escreverá $a\sqrt[3]{c^2 - bd}$: tambem se tivessemos $\sqrt{50ffgg - 25ffmm + 75bdff}$, he facil ver que nesta quantidade ha hum quadrado perfeito commum a todos os termos, que se póde pôr fóra

da radical, e he $25ff$, porque se podia escrever esta quantidade, como se segue $\sqrt{25ff} \times \overline{\overline{2gg - mm} + 3bd}$; e tomando a raiz, teriamos $5f\sqrt{2gg - mm + 3bd}$, o mesmo he das outras quantidades. Por exemplo $\sqrt{3a^2b^2fg + 6a^2bcfg + 3a^2c^2fg}$ se poderia escrever assim $\sqrt{a^2} \times \overline{\overline{b^2 + 2bc} + c^2} \times \overline{3fg}$; e tomando as raizes dos dous fractores, que são quadrados perfeitos, teremos $a \times \overline{b + c} \times \sqrt{3fg}$: se tivessemos que reduzir esta expressão, teriamos $\sqrt{27a^2b^2 - 36a^2fg + 9a^2c}$: he de notar que esta quantidade he o producto de $9a^2$ por $3b^2 - 4fg + ac$, assim escreverei, tirando a raiz $3a\sqrt{3b^2 - 4fg + ac}$: se tivessemos $\sqrt{64m^2g^2 - 36ffgg + 48abgg}$, teriamos, simplificando esta radical, $2g\sqrt{16mm - 9ff + 12ab}$, e assim as outras todas.

320 Algumas vezes he util complicar huma radical para facilitar certas operações, e fazer inteiramente o contrario do que acabamos de ensinar, isto he, fazer passar para baixo da radical huma quantidade, que está fóra do mesmo sinal, e eis-aqui como isto se pratíca.

Ele-

Eleva-ſe a quantidade, que eſtá fóra do ſinal, á potencia marcada pelo expoente da radical, e eſta potencia ſe multiplica pelas quantidades ſubmettidas ao meſmo ſinal: he facil de ver que eſta nova expreſsão não he differente da primeira mais que apparentemente, e não no valor, porque a quantidade elevada á potencia da radical, e ſubmettida á meſma radical, não vale mais que a raiz deſta meſma quantidade, aſſim $a\sqrt{ab}=\sqrt{a^2\times ab}$, $a+b\sqrt{fg}=\sqrt{a^2+2ab+b^2\times fg}=\sqrt{a^2fg+2abfg+b^2fg}$.

321 Póde-ſe multiplicar, ou dividir o expoente de huma radical, ſem mudar o ſeu valor: para iſto he preciſo elevar a quantidade, que eſtá de baixo deſte ſinal, á potencia marcada pelo numero, que multiplica o expoente da radical, ou tirar da quantidade, que eſtá de baixo da meſma radical, a raiz marcada pelo diviſor, o que ſe póde fazer de dous modos, ou indicando eſta raiz com novos ſinaes radicaes, ou dividindo os expoentes das quantidades, que eſtão de baixo do ſinal, pelo numero que deve dividir o

expoente da radical, porque já vimos que dividindo assim os expoentes pelos numeros, he tomar a raiz marcada por este mesmo numero *. Além disto se se multiplica, ou se divide, he evidente que a quantidade proposta tem outro tanto pela elevação á potencia notada pelo multiplicador do expoente da radical, quanto a raiz, que depois se toma, diminue pela multiplicação do mesmo expoente, e reciprocamente quando se dividem os expoentes das quantidades, que estão de baixo do sinal radical, se diminuem estas grandezas a quantidade, de que ellas forão augmentadas pela divisão do expoente da radical.

* Numer. 142.

Tudo isto se faz sensivel com exemplos: se temos $\sqrt{ab}$, digo que se podem fazer estas igualdades $\sqrt{ab} = \sqrt[6]{a^3 b^3} = \sqrt[2m]{a^m b^m}$, porque $\sqrt[m]{a^m b^m} = ab$, tomando as raizes de cada letra: logo será $\sqrt[2m]{a^m b^m} = \sqrt{ab}$, e assim as outras. Do mesmo modo $\sqrt[3]{a^3 b^2} = \sqrt[\frac{3}{3}]{a^{\frac{3}{3}} b^{\frac{2}{3}}}$,

ou

ou geral $\sqrt[m]{a^n b^p} = \sqrt[\frac{m}{r}]{a^{\frac{n}{r}} b^{\frac{p}{r}}} = \sqrt[\frac{m}{r}]{\sqrt[r]{a^n b^p}}$ $\sqrt[\frac{1}{r}]{a^{\frac{n}{r}} b^{\frac{p}{r}}} = a^n b^p$: logo $\sqrt[\frac{m}{r}]{a^{\frac{n}{r}} b^{\frac{p}{r}}} = \sqrt[m]{a^n b^p}$, &c., e assim das outras; porque he evidente, que quando o expoente da radical he igual ao expoente das grandezas submettidas ao mesmo sinal, póde-se supprimir a radical, e escrever as quantidades meramente simples, como se temos $\sqrt[3]{a^3}$, se põe a, e por $\sqrt[5]{a^5 b^{10}}$, se põe ab^2, e he o que succede aqui, porque o expoente $\frac{m}{r}$ se póde escrever assim $m \times \frac{1}{r}$: do mesmo modo os expoentes $\frac{n}{r}$ $\frac{p}{r}$ se podem marcar assim $n \times \frac{1}{r}$ $p \times \frac{1}{r}$: logo na nossa quantidade será $\sqrt[m \times \frac{1}{r}]{a^{n \times \frac{1}{r}} b^{p \times \frac{1}{r}}}$, em que he visivel que se não fez mais que multiplicar os expoentes da radical, e das quantidades, que estão de baixo pela mesma

ma grandeza $\frac{1}{r}$, que torna ao primeiro caſo.

322 Daqui ſe tira o methodo de reduzir muitas radicaes á meſma denominação, ſem mudar os valores, iſto he, dar a differentes radicaes hum meſmo ſinal. Por exemplo: ſe me dão eſtas duas incommenſuraveis $\sqrt{a^3}$, e $\sqrt[3]{a^2 b^4}$, elevo a primeira ao ſeu cubo, e multiplico o expoente 2 da radical por 3, o que me dá $\sqrt[6]{a^9} = \sqrt{a^3}$: do meſmo modo elevo $a^2 b^4$ ao ſeu quadrado para ler $a^4 b^8$, e multiplico o expoente do ſinal radical, que lhe eſtá junto, pelo expoente 2 do primeiro, o que me dá $\sqrt[6]{a^4 b^8} = \sqrt[3]{a^2 b^4}$. He viſivel que deſte modo as duas quantidades irracionaes propoſtas mudarão de fórma, ou de expreſsão, ſem mudar de valor, e além diſſo tem o meſmo ſinal radical $\sqrt[6]{\ }$, e aſſim as outras. Geralmente para reduzir quaeſquer duas radicaes $a\sqrt[m]{b^p}$, e $c\sqrt[n]{d^r}$, ſe eſcreverá $a\sqrt[mn]{b^{pn}}$, e $c\sqrt[mn]{d^{mr}}$.

As

As expreſsões, que acabamos de ver, são particulares para as quantidades irracionaes, preſentemente vamos explicar as que lhes são commuas com as outras quantidades.

Da ſomma das radicaes.

323 As radicaes ſe ſommão, ajuntando-as com os ſeus meſmos ſinaes, e obſervando reduzillas antes de fazer a ſomma. Além diſſo ſe as radicaes são as meſmas de huma, e outra parte, baſta juntar ás quantidades que precedem o ſinal radical, e multiplicar a ſomma pela meſma radical: conforme eſta regra a ſomma de $a\sqrt{b}$, e de $c\sqrt{d}$ he $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$, a de $ff\sqrt[3]{g^2}$, e de $mn\sqrt{dc}$ he $ff\sqrt[3]{g^2}+mn\sqrt{dc}$, a de $af\sqrt{mn}$, e de $bg\sqrt{mn}$ he $af+bg\sqrt{mn}$. Do meſmo modo em numeros $3\sqrt{5}$, e $4\sqrt{7}$ dão a ſomma $3\sqrt{5}+4\sqrt{7}$, $4\sqrt{8}$, e $6\sqrt{8}$ dão $10\sqrt{8}$, &c.

Da diminuição das radicaes.

324 A diminuição das radicaes ſe faz do meſmo modo que a das outras quan-

quantidades algebraicas, mudando o ſinal + em −, e o ſinal − em + da quantidade, que ſe quer diminuir, obſervando ſimplificar antes as radicaes propoſtas, e multiplicar a differença pela meſma radical, em caſo que ſeja commua ás duas radicaes. Por exemplo: a differença de $a\sqrt{c}$ a $b\sqrt{c}$ he $a-b\sqrt{c}$, a de $10\sqrt[3]{9}$, e $4\sqrt[3]{9}$ he $10-4\sqrt[3]{9}$, ou $6\sqrt[3]{9}$, &c.

Da multiplicação das radicaes.

325 Póde-ſe multiplicar huma radical por hum inteiro, por hum quebrado, ou por outra radical, o que faz trez caſos particulares, que tem alguma difficuldade.

326 Para multiplicar huma radical por hum inteiro, ſe tem alguma quantidade, que a preceda, ſe multiplicará eſta quantidade, que eſtá fóra da radical, pélo inteiro. Por exemplo: o producto de $a\sqrt{b}$ por $3c$ he $3ac\sqrt{b}$: o producto de $\sqrt[3]{c^2}$ por $a+2b$ he $a+2b\sqrt[3]{c^2}$, ou $a\sqrt[3]{c^2}+2b\sqrt[3]{c^2}$, e aſſim das mais.

mais. Se quizeſſemos que o multiplicador não eſtiveſſe antes da radical, ſeria preciſo elevallo á potencia marcada pelo expoente da radical; e aſſim para multiplicar $\sqrt[3]{bc}$ por af, elevo af ao ſeu cubo, e multiplico o que eſtá de baixo da radical por $a^3 f^3$, e tenho $\sqrt[3]{a^3bcf^3}$: o meſmo he das outras, ou ſejão numeros, ou letras, qualquer que ſeja o multiplicador incomplexo, ou polynomio.

327 Para multiplicar huma radical por huma fracção, ſe multiplicará a quantidade, que eſtá fóra do ſinal, pela fracção propoſta, e eſtará feita a multiplicação. Se a radical não tiveſſe outro coefficiente mais que a unidade, e ſe julgaſſe conveniente não lho dar, ſeria preciſo elevar a fracção á potencia marcada pelo expoente da radical, e multiplicar o numerador da nova fracção pela quantidade ſujeita á radical: aſſim para multiplicar a radical $f\sqrt{ab}$ por $\frac{c}{d}$, eſcrevo $\frac{cf}{d}\sqrt{ab}$: do meſmo mo-

do

do $3\sqrt{c}$ por $\frac{6}{5}=\frac{18}{5}\sqrt{c}$: tambem $a\sqrt[3]{cf}$ multiplicado por $\frac{2a}{b}=\sqrt[3]{\frac{8a^3\,cf}{b^3}}$ pela segunda parte desta regra.

328 Se o multiplicador he tambem huma radical do mesmo expoente que o do multiplicando, se multiplicarão as quantidades, que estão de baixo da mesma radical humas por outras, conforme as regras ordinarias, e se dará ao producto o sinal do multiplicando, ou do multiplicador, observando multiplicar as quantidades, que precedem as radicaes humas por outras, e tirar fóra da nova radical as potencias do mesmo nome, que a multiplicação poderia produzir. Por exemplo: $a\sqrt{cb}$ multiplicado por $f\sqrt{cd}=af\sqrt{c^2bd}=afc\sqrt{bd}$: do mesmo modo $f\sqrt[3]{a^2bc}\times g\sqrt[3]{ac^2d}=fg\sqrt[3]{a^3bc^3d}=acfg\sqrt[3]{bd}$, e assim das outras.

329 Se a radical não tem o mesmo expoente, se reduzirá *, e depois se fará a multiplicação como no caso pre-

* Numer. 321.

ce-

cedente. Por exemplo: para multiplicar $a\sqrt{bc}$ por $d\sqrt[3]{fg}$, reduzo logo $a\sqrt{bc}$ a $a\sqrt[6]{b^3c^3}$, e $d\sqrt[3]{fg}$ em $d\sqrt[6]{f^2g^2}$; e multiplicando depois, tenho $ad\sqrt[6]{b^3c^3f^2g^2}$: o mesmo se fará com as radicaes mais embaraçadas. He preciso advertir bem, que se a radical do multiplicador he a mesma que a do multiplicando, a multiplicação se faz, supprimindo a radical, e multiplicando por esta quantidade o producto das quantidades, que precedem assim $a\sqrt{bc} \times d\sqrt{bc} = adbc$, $3\sqrt{fg} \times 4\sqrt{fg} = 12fg$, o que he evidente, pois toda a raiz multiplicada por si mesma deve necessariamente reproduzir-se.

Se tivessemos para multiplicar radicaes complexas por radicaes monomias, ou incomplexas, a multiplicação se faria, seguindo as mesmas regras, e as da multiplicação dos polinomios.

Da divisão das radicaes.

330 Huma radical póde-se dividir por hum inteiro, por hum quebrado, ou

ou por outra radical: todas eſtas operações são inverſas das precedentes, e por iſto não nos demoraremos muito.

331 Para dividir huma radical por hum inteiro, ſe dividirá o coefficiente pelo inteiro propoſto: aſſim para dividir $a\sqrt{b}$ por c, eſcrevo $\frac{a}{c}\sqrt{b}$: tambem $3\sqrt{5}$ dividido por $4 = \frac{3}{4}\sqrt{5}$: o meſmo das outras.

332 Para dividir huma radical por huma fracção, ſe multiplicará o coefficiente da radical pela fracção inverſa, menos que ſe não queira fazer paſſar o diviſor para de baixo do ſinal radical, no qual caſo ſeria preciſo multiplicar o que eſtá de baixo da radical pelo quadrado da fracção inverſa. Seguindo eſtas regras o quociente de $a\sqrt{bc}$, dividido por $\frac{d}{f} = \frac{af}{d}\sqrt{bc}$: o quociente de $3\sqrt{bd}$ dividido por $\frac{4}{5} = \frac{15}{4}\sqrt{bd}$: o de $\sqrt[3]{fg}$ por $\frac{a}{d} = \frac{d}{a}\sqrt[3]{fg}$, ou

pon-

pondo a fracção de baixo da radical $\sqrt[3]{\frac{d^3 fg}{a^3}}$.

Para dividir huma radical por outra, ſe dividirão os coefficientes, e as radicaes huma por outra, obſervando tirar a radical, quando he commua ao diviſor, e ao dividendo aſſim $a\sqrt{b}$ dividido por $c\sqrt{d} = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{d}}$; $a\sqrt{cd}$ dividido por $b\sqrt{cd} = \frac{a}{b}$, e aſſim dos mais.

Formação das potencias das radicaes.

333 Para elevar huma radical a qualquer potencia propoſta, he preciſo elevar a eſta potencia as quantidades, que precedem a radical, e as que eſtão de baixo della, ou tambem dividir o expoente da radical pelo expoente da potencia, á qual ſe quer elevar eſta radical, aſſim o cubo de $a\sqrt{bc}$ he $a^3\sqrt{b^3c^3}$, reduzindo a mais ſimples expreſsão $a^3 bc\sqrt{bc}$: póde-ſe tambem dizer que o cubo deſta meſma quantidade he a^3

$\sqrt{}$

$\sqrt[\frac{2}{3}]{bc}$; porque ſe nos lembrarmos do que temos dito ácerca das radicaes, e dos expoentes * $a^3\sqrt[\frac{2}{3}]{bc} = a^3 b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} = a^3\sqrt{b^3c^3}$: pelo meſmo articulo. Todas as vezes que o expoente da radical for diviſivel pelo da potencia, a que ſe quer elevar, preferiremos a qualquer outro methodo o de dividir o expoente da radical pelo expoente da potencia.

* Numer. 142.

Extracção das raizes das radicaes.

334 Para tirar a raiz de huma radical, não ha mais do que tirar a raiz do que precede eſta radical, e multiplicar o expoente do ſinal radical pelo expoente da raiz propoſta; porque, como acabamos de ver, a formação das potencias deſtas quantidades ſe faz, dividindo os expoentes pelo da potencia: na extração das raizes ſe deve fazer o contrario, aſſim a raiz cubica de $a^3\sqrt{b^2c}$ he $a\sqrt[6]{b^2c}$, a de $a^4\sqrt[5]{b^2c^3}$ he a

$\sqrt[3]{a}\sqrt[15]{b^2c^3}$; e querendo, ſe poderia fazer o meſmo, depois de fazer paſſar tudo o que precede o ſinal para debaixo do meſmo ſinal; aſſim a raiz cubica de $a^4\sqrt[5]{b^2c^3}$, ou a de $\sqrt[5]{a^{20}b^2c^3}$ he $\sqrt[15]{a^{20}b^2c^3}$.

335 He preciſo notar que todas as operações, que ſe fazem com as radicaes, podem fazer-ſe de outro modo, buſcando a quantidade exponencial igual á radical propoſta, porque já demonſtrámos * que não ha radical, que ſe não poſſa converter em quantidade exponencial, e reciprocamente.

* Numer. 141.

Os principiantes confundem algumas vezes as raizes imaginarias com as grandezas incommenſuraveis, com tudo ha huma total differença entre humas, e outras. A Geometria póde determinar a grandeza abſoluta das quantidades incommenſuraveis, ainda que ſe não poſſa determinar em numero a ſua razão á unidade; e as imaginarias não ſe póde ſaber o que ſignificão, porque não ſe conhece raiz, que poſſa dar hum quadrado negativo, o

que

que tem feito com que eſtas quantidades ſe tenhão como abſolutamente impoſſiveis, e como abſurdas as equações, ou problemas, que não dão mais que ſemelhantes ſoluções; mas tem-ſe reconhecido que eſta propoſição ſe não deve ter como principio geral: e além diſſo ſe ſe examinão a natureza, e eſſencia das raizes de huma equação, que he ſerem diviſores exactos deſta meſma equação, ver-ſe-ha que as imaginarias não são menos raizes de huma equação que aquellas, que ſe chamão verdadeiras, ou reaes: multiplicadas formão como aquellas a equação, que as deo, e são conſequentemente diviſores exactos, como he facil convencer no exemplo ſeguinte.

Seja-nos propoſta para reſolver eſta equação do ſegundo gráo $xx - 4x + 12 = 0$, achar-ſe-ha, ſegundo as regras ordinarias, $x = 2 \pm \sqrt{-8}$, ou, o que vem a ſer o meſmo, igualando os dous valores de x a cifra, as duas equações $x - 2 + \sqrt{-8} = 0$, e $x - 2 - \sqrt{-8} = 0$, o que ſe póde ter como raizes das quantidades; porque multiplicando huma

por

por outra, ſe acha no producto depois da reducção, e deſvanecer as radicaes a equação propoſta $xx - 4x + 12 = 0$.

Tambem he preciſo notar que em qualquer equação livre de todo o ſinal radical as raizes imaginarias não podem ſer mais que em numero par; aſſim em huma equação do ſegundo gráo as raizes ſempre são ambas verdadeiras, ou ambas imaginarias.

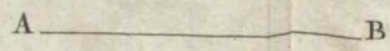
Eſtes exemplos me parece ſerão baſtantes para moſtrar o modo, com que ſe reſolvem os problemas, em que entrão equações do ſegundo gráo, e para facilitar o uſo deſtas reſoluções, que são as mais frequentes nas queſtões Mathematicas, e coſtumar os principiantes ao uſo do calculo, e conhecimento das raizes, que reſolvem os problemas.

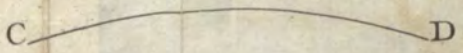
Accreſcentei eſte pequeno Tratado do calculo das incommenſuraveis para facilitar a reſolução dos meſmos problemas, em que entrão equações do ſegundo gráo, e algumas vezes ſe chegão a encontrar radicaes muito embaraçadas.

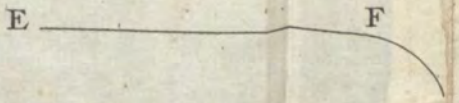
Como as equações do terceiro gráo não são tão frequentes, nem o ſeu uſo tão preciſo, deixei de apontar os exemplos de ſemelhantes reſoluções; e no fim deſta Obra ſe achará tratado o que pertence a eſtas equações, e as a que ſe chama de quarto gráo.

FIM DO SEGUNDO LIVRO.

IN-


A
B


C
D


E
F

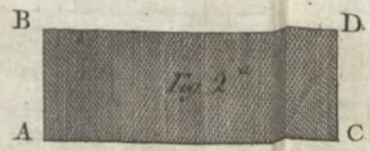
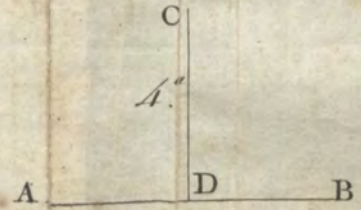
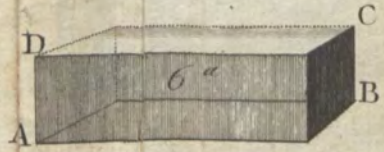
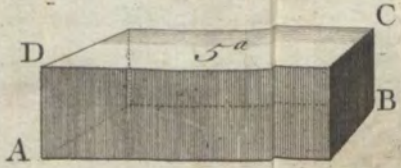

B
D
Fig. 2.a
A
C

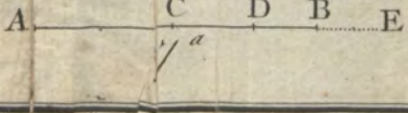
Fig. 1.a


C
4.a
A
D
B

3.a


D
C
6.a
B
A


D
C
5.a
B
A


A
C
D
B
E
7.a

INDICE
DAS MATERIAS, QUE SE comprehendem neste primeiro Tomo.

LIVRO I.
INTRODUCÇÃO A' GEOMETRIA.

Definições. Pag. 1.
Reduzir as quantidades algebraicas a menores termos, pag. 22.
Somma das quantidades algebraicas, complexas, e incomplexas, pag. 23.
Diminuição das quantidades complexas, e incomplexas, pag. 24.
Explicação ácerca da diminuição litteral, pag. 25.
Multiplicação das quantidades incomplexas, pag. 27.
Multiplicação das quantidades complexas, pag. 30.
Demonstração da regra da multiplicação das quantidades complexas, e incomplexas, pag. 34.
Prop. I. Theor. *O quadrado de qualquer quantidade expressada por duas letras*

he igual aos quadrados de cada huma das letras, e mais dous rectangulos feitos das mesmas letras, pag. 39.

Prop. II. Theor. *O cubo de qualquer grandeza expressada por duas letras he igual aos cubos das mesmas letras, e a trez paralepipedos feitos do quadrado da primeira pela segunda, e outros trez do quadrado da segunda pela primeira*, pag. 39.

Prop. III. Theor. *Se tivermos huma linha dividida em duas igualmente, e desigualmente o rectangulo das partes desiguaes com o quadrado da parte intermedia, he igual ao quadrado de metade da linha*, pag. 40.

Prop. IV. Theor. *Se tivermos huma recta dividida pelo meio, e se lhe accrescentar outra a rectangulo da composta das duas pela parte accrescentada com o quadrado de metade, he igual ao quadrado de huma linha, composta de metade da primeira com o accrescentamento*, pag. 42.

Prop. V. Theor. *Se tivermos duas linhas, das quaes a primeira seja dupla da segunda, o quadrado da primeira será qua-*

quadruplo do quadrado da ſegunda, pagin. 43.
Divisão das quantidades algebraicas complexas, e incomplexas, pag. 44.
Exemplos da divisão, pag. 49.
Tratado dos quebrados tanto numericos, como algebraicos, pag. 65.
Probl. I. *Achar o valor de hum quebrado, ou dar huma quantidade menor que a unidade igual ao quebrado propoſto*, pagin. 69.
Probl. II. *Reduzir o quebrado a minimos termos*, pag. 71.
Demonſtração deſta pratica, pag. 73.
Probl. III. *Reduzir muitos quebrados ao meſmo denominador*, pag. 76.
Somma dos quebrados, pag. 80.
Diminuição dos quebrados, pag. 81.
Multiplicação dos quebrados, pag. 86.
Divisão dos quebrados, pag. 94.
Tratado dos quebrados pela dizima, pagin. 103.
Somma dos quebrados decimaes, pag. 110.
Diminuição dos quebrados decimaes, pagin. 111.
Multiplicação dos quebrados decimaes, pag. 112.

Di-

Divisão dos quebrados decimaes, pagin. 116.
Demonstração da regra geral, pag. 120.
Uso dos quebrados decimaes, pag. 122.
Calculo dos expoentes, formação das potencias, e extracção das raizes, pagin. 131.
Calculo dos expoentes, ibid.
Formação das potencias das quantidades exponenciaes, e da extracção das suas raizes, pag. 136.
Formação das potencias dos polynomios, e extracção das suas raizes, pag. 144.
Extracção da raiz quadrada das quantidades algebraicas complexas, pag. 148.
Formação do quadrado de hum numero, e extracção das raizes das quantidades numericas, pag. 153.
Advertencia geral, pag. 160.
Regra geral para a extracção das raizes quadradas, pag. 161.
Regra geral para aproximar a raiz quadrada de hum numero por meio das decimaes, pag. 171.
Demonstração da raiz quadrada, pag. 177.
Formação do cubo de huma quantidade complexa, e da extracção da raiz cubica das quan-

quantidades algebraicas, e numericas, pag. 180.
Extracção das raizes cubicas das quantidades algebraicas, pag. 183.
Formação algebraica do cubo de qualquer numero, e da extracção da raiz cubica das quantidades numericas, pag. 189.
Regra geral para a extracção da raiz cubica das quantidades numericas, pag. 193.
Modo de aproximar huma raiz cubica por meio das decimaes, pag. 202.
Demonstração da raiz cubica, pag. 205.
Extracção das raizes quadradas, e cubicas dos quebrados numericos, pag. 208.

LI-

LIVRO II.

Trata das razões, proporções, e progressões Geometricas, e Arithmeticas: dos logarithmos, e resolução analitica dos problemas do primeiro, e segundo grão.

D*Efinições*. Pag. 211.

Prop. I. Theor. *Se quatro grandezas estiverem em proporção Geometrica, o producto dos extremos he igual ao dos meios*, pag. 220.

Prop. II. Theor. *Se quatro grandezas estão dispostas de modo que o producto dos extremos seja igual ao dos meios, estão em proporção*, pag. 225.

Prop. III. Theor. *Se duas razões são iguaes a huma terceira, são iguaes entre si*, pag. 231.

Prop. IV. Theor. *Se muitas grandezas estiverem em proporção, a somma dos antecedentes he á dos consequentes, como hum antecedente ao seu consequente*, pag. 232.

Prop. V. Theor. *Duas grandezas conservão a mesma razão, ainda que se accrescentem, com tanto que o que se accres-*

crescenta á primeira seja ao que se accrescenta á segunda, como a primeira á segunda, pag. 233.

Prop. VI. Theor. *Duas grandezas conservão a mesma razão, ainda que se diminuão, com tanto que o que se diminue da primeira seja ao que se diminuir da segunda, como a primeira á segunda*, pag. 234.

Prop. VII. Theor. *Se multiplicarmos dous termos de huma razão por huma mesma quantidade, os productos ficão na mesma razão que tinhão os termos antes de se multiplicarem*, ibid.

Prop. VIII. Theor. *Se dous termos de huma razão se dividirem por huma mesma quantidade, os quocientes serão a mesma razão que tinhão as quantidades divididas*, pag. 235.

Prop. IX. Theor. *Se multiplicarmos duas proporções termo por termo, os productos ficarão em proporção*, pag. 236.

Prop. X. Theor. *Em huma proporção continua o quadrado do primeiro termo he ao quadrado do segundo, como o primeiro ao terceiro*, pag. 237.

Das

Das proporções, e progressões arithmeticas, pag. 238.

Prop. XI. Theor. *Se quatro grandezas estão em proporção arithmetica, a somma das extremas he igual á das medias*, ibid.

Prop. XII. Theor. *Se a somma das extremas de quatro quantidades he igual á das medias, as quatro grandezas estão em proporção arithmetica*, pag. 241.

Prop. XIII. Theor. *Em qualquer progressão arithmetica a somma de dous termos igualmente distantes dos extremos he igual á somma dos extremos*, pag. 244.

Prop. XIV. Theor. *Qualquer progressão geometrica ascendente se póde representar por esta* $\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 :$ *&c., e qualquer progressão geometrica descendente por esta* $\div aq^6 : aq^5 : aq^4 : aq^3 : aq^2 : aq : a$, *que he inversa da antecedente*, pag. 251.

Prop. XV. Theor. *Em qualquer progressão geometrica a somma dos antecedentes he a somma dos consequentes, como hum antecedente ao seu consequente*, pag. 255.

Prop.

Prop. XVI. Theor. *Em huma progressão geometrica o producto de dous termos igualmente distantes dos extremos he igual ao producto dos mesmos extremos*, pag. 256.

Probl. *Achar muitas meias proporcionaes geometricas entre dous numeros*, pag. 259.

Dos logarithmos, sua natureza, e usos, pag. 260.

Prop. XVII. Theorema fundamental. *Os expoentes de huma serie de potencias de qualquer quantidade, que formão huma progressão geometrica, estão em progressão arithmetica*, pag. 263.

Das razões compostas, pag. 280.

Prop. XVIII. Theor. *O expoente de dous termos de huma razão duplicada he igual ao quadrado do dos dous termos da razão simples, e o expoente dos dous termos de huma razão triplicada he igual ao cubo do dos dous termos da razão simples*, pag. 283.

Regras geraes para a resolução dos problemas, ou applicação do calculo analitico ao methodo de desembaraçar as incognitas, pag. 285.

Uso

Uſo da ſomma, e diminuição para deſembaraçar as incognitas, pag. 286.
Uſo da multiplicação para deſembaraçar as incognitas, e livrar das equações de quebrados, pag. 288.
Uſo da divisão para deſembaraçar as incognitas, pag. 291.
Uſo da extracção das raizes para deſembaraçar as incognitas, pag. 293.
Modo de ſubſtituir em huma equação o valor das incognitas, pag. 295.
Modo de deſvanecer todas as incognitas de huma equação, pag. 298.
Applicação das regras precedentes á reſolução de varios problemas, pag. 301.
Probl. *Achar a ſomma dos termos de huma progreſsão geometrica deſcendente infinitamente*, pag. 317.
Reſolução das equações do ſegundo gráo, pag. 319.
Calculo das radicaes, e operações, que lhes são particulares: modo de as reduzir, ſommar, diminuir, multiplicar, e dividir, pag. 341.
Reduzir as quantidades irracionaes, e incommenſuraveis á ſua mais ſimples expreſsão, pag. 342.

Som-